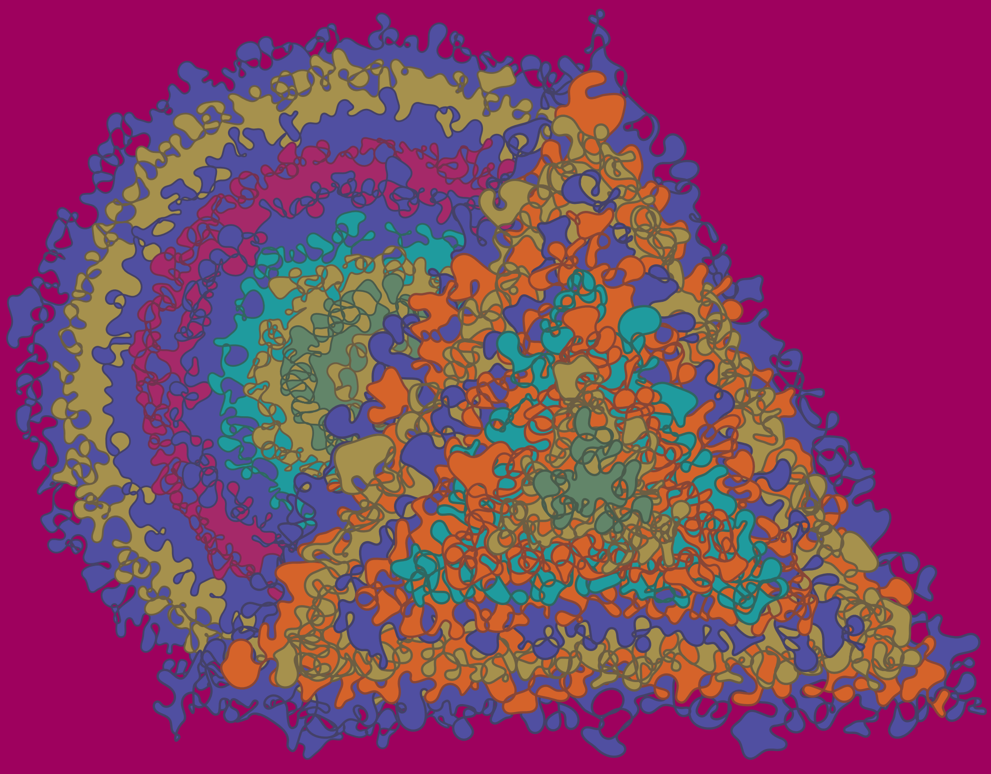
Wiskunde

3 VWO

Katern 2 / Werkboek / Opgaven

ConTeXt College



Inhoud

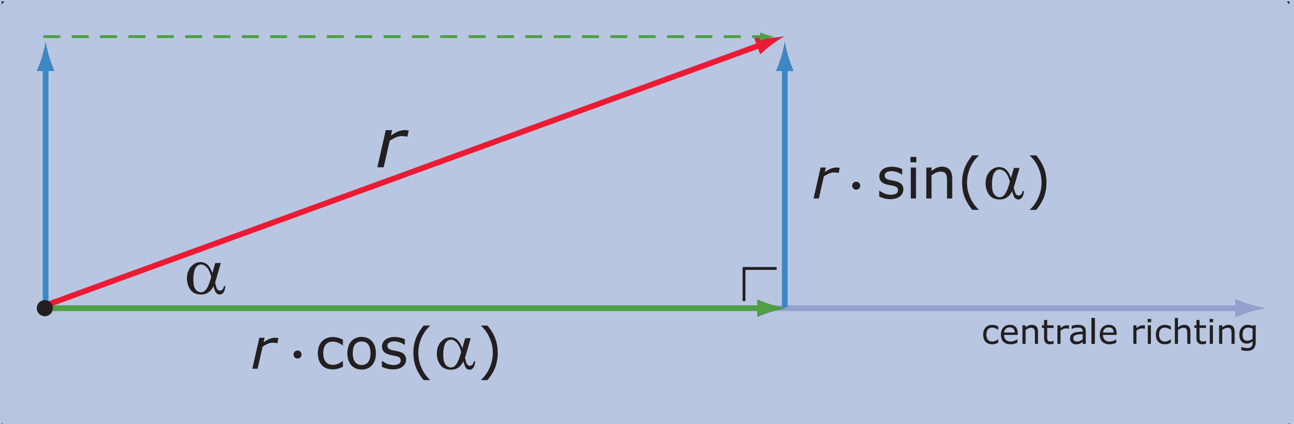
Begrippen

- vector — richtingshoek, draaihoek — componenten van een vector;
- sinus — cosinus — eenheidsvector — richtingshoek;
- hoeken berekenen met sinus en cosinus;
- tangens — hellingshoek;
- goniometrische verhoudingen — formules voor sinus, cosinus en tangens.

Activiteiten

- een vector ontbinden in een zijwaartse en een centrale component;
- sinus en cosinus gebruiken om componenten van vectoren te berekenen;
- hoeken berekenen met behulp van sinus en cosinus;
- berekeningen met helling, tangens en hellingshoeken uitvoeren;
- zijden en hoeken berekenen in rechthoekige driehoeken en dit toepassen meetkundige situaties.

Vectoren ontleden



Domein

Meetkunde

Hoofdstuk

Goniometrie

Inhoud

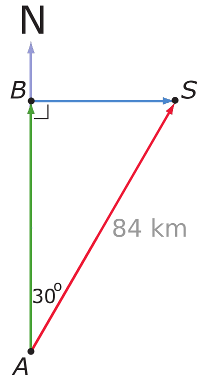
1

1.1 Vectoren

Verkennen

Opgave V1

Een schip vaart op een koers van $30°$ met het noorden en heeft een snelheid van 42 km/uur en is gestart in punt A. Na 2 uur is het aangekomen in punt S. Zie de figuur hiernaast.



Hoeveel kilometer noordelijker en oostelijker van punt A is het schip na twee uur? Kun je dit met een berekening oplossen?

Opgave V2

Een vliegtuig stijgt op onder een hoek van $20°$.

Hoe hoog vliegt dit vliegtuig als het 1000 meter heeft afgelegd?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg 1**.

Door het maken van nette tekeningen op schaal kun je in de volgende gevallen de twee componenten van vector $\overrightarrow{AS}$ vinden. Bepaal ze in gehele km nauwkeurig.

a Het schip heeft $1{,}5$ uur gevaren met een koershoek van $45°$.

b Het schip heeft $1{,}5$ uur gevaren met een koershoek van $90°$.

c Het schip heeft $1{,}5$ uur gevaren met een koershoek van $110°$.

d Het schip heeft $1{,}5$ uur gevaren met een koershoek van $150°$.

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1**. Je kunt ook koershoeken maken die groter zijn dan $180°$. Neem bijvoorbeeld een koershoek van $190°$ en een vaartijd van $1{,}5$ uur.

a Bepaal de componenten van de vector $\overrightarrow{AS}$.

b Bij welke hoeken zijn de componenten in zuidelijke richting en in westelijke richting?

c Met welke componenten heb je te maken bij een koershoek van meer dan $270°$, maar minder dan $360°$?

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** de fietser die met de wind rekening moet houden.

a Waarom zijn voor de fietser vooral de meewindcomponent of de tegenwindcomponent van de windvector van belang? Welk effect heeft de zijwindcomponent?

b Hoeveel bedraagt de meewindcomponent bij een windkracht van 20 km/h die een hoek van 30° met de fietsrichting maakt?

c Hoeveel bedraagt de meewindcomponent bij een windkracht van 20 km/h die een hoek van 80° met de fietsrichting maakt?

d Hoeveel bedraagt de meewindcomponent bij een windkracht van 20 km/h die een hoek van 110° met de fietsrichting maakt?

e Bij welke hoeken is de meewindcomponent een negatief getal (omdat er eigenlijk sprake is van tegenwind)?

f Kan de zijwindcomponent ook negatief zijn? Welke hoeken horen daar dan bij?

Opgave 4

Bekijk **Uitleg 2**. De windvector kan wel groter of kleiner zijn dan 20 km/h.

a Hoeveel bedraagt de meewindcomponent bij een windkracht van 20 km/h die een hoek van $30°$ met de fietsrichting maakt? En hoe bereken je daarmee de meewindcomponent bij dezelfde hoek, maar met een windkracht van 50 km/h?

b Hoeveel bedraagt de meewindcomponent bij een windkracht van 50 km/h die een hoek van $110°$ met de fietsrichting maakt?

c Hoeveel bedragen de meewindcomponent en de zijwindcomponent bij een windkracht van 150 km/h die een hoek van $195°$ met de fietsrichting maakt?

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet waarmee je de componenten van een eenheids-vector bepaalt.

a Teken de situatie van het opstijgen van het vliegtuig op schaal. Geef de centrale component en de zijwaartse component van de vlucht duidelijk in je figuur aan.

b Ga door meten in je figuur na, dat de hoogte van het vliegtuig inderdaad ongeveer 342 m is. (Teken daarvoor de vluchtvector op schaal!)

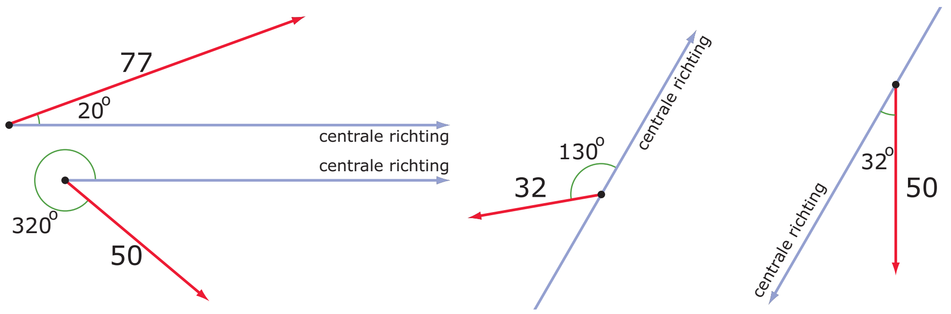
c Hoe hoog vliegt het toestel na 2000 m?

d Hoe ver is het vliegtuig na 2000 m hemelsbreed van het startpunt van de vlucht verwijderd?

Opgave 6

Werk met de applet waarmee je de componenten van een eenheidsvector bepaalt in **Voorbeeld 1**.

Hieronder en op het **werkblad** zie je vier vectoren getekend.

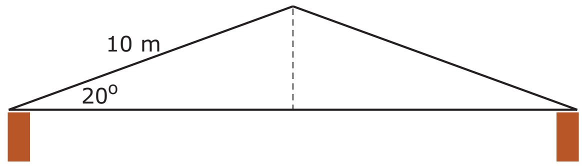


Teken de twee componenten waarin je de vectoren kunt ontbinden en bereken ze met behulp van de applet.

Opgave 7

Werk met de applet waarmee je de componenten van een eenheidsvector bepaalt in **Voorbeeld 1**.

Hier zie je het vooraanzicht van het symmetrische dak van een loods.



Hoe breed is deze loods?

Opgave 8

Een ladder van 5 m lengte staat tegen een verticale muur. De hoek tussen de ladder en de muur is $25°$.

Hoe ver staat de voet van de ladder van de muur af?

Opgave 9

Bekijk **Voorbeeld 2** en werk met de applet waarmee je de componenten van een eenheidsvector bepaalt.

a Teken de situatie van het dalen van het vliegtuig op schaal.

b Ga door meten in je figuur na, dat het vliegtuig inderdaad ongeveer 1096 m lager vliegt.

c Hoe hoog vliegt het toestel na 6000 m dalen?

Opgave 10

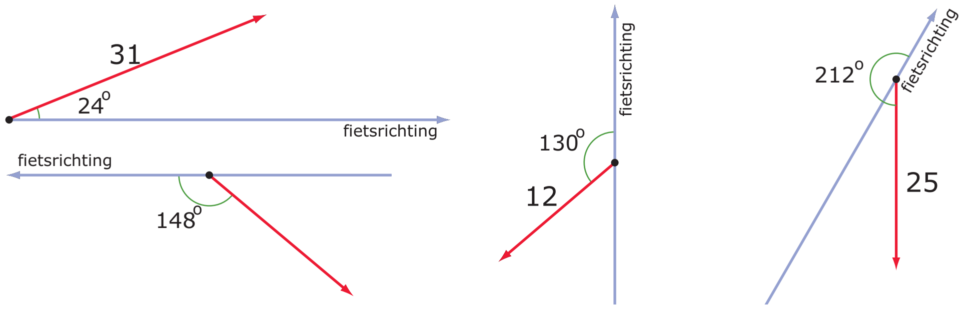
Tijdens een lange rit langs een kaarsrechte polderweg heb je de wind schuin tegen. De windvector maakt een hoek van $160°$ met je fietsrichting en de wind blaast met een snelheid van 35 km/h.

Hoeveel bedraagt de tegenwindcomponent die je voelt?

Verwerken

Opgave 11

Hieronder en op het **werkblad** zie je vier windvectoren en de fietsrichting getekend.



Teken de twee componenten waarin je deze vectoren kunt ontbinden en bepaal ze door meten in je figuur.

Opgave 12

Een roltrap in een warenhuis is 8 m lang. Hij maakt een hoek van $30°$ met de vloer.

Hoe groot is de afstand tussen de twee verdiepingen?

Opgave 13

Een weg loopt omlaag onder een hoek van $10°$ met een horizontaal vlak. De lengte van de weg is 300 meter.

Hoeveel daal je als je over deze weg naar beneden loopt?

Opgave 14

Een wipwap van 3 m lengte staat schuin omhoog onder een hoek van $22°$ met de begane grond. Het laagste punt van de wipwap bevindt zich 50 cm boven de grond.

Hoever zit het hoogste punt boven de grond?

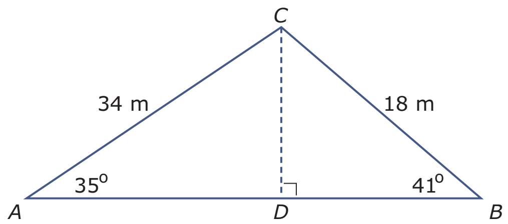
Opgave 15

De touwen van een schommel zijn 4 m lang. Het zitje zit 60 cm boven de grond als de touwen verticaal hangen.

Hoever is dat zitje boven de grond als de touwen een hoek van $50°$ met die verticale stand maken?

Opgave 16

Bekijk de driehoek hieronder.



Bereken de lengte van AB in dm nauwkeurig.

Toepassen

Hieronder vind je twee toepassingen van het werken met richtingen, dus hoeken, en lengtes. Gebruik de applet uit het **Practicum** om de componenten van een eenheidsvector bij een gegeven hoek te bepalen.

Opgave 17: Vissersboot 'Mazen'

De vissersboot 'Mazen' vaart evenwijdig aan de kust met een snelheid van 10 knopen (1 knoop $= 1852$ meter per uur). Op een bepaald moment varen ze ten hoogte van de vuurtoren **Van Speijk** in Egmond aan Zee die ze dan onder een hoek van $90°$ met hun vaarrichting zien. Na 10 minuten varen zien ze deze vuurtoren onder een hoek van $96°$. De vuurtoren staat aan de kustlijn.

Hoe ver vaart vissersboot 'Mazen' uit de kust?

Opgave 18: Tunnel tussen Amsterdam en Londen

Ga er van uit dat de aarde een zuivere bol is met een straal van 6371 kilometer. Als je een rechte tunnel zou graven van Amsterdam naar Londen, dan zou deze zich halverwege het verst onder het aardoppervlak bevinden.

Als de afstand van beginpunt tot eindpunt over de grote cirkel op het aardoppervlak 420 kilometer is, wat is dan het diepste punt van de tunnel?

Practicum

Applet

De componenten van een eenheidsvector bepalen: stel de juiste hoek in en let zelf op de mintekens voor de componenten!

1.2 Sinus en cosinus

Verkennen

Opgave V1

Een vliegtuig stijgt op onder een hoek van $21°$ met de begane grond.

a Hoe hoog vliegt dit vliegtuig als het 3000 meter heeft afgelegd? (Gebruik de applet in het **Practicum**.)

De hoek die de vliegrichting met de begane grond maakt, is afgerond op gehele graden. Stel je voor dat die hoek in één decimaal nauwkeurig kan worden ingesteld. De hoek van $21°$ kan dan variëren vanaf $20{,}5°$ tot en met $21{,}4°$.

b Hoeveel verschil in hoogte zit er dan na een vlucht van 3000 m met deze hoeken?

c Is dit hoogteverschil belangrijk, denk je?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

Een vliegtuig stijgt op onder een hoek van $21°$ met de begane grond.
De vraag: “Hoe hoog vliegt dit vliegtuig als het 3000 meter heeft afgelegd?” kun je beantwoorden met behulp van de sinus of cosinus van de gegeven hoek.

a Gebruik je de sinus of de cosinus van de gegeven hoek? Waarom?

b Bereken hoe hoog dit vliegtuig na 3000 m vliegt in dm nauwkeurig.

Opgave 2

Een schip heeft 15 km gevaren met een koershoek van $63°$ ten opzichte van het noorden.
Een koershoek wordt met de wijzers van de klok mee uitgezet.

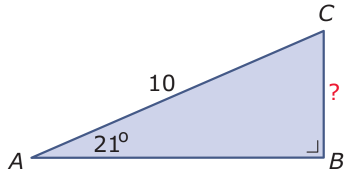
a Hoeveel km noordelijker en hoeveel km oostelijker is het schip dan gekomen?

Het schip vaart vervolgens 20 km met een koershoek van $150°$.

b Hoeveel kilometer noordelijker en hoeveel kilometer oostelijker komt het schip gedurende die vaart?

Opgave 3

Je ziet hier een rechthoekige driehoek ABC waarvan de hypotenusa $AC = 10$ cm. Je wilt de lengte van BC berekenen.



a Vat AC op als vector $\overrightarrow{AC}$. Waarom ligt het dan voor de hand dat AB de centrale richting is?

b Is BC de centrale component of de zijwaartse component van vector $\overrightarrow{AC}$?

c Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

d Maak de lengte van AC $1{,}5$ keer zo groot. Bereken weer de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig. Wordt die lengte ook $1{,}5$ keer zo groot?

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet waarmee je de componenten van een vector $\overrightarrow{AC}$ kunt bekijken.

Deze vector heeft een grootte van 14 eenheden.

a Reken zelf de waarden voor de componenten na. Waarom wordt component $\overrightarrow{AB}$ met behulp van cosinus berekend bij deze gegeven hoek?

b Stel in $\alpha = 100°$. Bereken opnieuw de componenten van vector $\overrightarrow{AC}$ in één decimaal nauwkeurig.

c Waarom is de centrale component bij b negatief?

d Bij welke hoeken zijn beide componenten negatief?

Opgave 5

Kies een centrale richting en teken een vector $\vec{v}$ die een hoek van $134°$ met die centrale richting maakt. Maak de vector 10 cm lang.

a Teken de centrale en de zijwaartse component van deze vector. Welke component is negatief?

b Bereken de centrale en de zijwaartse component in drie decimalen nauwkeurig.

c Als de lengte van de gegeven vector 2 keer zo groot wordt, geldt dit dan ook voor beide componenten? En waarom?

Opgave 6

Bekijk de berekeningen in **Voorbeeld 2**.

a Reken zelf de waarden voor de componenten na. Waarom wordt AB met behulp van cosinus berekend bij deze gegeven hoek?

Je kunt ook werken met CB als centrale richting, met vector $\overrightarrow{CA}$ en met $\angle C$.

b Bereken eerst $\angle C$. Bereken opnieuw de twee rechthoekszijden in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 7

Gegeven is een rechthoekige ΔKLM met $\angle K = 32°$ en hypotenusa $KM = 21$ cm.

Bereken de lengtes van de twee rechthoekszijden in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 8

Je staat aan de voet van een berghelling die 340 m onder een hoek van $60°$ steil omhoog loopt.

Hoe groot is het hoogteverschil tussen de top van de berghelling en de voet ervan?

Opgave 9

Bekijk de berekening in **Voorbeeld 3**.

a Reken de lengte van de hypothenus zelf na. Waarom wordt er met sinus gewerkt?

Je kunt ook werken met CB als centrale richting, met vector $\overrightarrow{CA}$ en met $\angle C$.

b Bereken eerst $\angle C$. Bereken opnieuw de hypotenusa in één decimaal nauwkeurig.

c Bereken de lengte van AB in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 10

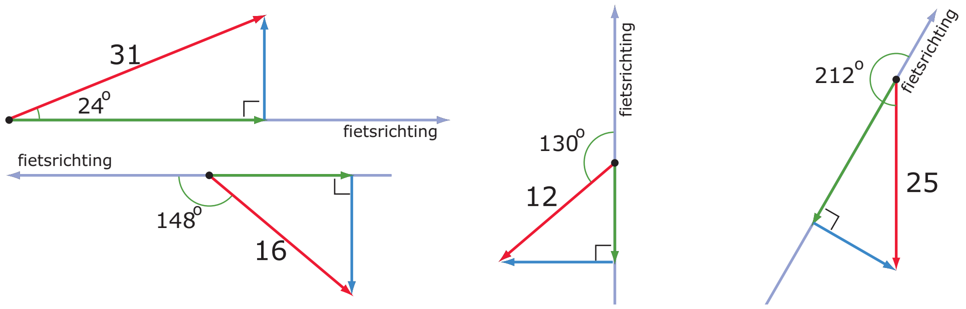
Gegeven is een rechthoekige ΔKLM met $\angle K = 32°$ en rechthoekszijde $KL = 21$ cm.

Bereken de lengtes van de twee andere zijden in één decimaal nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 11

Hieronder zie je vier windvectoren en de fietsrichting getekend. De componenten waarin je deze vectoren kunt ontbinden zijn ook getekend.



Bereken deze componenten met behulp van sinus en cosinus in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 12

Gegeven is een rechthoekige ΔPQR met $\angle Q = 31°$ en hypotenusa $QR = 12$ cm.

Bereken de lengtes van de twee andere zijden in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 13

Gegeven is een rechthoekige ΔPQR met $\angle R = 55°$ en rechthoekszijde $QR = 8$ cm.

a Bereken de lengte van de hypothenusa in één decimaal nauwkeurig.

b Bereken de lengte van de andere rechthoekszijde in één decimaal nauwkeurig met behulp van de stelling van Pythagoras.

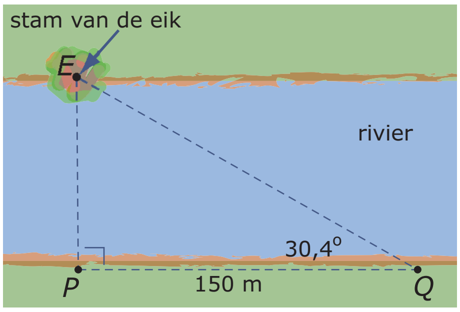
c Bereken de zijde bedoeld bij b nogmaals, maar nu met behulp van sinus of cosinus.

Opgave 14

Een trein rijdt 200 m langs een berghelling omhoog. De hoek van de spoorbaan met een horizontaal vlak is hierbij $17°$.

Bereken hoeveel de trein is gestegen gedurende deze rit.

Opgave 15



Om de breedte van een rivier te bepalen gebruikt Boris een grote eikenboom die op de tegenover hem liggende oever staat. Hij markeert een punt P recht tegenover de eik aan zijn kant van de oever en past dan 150 m langs de oever af tot punt Q. Dan meet hij zo nauwkeurig mogelijk $\angle PQE$. (Daarvoor bestaan speciale hoekmeters.) Hij vindt ongeveer $30{,}4°$.

Bereken de breedte van de rivier in m nauwkeurig.

Toepassen

Stel je voor dat er een proefvlucht plaatsvindt van onbemand vliegtuigje. Het stijgt op van een vliegbasis en vliegt 5 km lang onder een hoek van $40°$ ten opzichte van het Noorden. Op dat moment volgt een koerscorrectie en vliegt het vliegtuigje onder een hoek van $120°$ ten opzichte van het noorden. Na 3 km stort het vliegtuigje echter neer. Met een helicopter die vanaf dezelfde vliegbasis start, wordt het weer opgehaald.
Hoeveel km ten noorden en ten oosten van de vliegbasis is het onbemande vliegtuigje neergestort? Hoeveel km is de vlucht die de reddingshelikopter heeft afgelegd?

Opgave 16: Onbemand vliegtuigje

Bekijk de situatie die in **Toepassen** wordt beschreven.

a Maak een bijpassende tekening. Denk er om dat koershoeken altijd met de klok mee en ten opzichte van het Noorden worden gemeten.

b Bereken de positie van onbemande vliegtuigje na het neerstorten.

c Hoeveel km moet deze reddingshelikopter afleggen?

Practicum

Applet

De componenten van een eenheidsvector bepalen: stel de juiste hoek in en let op het gebruik van mintekens!

1.3 Hoeken berekenen

Verkennen

Opgave V1

Een vliegtuig stijgt in een rechte lijn op van de begane grond. Als het 3000 meter heeft afgelegd, heeft het een hoogte bereikt van 1000 m boven de begane grond.

Onder welke hoek met de begane grond is het vliegtuig opgestegen?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** het verhaal van het opstijgende vliegtuig.

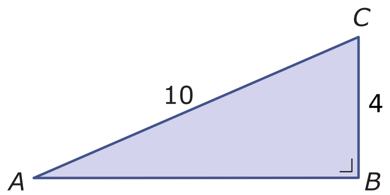
a Waarom wordt bij het berekenen van de hoek sinus gebruikt?

b Bereken de hoek door eerst met de stelling van Pythagoras de centrale component uit te rekenen en dan met cosinus te werken.

Opgave 2

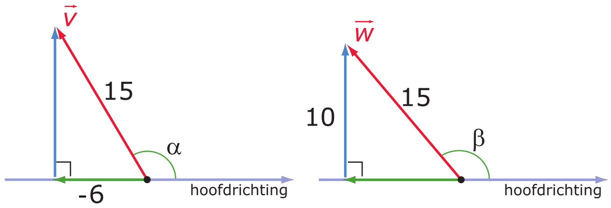
Je ziet hier ΔABC.

Bereken de grootte van $\angle A$. Doe dit een keer met behulp van sinus en een keer met behulp van cosinus.



Opgave 3

Je ziet hier twee vectoren waarvan de lengte van de centrale component of de zijwaartse component zijn gegeven.



a Waarom geldt voor hoek α dat $15 \cdot \cos(\alpha)$ = -6? Bereken hieruit de grootte van deze hoek in graden nauwkeurig.

b Om hoek β te berekenen werk je met de zijwaartse component van vector $\overrightarrow{w}$. Laat zien hoe je te werk gaat.

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je de grootte van een scherpe hoek van een rechthoekige driehoek kunt berekenen.

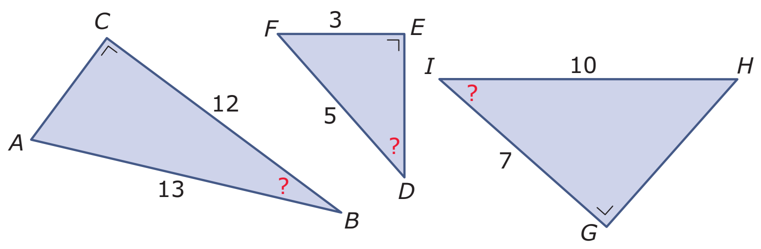
a Voer ook zelf de berekening van deze hoek uit. Gebruik je rekenmachine of de applet in het **Practicum**.

b Bereken eerst met de stelling van Pythagoras de lengte van zijde BC. Bereken daarna opnieuw de grootte van hoek C, maar nu met behulp van cosinus.

c Waarom hoef je nu de grootte van $\angle A$ niet meer met goniometrie te berekenen?

Opgave 5

Bereken in deze driehoeken de grootte van de hoeken met het vraagteken in graden nauwkeurig.



Opgave 6

Bereken in deze driehoek de grootte van $\angle BAD$.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je de hoek kunt berekenen die een gespannen draad maakt met de grond.

a Voer ook zelf de berekening van deze hoek uit. Gebruik je rekenmachine of de applet in het **Practicum**.

b Je kunt ook de antennemast als hoofdrichting nemen. Dan bereken je eerst de hoek β die de draad met de antenne maakt. Ga na dat dit een waarde voor β oplevert die in overeenstemming is met de waarde van α die je eerder hebt gevonden.

c Waarom is voor het berekenen van de hoogte van de antennemast niet de waarde van α in graden nauwkeurig genomen, maar een nauwkeuriger waarde?

d Bereken de hoogte van de antennemast ook met behulp van de stelling van Pythagoras.

Opgave 8

Er wordt een nieuwe antennemast opgericht met een hoogte van 10 m. Deze antennemast wordt loodrecht gehouden door draden vanaf de top te spannen naar punten op de grond. Deze draden moeten een hoek van $50°$ met de begane grond maken.

Hoe lang worden deze draden? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Opgave 9

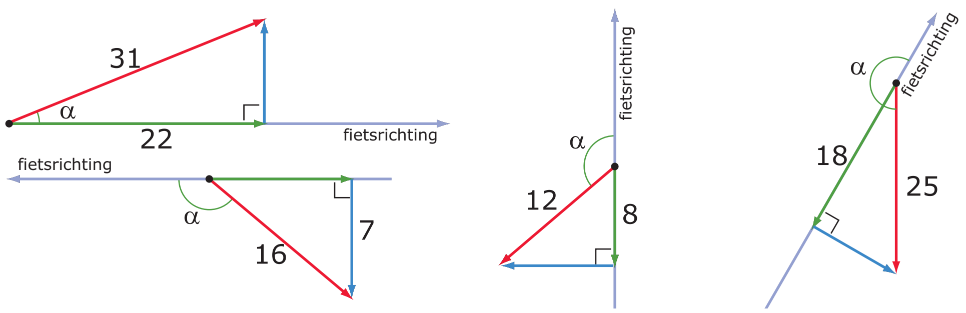
Een vliegtuig ondervindt een windsnelheid van 60 km/uur schuin tegen. De snelheid van het vliegtuig neemt daardoor met 15 km/uur af.

Welke hoek maakt de windrichting met de vliegrichting?

Verwerken

Opgave 10

Hieronder zie je vier windvectoren en de fietsrichting getekend. De componenten waarin je deze vectoren kunt ontbinden zijn ook getekend. Van zowel de vectoren als sommige componenten is de lengte gegeven.



Bereken de hoek die de windvector met de fietsrichting maakt in graden nauwkeurig.

Opgave 11

Een trein rijdt 200 m langs een berghelling omhoog. Hij is dan 68 m gestegen.

Hoe groot is de hoek die het spoor met de horizontale richting maakt? Geef het antwoord in graden nauwkeurig.

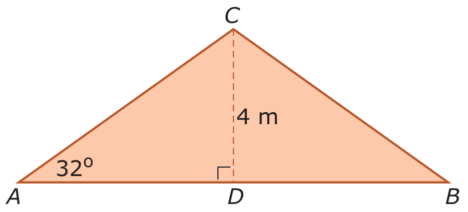
Opgave 12

Iemand bevindt zich in een oude mijngang 40 m lager dan de ingang. Hij loopt terug naar die ingang. De eerste 400 meter loopt hij schuin omhoog onder een hoek van $5°$. Het is dan nog 200 meter terug naar de ingang.

Onder welke hoek loopt hij het laatste deel van de terugtocht schuin omhoog? Geef het antwoord in graden in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 13

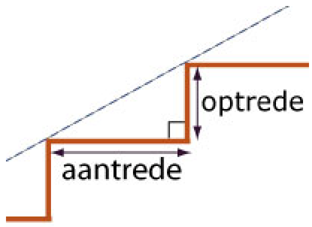
ΔABC is het vooraanzicht van de bovenkant van een symmetrische gevel. De zijden AC en BC vormen de breedtes van de rechthoekige dakdelen.



Bereken de breedte van een dakdeel in cm nauwkeurig.

Opgave 14

Van een zogenaamde ‘luie trap’ is de optrede 15 cm en de aantrede 30 cm. Zie figuur. Tussen twee verdiepingen van een warenhuis zit een luie trap met 26 treden. De hoekpunten bij de rechte hoeken die aantrede en optrede met elkaar maken liggen op een rechte lijn die een hoek maakt met de vloeren van de verdiepingen.



Bereken die hoek in tienden van graden nauwkeurig.

Opgave 15

Van een gelijkbenige driehoek zijn de zijden 12, 12 en 10 cm.

Bereken de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.

Toepassen

Je ziet hier de twee **tekendriehoeken** die je vroeger in veel wiskundelokalen aantrof.
De éne tekendriehoek heeft dezelfde vorm als je geodriehoek, dus hoeken van $45°$, $45°$ en $90°$.
De andere geodriehoek is de rechthoekige driehoek die de helft is van een gelijkzijdige driehoek. Deze heeft dus hoeken van $60°$, $30°$ en $90°$.

Opgave 16: Hoeken van 45 graden

Bekijk de twee tekendriehoeken die in **Toepassen** worden beschreven.

a Laat zien dat elke geodriehoek zijden van a, a en $a\sqrt{2}$ heeft.

b Bereken de exacte waarde van $\sin(45)$ en van $\cos(45)$.

Opgave 17: Hoeken van 30 graden en 60 graden

Bekijk de twee tekendriehoeken die in **Toepassen** worden beschreven.

a Laat zien dat de tekendriehoek die de helft van een gelijkzijdige driehoek is, zijden van a, $2a$ en $a\sqrt{3}$ heeft.

b Bereken de exacte waarde van $\sin(60)$ en van $\cos(60)$.

c Bereken de exacte waarde van $\sin(30)$ en van $\cos(30)$.

Practicum

Applet

De hoek bepalen als sinus of cosinus zijn gegeven: zoek de juiste hoek bij de gegeven sinus en/of cosinus ervan.

1.4 Helling en tangens

Verkennen

Opgave V1

Jan en Pim zijn het oneens over de hoogte van een nieuw flatgebouw in Nijmegen. Volgens Jan is de flat hoger dan de Dom van Utrecht, maar Pim denkt van niet. Volgens hem is het gebouw lager dan de 111 m van de Dom in Utrecht. Ze besluiten de hoogte van de flat te berekenen.

Hoe kunnen ze dat doen?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de berekening van de hoogte van het flatgebouw.

a Je kunt de berekening uitvoeren door alleen met cosinus en sinus (of de stelling van Pythagoras) te werken. Laat zien, hoe dat gaat.

b Voer zelf de berekening van de hoogte met behulp van de tangens van de hellingshoek uit.

c Wat gebeurt er met de hellingshoek als de zijwaartse component groter wordt en de centrale component niet?

d Wat betekent het als een helling 10% is?

Opgave 2

Een landmeter staat 50 m van een cilindervormige koeltoren af en meet de hellingshoek naar de top. Hij vindt $31°$. Zijn hoekmeter staat op een statief en zit $1{,}50$ m boven de grond.

Bereken de hoogte van deze koeltoren.

Opgave 3

Een weerballon wordt geobserveerd vanuit een punt dat 800 m verwijderd is van de plaats waar hij wordt losgelaten. De ballon stijgt loodrecht op en in 1 minuut wordt de hellingshoek naar die ballon van $38°$ groter tot $45°$.

Hoeveel is de ballon in die minuut gestegen?

Opgave 4

Van een rechthoek met een lengte van 12 cm maakt de diagonaal een hoek van $41°$ met de langste zijde.

Bereken de omtrek van deze rechthoek in mm nauwkeurig.

Opgave 5

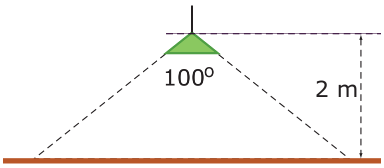
Een boom die 10 m van een huis staat wordt omgehakt. De hellingshoek naar de top van die boom, gemeten vanuit het kelderraam op de begane grond is $44°$.

Is het veilig om de boom in de richting van het huis te laten vallen?

Opgave 6

Een lamp hangt 2 m boven de grond en geeft een kegelvormige lichtbundel met een tophoek van $100°$.

Bereken de straal van het verlichte gebied.



Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** de berekening van de afstand van het statief van de landmeter tot een schoorsteen.

a Leg uit waarom $\tan(20) = \frac{38{,}20}{a}$.

b Waarom volgt uit $\tan(20) = \frac{38{,}20}{a}$ dat $a = 38{,}20/\tan(20) \approx 104{,}95$?
Voer zelf de berekening van de afstand uit.

Opgave 8

Hoe lang is de schaduw van een 10 m hoge vlaggenmast als de hoek die de zonnestralen met de grond maken $47°$ bedraagt?

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3** de berekening van het hellingspercentage en de hellingshoek van een oprit.

a Laat zien dat $AB = \sqrt{168} \approx 12{,}96$.

b Hoe wordt het hellingspercentage berekend?

c Bereken zelf de hellingshoek.

Opgave 10

Dit verkeersbord geeft aan dat de weg waarbij het staat een hellingspercentage van (gemiddeld) 10% heeft.

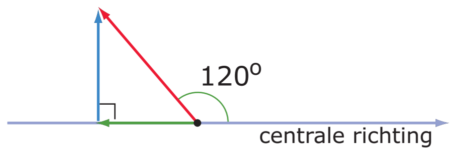
a Welke hellingshoek hoort er bij zo'n hellingspercentage?

b Als je 3 km op deze weg hebt gereden, hoeveel m ben je dan (gemiddeld) gestegen?

c Als je 100 m bent gestegen op deze weg, hoeveel m heb je dan hemelsbreed ongeveer afgelegd?

Opgave 11

Hier zie je een vector met een 'hellingshoek' van $120°$.



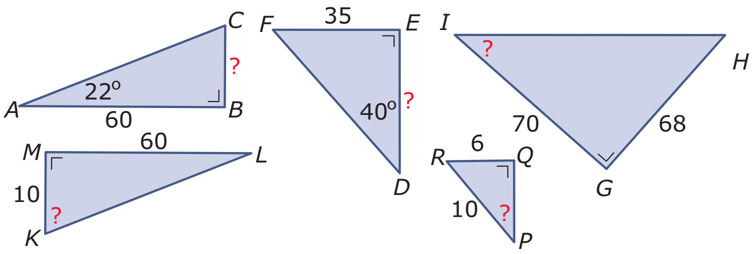
a Waarom is $\tan(120)$ een negatief getal?

b Als de zijwaartse component van deze vector 5 is, hoeveel bedraagt dan de centrale component?

Verwerken

Opgave 12

Je ziet hier vijf rechthoekige driehoeken.



Bereken telkens de zijde of de hoek waar een vraagteken bij staat. Geef de zijden in één decimaal en de hoeken in graden nauwkeurig.

Opgave 13

Een lange ladder staat tegen een muur. De voet van de ladder is $1{,}50$ m van de muur en hij maakt een hoek van $72°$ met de begane grond.

Hoe hoog ligt het punt waar de ladder de muur raakt boven de grond? Hoe lang is de ladder?

Opgave 14

Een vuurtorenwachter zit boven in zijn vuurtoren 40 m boven de zeespiegel. Hij ziet twee schepen die zich met de vuurtoren precies in één vlak bevinden. De man ziet deze boten onder hellingshoeken van $22°$ en $16°$.

Bereken de afstand tussen beide schepen.

Opgave 15

Tegen een berghelling met een hellingspercentage van 123% zit een steile trap.

a Bereken de hellingshoek van deze berghelling.

b Hoe lang is deze trap als het hoogste punt 80 m boven het laagste punt zit?

Opgave 16

Op het hoekpunt A van een vierkant plein $ABCD$ staat een toren die 60 m hoog is. De zijde van het plein is 150 m lang. De top van de toren is T.

a Bereken de hoek die lijn TB maakt met de zijde AB.

b Bereken de hoek die lijn TC maakt met de diagonaal AC.

Opgave 17

Van een vierzijdige piramide is het grondvlak rechthoek $ABCD$ is met $AB = 8$ cm en $BC = 6$ cm. De top T van deze piramide ligt recht boven het snijpunt S van de diagonalen van het grondvlak. $TS = 12$ cm.

a Bereken $\angle SAT$.

b Bereken $\angle BAT$.

Toepassen

Applet

Ook rechte lijnen hebben een helling. Bij een hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) kun je een **hellingshoek van een rechte lijn** berekenen. Zo'n hellingshoek heeft alleen betekenis als op beide assen de schaalverdeling hetzelfde is.

In de applet kun je zien dat de tangens van de richtingshoek α gelijk is aan het hellingsgetal van de lijn.

Hellingsgetallen kunnen ook negatief zijn. Hoe zit het dan met hellingshoeken?
De afspraak is dat bij positieve hellingsgetallen positieve hellingshoeken horen. Je draait dan de lijn om het snijpunt met de y-as van de positieve x-richting naar de positieve y-richting, in de positieve richting. Bij negatieve hellingsgetallen horen negatieve hellingshoeken, want nu draai je de lijn van de positieve x-richting naar de negatieve y-richting, in de negatieve richting.

Opgave 18: Hellingshoeken van lijnen

Bekijk de applet in **Toepassen**. Daarin zie je van een lijn zowel het hellingsgetal a als de hellingshoek α.

a Ga voor een aantal waarden van a na, dat $\tan(\alpha) = a$.

b Leg uit waarom $\tan(\alpha) = a$.

c Bereken de hellingshoek van de lijn $y = 2x + 1$.

d Bereken de hellingshoek van de lijn $y = \text{-}0{,}25x + 3$.

Opgave 19: De hoek tussen twee lijnen

Gegeven zijn de twee lijnen l: $y = 3x + 2$ en m: $y = 0{,}5x + 2$.

a Teken deze lijnen in een assenstelsel met op beide assen dezelfde schaalverdeling. Meet vervolgens de hoek tussen beide lijnen.

b Bereken de hellingshoek van zowel l als m.

c Hoe bereken je de hoek tussen beide lijnen vanuit hun beider hellingshoeken? Bereken de hoek tussen l en m.

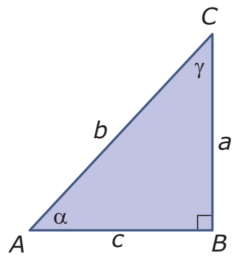
d Bereken de hoek tussen de lijnen l en k: $y = \text{-}0{,}5x + 3$.

1.5 Rekenen in driehoeken

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je een rechthoekige driehoek. De scherpe hoeken worden weergegeven door de griekse letters α en γ, de zijden zijn gegeven door kleine letters.



a Leg uit waarom $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$, $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$ en $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$.

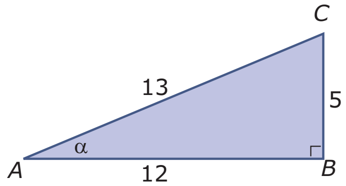
b Schrijf vergelijkbare uitdrukkingen op voor $\sin(\gamma)$, $\cos(\gamma)$ en $\tan(\gamma)$.

c De rechte hoek kun je β noemen. Kun je ook de sinus, de cosinus en de tangens van deze hoek opschrijven?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de drie goniometrische verhoudingen in een rechthoekige driehoek. Gebruik de ΔABC hiernaast.



a Welke zijde is van hoek α de aanliggende rechthoekszijde? En welke zijde de overstaande rechthoekszijde?

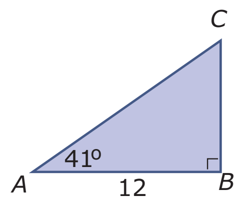
b Schrijf voor hoek α alle drie de goniometrische verhoudingen in getallen op.

c Bereken vanuit elk van deze drie goniometrische verhoudingen de grootte van hoek α. Ga na, dat je drie keer dezelfde uitkomst krijgt.

d Stel dat je ook $\gamma = \angle C$ met behulp van een goniometrische verhouding wilt berekenen. Welke zijde is van deze hoek de aanliggende rechthoekszijde? Bereken de grootte van die hoek met behulp van cosinus.

Opgave 2

In deze driehoek wil je uitrekenen hoe lang BC is.



a Waarom ga je werken met de tangens van $\angle A$?

b Schrijf de berekening van de lengte van BC op.

c Je kunt de lengte van BC ook berekenen door gebruik te maken van de tangens van $\angle C$. Laat zien hoe dat gaat.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je goniometrische verhoudingen in een rechthoekige driehoek toepast. Je hebt - vanwege de gegevens - met sinus gewerkt.

a Je kunt ook wel snel zien hoe groot $\angle A$ is. Bereken nu met behulp van deze hoek de lengte van AC.

b In het voorbeeld is de lengte van de schuine zijde uitgerekend met behulp van goniometrie. Waarom was dat in dit geval niet nodig?

c Je kunt zijde AB nu uitrekenen met behulp van goniometrie, de stelling van Pythagoras, of door gebruik te maken van de eigenschappen van deze bijzondere driehoek. Laat zien dat je telkens dezelfde waarde vindt.

Opgave 4

Van de rechthoekige driehoek KLM is $\angle K = 90°$, $\angle K = 40°$ en $KM = 7{,}1$ cm.

Bereken de lengte van KL in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 5

Van de rechthoekige driehoek PQR is $\angle R = 90°$, $PR = 5$ cm en $PQ = 8$ cm.

Bereken de grootte van $\angle P$ in graden nauwkeurig.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je goniometrische verhoudingen in een niet-rechthoekige driehoek kunt gebruiken.

a Waarom ligt het tekenen van hoogtelijn CD voor de hand?

b Bereken de lengtes van AD en CD. Waarom bereken je die in twee decimalen nauwkeurig?

c Reken ook de lengte van DB na.

d Bereken de omtrek en de oppervlakte van ΔABC.

Opgave 7

Van driehoek KLM is $\angle K = 34°$, $KM = 16$ cm en $LM = 10$ cm.

Bereken de omtrek in één decimaal en de grootte van $\angle L$ in graden nauwkeurig.

Opgave 8

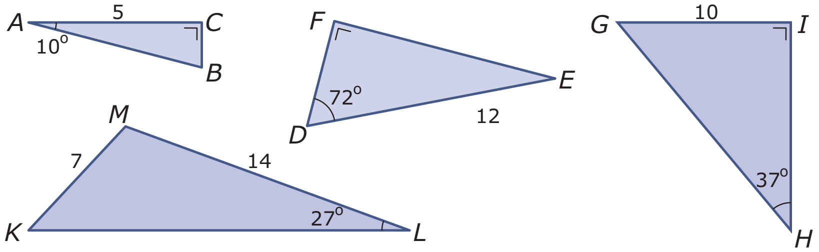
Van een driehoek ABC is $\angle A = 23°$, $\angle C = 46°$ en is $CD = 5$ cm de lengte van de hoogtelijn op zijde AB.

Bereken de oppervlakte van driehoek ABC in één decimaal nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 9

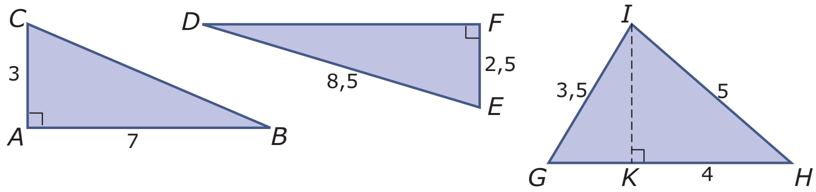
Je ziet hier vier driehoeken.



Bereken alle onbekende zijden in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 10

Je ziet hier drie driehoeken.



Bereken alle onbekende hoeken in graden nauwkeurig.

Opgave 11

Een **tandradtrein** rijdt over een spoorweg met een extra rail in het midden waarin de uitsteeksels van het tandrad van de trein passen. Zo'n trein wordt gebruikt voor steile berghellingen. Een tandradtrein rijdt bijvoorbeeld 1400 m langs een steile helling omhoog en het hoogteverschil is 525 m.

Bereken de hellingshoek van deze tandradbaan.

Opgave 12

De diagonaal van een rechthoek is 16 cm lang. De kleinste hoek tussen de diagonalen is $40°$.

Bereken de oppervlakte van deze rechthoek in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 13

De toren van Pisa staat al jaren scheef. De toren is 82 m lang, maar als je een steen neerlaat aan een touw vanaf het laagste punt van de scheve bovenrand, dan raakt de steen de grond als het touw 80 m lang is.

Hoe groot is dan de hoek die de scheve toren van Pisa met de begane grond maakt?

Opgave 14

Je ziet hier het SmartCover van een iPad. Dit SmartCover bedekt de iPad volledig, de afmetingen ervan zijn $18{,}5$ bij 24 cm. Hij bestaat (zoals je ziet) uit vier aaneengesloten banen van 24 cm lengte, die echter niet allemaal even breed zijn. De tweede baan van links is ongeveer $5{,}6$ cm breed en de andere drie zijn $4{,}3$ cm breed.

Als je het SmartCover oprolt zoals in de figuren hieronder is te zien, dan maakt het scherm een hoek met de tafel waar hij op ligt. Neem voor deze opgave aan dat de iPad en de SmartCover geen dikte hebben.

a Hoe groot is de hellingshoek van de iPad met de tafel?

b Je kunt de driehoekige steun nog verder scharnieren en zo de iPad in de kijkstand zetten. Een strook van $4{,}3$ cm breedte ligt nu op het tafelblad en de tablet leunt tegen een andere strook van $4{,}3$ cm. Welke hoek maakt de iPad nu met het tafelblad? En hoe hoog zit de bovenrand van de iPad nu boven het tafelblad?

Toepassen

Applet

Met deze applet maak je regelmatige veelhoeken. Ze passen in een cirkel met straal 1. Je kunt een regelmatige n-hoek opdelen in n gelijke en gelijkbenige driehoeken waarvan de tophoek het middelpunt van de cirkel is waar de andere hoekpunten op liggen.

Met behulp van goniometrie kun je van zo'n driehoek de oppervlakte berekenen. En daarmee bereken je ook de oppervlakte van de veelhoek. En zo kun je zelfs π benaderen...

Opgave 15: Regelmatige vijfhoek

Bekijk de applet in **Toepassen**. Als je $n = 5$ instelt zie je een regelmatige vijfhoek.

a In hoeveel gelijke en gelijkbenige driehoeken kun je deze figuur opdelen?

b Hoe groot zijn de hoeken van zo'n driehoek?

c Bereken de oppervlakte van zo'n driehoek.

d Hoe groot is de oppervlakte van de vijfhoek?

Opgave 16: Regelmatige zeshoek, achthoek, ...

Bekijk de applet in **Toepassen**. Als je $n = 6$ instelt zie je een regelmatige zeshoek.

a Bereken op dezelfde manier als in de voorgaande opgave de oppervlakte van de regelmatige zeshoek.

Neem nu $n = 8$.

b Bereken de oppervlakte van de regelmatige achthoek.

Neem nu $n = 10$.

c Bereken de oppervlakte van de regelmatige tienhoek.

Neem nu $n = 100$.

d Bereken de oppervlakte van de regelmatige honderdhoek.

e Als je n kan blijven vergroten, welk getal ga je dan steeds meer benaderen?

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je leren werken met vectoren en hun componenten. Maar vooral met sinus, cosinus en tangens. Met deze goniometrische verhoudingen kun je vanuit gegeven lengtes hoeken berekenen. Je werkt vooral in rechthoekige driehoeken, al moet je die vaak wel zelf nog verzinnen. Goniometrie is een heel krachtig hulpmiddel in de meetkunde en je zult dit in de bovenbouw vooral bij wiskunde B en D veel tegenkomen.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Goniometrie** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- vector — richtingshoek, draaihoek — componenten van een vector;
- sinus — cosinus — eenheidsvector — richtingshoek;
- hoeken berekenen met sinus en cosinus;
- tangens — hellingshoek;
- goniometrische verhoudingen — formules voor sinus, cosinus en tangens.

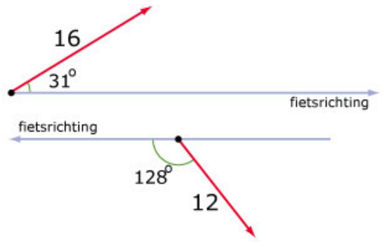
Activiteiten

- een vector ontbinden in een zijwaartse en een centrale component;
- sinus en cosinus gebruiken om componenten van vectoren te berekenen;
- hoeken berekenen met behulp van sinus en cosinus;
- berekeningen met helling, tangens en hellingshoeken uitvoeren;
- zijden en hoeken berekenen in rechthoekige driehoeken en dit toepassen meetkundige situaties.

Opgave 1

Hiernaast en op het **werkblad** zie je twee windvectoren (in m/s) en de fietsrichting getekend.

Ontbind deze windvectoren in een component in de fietsrichting en een component loodrecht op de fietsrichting. Bereken deze componenten in één decimaal nauwkeurig.



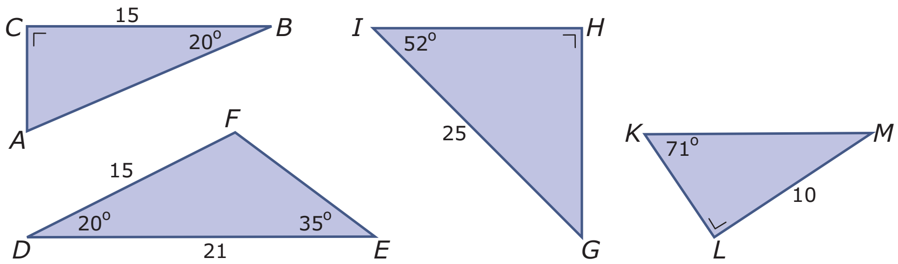
Opgave 2

Je fietst met een snelheid van 16 km/uur op een lange rechte weg. Je hebt de wind schuin tegen. De windsnelheid is 10 km/uur. Zonder deze wind zou je snelheid 22 km/uur bedragen.

Teken de situatie en bereken de hoek die de windvector met jouw fietsrichting maakt in graden nauwkeurig.

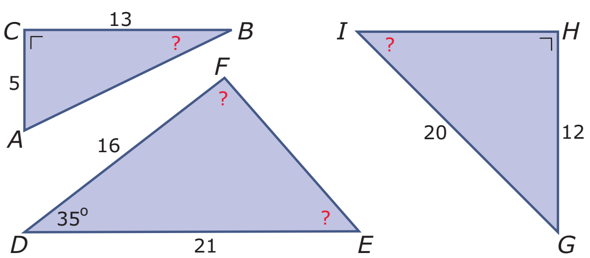
Opgave 3

Bereken van deze driehoeken alle zijden die nog niet bekend zijn in één decimaal nauwkeurig.



Opgave 4

Bereken van deze driehoeken alle hoeken waar een vraagteken in staat in graden nauwkeurig.



Opgave 5

Bij een helling staat een bord dat een hellingspercentage van 15% aangeeft.

a Hoe groot is de bijbehorende hellingshoek?

b Als deze helling $2{,}3$ km lang is, welk hoogteverschil zit er dan tussen het beginpunt en het eindpunt ervan?

Opgave 6

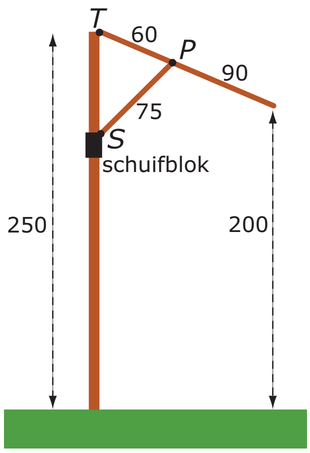
Van vlieger $ABCD$ is $BD = 20$ cm, $\angle A = 60°$ en $\angle C = 100°$.

a Bereken de oppervlakte van deze vlieger.

b Bereken de omtrek van deze vlieger.

Opgave 7

Je ziet hier één van de stangen van een parasol die het doek opspannen. Deze stang draait om punt T. Het doek wordt opgespannen door het schuifblok om de paal van de parasol omhoog te schuiven. Aan dit schuifblok zit een steun SP die de stang omhoog duwt. Als de parasol is uitgeklapt zit het laagste punt van de stang $2{,}00$ m boven de grond. Er zijn zes van deze stangen.
In de figuur zijn alle afmetingen in cm.

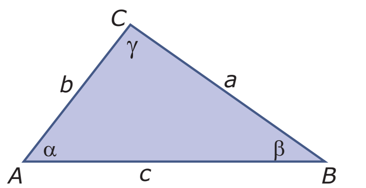


a Bereken de hoek die de stang maakt met de paal van de parasol in graden nauwkeurig.

b Bereken hoe hoog punt S boven de grond zit.

Toepassen

Je hebt nu geleerd om sinus, cosinus en tangens te gebruiken om lengten van zijden en hoeken uit te rekenen. Je moest daarbij steeds op zoek naar rechte hoeken, rechthoekige driehoeken.



Het is echter mogelijk om formules af te leiden die het zoeken naar rechthoekige driehoeken overbodig maken. Deze regels zijn de **sinusregel** en de **cosinusregel**. Je gaat daarbij uit van een driehoek ABC zoals je die hiernaast ziet. Let goed op de keuze van de letters voor de hoeken en de lengtes van de zijden.

De sinusregel luidt: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.

De cosinusregel luidt: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

In de volgende opgaven ga je deze regels afleiden en toepassen.

Opgave 8: De sinusregel

Teken zelf een driehoek zoals je die in **Toepassen** ziet. Zorg er voor dat hij drie scherpe hoeken heeft en zet bij de hoekpunten, de hoeken en de zijden op eenzelfde manier de letters.

a Teken hoogtelijn CD. Laat zien, dat $CD = b \cdot \sin(\alpha)$ en ook $CD = a \cdot \sin(\beta)$.

Uit wat je bij a hebt gevonden volgt: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.

b Hoe kom je nu aan de rest van de sinusregel?

c Neem aan dat in jouw driehoek $\alpha = 70°$, $\beta = 50°$ en $a = 5$. Bereken b met behulp van de sinusregel.

d Teken een driehoek ABC met $\alpha = 70°$, $a = 5$ en $b = 4$.

e Bereken in de driehoek die je bij c hebt getekend hoek β met behulp van de sinusregel. Controleer je antwoord door nameten.

Opgave 9: De sinusregel toepassen

Gegeven is ΔABC door $\alpha = 40°$, $a = 4$ en $b = 6$ cm.

a Teken de twee mogelijke driehoeken die hieraan voldoen.

b Bereken in de driehoek die je bij a hebt getekend hoek β met behulp van de sinusregel. Laat zien dat er inderdaad twee mogelijkheden zijn.

Gegeven is ΔABC door $a = 4$, $b = 6$ en $c = 7$ cm.

c Teken deze driehoek.

d Laat zien, dat je in de driehoek bij c de hoeken niet met behulp van de sinusregel kunt berekenen. Waarom kan dit wel met de cosinusregel?

Opgave 10: De cosinusregel

Het vinden van de cosinusregel is wat lastiger dan het vinden van de sinusregel. Teken eerst maar een driehoek ABC zoals je die bij **Toepassen** ziet staan.

a Teken hoogtelijn CD en laat zien dat $a^2 = CD^2 + (c - AD)^2$.

b Werk in de bij a gevonden uitdrukking de haakjes uit en maak gebruik van $AD = b \cdot \cos(\alpha)$ en van $CD^2 + AD^2 = b^2$. Leid hiermee de cosinusregel af.

Gegeven is ΔABC door $a = 4$, $b = 6$ en $c = 7$ cm.

c Bereken de hoeken van deze driehoek.

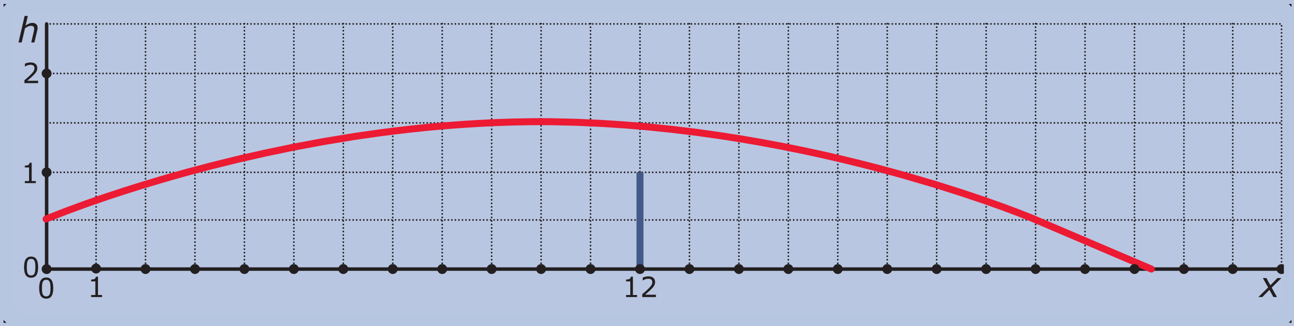
Begrippen

- kwadratische functie — parabool — top — extreme waarde;
- kwadraat afsplitsen — nulpunten;
- tweedegraads vergelijking (kwadratische functie) — abc-formule — discriminant;
- handige oplossingsmethoden;
- symmetrie-as — raaklijn — raakpunten.

Activiteiten

- van een kwadratische functie van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ de top en de extreme (uiterste) waarde bepalen en de grafiek tekenen;
- nulpunten en top bepalen, drie gedaantes van de formule bij een kwadratische functie — formules opstellen als de top of de nulpunten en nog een extra punt van de grafiek zijn gegeven;
- de abc-formule gebruiken om een kwadratische vergelijking systematisch op te lossen — de discriminant van een kwadratische vergelijking;
- kwadratische vergelijkingen handig oplossen, onder andere door ontbinden in factoren, terugrekenen en de abc-formule;
- werken met parabolen en lijnen die elkaar snijden en raken.

Boogballetjes



Domein

Functies en grafieken

Hoofdstuk

Kwadratische verbanden

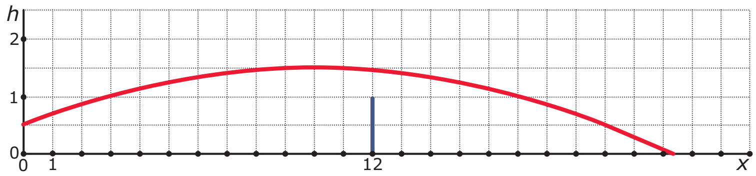
Inhoud

2

2.1 Kwadratische functies

Verkennen

Opgave V1



Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies in de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog.
De baan van de bal is een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule:

$h = -0{,}01 \cdot (x - 10)^2 + 1{,}5$

Hierin stelt h de hoogte van de bal boven het tennisveld voor en is x de afstand van de monding van het tenniskanon tot het punt recht onder de bal.

Hoe hoog komt de tennisbal maximaal?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de baan van een tennisbal die wordt afgeschoten door een tenniskanon. De formule die de baan van de bal beschrijft is gegeven.

a Waarom hoort deze formule bij een kwadratische functie?

b Bereken zelf de hoogte van de tennisbal als $x = 3$.

c Je ziet dat er ook een rij is gemaakt van de toenames van de hoogte telkens als x met 2 wordt verhoogd. Maak zelf een rij met de verandering van die toenames.

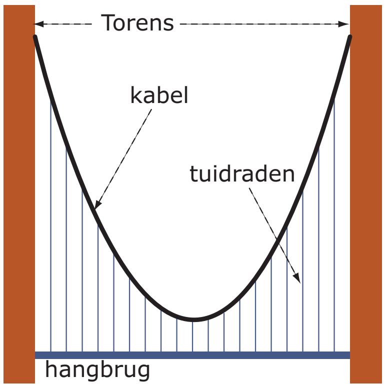
d De top van de parabool kun je uit de tabel aflezen. Maar je kunt hem ook direct uit de formule afleiden. Ga na hoe.

Opgave 2

Een hangbrug is met tuidraden opgehangen aan twee kabels die zijn bevestigd aan twee grote pilaren aan weerszijden van de brug. De kabels hangen dan in de vorm van een parabool. Een mogelijke formule voor zo'n parabool is

$h = 0{,}01 \cdot (a - 70)^2 + 16$

Hierin is h de hoogte van een punt op de kabel boven het wegdek van de brug en a de afstand in meters tot de linker toren.



a Hoe hoog boven het wegdek zit de kabel aan de linker toren vast?

b Maak een tabel met voor a de waarden 0, 10, 20, enzovoorts. Maak ook een rij met afnames en een rij met de verandering van de afnames. Wat valt op bij die laatste rij?

c Hoe groot is de afstand tussen beide torens?

d Welk punt is de top van de parabool? Hoe hoog zit de kabel daar boven het wegdek?

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet in de **Theorie**.

a Stel in de applet de formule in die in het voorbeeld is gegeven.
Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van deze functie een dalparabool is?

b Waarom is het belangrijk om eerst de symmetrieas te weten voor je een tabel maakt?

c Hier zie je een geschikte tabel voor deze parabool. Maak hem af en teken de parabool.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							

d Maak een extra rij in deze tabel met daarin de afnames van de y-waarden bij elke stap. En maak ook een extra rij met de verandering van die afnames.

e Is de verandering van de afnames constant?

Opgave 4

Bepaal van de volgende kwadratische functies de extreme waarde en de symmetrieas. Vermeld ook welke soort parabool het betreft. Gebruik eventueel de applet in de **Theorie**.

a $y = \text{-}(x+1)^2 - 4$

b $y = 2(x-4)^2 + 1$

c $y = \text{-}0{,}01\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + 2$

Opgave 5

Gegeven is de formule $y = (2x-4)^2 + 3$.

a Laat zien dat je deze formule kunt schrijven als $y = 4(x-2)^2 + 3$.

b Deze formule hoort dus ook bij een kwadratische functie. Welke uiterste waarde en welke symmetrieas heeft de bijbehorende parabool?

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je bij een tabel van een kwadratische functie de bijpassende formule kunt opstellen.

a Hoe zie je in de tabel dat de lijn $x = -2$ de symmetrieas is?

b Laat zien hoe de waarde voor a kan worden berekend.

Opgave 7

Een kwadratische functie is gegeven door deze tabel.

x	6	7	8	8,5	9	10	11
y	-20	-4	4	5	4	-4	-20

a Stel bij deze kwadratische functie een passende formule op.

b Bereken de exacte snijpunten van de bijbehorende parabool met zowel de x-as als de y-as.

Opgave 8

Een parabool p heeft met de lijn $y = 6$ precies één punt gemeenschappelijk. Dit punt heeft x-coördinaat 3.

a Maak hier een schets van en geef een mogelijke formule van de parabool.

b Een mogelijke parabool gaat ook door het punt $(1{,}4)$. Stel daarvan een bijpassende formule op.

c Bereken de exacte snijpunten van de bijbehorende parabool met de beide assen.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** wordt uitgelegd wat de raaklijn door de top van een parabool is.

a Waarom is bij een kwadratische functie de raaklijn door de top altijd horizontaal, dus evenwijdig aan de x-as?

b De parabool met formule $y = \text{-}0{,}5(x-1)^2 + p$ heeft ook de lijn $y = 2$ als raaklijn door de top. Welke waarde moet p dan hebben?

Gegeven is een parabool door de formule $y = (x-3)^2 + 5$.

c Welke lijn raakt deze parabool in de top?

d Waaraan zie je dat deze parabool geen snijpunten met de x-as heeft? En hoe zit het met het snijpunt met de y-as?

Opgave 10

Gegeven is een kwadratische functie van de vorm $y = a(x+3)^2 + q$.

a De lijn $y = 1$ raakt de bijbehorende parabool. Welke waarde heeft q?

b Welke lijn is de symmetrieas van deze parabool?

c De waarde van a heeft geen enkele invloed op je voorgaande twee antwoorden. Hoe komt dat en waarop heeft de waarde van a wel invloed?

Verwerken

Opgave 11

Bereken van elk van de volgende kwadratische functies de extreme waarde.

a $y = (x + 5)^2 + 7$

b $y = -2(x - 12)^2 + 45$

c $y = \left(x + \sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{3}$

d $y = 5{,}5 - 3(x - 2)^2$

Opgave 12

Schrijf de volgende kwadratische functies in de vorm $y = a(x - p)^2 + q$. Bepaal daarna de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

a $y = (2x + 1)^2 - 3$

b $y = -5(3x + 9)^2 + 10$

Opgave 13

Hier zie je een tabel van een kwadratische functie.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-3,5	0	2,5	4	4,5	4	2,5	0

a Stel een formule op voor deze kwadratische functie.

In de tabel zie je dat de y-waarden eerst toenemen en dan weer afnemen.

b Laat zien, dat de verandering van deze toenames constant is.

Opgave 14

Gegeven is een parabool met formule $y = \text{-}0{,}5(x - 10)^2 + 40$ en een lijn met vergelijking $y = a$.

a Bereken de snijpunten van deze parabool met de beide coördinaatassen.

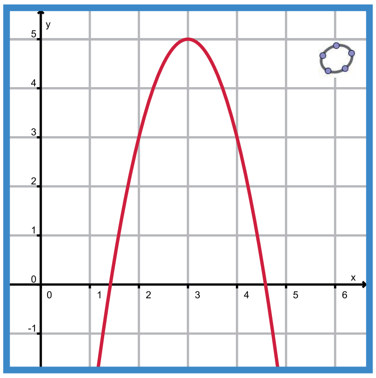
b Voor welke waarde van a is de lijn een raaklijn aan de parabool?

c Voor welke waarden van a hebben de lijn en de parabool twee snijpunten?

d Voor welke waarden van a hebben de lijn en de parabool geen snijpunten?

Opgave 15

Je ziet hier een parabool. De coördinaten van de top en van een aantal andere roosterpunten op de parabool kun je uit de figuur aflezen.



a Stel een formule op voor deze parabool.

b Bereken de exacte afstand tussen de snijpunten van deze parabool met de x-as.

Opgave 16

Een parabool raakt de lijn $l: \ y = 2$ in het punt met x-coördinaat 4. Verder gaat deze parabool door de oorsprong van het assenstelsel.

Stel een formule op voor deze parabool.

Toepassen

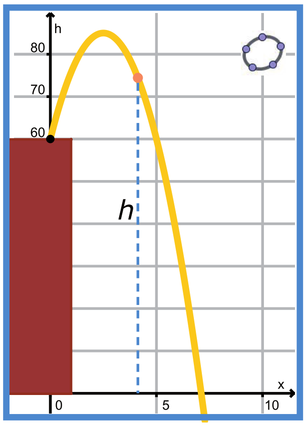
Parabolen komen regelmatig voor. Wel moet je daarbij vaak uitgaan van ideale omstandigheden die in de praktijk niet precies gelden. Voorbeelden zijn:

- de baan van een voorwerp dat wordt afgeschoten en daarna beweegt onder invloed van de zwaartekracht (als de luchtweerstand geen rol van betekenis speelt);
- de hoogte van een voorwerp dat wordt afgeschoten en daarna beweegt onder invloed van de zwaartekracht (als de luchtweerstand geen rol van betekenis speelt) afhankelijk van de tijd;
- de boog die de kabels van een hangbrug maken als die brug met behulp van zogenaamde tuidraden aan de kabels is opgehangen.

Afhankelijk van de omstandigheden (de kracht waarmee het voorwerp wordt afgeschoten, de afmetingen van de hangbrug) kun je bij die parabolen formules maken waarmee je dan weer berekeningen kunt uitvoeren.

Opgave 17: Kogelbaan

In een experiment wordt vanaf een 50 meter hoge toren een tennisbal afgeschoten die uiteindelijk zal neerkomen op het plein voor deze toren. De baan die de kogel volgt wordt gefilmd en met behulp van een computerprogramma wordt de baan van de bal berekend. De hoogte van de tennisbal boven de grond wordt bij benadering gegeven voor de formule $h = -4(x - 2{,}5)^2 + 85$, waarin h de hoogte van de bal boven de begane grond in meters en x de afstand van het punt op de grond recht onder de plaats van afschieten en het punt op de grond recht onder de bal is. Ook x is in m.



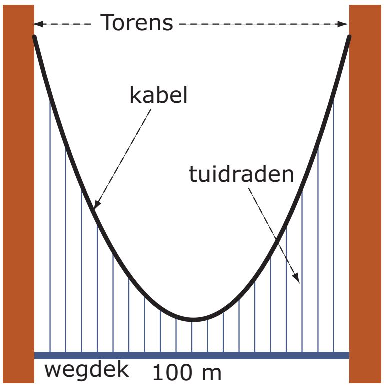
a Waaraan kun je zien dat deze tennisbal nogal steil omhoog wordt geschoten?

b Hoe hoog boven de grond komt deze tennisbal maximaal?

c Hoeveel m vanaf het punt op de grond recht onder het afschietpunt komt de bal weer op de grond?

Opgave 18: Hangbrug

Je ziet hier een hangbrug. Het wegdek is tussen beide torens 100 m lang. De ophangpunten van de kabels zitten aan de buitenkant van de torens op 100 m boven het wegdek. De kortste van de 19 tuidraden is 10 m lang.
Je ziet één van beide kabels. Hij hangt in de vorm van een parabool. Afhankelijk van de keuze van het assenstelsel kun je een formule van die parabool opstellen. Neem aan dat de eenheden op beide assen in m zijn.



a Neem aan dat de x-as samenvalt met het wegdek en de y-as over de kortste tuidraad loopt. Hoe ziet in dit geval de formule van de parabool er uit?

b Neem aan dat de x-as samenvalt met het wegdek en de y-as door het linker ophangpunt gaat. Hoe ziet nu de formule van de parabool er uit?

c Hoelang is de negentiende tuidraad gezien vanaf de linker toren?

2.2 Nulpunten en top

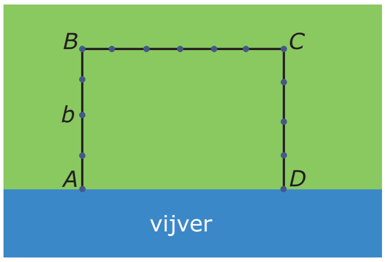
Verkennen

Opgave V1

Applet

Een boer heeft een stuk weiland naast een vijver. Hij wil naast de vijver een stuk grond afzetten met 100 m hekwerk. Zie de figuur. Langs de vijver komt geen hek.
b is de lengte van AB. Door b te veranderen kun je de oppervlakte veranderen.

Hoe groot is de oppervlakte A van het landje maximaal?



Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** dat een kwadratische functie meerdere vormen kan hebben.

a Laat zien, dat $y = 2(x-3)^2 + 1$ is te schrijven als $y = 2x^2 - 12x + 19$.

Je kunt in elke kwadratische functie van de vorm $y = a(x-p)^2 + q$ de haakjes uitwerken. Maar erg handig is dat niet, want nu kun je meteen de top van de parabool aflezen en na uitwerken kun je dat niet meer.
Het is dan ook veel nuttiger om een kwadratische functie zoals $y = x^2 + 8x + 2$ te kunnen herleiden tot de vorm waarin je de top kunt aflezen.

b Laat zien, dat $x^2 + 8x = (x+4)^2 - 16$.

c Schrijf nu de kwadratische functie $y = x^2+8x+2$ in een vorm waarin je de top kunt aflezen.

De techniek die je zojuist hebt gebruikt heet 'een kwadraat afsplitsen'. Deze techniek werkt ook als er mintekens in de formules voorkomen, alleen kun je dan niet altijd meer een figuur erbij tekenen. Splits een kwadraat af bij de volgende kwadratische functies.

d $y = x^2 + 6x - 12$

e $y = x^2 - 4x + 9$

f $y = x^2 + 5x$

Opgave 2

In de **Uitleg** kwam je de formule $A = 100b - 2b^2$ tegen. Ook deze formule kun je tot de vorm $A = a(b-p)^2 + q$ herleiden. Je begint dan met de term met b^2 voorop te schrijven en -2 buiten haakjes te halen.

a Laat zien, hoe je $A = 100b - 2b^2$ nu in de gewenste vorm krijgt.

b Bepaal de top van de bijbehorende parabool. Welke maximale oppervlakte heeft het weilandje?

Je hebt nu drie vormen voor dezelfde kwadratische functie.

c Met welke van die drie vormen kun je het snelst de snijpunten met de x-as berekenen?

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

Zorg er eerst voor dat de formule van het voorbeeld in de applet staat ingesteld.

a Waarom wordt bij het kwadraat afsplitsen eerst een 2 buiten haakjes gebracht?

b Leg uit hoe je aan het getal -$5{,}5$ komt.

c Bereken nu zelf de exacte nulpunten van deze parabool. Controleer je antwoorden door ze te vergelijken met de parabool in de applet.

Opgave 4

Werk opnieuw met de applet in **Voorbeeld 1**.
Nu heb je een kwadratische functie met formule $y = 1{,}5x^2 + 3x - 4{,}5$. Stel dit in de applet in.

a Schrijf deze formule in een vorm waaruit je de top van de bijbehorende parabool kunt aflezen.

b Lees uit de bij a gevonden formule de top van de parabool af. Komt hij overeen met de top van de parabool in de applet?

c Bereken de exacte nulpunten van deze parabool vanuit de formule bij a. Controleer je antwoorden door ze te vergelijken met de parabool in de applet.

d Je kunt in de applet steeds weer een nieuwe parabool instellen en dan door kwadraat afsplitsen de formule in de vorm schrijven waarin je de top kunt aflezen. Met behulp van die formule kun je dan de exacte nulpunten uitrekenen.
Oefen dit (met een medeleerling) tot je geen fouten meer maakt.

Opgave 5

Bekijk nu de formule $y = -0{,}5x^2 + 50x$.
De parabool die bij deze formule hoort krijg je met de applet in **Voorbeeld 1** niet in beeld. Om deze parabool te kunnen tekenen is het nuttig om eerst de top en de nulpunten te berekenen.

a Schrijf deze formule in een vorm waaruit je de top van de bijbehorende parabool kunt aflezen.

b Welk punt is nu de top van de parabool?

c Bereken de exacte nulpunten van deze parabool. Maak vervolgens een schets van de parabool.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2** en werk met de applet.
Zorg er eerst voor dat de formule van het voorbeeld in de applet staat ingesteld.

a Ga na, dat de nulpunten die je uit de formule afleest overeenkomen met die in de grafiek.

b Bereken de coördinaten van de top van de parabool.

c Je kunt de top van deze parabool ook vinden door haakjes uit te werken en een kwadraat af te splitsen. Laat zien dat dit dezelfde top oplevert.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2** en werk met de applet.
Stel in de applet de formule $y = (x-2)(x-5)$ in.

a Bereken de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

Stel in de applet de formule $y = \text{-}2x(x-5)$ in.

b Bereken de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

Je kunt in de applet steeds weer een nieuwe formule van de vorm $y = a(x-m)(x-n)$ instellen en jezelf zo oefenen in het vinden van de top van de bijbehorende parabool.

c Oefen dit met behulp van de applet.

Opgave 8

Gegeven is de kwadratische functie met formule $y = 3x^2 + 42x + 120$.

a Door ontbinden in factoren kun je de formule schrijven in de vorm $y = a(x-m)(x-n)$. Laat dat zien en geef dan de nulpunten van deze functie.

b Laat zien, dat je de nulpunten van deze functie ook kunt vinden door een kwadraat af te splitsen.

Opgave 9

Bekijk **Voorbeeld 3** en werk met de applet.

a Experimenteer eerst met de applet. Probeer de juiste waarden voor m, n en a in te stellen.

b Bereken zelf, dat $a = 2$. Schrijf vervolgens de juiste formule op.

c De top van deze parabool kun je wel uit je figuur aflezen. Laat zien hoe je die door berekening kunt vinden.

Opgave 10

a Een parabool gaat door de punten $(0,4)$, $(-1,0)$ en $(4,0)$. Stel een bijpassende formule op en bereken de coördinaten van de top.

b Een parabool gaat door $(0,6)$ en heeft als top $(1,8)$. Stel een bijpassende formule op en bereken de exacte nulpunten.

Verwerken

Opgave 11

Bereken van de volgende parabolen de coördinaten van de top.

a $y = x^2 + 8x + 2$

b $y = x^2 - 2x + 10$

c $y = 2x^2 + 10x - 8$

d $y = -4(x - 8)(x + 3)$

e $y = 0{,}5x^2 + x$

f $y = -x^2 + 6x - 4$

Opgave 12

Hieronder is telkens de formule van een kwadratische functie gegeven. Bereken de nulpunten en de extreme waarde.

a $y = 2x(x - 30)$

b $y = (x - 2{,}5)^2 - 1$

c $y = -0{,}5(x - 4)(x + 1)$

d $y = (x - 3)^2 + 1$

e $y = (4 - x)^2 - 7{,}5$

f $y = x^2 + 4x + 5$

g $y = 2x^2 + 16x + 24$

h $y = -2(x + 1)^2$

Opgave 13

Van een parabool is het punt $T(-1,-2)$ de top en is het punt $A(-10,0)$ één van beide snijpunten met de x-as.

Stel een formule op van deze parabool en bereken het snijpunt met de y-as.

Opgave 14

Van een kwadratische functie heeft de bijbehorende parabool het punt $T(1,2)$ als top en is het punt $A(3,0)$ één van beide snijpunten met de x-as.

Bereken het andere snijpunt met de x-as en stel drie verschillende formules op voor deze kwadratische functie.

Opgave 15

Van een kwadratische functie gaat de bijbehorende parabool door de punten $(-10,0)$, $(30,0)$ en $(0,10)$.

Bereken de extreme waarde van deze kwadratische functie.

Opgave 16

Van een kwadratische functie heeft de formule de vorm $y = ax^2 + bx$. Deze functie heeft verder een maximum van 4 voor $x = 3$.

Bereken a en b.

Toepassen

Ook in de **economie** komen kwadratische functies voor. Bekijk dit (sterk vereenvoudigde) economische model maar eens.

Een sportclub verkoopt in zijn kantine koppen erwtensoep. De kantinebeheerder heeft gemerkt dat het aantal koppen soep dat ze dagelijks verkopen afhangt van de prijs die ze ervoor vragen: hoe duurder een kop soep, hoe lager het aantal koppen soep dat ze op een dag verkopen. Deze tabel laat dat zien.

prijs per kop (in centen)	120	115	110	105	100
aantal verkocht per dag	100	110	120	130	140

Als je hierbij een grafiek tekent, dan zie je dat het aantal verkochte koppen soep per dag q afhangt van de prijs p (in centen) volgens een lineair verband: q is een lineaire functie van p.
Ga na, dat $q = 340 - 2p$.

De kantinebeheerder bedenkt nu dat de opbrengst R kan worden berekent door de prijs per kop te vermenigvuldigen met het aantal verkochte koppen soep: $R = p \cdot q$.

Dit levert een kwadratische formule op: $R = p \cdot (340 - 2p)$.

Nu kan de kantinebaas berekenen bij welke prijs zijn opbrengst zo groot mogelijk is.

Opgave 17: Soepverkoop (1)

Bekijk het verhaal van de verkoop van erwtensoep in **Toepassen**.

a Leid zelf de lineaire formule voor q als functie van p af.

b Ga met behulp van de tabel na, dat de opbrengst stijgt als de prijs naar beneden gaat.

c Als de kantinebeheerder de prijs verder laat zakken worden er nog meer koppen soep verkocht. Blijft zijn opbrengst dan alsmaar stijgen?

d Waaraan zie je dat de opbrengst R een kwadratische functie van p is? En waaraan zie je dat de opbrengst een maximum heeft?

e Bereken het maximum van R. Welke prijs moet de kantinebeheerder vragen als hij een zo groot mogelijke opbrengst wil hebben?

f Is het verstandig om een zo groot mogelijke opbrengst te willen hebben?

Opgave 18: Soepverkoop (2)

Nu ga je niet kijken naar een zo groot mogelijke opbrengst, maar naar een zo groot mogelijke winst.

a Wat is het verschil tussen opbrengst en winst?

Neem aan dat het maken van elke kop soep 50 cent kost.

b Leg uit, waarom dan voor de winst geldt $W = (p - 50)(340 - 2p)$.

c Ook bij deze formule is de grafiek een parabool. Bepaal de twee nulpunten van deze parabool. Wat betekenen deze getallen voor de winst?

d Bereken het maximum van W. Welke prijs moet de kantinebeheerder vragen als hij een zo groot mogelijke winst wil hebben?

2.3 Kwadratische vergelijkingen

Verkennen

Opgave V1

Wanneer je van een kwadratische functie de nulpunten wilt berekenen, moet je een vergelijking oplossen. Neem bijvoorbeeld $y = x^2 + 6x - 8$. Wil je van deze kwadratische functie de nulpunten berekenen dan moet je $x^2 + 6x - 8 = 0$ oplossen.

Los deze vergelijking op met behulp van kwadraat afsplitsen.

Opgave V2

Kwadraat afsplitsen is een manier om elke kwadratische vergelijking op te lossen.

Los op: $3x^2 + 7x + 1 = 0$.

Opgave V3

Kwadraat afsplitsen gaat altijd op dezelfde manier. Als je dit dus één keer netjes doet met de algemene vorm van een kwadratische vergelijking dan krijg je een formule voor alle oplossingen van een kwadratische vergelijking van die vorm.

Los op: $ax^2 + bx + c = 0$.

Theorie

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je een kwadratische vergelijking oplost met de abc-formule.

a Los zelf de vergelijking $3x^2 + 7x + 1 = 0$ op met behulp van de abc-formule.

b Vergelijk je antwoord met dat in **Opgave 2**. Komen ze overeen?

c Geef benaderingen van beide x-waarden van de oplossing in drie decimalen nauwkeurig.

In **Opgave 1** werd de oplossing van $x^2 + 6x - 8 = 0$ gevraagd.

d Bepaal de oplossing van deze vergelijking met de wortelformule. Ga na, dat je oplossing overeenkomt met de oplossing die je eerder hebt gevonden.

Bij het gebruik van de abc-formule moet je er wel op letten dat de vergelijking die je oplost kwadratisch is en de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heeft.

e Waarom betekent dit dat $a \neq 0$?

f Los op: $4 + 2x^2 = 6x$.

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen op met de abc-formule.

a $x^2 + 12x + 4 = 0$

b $2x^2 + 5x - 10 = 0$

c $5x - x^2 + 7 = 0$

d $9x^2 = 17 - 10x$

e $2x^2 + 16 = 12x$

f $3x^2 + 8x - 3 = 0$

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** hoe je het aantal oplossingen van kwadratische vergelijking kunt bepalen.

a Uit hoeveel waarden bestaat de oplossing van een kwadratische vergelijking maximaal? En waarom?

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x - 1 = 0$.

b Bereken eerst de discriminant van deze vergelijking.

c Hoeveel waarden zitten er in de oplossing van deze vergelijking? Bereken vervolgens de oplossing.

d Geef een benadering van de oplossing van deze vergelijking in één decimaal nauwkeurig. Ga in de applet na dat ze overeenkomen met de x-waarden van de nulpunten van de bijbehorende parabool.

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x + 4{,}5 = 0$.

e Laat met behulp van de discriminant zien, dat de oplossing van de vergelijking één waarde heeft. Bereken vervolgens die éne oplossing.

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x + 6 = 0$.

f Laat met behulp van de discriminant zien, dat de vergelijking geen reële oplossing heeft.

Opgave 4

Bepaal van de volgende kwadratische vergelijkingen eerst het aantal oplossingen (dus het aantal waarden in de oplossing). Los ze vervolgens op.

a $2x^2 + 5x - 20 = 0$

b $11 + 3x^2 = 9x$

c $3x^2 = 4x - 1$

d $4x^2 - 20x + 25 = 0$

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe een kwadratische vergelijking wordt opgelost met de abc-formule. Leer deze formule uit het hoofd en zorg dat je de manier van werken beheerst! Bekijk eventueel bij het **Practicum** een (engelstalige) videoclip over de 'quadratic formula'.

a Herleiden op 0 is een belangrijke stap voordat je de abc-formule gaat toepassen. Waarom voer je deze stap eigenlijk uit?

b Laat zien, dat je door haakjes wegwerken en op 0 herleiden inderdaad op $x^2 - 5x + 3 = 0$ komt.

c Waarom staat bij de berekening van de discriminant de -5 eigenlijk tussen haakjes?

d Schrijf beide waarden van de oplossing afzonderlijk op en benader ze in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Los de volgende vergelijkingen op indien mogelijk.

a $3x^2 + 4 = 7x$

b $(x+1)(2x-1) = 4$

c $4x = x^2 + 7$

d $(x+3)^2 = 4x$

e $(2x+4)^2 = 32x$

f $(2x+4)^2 = 32$

Opgave 7

Bekijk de vergelijking $(x+4)^2 = 4 + x^2$.

a Is dit een kwadratische vergelijking?

b Werk de haakjes weg en herleid de vergelijking op 0.

c Hoe los je nu de vergelijking verder op?

Opgave 8

Oefen het oplossen van kwadratische vergelijkingen met de abc-formule via **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je de snijpunten van een parabool en een rechte lijn berekent.

a In dit voorbeeld is de abc-formule gebruikt om de kwadratische vergelijking op te lossen. Dit kan ook met de som-en-productmethode. Laat dat zien.

b Waarom is hier het werken met de discriminant overbodig?

c Als je de twee x-waarden hebt gevonden, moet je de bijbehorende y-waarden berekenen. Laat zien hoe je dat doet.

d Maakt het uit in welke van beide formules je de gevonden waarden van x invult? Waarom?

Opgave 10

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij de volgende formules.

a $y_1 = x^2 + 3x + 1$ en $y_2 = -x - 2$.

b $y_1 = (x + 2)(x - 3)$ en $y_2 = 2x + 4$.

c $y_1 = x^2$ en $y_2 = 2$.

Opgave 11

In de voorgaande opgave en ook in **Voorbeeld 2** waren de coördinaten van de snijpunten van beide grafieken gehele getallen. Maar dat hoeft niet.

Neem bijvoorbeeld de functies $y_1 = (x + 1)^2$ en $y_2 = 4 - x^2$.

a Met welke vergelijking bereken je de snijpunten van de twee bijbehorende grafieken?

b Hoe kun je aan de discriminant van deze vergelijking zien dat er twee snijpunten zijn waarvan de coördinaten geen gehele getallen zijn?

c Bereken de snijpunten van beide parabolen op twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 12

Bereken de oplossing van de volgende kwadratische vergelijkingen.

a $x^2 + 5x + 1 = 0$

b $2x^2 - 3x - 2 = 0$

c $-5x^2 - 7x = 1$

d $x(2x + 3) = 3$

e $x(2x + 3) = 3x$

f $x(2x + 3) = 0$

g $(x + 3)(x - 5) = 2$

h $(x + 3)(x - 5) = 0$

i $(2x + 5)^2 = 5$

j $(x+1)^2 = (4-x)^2$

Opgave 13

Onderzoek hoeveel oplossingen de volgende kwadratische vergelijkingen hebben (dus uit hoeveel waarden de oplossing bestaat).

a $2x^2 + 5x - 1 = 0$

b $5x^2 - x = 1$

c $-2x^2 + 6x = 18$

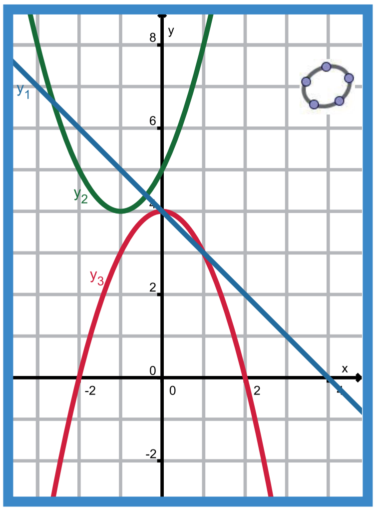
d $x(4x+1) = (1-2x)^2$

e $(1-2x)^2 = 12$

f $(x-1)^2 + 4 = 0$

Opgave 14

Je ziet hier de grafieken van twee kwadratische functies en een lineaire functie. Ga er van uit dat de roosterpunten die op de grafieken lijken te liggen dat ook inderdaad doen.
Bij het berekenen van snijpunten of nulpunten, moet je telkens een vergelijking oplossen. Aan de discriminant van die vergelijking kun je zien hoeveel snijpunten er zijn. Geef in de volgende gevallen aan of die discriminant negatief, positief of 0 is en ook of die discriminant een kwadraat is.



a $y_1 = y_3$

b $y_1 = y_2$

c $y_2 = y_3$

d $y_3 = 0$

e $y_2 = 0$

f $y_2 = 4$

Opgave 15

Hieronder zijn telkens twee formules gegeven. Bereken de eventuele snijpunten van de bijbehorende grafieken. Geef waar nodig benaderingen in één decimaal nauwkeurig.

a $y_1 = -2x^2 + 8x$ en $y_2 = 2x - 36$.

b $y_1 = (x - 10)^2 - 50$ en $y_2 = 10 - 5x$.

c $y_1 = -0{,}5(x - 1)^2$ en $y_2 = (x - 2)^2 - 3$.

Opgave 16

Sommige vergelijkingen zijn niet kwadratisch, maar kun je toch oplossen met behulp van de abc-formule en andere eerder geleerde technieken. Je gaat daar later dieper op in, maar hier alvast een voorproefje.

Los op:

a $x^3 + 2x^2 = x$

b $\left(x^2 + 2\right)^2 = 9$

Toepassen

Je hebt in deze paragraaf (en ook al eerder) gezien dat sommige kwadratische vergelijkingen geen reële oplossing hebben. Dat lijkt ook logisch want soms snijden de bijbehorende grafieken elkaar of de x-as niet.

Toch is het mogelijk om ervoor te zorgen dat elke kwadratische vergelijking oplossingen heeft. Je hebt er alleen bijzondere getallen voor nodig. Je noemt die getallen **imaginaire getallen**.

De eenvoudigste kwadratische vergelijking zonder reële oplossing is $x^2 = -1$.
Je kunt immers niet de wortel uit een negatief getal trekken!
Maar stel je nu eens voor dat er een getal i zou bestaan waarvoor $\text{i}^2 = -1$. Dan wordt de vergelijking $x^2 = \text{i}^2$ en heeft hij gewoon twee oplossingen: $x = -\text{i} \vee x = \text{i}$.

Het getal i is een imaginair getal en wiskundigen rekenen daar al eeuwen mee. Maar het getal i is geen reëel getal. Alleen als je wiskunde D kiest, krijg je er mee te maken...

Opgave 17: Imaginaire getallen

Bekijk in **Toepassen** hoe je de vergelijking $x^2 = -1$ kunt oplossen door het imaginaire getal i te gebruiken.

a Laat zien dat de oplossing van $x^2 = -4$ nu gelijk is aan $x = -2\text{i} \vee x = 2\text{i}$.

b Welke oplossing heeft de vergelijking $x^2 = -5$?

c En welke oplossing heeft de vergelijking $(x-2)^2 = -9$?

Opgave 18: Imaginaire getallen en de abc-formule

Ook bij het toepassen van de abc-formule kun je door het imaginaire getal i te gebruiken vergelijkingen oplossen die geen reële oplossingen hebben.

a Laat zien dat de oplossingen van $x^2 + 4x + 5 = 0$ nu gelijk zijn aan $x = -2 - \text{i} \vee x = -2 + \text{i}$.

b Los op: $x^2 + 8x + 20 = 0$.

c Los op: $x^2 + 8x + 21 = 0$.

Practicum: Videoclip: abc-formule

Applet

In het engels spreek je van de ‘quadratic formula’, maar met een muziekje er onder is het leren werken met de abc-formule misschien toch wel aangenaam. De uitdrukking ‘square root’ betekent ‘wortel’, eigenlijk ‘vierkantswortel’. Maar verder spreekt de videoclip voor zich.

(Bron: **learningupgrade.com**)

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van kwadratische vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

2.4 Handig oplossen

Verkennen

Opgave V1

Je wilt de vergelijking $2x^2 + 12x = -10$ oplossen.

Doe dit op zoveel mogelijk verschillende manieren. Welke manier is het handigst?

Opgave V2

Je wilt de vergelijking $2x^2 + 12x = 0$ oplossen.

Laat zien hoe je dit op de handigste manier kunt doen.

Theorie

Opgave 1

Kwadratische vergelijkingen kun je beter niet altijd met de abc-formule oplossen. Die formule is als het ware de laatste mogelijkheid als je geen snellere manier kunt vinden.

a Bekijk eerst de vergelijkingen in de **Uitleg**. Als je deze vergelijkingen nog niet hebt opgelost, doe dit dan alsnog.

Bekijk de vergelijking $0{,}5x^2 = 4x - 6$.

b Wordt deze vergelijking na op 0 herleiden een drieterm of een tweeterm?

c Kun je deze vergelijking oplossen door ontbinden in factoren? Los de vergelijking verder op.

Bekijk de vergelijking $0{,}5x^2 = 4x - 5$.

d Waarom kun je deze vergelijking alleen met de wortelformule oplossen? Laat zien hoe je dat doet.

Bekijk de vergelijking $0{,}5x^2 - 4x = 5x$.

e Wordt deze vergelijking na op 0 herleiden een drieterm of een tweeterm? En gebruik je dan de abc-formule?

f Los deze vergelijking zo handig mogelijk op.

Opgave 2

Zoek bij de volgende vergelijkingen steeds de handigste manier van oplossen. Bereken vervolgens de exacte oplossingen.

a $0{,}1x(x-2)=1$

b $0{,}1(x-2)^2=1$

c $0{,}1x(x-2)=0$

d $0{,}1x(x-1)=2$

Opgave 3

Bekijk de drie vergelijkingen in **Voorbeeld 1**.

a Ga na, dat je van de derde vergelijking inderdaad vrijwel direct de oplossing kunt opschrijven.

b Los nu de eerste vergelijking zo handig mogelijk op.

c Los ook de tweede vergelijking op.

Opgave 4

Je wilt de vergelijking $(2x-7)^2-1=9$ oplossen.

a Waarom is nu het uitwerken van de haakjes niet handig?

b Los nu deze vergelijking zo handig mogelijk op.

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen op de handigste manier op.

a $3x^2+6x=9$

b $15t(t-1)=30$

c $\frac{1}{2}x^2 = 32$

d $\frac{1}{4}p^2 = 3p$

e $(a-4)^2 - 8 = 5$

f $4t + 1 = 6t^2$

g $(x-2)(x+2) = 1$

h $x^2 = 2x - 1$

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt een kwadratische vergelijking op een onverwachte manier opgelost.

a Los deze vergelijking eerst zelf op door de haakjes weg te werken.

b Los nu de vergelijking op de manier van het voorbeeld op.

Opgave 7

Los op:

a $(x+1)^2 = (2x+4)^2$

b $(x-2)^2 = (-x+3)^2$

c $(2a-2)^2 = 36$

d $(5+3{,}5k)^2 = k^2$

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt een kwadratische vergelijking op een onverwachte manier opgelost.

a Los deze vergelijking eerst zelf op door de haakjes uit te werken.

b Bekijk nu de manier van oplossen die in het voorbeeld wordt gebruikt. Waarom mag je niet gewoon beide zijden delen door $x + 4$?

c Wanneer kun je deze handige oplossingsmethode toepassen?

Opgave 9

Los op:

a $5x(x - 3) = 6x - 18$

b $x(x + 1) = 5x$

c $x^2 = 6x$

d $(4x + 1)(2x - 5) = x(2x - 5)$

Verwerken

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen op. Probeer steeds een zo handig mogelijke manier te vinden.

a $x^2 = x$

b $(x - 1)^2 - 1 = 0$

c $5 - x^2 = 3$

d $x - x^2 = 0$

e $x - x^2 = 5$

f $x^2 + 2x - 7 = 3$

g $x^2 + 2x + 1 = 0$

h $(x + 3)(x - 3) = 9$

i $(x - 4)(x + 5) = 6$

j $x(2 - x) = 3x$

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen op. Probeer steeds een zo handig mogelijke manier te vinden.

a $(2x - 3)(x - 1) = 3$

b $(2x - 3)(x - 1) = 0$

c $(s-3)^2+5=0$

d $4(s+1)^2-7=2$

e $t-(t-1)^2=-4$

f $(x-2)^2=(4-3x)^2$

g $3(x-1)^2=(x-1)^2$

h $3p(p-1)=(p+1)(p-1)$

i $(x-4)^2=5-x$

j $0{,}5x^2 - 4x = 10$

Opgave 12

Van de vergelijking $2x^2 + px + q = 0$ is de oplossing: $x = 7 \vee x = \frac{1}{3}$.

Bereken p en q.

Opgave 13

Een parabool heeft top $T(2{,}5)$ en gaat door het punt $A(0{,}6)$. Een lijn gaat door de punten A en $B(10{,}12)$. De snijpunten van deze lijn en deze parabool zijn A en C.

Bereken de coördinaten van punt C.

Opgave 14

Een bedrijf maakt Blu-ray spelers. De winst die het bedrijf per week maakt wordt berekend met de formule $W = \text{-}6q^2 + 100q - 246$. De winst ($W$) is hier in duizenden euro en het aantal per week verkochte spelers (q) in honderdtallen.

a Bereken voor welke waarden van q winst wordt gemaakt. Om welke aantallen Blu-ray spelers gaat het daarbij?

b Bij welk aantal wekelijkse verkochte Blu-ray spelers is de winst zo groot mogelijk? Hoe groot is deze maximale winst?

Toepassen

Je hebt in deze paragraaf enkele handige manieren van het oplossen van vergelijkingen gezien. Vrijwel altijd waren dat kwadratische vergelijkingen. Maar deze technieken zijn veel vaker te gebruiken. Vooral voor leerlingen die in de bovenbouw met wiskunde B verder willen zijn handige oplossingstechnieken onontbeerlijk.

Eén van de belangrijkste **handige oplossingsmethoden** is het ontbinden in factoren. Dat doe je ofwel door de grootste gemeenschappelijke deler buiten haakjes te halen, ofwel met behulp van de som-en-productmethode. Je schrijft daarmee de vergelijking in de vorm $A \cdot B = 0$ met oplossing $A = 0 \vee B = 0$.

Maar in een paar situaties kun je nog snellere oplossingsstappen afleiden:

- Een vergelijking van de vorm $A \cdot B = A \cdot C$ wordt $A = 0 \vee B = C$.
- Een vergelijking van de vorm $A^2 = B^2$ wordt $A = B \vee A = -B$.
- Een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ wordt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.
- Een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ wordt $A = 0 \vee B = C$ mits $B \neq 0$ en $C \neq 0$.
- Een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{C}{B}$ wordt $A = C$ mits $B \neq 0$.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

wordt

$$A \cdot D = B \cdot C$$

De derde techniek noem je wel **kruislings vermenigvuldigen**. In de figuur hiernaast zie je waarom. Let er wel op dat delen door 0 niet mag!

Opgave 15: Handige oplossingstechnieken

Bekijk in **Toepassen** hoe je vergelijkingen handig kunt oplossen door ontbinden en worteltrekken. Je kunt daaruit nog weer snellere stappen afleiden.

a Welk voorbeeld maakt gebruik van de strategie dat een vergelijking van de vorm $A \cdot B = A \cdot C$ kan worden geschreven als $A = 0 \vee B = C$? Laat zien hoe deze aanpak volgt uit ontbinden in factoren.

b Laat ook zien, dat een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ kan worden geschreven als $A \cdot D = B \cdot C$.

c Leid zelf af dat een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ kan worden herleid tot $A = 0 \vee B = C$

Opgave 16: Vergelijkingen met hogere machten

Los de volgende vergelijkingen op. Maak gebruik van handige oplossingstechnieken.

a $x^3 = 4x$

b $3x^2(x-5) = x^2$

c $4(x-1)^3 = x-1$

d $\left(x^2+1\right)^2 = 4$

e $\left(2x+x^2-4\right)^2 = (x+1)^2$

Opgave 17: Vergelijkingen met breuken

Los de volgende vergelijkingen op. Maak gebruik van handige oplossingstechnieken.

a $\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+3}{2x+3}$

b $\frac{x}{2x-1} = \frac{2x}{1-x}$

c $\frac{2x-1}{3x} = \frac{2x-1}{x+2}$

d $\frac{x-2}{2x} = \frac{5}{2x}$

e $\frac{1-x}{2x} = 1 - \frac{2}{x}$

f Je kunt nog meer gebroken vergelijkingen oefenen via het **Practicum**.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het handig oplossen van kwadratische vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier. Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

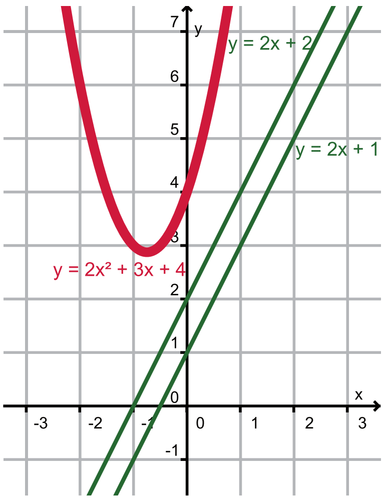
2.5 Lijnen en parabolen

Verkennen

Opgave V1

Applet

Je ziet hier een parabool met de bijbehorende formule $y = 2x^2 + 3x + 4$ en een rechte lijn met formule $y = 2x + p$. De waarde voor p kun je nog aanpassen. Dus je hebt eigenlijk met een hele serie lijnen te maken. Werk met de applet.



a Bij welke waarde van p gaat de rechte lijn door de top van de parabool?

b Bereken met behulp van kwadraat afsplitsen de exacte coördinaten van de top van de parabool. En bereken vervolgens de exacte waarde van p waarvoor de lijn door dit punt gaat.

c Bij welke waarde van p heeft de rechte lijn precies één punt met de parabool gemeen? Gebruik de applet.

d Kun je de waarde bedoeld bij c ook vinden met behulp van een berekening? Zo ja, hoe?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je de top van een parabool van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ snel kunt vinden.

a Bereken op deze manier de top van de in de tekst hierboven gegeven parabool. Vergelijk je antwoord met dat wat je krijgt door kwadraat afsplitsen.

De formule $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$ geldt voor elke parabool met formule $y = ax^2 + bx + c$.

b In de applet kun je de waarden van a en b veranderen. Ga na dat de symmetrieas mee verandert en dat daarvoor geldt $x = -\frac{b}{2a}$.

c Bereken de top van de in de tekst hierboven gegeven parabool door eerst twee punten op de parabool te berekenen waarvoor $y = 4$ en daarmee de symmetrieas te bepalen.

Je kunt de formule voor de top zelf vinden door de symmetrieas van de parabool te bepalen. Die symmetrieas is de middelloodlijn van twee punten met gelijke y-waarde op de parabool. Neem voor het gemak $y = c$ en bereken de bijbehorende x-waarden uit $ax^2 + bx + c = c$.

d Bereken de twee bedoelde punten en laat zien dat voor de symmetrieas inderdaad geldt $x = -\frac{b}{2a}$.

Opgave 2

Bereken van de volgende kwadratische functies de top van de bijbehorende parabool.

a $y_1 = 3x^2 - 5x + 2$

b $y_2 = \text{-}x^2 + 6x + 12$

c $y_3 = 3(x - 1)\,(x - 5)$

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** hoe je kunt bepalen welke lijn van een gegeven serie lijnen een parabool raakt.

a Bereken op de manier die hierboven kort wordt beschreven dat voor de raaklijn van deze serie geldt $p = 3{,}875$.

b Bereken nu zelf de coördinaten van het raakpunt.

c Voor welke p hebben de lijn en de parabool geen snijpunten?

Bekijk nu de familie van lijnen gegeven door $y = -3x + p$ en de gegeven parabool.

d Voor welke p raakt een lijn van deze serie de gegeven parabool? Welk punt is het raakpunt?

Opgave 4

Gegeven is de kwadratische functie $y = -x^2 + 6x$ en een familie rechte lijnen met formule $y = -2x + p$.

a Bereken voor welke p een lijn van deze serie de gegeven parabool raakt.

b Bereken nu zelf de coördinaten van het raakpunt.

Opgave 5

Bekijk de parabool en de serie lijnen in **Voorbeeld 1**.

a Welke symmetrieas heeft de gegeven parabool? Hoe wordt die symmetrieas gebruikt om de top van de parabool uit te rekenen?

b Reken na, dat de lijn met $n = 3{,}625$ door de top van de parabool gaat.

In het voorbeeld wordt ook berekend welke van de serie lijnen de parabool raakt. Daarbij wordt de discriminant van een kwadratische vergelijking gebruikt.

c Bepaal zelf die discriminant, dus druk hem uit in n.

d Bereken de vergelijking van de lijn uit deze serie die de parabool raakt.

e Bereken de coördinaten van het bijbehorende raakpunt.

Opgave 6

Gegeven zijn de kwadratische functie door $y = -x^2 + 3x$ en de serie lineaire functies door $y = -1{,}5x + n$.

In de applet in **Voorbeeld 1** kun je de bijbehorende grafieken instellen.

a Bereken voor welke n de lijn door de top T van de parabool gaat.

b Bereken voor welke n de lijn de parabool raakt en bereken de coördinaten van het raakpunt.

Opgave 7

Gegeven de parabool met formule $y = x^2 - 4x + 5$ en de serie lijnen met formule $y = mx + 3$.

In de applet in **Voorbeeld 1** kun je deze grafieken instellen.

a Bereken voor welke m de lijn door de top T van de parabool gaat.

b Ga met de applet na, dat er nu twee lijnen van deze serie zijn die de parabool raken.

c Bereken voor welke m de lijn de parabool raakt.

Opgave 8

In de **Theorie** wordt verteld wat een ‘raaklijn’ aan een parabool is. Bij elke parabool kun je echter één lijn tekenen die precies één punt met de parabool gemeen heeft en toch geen raaklijn aan de parabool is.

Beschrijf welke lijn dat is.

Opgave 9

Bekijk de twee parabolen in **Voorbeeld 2**.

a Laat zien dat inderdaad $D = 0$.

b Bereken het raakpunt van beide parabolen.

Opgave 10

Ga door berekening na of in de volgende gevallen de grafieken elkaar snijden, raken of geen gemeenschappelijke punten hebben.

a $y_1 = -x^2 + 4x - 3$ en $y_2 = -2x + 5{,}5$

b $y_1 = 2x^2 - 3x + 4$ en $y_2 = 0{,}5x^2 - 2{,}25$.

c $y_1 = 2x^2 - x + 3$ en $y_2 = x^2 - 3x + 2$.

Verwerken

Opgave 11

Gegeven zijn de kwadratische functie met formule $y = x^2 - 4x$ en de lineaire functie met formule $y = x - 4$.

a De grafiek van de kwadratische functie is een parabool. Bereken de top van die parabool.

b Bereken de coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafieken.

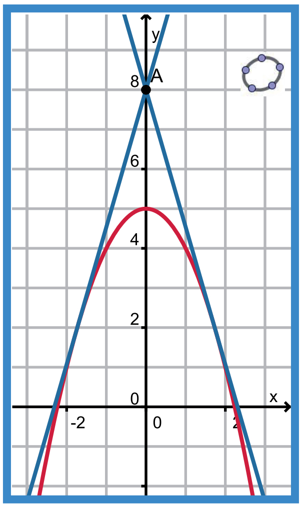
Er bestaat een serie lineaire functies met formules van de vorm $y = x + p$.

c Welke lineaire functie van deze serie raakt de grafiek van de gegeven kwadratische functie? Bereken het bijbehorende raakpunt.

Opgave 12

Je ziet hiernaast de grafiek van de kwadratische functie met formule $y = 5 - x^2$ en twee raaklijnen aan deze grafiek. Beide raaklijnen gaan door het punt $(0,8)$. De raakpunten zijn de punten P en Q.

Bereken de lengte van lijnstuk PQ.



Opgave 13

Gegeven is de kwadratische functie met formule $y = 0{,}5x^2 + px + 8$.

Voor welke p raakt de grafiek van deze functie de x-as?

Opgave 14

Onderzoek of de parabolen met formules $y_1 = 3x^2 - 12x + 14$ en $y_2 = -x^2 + 8x - 11$ elkaar raken. Bereken in dat geval het raakpunt.

Opgave 15

Voor welke waarden van a ligt de top van de parabool met formule $y = ax^2 + 2x + 3$ op de lijn met formule $y = 2x + 4$?

Toepassen

Een parabool kun je ook meetkundig construeren. Bij wiskunde D zul je **constructies van krommen zoals de parabool** tegenkomen.

Applet

Een parabool bestaat uit alle punten P die evenver van een gegeven lijn als van een gegeven punt afliggen. Als je een assenstelsel gebruikt dan kun je $y = -3$ als gegeven lijn en $F(0,3)$ als gegeven punt nemen. Je ziet in de applet hoe je dan de parabool construeert. De punten $P(x,y)$ van de parabool liggen op het snijpunt van de middelloodlijn van AF en een loodlijn in A op de gegeven lijn. Beweeg punt A en je ziet de parabool ontstaan.

Tenminste... krijg je wel een goede formule voor de plaats van de punten $P(x,y)$?

Opgave 16: Parabool constructie

Bekijk in **Toepassen** hoe een parabool in de meetkunde wordt omschreven. En hoe je hem met behulp van die omschrijving kunt construeren. Elk punt $P(x,y)$ van de parabool ligt op de middelloodlijn van AF en bovendien op de loodlijn door P op de gegeven lijn y = -3.

a Leg uit dat dit betekent dat de afstand van P tot F altijd even groot is als die van P tot A en dus van P tot de gegeven lijn.

b Beweeg punt A en zie de parabool ontstaan. Ga na dat telkens $AP = y + 3$.

c Leg uit dat uit de stelling van Pythagoras volgt $PF^2 = x^2 + (y-3)^2$.

d Omdat $PF^2 = AP^2$ kun je nu een formule afleiden voor de parabool. Laat zien dat die formule is te herleiden tot $x^2 = 12y$.

e Van welke kwadratische functie van x is deze parabool de grafiek?

Opgave 17: Meer parabolen

Verplaats in de applet het punt F naar $F(0,5)$.

a Stel een formule op voor de nieuwe parabool die daardoor ontstaat. Welk punt is nu de top van de parabool?

b Over welke kwadratische functie gaat het nu? Geef de bijpassende formule.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Met kwadratische verbanden heb je al leren werken. In dit onderwerp is die kennis herhaald en uitgebreid. Het begrip kwadratische functie is ingevoerd en je hebt geleerd hoe je een formule moet maken bij een kwadratische functie als de top van de grafiek en een punt op de grafiek zijn gegeven of als de nulpunten en een punt op de grafiek zijn gegeven. Ook het werken met (kwadratische) vergelijkingen om snijpunten en nulpunten te berekenen is voorbij gekomen, met name kwadraat afsplitsen en de abc-formule, maar ook technieken om kwadratische vergelijkingen handig op te lossen.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **'Kwadratische verbanden'** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- kwadratische functie — parabool — top — extreme waarde;
- kwadraat afsplitsen — nulpunten;
- tweedegraads vergelijking (kwadratische functie) — abc-formule — discriminant;
- handige oplossingsmethoden;
- symmetrie-as — raaklijn — raakpunten.

Activiteiten

- van een kwadratische functie van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ de top en de extreme (uiterste) waarde bepalen en de grafiek tekenen;
- nulpunten en top bepalen, drie gedaantes van de formule bij een kwadratische functie — formules opstellen als de top of de nulpunten en nog een extra punt van de grafiek zijn gegeven;
- de abc-formule gebruiken om een kwadratische vergelijking systematisch op te lossen — de discriminant van een kwadratische vergelijking;
- kwadratische vergelijkingen handig oplossen, onder andere door ontbinden in factoren, terugrekenen en de abc-formule;
- werken met parabolen en lijnen die elkaar snijden en raken.

Opgave 1

Een afgeschoten kogel volgt bij benadering een baan die de vorm van een parabool heeft. Een voorbeeld van zo'n kogelbaan is de parabool met formule $h = \text{-}0{,}0001(x-150)^2 + 4$. Hierin is h de hoogte van de kogel boven de grond en x de afstand die de kogel horizontaal heeft afgelegd.

a Op welke hoogte wordt de kogel afgeschoten?

b Welk punt is het hoogste punt dat de kogel bereikt?

c Na hoeveel m komt deze kogel op de grond?

Opgave 2

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$.

a Laat zien, dat deze formule kan worden geschreven als $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2}$.

b Welke extreme waarde heeft deze kwadratische functie? Is het een minimum of een maximum?

c Laat zien dat deze formule kan worden geschreven als $y = \frac{1}{2}(x-2)(x-4)$.

d Wat zijn de nulpunten van de parabool die de grafiek is van deze kwadratische functie?

Opgave 3

De grafiek van een kwadratische functie heeft nulpunten $(-2,0)$ en $(5,0)$ en snijdt de y-as in $(0,3)$.

Stel een bijpassende formule op en bereken de top van deze grafiek.

Opgave 4

Los de volgende kwadratische vergelijkingen exact op.

a $x^2 + 3x - 5 = 0$

b $x^2 + 3x - 4 = 0$

c $2x^2 - 4x = 48$

d $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 0$

e $3x^2 + x\sqrt{3} = 2$

f $x(x-3) = 2 + x^2$

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen zo handig mogelijk exact op.

a $(2x-6)^2 = 11$

b $x(x-2) = 5x - 10$

c $(x-3)(2x-5) = 15$

d $(x-3)(2x-5)=0$

e $\left(x^2-3\right)^2=(2x+1)^2$

f $\left(x^2-4\right)(x-3)=12$

Opgave 6

Gegeven zijn de serie lineaire functies met formule $y=4x-p$ en de kwadratische functie $y=-0{,}5x^2+6x$.

a Als $p=0$ heeft de grafiek van de bijbehorende lineaire functie twee punten gemeen met de grafiek van de kwadratische functie. Toon dit aan met behulp van de bijbehorende vergelijking.

b Voor welke p raken de grafieken van zo'n lineaire functie en de kwadratische functie elkaar?

c Bereken het bijbehorende raakpunt.

Toepassen

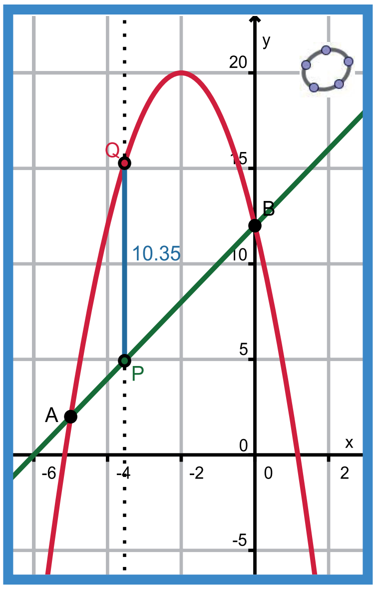
Applet

Bekijk de grafieken van de kwadratische functie met formule $y = -2x^2 - 8x + 12$ en de lineaire functie met formule $y = 2x + 12$.

Je ziet in de figuur een lijnstuk PQ dat evenwijdig is aan de verticale as en waarvan punt P op de grafiek van de lineaire functie en punt Q op de grafiek van de kwadratische functie ligt. De x-coördinaat van de punten P en Q is een getal tussen -5 en 0.

Als je het punt Q verplaatst dan wordt de lengte van het lijnstuk PQ langer of korter. Met de applet kun je uitzoeken voor welke waarde van x de lengte van dit lijnstuk maximaal is.

Maar je kunt dit ook exact berekenen...



Opgave 7: Maximale lengte

Tussen de grafieken van de functies die je hierboven ziet bevindt zich lijnstuk PQ.

De lengte van dit lijnstuk kan variëren, je wilt de maximale lengte weten, want de minimale lengte is 0.

a Waarom is het minimum van de lengte van het daar beschreven lijnstuk 0?

b Noem de x-waarde van beide punten p. Welke coördinaten hebben P en Q dan?

c Leg uit dat de lengte van lijnstuk PQ gelijk is aan $L = -2p^2 - 10p$.

d De grafiek van L als functie van p is een bergparabool. Bereken het maximum van die functie.

Opgave 8: Maximale oppervlakte van een lijnstuk tussen twee parabolen

Gegeven zijn de kwadratische functies met formules $y_1 = 4 - x^2$ en $y_2 = x^2 - 2x$. Op de grafiek van y_1 ligt het punt P waarvan de x-coördinaat tussen -1 en 2 ligt. Op de grafiek van y_2 ligt het punt Q met dezelfde x-coördinaat als punt P. Het lijnstuk PQ verbindt beide punten.

a Maak een schets van deze situatie. (Of - nog mooier - teken deze situatie in GeoGebra.)

b Als je punt P varieert, verandert ook de lengte van lijnstuk PQ. Bereken de maximale lengte van dit lijnstuk.

Opgave 9: Winstmaximalisatie

In de micro-economie wordt het volgende rekenmodel voor de winst van de verkoop van een bepaald product gehanteerd als het bedrijf de enige aanbieder is.

Het aantal verkochte producten hangt alleen af van de prijs p in euro per stuk. Hoe hoger de prijs, hoe lager de hoeveelheid q die van dit product wordt verkocht per tijdseenheid. Bijvoorbeeld kan per week gelden $q = 500 - 2p$.

De inkoopkosten hangen weer af van de prijs per eenheid en de voorraadkosten. Bijvoorbeeld kan een eenheid product € 5,00 kosten en de voorraadkosten kunnen € 2000,- per week zijn.

Voor de opbrengst als wekelijks de hele voorraad wordt verkocht geldt $TO = p \cdot q$, de wekelijkse kosten noem je TK en de winst is $TW = TO - TK$.

a Waarom is $TO = p \cdot q$?

b Laat zien dat $TW = p(500 - 2p) - (2000 + 5q)$.

Als je in de formule bij b $q = 500 - 2p$ substitueert, dan kun je hem herleiden tot $TW = -2p^2 + 510p - 4500$.

c Laat dat zien.

De winst is in dit rekenmodel een kwadratische functie van p.

d Bereken de maximale winst.

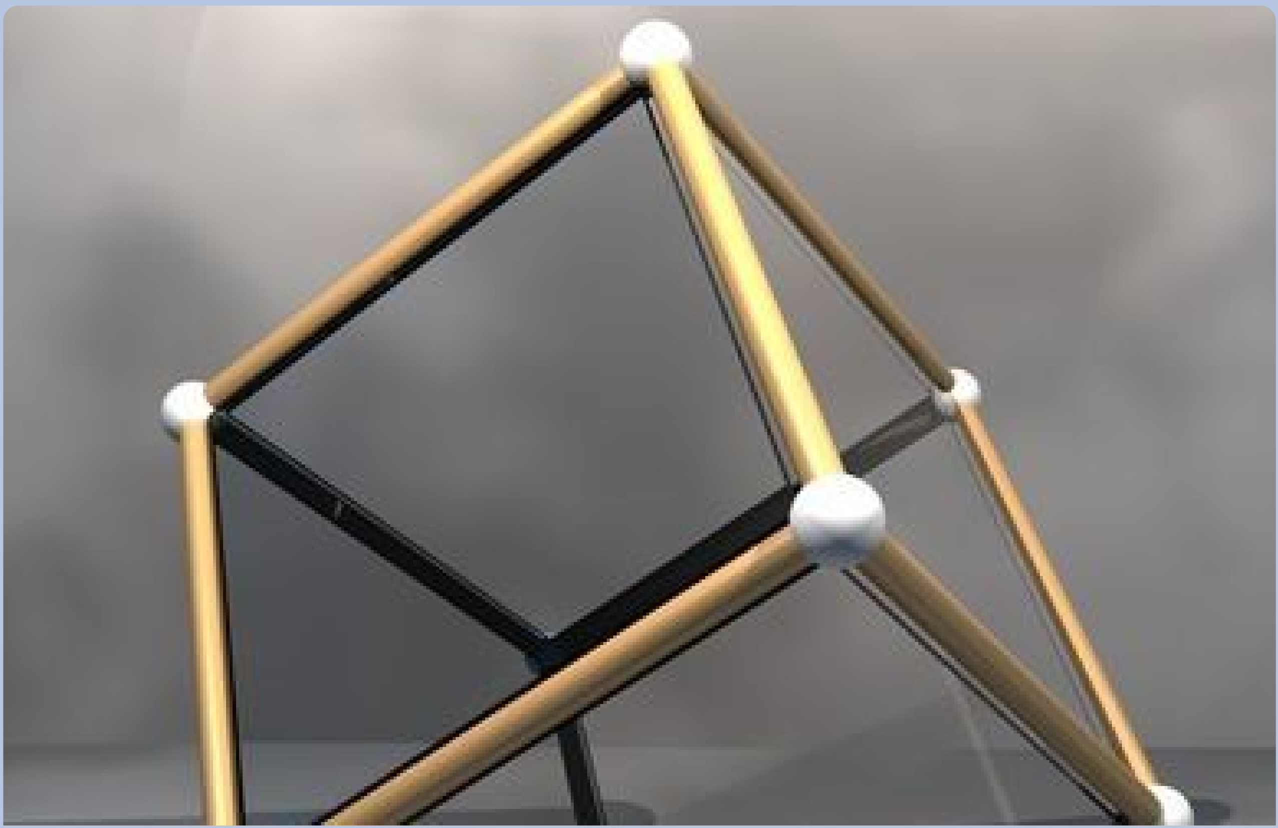
Begrippen

- ruimtelijk figuur (lichaam)) — veelvlak — ribbe — hoekpunt — diagonaalvlakken — zijvlaksdiagonalen — lichaamsdiagonalen;
- parallelprojectie — drieaanzicht — vooraanzicht — zijaanzicht — bovenaanzicht;
- doorsnede — op ware grootte tekenen — kruisende lijnen;
- inhoud (volume) — oppervlakte — lengtevergrotingsfactor — oppervlaktevergrotingsfactor — volumevergrotingsfactor.

Activiteiten

- werken met congruentie, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie in ruimtelijke situaties;
- aanzichten en uitslagen van lichamen maken en die toepassen bij berekeningen, onder andere van de oppervlakte van een lichaam;
- herkennen wanneer er sprake is van een doorsnede van een lichaam en een plat vlak — een doorsnede op ware grootte tekenen — herkennen wanneer lijnen elkaar snijden of kruisen of evenwijdig zijn;
- inhoud en oppervlakte van diverse lichamen berekenen — werken met lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor.

Een doorkijkje



Domein

Meetkunde

Hoofdstuk

Ruimtemeetkunde

Inhoud

3

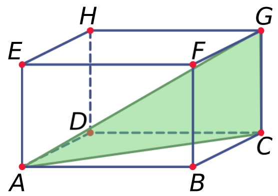
3.1 Lichamen

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 10$ cm, $BC = 4$ cm en $AE = 5$ cm.

Bereken $\angle GAC$.



Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet er een voorbeeld van een prisma. Neem aan dat van het grondvlak alle zijden 4 cm zijn en dat de opstaande ribben allemaal 6 cm lang zijn.

a Hoeveel hoekpunten, hoeveel ribben en hoeveel grensvlakken heeft dit prisma?

b Hoeveel zijvlaksdiagonalen heeft dit prisma? En hoeveel lichaamsdiagonalen?

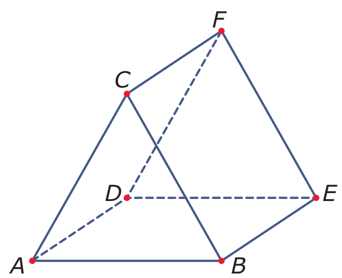
c Teken het grondvlak van dit prisma op ware grootte. Leg uit, waarom diagonaal $BE = 8$ cm en diagonaal $BF = 4\sqrt{3}$ cm.

d Teken het diagonaalvlak $BEKH$ op ware grootte. Bereken de grootte van $\angle EBK$ in graden nauwkeurig.

e Teken het diagonaalvlak $BFLH$ op ware grootte en bereken de grootte van $\angle FBL$ in graden nauwkeurig.

Opgave 2

Je ziet hier een ander prisma, de figuur staat ook op het **werkblad**. Hier zijn het voorvlak en het achtervlak congruente gelijkzijdige driehoeken met zijden van 6 cm. Alle andere grensvlakken zijn vierkanten.



a Waarom heeft dit prisma geen lichaamsdiagonalen?

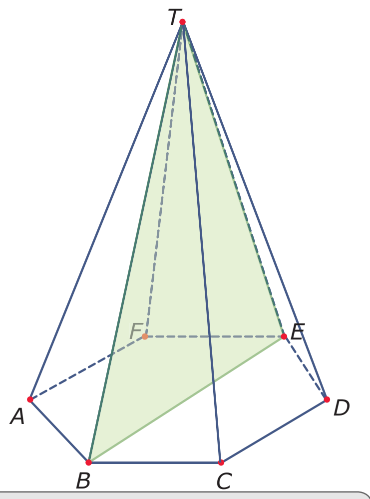
b Hoeveel zijvlaksdiagonalen heeft dit prisma?

c M is het midden van ribbe CF. Teken ΔABM zowel in de figuur als op ware grootte.

d Bereken de grootte van $\angle AMB$ in graden nauwkeurig.

Opgave 3

Het lichaam hiernaast is een regelmatige zeszijdige piramide $ABCDEF.T$. Alle zijden van het grondvlak zijn 6 cm. Alle opstaande ribben zijn 24 cm.



a Heeft deze piramide lichaamsdiagonalen? En zijvlaksdiagonalen? En diagonaalvlakken?

b Bereken de grootte van $\angle BTE$ in graden nauwkeurig.

c Bereken de grootte van $\angle BTF$ in graden nauwkeurig.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Leg uit waarom $AC = 10$ cm.

b Bereken nu zelf de lengtes van AG en CM.

c Welke twee gelijkvormige driehoeken vind je in diagonaalvlak $ACGE$? Leg uit waarom ze gelijkvormig zijn.

d Bereken de lengte van CN.

Opgave 5

Van een kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 4 cm is M het midden van ribbe GH.

a Bereken de lengte van elke lichaamsdiagonaal van deze kubus.

b Bereken de lengte van AM.

Opgave 6

Bekijk de verschillende lichamen nog eens, zie de **Theorie**.

a Bestaat er een veelvlak dat geen enkele diagonaal heeft?

b Hoeveel hoekpunten, ribben en grensvlakken heeft een regelmatig achtzijdig prisma?

Volgens de formule van Euler geldt voor een veelvlak (zonder deuken) dat $G + H = R + 2$ als G het aantal grensvlakken, H het aantal hoekpunten en R het aantal ribben is.

c Voldoet een regelmatig achtzijdig prisma aan de formule van Euler?

d Welke lichamen hebben geen ribben?

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je met behulp van goniometrie een hoek in een ruimtelijke figuur berekent.

a Waarom is ΔNTM gelijkbenig?

b Waarom wordt er in het voorbeeld met tangens gewerkt? Is dat noodzakelijk?

c Bereken $\angle ATC$.

Opgave 8

Een kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribben van 4. P is een punt op ribbe GH en PH = 1 cm. S is het snijpunt van AP en BH.

a Bereken de lengte van AS.

b Bereken de grootte van $\angle ASB$ in graden nauwkeurig.

Opgave 9

Teken de uitslag van de cilinder beschreven in **Voorbeeld 3** op schaal 1:2.

Opgave 10

Teken een uitslag van een regelmatige vierzijdige piramide met een grondvlak van 4 bij 4 cm en een hoogte van 8 cm.

Verwerken

Opgave 11

Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van $4{,}5$ cm.

Bereken de grootte van de hoeken HBD en FCA.

Opgave 12

Piramide $ABCD.T$ heeft vier gelijke opstaande ribben van 10 cm. Het grondvlak is een rechthoek met $AB = 8$ cm en $BC = 6$ cm.

a Bereken de hoogte van deze piramide.

b Bereken de grootte van de hoeken ATC en BAT.

Opgave 13

Balk $ABCD.EFGH$ heeft ribben $AB = 4$, $AD = 3$ en $AE = 3$. Punt S is het snijpunt van alle lichaamsdiagonalen.

a Bereken $\angle ASB$ in graden nauwkeurig.

b Bereken $\angle ASC$ in graden nauwkeurig.

De punten P en Q liggen op ribbe AB. $AP = 1$ en $BQ = 1$. R is het snijpunt van PG en QH.

c Bereken $\angle PRQ$ in graden nauwkeurig.

Opgave 14

Droste chocolaatjes worden onder andere verpakt in kartonnen doosjes zoals je die hiernaast ziet. De bodem van deze doosjes is een regelmatige achthoek met zijden van ongeveer $7,8$ cm. De hoogte van zo'n Droste-doosje is ongeveer $3,3$ cm. Nadat je alle chocolaatjes op hebt haal je het plastic waar ze in hebben gelegen uit het doosje.

a Welke ruimtelijke figuur stelt het doosje bij benadering voor?

b Hoe groot zijn de hoeken van de achthoekige bodem van zo'n doosje?

c Hoe groot is het langste rechte staafje dat je nog op de bodem van dit doosje kunt leggen? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

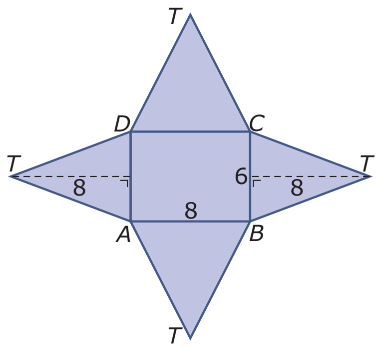
d Hoe groot is het langste rechte staafje dat in dit doosje past?

Opgave 15

Teken een uitslag van een cilinder waarvan hoogte en diameter 10 cm zijn.

Opgave 16

Je ziet hier de uitslag van een vierzijdige piramide $ABCD.T$ met een rechthoekig grondvlak.

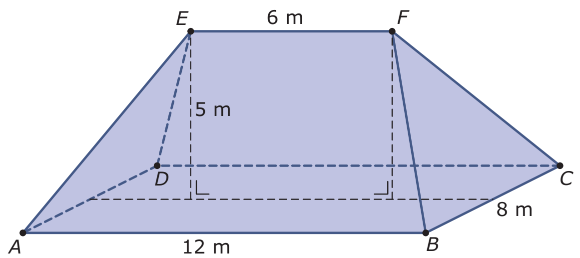


a Hoe lang zijn de ribben van deze piramide?

b Hoe hoog wordt deze piramide?

Toepassen

Hier zie je een vereenvoudigd model van het dak van een stolpboerderij. Het dak is zuiver symmetrisch, dus de ribben AE, DE, BF en CF zijn even lang en EF loopt evenwijdig met AB en CD. Dit is een **samengestelde ruimtelijke figuur**, die bestaat uit een prisma en twee piramides die je tot één piramide kunt samenvoegen.



De hoeken van de verschillende delen van zo'n dak kun je berekenen en ook allerlei lengtes die je nodig hebt om ze op schaal te tekenen zijn te berekenen.

Als je op weg naar huis om je heen kijkt, zul je onderweg daken in verschillende vormen tegenkomen. Bijna altijd valt er met de hulpmiddelen die je in dit onderdeel hebt gebruikt aan te rekenen. En dat is nuttig, al is het maar om te kunnen berekenen hoeveel m^2 aan dakbedekking ervoor nodig is.

Opgave 17: Stolpboerderij

Bekijk het sterk vereenvoudigde dak van een stolpboerderij in **Toepassen**. Gebruik de gegevens in de figuur.

a Laat zien hoe je de figuur kunt verdelen in een prisma en twee piramides die je kunt samenvoegen tot één vierzijdige piramide. Wordt dit een regelmatige vierzijdige piramide?

b Bereken de lengtes van de vier opstaande ribben van dit stolpdak.

c Bereken de drie hoeken van elk van de twee driehoekige dakdelen.

d Bereken de vier hoeken van elk van de twee trapeziumvormige dakdelen.

3.2 Aanzichten

Verkennen

Opgave V1

In de zie je drie aanzichten van een lichaam zonder deuken of gaten.

Om wat voor lichaam gaat het hier waarschijnlijk? Maak er een uitslag van en beschrijf de daarvoor noodzakelijke berekeningen.

Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet er een regelmatig zeszijdig prisma. Neem aan dat van het grondvlak alle zijden 4 cm zijn en dat de opstaande ribben allemaal 6 cm lang zijn. Op het **werkblad** bij deze opgave zie je de aanzichten van het prisma met enkele hoekpunten erbij aangegeven.

a Het vooraanzicht is 6 cm hoog. Hoe breed is de totale breedte van het vooraanzicht?

b Het zijaanzicht is ook 6 cm hoog. Hoe breed is de totale breedte van het zijaanzicht?

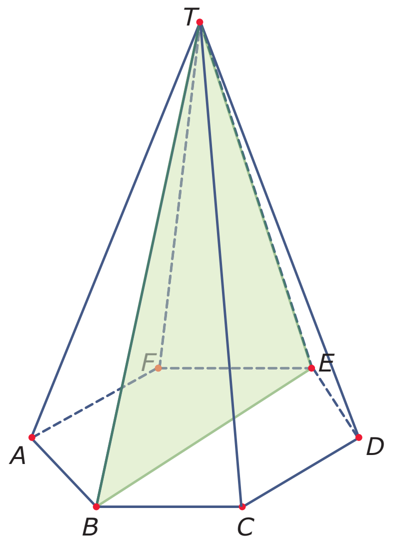
c In welk aanzicht is een opstaand grensvlak op ware grootte getekend?

d Zet bij de aanzichten op het werkblad de letters op de juiste plek bij de hoekpunten.

e Teken in de aanzichten het diagonaalvlak $BEKH$.

Opgave 2

Het lichaam hiernaast is een regelmatige zeszijdige piramide $ABCDEF.T$. Alle zijden van het grondvlak zijn 4 cm. Alle opstaande ribben zijn 12 cm.



a Bereken de hoogte van deze piramide.

b Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van deze piramide op schaal $1:2$.

c Zet de letters van de hoekpunten op de goede plaats in de aanzichten.

d Welke opstaande ribben worden op ware grootte weergegeven? En in welk aanzicht?

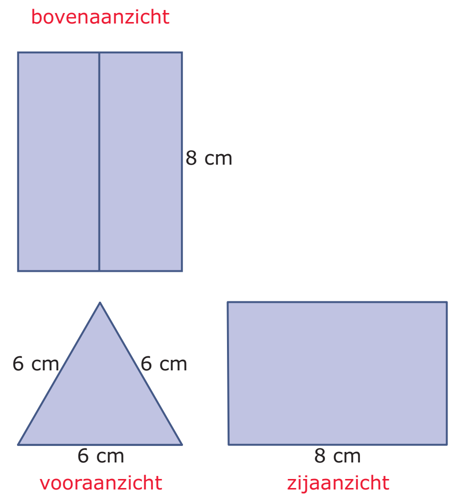
e Geef het getekende diagonaalvlak in de aanzichten weer.

Opgave 3

Je ziet hier een drieaanzicht van een lichaam. De figuur staat ook op een **werkblad**.

a Om wat voor lichaam gaat het hier?

b Bij het zijaanzicht ontbreekt een afmeting. Hoe groot moet de hoogte ervan zijn?



c De figuur krijgt de naam $ABE.DCF$. Zet in de aanzichten de letters bij de juiste hoekpunten.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** wordt een drieaanzicht van een doos getekend.

a Teken dit drieaanzicht zelf op schaal $1:20$.

De figuur is een prisma $ABCDE.FGHIJ$. Hierin is vijfhoek $ABCDE$ het voorvlak, met $AB = BC = 6$ dm en $AE = 4$ dm.

b Zet de letters in je drieaanzicht op de juiste plek.

c Bereken nu de hoogte van de voorkant van de doos, dus de hoogte van punt E boven lijn BC in mm nauwkeurig.

d Bereken de grootte van $\angle AED$ in graden nauwkeurig.

Opgave 5

Van een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ zijn alle ribben 4 cm.

Teken een drieaanzicht van deze piramide.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Waarom volgt uit de gegevens dat $b \cdot h = 12$ en $l \cdot h = 8$?

b Er worden drie oplossingen gegeven die correct zijn. Zijn er nog meer correcte oplossingen?

c Waarom is de combinatie 1, 12, 4 bijvoorbeeld niet correct?

Opgave 7

Het vooraanzicht van een balk bestaat uit 30 kubusjes en het linker zijaanzicht uit 21.

Uit hoeveel kubusjes bestaat de balk?

Opgave 8

Een balk bestaat in totaal uit 432 kubusjes. Het vooraanzicht bestaat uit 72 kubusjes.

Uit hoeveel kubusjes kan het zijaanzicht dan bestaan?

Opgave 9

Het bovenaanzicht van een balk bestaat uit 44 kubusjes en het vooraanzicht uit 66.

Uit hoeveel kubusjes bestaat de balk?

Opgave 10

In **Voorbeeld 3** zie je twee aanzichten van een lichaam.

a Hoe ziet het vooraanzicht van dit lichaam er uit? En waarom weet je dat zeker?

b Waarom is de hoogte van het vooraanzicht niet gelijk aan de hoogte van de driehoek ABT? Laat zien hoe je daarvan de hoogte berekend.

c Bereken de totale oppervlakte van dit lichaam, zowel exact als in mm^2 nauwkeurig.

Opgave 11

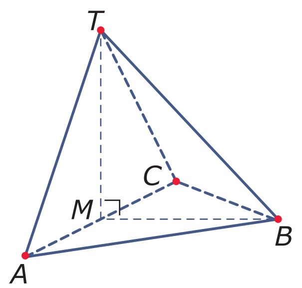
Van een veelvlak is het bovenaanzicht een gelijkzijdige driehoek met zijden van 4 cm en het vooraanzicht een vierkant met zijden van 4 cm.

Welk veelvlak is dit? Bereken er de totale oppervlakte van.

Verwerken

Opgave 12

Je ziet hier een piramide $ABC.T$ waarvan het grondvlak ABC een gelijkzijdige driehoek met zijden van 6 cm is. De top T ligt recht boven het midden M van ribbe AC. De ribben AT en CT zijn allebei 5 cm lang.



a Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van deze piramide.

b Bereken de lengte van ribbe BT.

c Bereken de grootte van $\angle MTB$ in graden nauwkeurig.

Opgave 13

Een veelvlak $ABC.DEF$ heeft als vooraanzicht een vierkant met zijden van 4 cm en als zijaanzicht een gelijkbenige driehoek waarvan de basis ook 4 cm is.

Teken het bovenaanzicht van dit veelvlak en bereken er de oppervlakte van.

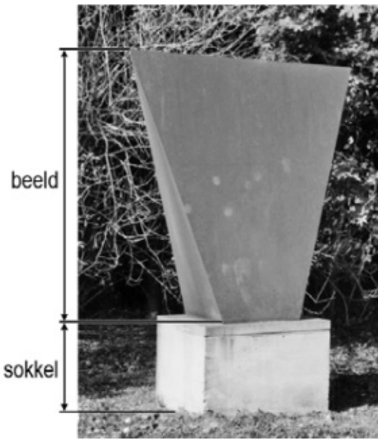
Opgave 14

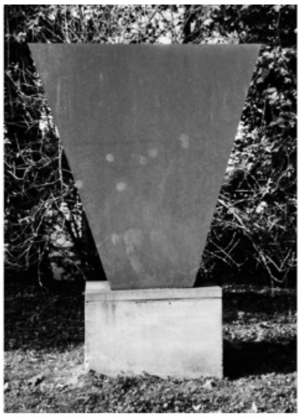
Het vooraanzicht van een balk bestaat uit 40 kubusjes en het bovenaanzicht uit 24 kubusjes.

Uit hoeveel blokjes kan dit lichaam minimaal bestaan? En maximaal?

Opgave 15

In het beeldenpark in Zwijndrecht staan verschillende beelden. Eén van die beelden is het beeld op de foto hieronder. De onderkant van het beeld dat op de sokkel staat, is een vierkant met zijden van 50 cm. Het beeld is 100 cm hoog en de lengte van de bovenkant is 100 cm lang. Het vooraanzicht en het zijaanzicht zijn symmetrisch.





vooraanzicht

zijaanzicht

a Teken een bovenaanzicht van dit beeld op schaal $1:10$.

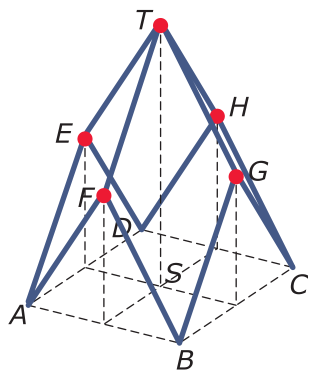
Het grondvlak van dit beeld is een vierkant $ABCD$. De bovenkant is een ribbe EF. In het vooraanzicht zie je de punten A, B en E.

b Bereken de lengte van ribbe BE in mm nauwkeurig.

c Als het beeld in de verf zou worden gezet, hoeveel cm^2 verf is daar dan voor nodig?

Opgave 16

Op de foto hieronder zie je kinderen spelen op een speeltoestel. Het speeltoestel is een constructie van metalen buizen waarin een net is gespannen. Op de tekening ernaast zie je de metalen constructie die bestaat uit vier even grote ruiten. Elke zijde van zo'n ruit is 3 meter lang. Elk van die ruiten heeft bij het punt op de grond een hoek van $60°$. Alle verticale stippellijnen staan loodrecht op vierkant $ABCD$.

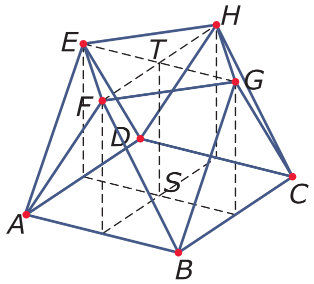


a Teken een bovenaanzicht van de metalen constructie op schaal $1 : 10$.

b Bereken hoe hoog punt T boven de grond zit, dus de lengte van TS in cm nauwkeurig.

Toepassen

Dit is een draadmodel van een achtkanter. Dat is een symmetrisch lichaam waarvan het grondvlak een vierkant $ABCD$ is met zijden van 8 cm en ook het bovenvlak $EFGH$ een vierkant is. Alle opstaande grensvlakken zijn gelijkbenige driehoeken met ribben van 6 cm.



Van deze achtkanter liggen alle hoekpunten van het bovenvlak recht boven de middens van de zijden van het grondvlak. Dat maakt alle aanzichten eenvoudig...

Opgave 17: Achtkanter (I)

Bekijk de achtkanter in **Toepassen**. Gebruik de gegevens in de tekst.

a Bereken de zijden van het bovenvlak $EFGH$.

b Bereken de hoeken van ΔBGF.

c Teken een drieaanzicht van deze achtkanter. Zet de letters van de hoekpunten op de juiste plaats in je figuur.

d Stel je voor dat deze achtkanter massief zou zijn. Hoe groot bedraagt dan zijn totale buitenoppervlakte?

Opgave 18: Achtkanter (II)

Van een andere achtkanter is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijden van 8 cm en het bovenvlak $EFGH$ een vierkant met zijden van 4 cm.
De zijden van alle opstaande gelijkbenige driehoeken zijn ook nu 6 cm.

a Bereken van deze achtkanter de hoogte TS.

b Teken een drieaanzicht van deze achtkanter. Zet weer de letters van de hoekpunten op de juiste plaats in je figuur.

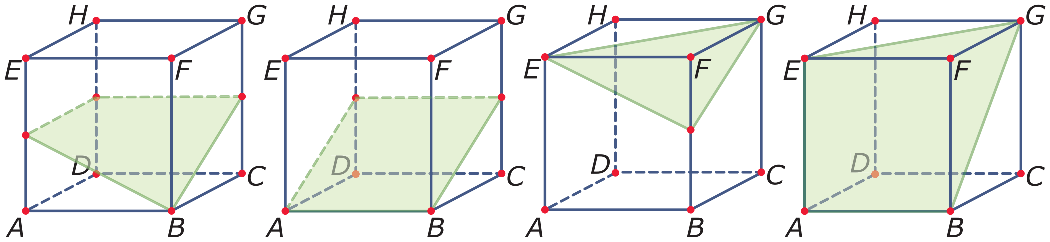
c Stel je voor dat deze achtkanter massief zou zijn. Hoe groot bedraagt dan zijn totale buitenoppervlakte?

3.3 Doorsneden

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier en op het **werkblad** vier kubussen met ribben van 2 cm. Joop heeft geprobeerd om in elke kubus te laten zien hoe een bepaald plat vlak de kubus doorsnijdt.



figuur I figuur II figuur III figuur IV

a Welke tekeningen zijn dan fout? En waarom?

b Verbeter de foute figuren.

c Welke vorm heeft de doorsnede van figuur II in werkelijkheid? En welke afmetingen?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de kubussen in de **Uitleg**. Je ziet dat in de bovenste kubus een vlak $APGQ$ is getekend.

a Teken het aanzicht van de bovenste kubus waarbij je kijkt in de richting van BD met het vlak $APGQ$ er in. Waaraan zie je dat $APGQ$ een plat vlak is?

b Kun je van de onderste kubus een aanzicht tekenen waarbij de punten A, P, G en H op één lijn liggen?

c Waarom zijn de zijden van $APGQ$ in twee overstaande vlakken van de kubus evenwijdig? En waarom zijn ze dus ook gelijk?

d Teken de doorsnede $APGQ$ op ware grootte.

e Bereken de lengte van diagonaal AG.

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt gesproken over kruisende lijnen.

a Waarom zijn de lijnen AH en PG kruisend?

b Zijn de lijnen AP en HG kruisend, of snijdend? (Denk er om dat deze lijnen ook buiten de lijnstukken AP en HG doorlopen.)

c Zijn de lijnen AP en EF kruisend, of snijdend?

Opgave 3

In kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 6 cm is vierhoek $KCGL$ een doorsnede van een plat vlak met de kubus. Punt K is het midden van ribbe AB.

a Waarom is driehoek KCG geen complete doorsnede van een vlak met deze kubus?

b Waarom moet punt L het midden van ribbe EF zijn?

c Teken de doorsnede $KCGL$ op ware grootte.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** is een doorsnede van een plat vlak met een balk getekend. Je wilt die doorsnede op ware grootte tekenen.

a Bereken de lengte van DG en die van DP.

b Verklaar waarom de driehoeken PBQ en DCG gelijkvormig zijn.

c Reken nu de lengtes van PQ en QG na.

d Bereken de lengte van diagonaal PG.

e Teken trapezium $DPQG$ op ware grootte.

Opgave 5

Gegeven is balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm en $BF = 5$ cm. M is het midden van AE, N is het midden van CG en K ligt op BF met $BK = 1$ cm.

a Is $HMKN$ een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.

b Is KEG een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.

c Is KMN een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.

Vierhoek $HMBN$ is een doorsnede van een vlak met de gegeven balk.

d Teken deze vierhoek op ware grootte. Schrijf alle noodzakelijke berekeningen op.

Opgave 6

Gegeven is balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm en $BF = 5$ cm. M is het midden van AE, N is het midden van CG.

Er worden nu steeds twee lijnen gegeven. Schrijf op of ze elkaar snijden, evenwijdig zijn of elkaar kruisen.

a MH en BN.

b MB en HC.

c AE en HG.

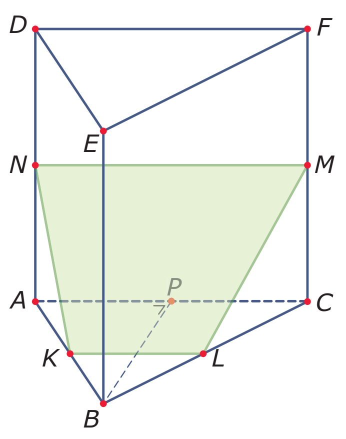
d MF en AB.

e MN en HB.

f CM en AF.

Opgave 7

Hier zie je een regelmatig driezijdig prisma $ABC.DEF$ waarvan alle zijden 8 cm lang zijn. De punten P, K, L, M en N zijn steeds de middens van de ribben waar ze op liggen.



a Waarom is vierhoek $KLMN$ de doorsnede van een vlak met dit prisma?

b Teken vierhoek $KLMN$ op ware grootte. Schrijf alle daarvoor noodzakelijke berekeningen op.

c Bereken (als je dat bij b nog niet hebt gedaan) alle hoeken van vierhoek $KLMN$ in graden nauwkeurig.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** zie je dat de doorsnede van een plat vlak met een kubus een zeshoek kan zijn.

a Waarom weet je zeker dat hier sprake is van een doorsnede van een kubus en een plat vlak?

b Hoe teken je deze zeshoek op ware grootte?

c Kan de doorsnede van een vlak en een kubus ook een vijfhoek zijn? Schets of beschrijf daarvan een voorbeeld.

d Geef ook voorbeelden waarbij de doorsnede van een vlak en een kubus een vierhoek of een driehoek is.

Opgave 9

In een kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 8 cm is een doorsnede $KLMH$ getekend. Hierin ligt punt K op ribbe AE zo, dat $AK : KE = 3 : 1$. Verder ligt punt M op ribbe CG zo, dat $CM : MG = 3 : 1$.

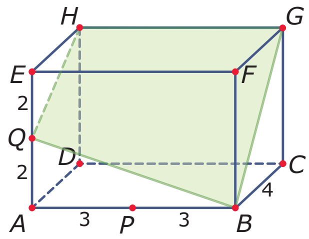
a Waarom moet punt L dan het midden zijn van ribbe BF?

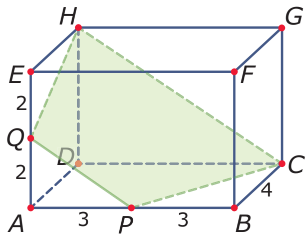
b Teken deze vierhoek op ware grootte. Schrijf de noodzakelijke berekeningen op.

Verwerken

Opgave 10

Je ziet hier in balk $ABCD.EFGH$ twee keer een figuur getekend die vier hoekpunten heeft.



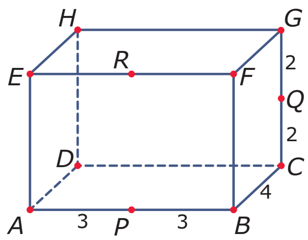


Leg uit bij welke van beide figuren er sprake is van de doorsnede van een plat vlak en de getekende balk. Licht je antwoord toe.

Opgave 11

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met daarin de punten P, Q en R die alle drie het midden van een ribbe van de balk vormen.

Schrijf van de volgende lijnen op of ze elkaar snijden, elkaar kruisen, of evenwijdig zijn. Licht je antwoord toe.



a PQ en BF.

b PQ en RG.

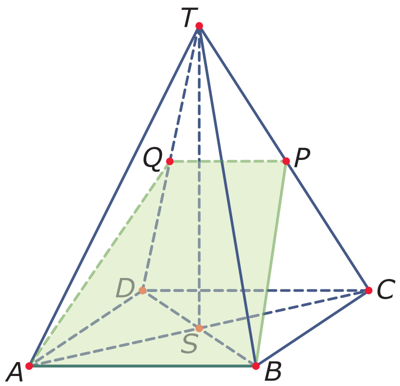
c PR en GH.

d RG en PC.

e PC en AD.

Opgave 12

Van de regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ is punt P het midden van ribbe CT en punt Q het midden van ribbe DT. Verder is gegeven dat $AB = BC = 8$ cm en $AT = 12$ cm.



a Bereken de lengte van lijnstuk BP.

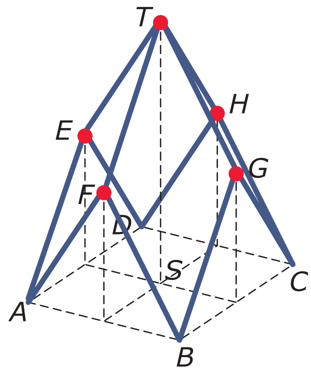
Vierhoek $ABPQ$ is de doorsnede van de piramide met een vlak.

b Teken deze doorsnede op ware grootte.

c Bereken de hoeken van vierhoek $ABPQ$ in graden nauwkeurig.

Opgave 13

Op de foto hieronder zie je kinderen spelen op een speeltoestel. Het speeltoestel is een constructie van metalen buizen waarin een net is gespannen. Op de tekening ernaast zie je de metalen constructie die bestaat uit vier even grote ruiten. Elke zijde van zo'n ruit is 3 meter lang. Elk van die ruiten heeft bij het punt op de grond een hoek van $60°$. Alle verticale stippellijnen staan loodrecht op vierkant $ABCD$. De vier ruiten vormen samen met de vier opstaande driehoeken en het vierkante grondvlak een lichaam.



a Bereken de hoeken van dwarsdoorsnede ACT van dit lichaam in graden nauwkeurig.

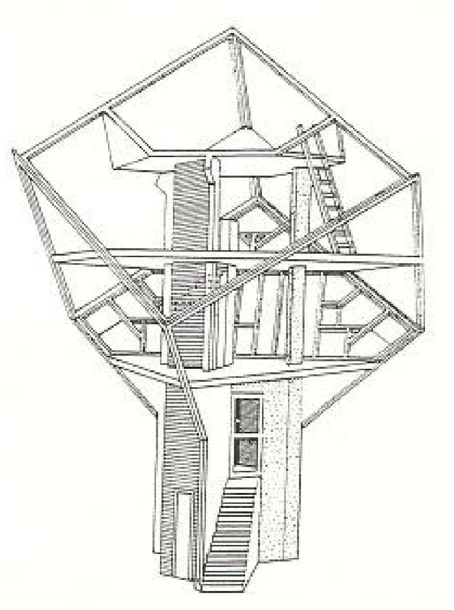
Neem aan dat M het midden van AD en N dat van BC is.

b Teken de dwarsdoorsnede $MNGTE$ van dit lichaam op ware grootte.

Toepassen

De **kubuswoning** ontworpen door architect Piet Blom is beroemd. In Helmond en in Rotterdam zijn van deze kubuswoningen gebouwd. Hiernaast zie je een opengewerkt model. Het betreft in grote lijnen een kubus die op zijn punt staat, er zitten dus twee hoekpunten die zijn verbonden met een lichaamsdiagonaal recht boven elkaar. Deze kubus staat op een brede paal waarin zich de toegang bevindt.

In de kubuswoning zitten drie vloeren, de onderste vloer is driehoekig, de middelste zeshoekig en de bovenste eigenlijk weer driehoekig, maar daar zijn opstaande driehoekige wanden gemaakt die evenwijdig lopen met vlakken van de kubus.



Opgave 14: Kubus op zijn punt

Bekijk het opengewerkte model van een kubuswoning in **Toepassen**. Je gaat dit model zelf tekenen met behulp van het **werkblad**.

a Maak de kubus op zijn punt (die lijkt op het hierboven getekende model) af.

Neem aan dat de middelste vloer de middens van de ribben met elkaar verbindt.

b Teken die vloer in jouw kubus.

Neem aan dat de bovenste vloer halverwege de middelste vloer en de top van de kubus zit. Er zijn drie opstaande driehoekige zijwanden op gemaakt.

c Teken deze vloer in je kubus inclusief de opstaande zijwanden.

Opgave 15: Rekenen aan de kubuswoning

Je hebt in de voorgaande opgave zelf een eenvoudige kubuswoning getekend. Ga er weer van uit dat de middelste verdiepingsvloer de middens van de ribben verbindt en dat de bovenste verdiepingsvloer halverwege de middelste verdiepingsvloer en de top van de kubus zit. Neem aan dat de hoogte tussen de bovenste twee verdiepingsvloeren $2{,}50$ m is.

a Hoe hoog zit dan de top van de kubus boven de onderste punt ervan?

b Hoe groot zijn dan alle ribben van de kubus?

c De hoek tussen de lijnstukken AH en AG is de hoek die alle grensvlakken van de kubus met de verticale lijn AG maken. Bereken deze hoek in tienden van graden nauwkeurig.

3.4 Oppervlakte en inhoud

Verkennen

Opgave V1

In deze tabel zie je een aantal bekende formules voor het berekenen van een omtrek, een oppervlakte, of een inhoud. Ernaast staan de betekenissen van die formules, maar die staan niet in de juiste volgorde.

formule		betekenis	
1	0,5 × basis × hoogte	a	omtrek cirkel
2	lengte × breedte × hoogte	b	oppervlakte rechthoek
3	grondvlak × hoogte	c	oppervlakte driehoek
4	2π × straal	d	oppervlakte parallellogram
5	lengte × breedte	e	oppervlakte cirkel
6	$\frac{1}{3}$ × grondvlak × hoogte	f	inhoud balk
7	basis × hoogte	g	inhoud prisma
8	π × straal^2	h	inhoud piramide

Geef bij elke formule de juiste omschrijving.

Theorie

Opgave 1

Bekijk de drie lichamen in de **Uitleg**. De inhoud, het volume, van een lichaam is het aantal eenheidskubusjes dat er in past. Bij een balk en een prisma bepaal je dan eerst het aantal eenheidskubussen op het grondvlak en dan vermenigvuldig je met het aantal lagen, de hoogte, van de balk, het prisma. Zo krijg je de formule $V = G \cdot h$, waarin V het volume, G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

a Laat zien, dat de formule $V = G \cdot h$ zowel bij de balk als bij het prisma tot de juiste inhoud leidt.

De oppervlakte van een lichaam is de oppervlakte van de uitslag van dat lichaam.

b Bereken de oppervlakte van de balk.

c Bereken de oppervlakte van het prisma.

d Neem nu eens aan dat de afmetingen van deze figuren 3 keer zo groot worden. Hoeveel keer zo groot wordt dan hun inhoud? En hun oppervlakte? Licht je antwoord toe.

Opgave 2

Bekijk de drie lichamen in de **Uitleg**. Vergelijk de getekende piramide met het getekende prisma.

a Ga na, dat het prisma kan worden verdeeld in de piramides $ACD.H$, $CGH.E$ en $AHE.C$.

b Ga ook na, dat voor elk van deze piramides geldt dat $G \cdot h = 36$ waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

c Leg uit dat de inhoud van piramide $ACD.H$ daarom $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ moet zijn. Bereken deze inhoud.

Opgave 3

Er zijn ook lichamen met gebogen grensvlakken. Een cilinder en een kegel bijvoorbeeld hebben ook een grondvlak met oppervlakte G en een hoogte h.

a Waarom zal de formule voor de inhoud van een cilinder $V(\text{cilinder}) = G \cdot h$ zijn?

b Bereken de inhoud van een cilinder met een diameter van 4 cm en een hoogte van 5 cm.

c Waarom zal de formule voor de inhoud van een kegel $V(\text{kegel}) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ zijn?

d Bereken de inhoud van een kegel met een diameter van 4 cm en een hoogte van 5 cm.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** worden de inhoud en de oppervlakte van een cilinder met gegeven diameter en straal berekend. Neem nu een cilinder met diameter en hoogte precies 2 keer zo groot.

a Laat zien dat de inhoud van deze cilinder $2^3 = 8$ keer zo groot is als die van de cilinder in het voorbeeld.

b Leg uit hoe de oppervlakte van de cilinder in het voorbeeld wordt berekend.

c Laat zien dat de oppervlakte van de cilinder in deze opgave $2^2 = 4$ keer zo groot is als die van de cilinder in het voorbeeld.

Opgave 5

Een cilindervormig groentenblik heeft een straal van 6 cm en een hoogte van 16 cm. Het blik is gemaakt van metaal met een dikte van 1 mm. De straal en de hoogte zijn gemeten aan de binnenkant van het blik. Je wilt de hoeveelheid metaal die voor dit blik nodig is berekenen als er een plastic deksel op zit.

Je kunt dit op twee manieren doen: de oppervlakte van het blik berekenen en die met de dikte vermenigvuldigen, of van de inhoud van een blik met een straal van $6{,}1$ cm en een hoogte van $16{,}1$ cm de inhoud van een blik met straal 6 cm en hoogte 16 cm aftrekken.

Voer beide berekeningen uit en geef je antwoord in mm^3 nauwkeurig. Waardoor ontstaat het verschil tussen beide antwoorden?

Opgave 6

Van een cilinder is het vooraanzicht een rechthoek met een oppervlakte van 75 cm^2. Het bovenaanzicht is een cirkel met een oppervlakte van 60 cm^2.

Bereken de hoogte van de cilinder in mm nauwkeurig.

Opgave 7

Van een cilindervormig literblik zijn hoogte en diameter gelijk.

Bereken de hoogte van de cilinder in mm nauwkeurig.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je de inhoud en de oppervlakte van een prisma kunt berekenen.

a Leg uit hoe de oppervlakte van de vijfhoek die als ‘grondvlak’ dient, kan worden berekend.

b Reken nu de gevonden inhoud van de doos zelf na.

c Bereken de totale oppervlakte van de doos.

Opgave 9

Van een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ is $AB = 4$ cm en $AT = 6$ cm.

Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze piramide.

Opgave 10

Van een regelmatige vierzijdige piramide zijn alle ribben even lang. De oppervlakte van deze piramide is 1000 cm^2.

Hoe lang zijn de ribben van deze piramide in mm nauwkeurig?

Opgave 11

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je de inhoud van een kegel kunt berekenen.

a Bereken de inhoud van een kegel waarvan de straal 5 cm en de hoogte 10 cm is.

b Hoeveel bedraagt de inhoud van een kegel waarvan de afmetingen half zo groot zijn als die bij a?

c In welke kegel kan meer: een kegel waarvan de straal van het grondvlak 5 en de hoogte 10 is, of een kegel waarvan de straal 10 en de hoogte 5 is? Verklaar je antwoord.

d In welke kegel kan meer: een kegel waarvan de straal van het grondvlak a en de hoogte b is, of een kegel waarvan de straal b en de hoogte a is? Verklaar je antwoord.

Opgave 12

In een betonblok in de vorm van een kubus met ribben van 50 cm wordt een kegelvormig gat geboord. Dit kegelvormige gat heeft een diameter van 15 cm en een diepte van 40 cm. Uit hoeveel cm^3 beton bestaat dit betonblok met gat?

Verwerken

Opgave 13

Verfblikken zijn er in allerlei maten. In deze opgave wordt uitgegaan van een wiskundig model van een verfblik: een cilinder met een cirkel als bodem en een cirkel als deksel. Houd geen rekening met de dikte van het blik.

Een verfblik heeft een hoogte van 14 cm en een straal van 8 cm.

a Bereken hoeveel cm^3 de inhoud van het verfblik is. Rond je antwoord af op een geheel getal.

b Teken op schaal $1 : 4$ de uitslag van dit verfblik. Schrijf op hoe je de maten van je tekening gevonden hebt.

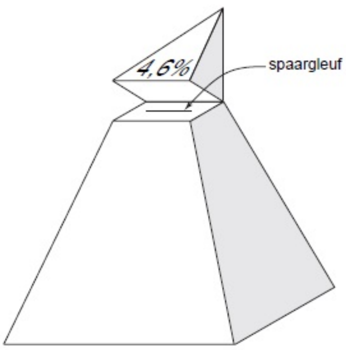
c Als je de straal van een blik verdubbelt en de hoogte halveert, blijft de inhoud van het blik dan hetzelfde? Laat zien hoe je het antwoord hebt gevonden.

Er zijn blikken nodig met een inhoud van 2500 cm^3. De blikken worden zo gemaakt dat er zo weinig mogelijk metaal voor nodig is. De hoeveelheid metaal die nodig is voor een blik, is zo klein mogelijk als de hoogte van het blik 2 keer zo groot is als de straal.

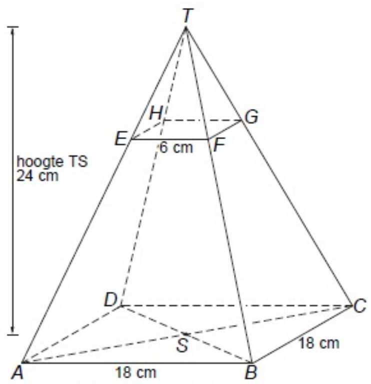
d Bereken hoeveel cm de straal en de hoogte van dit blik zijn. Geef je antwoorden in één decimaal.

Opgave 14

Een spaarpot heeft de vorm van een regelmatige piramide met een vierkant grondvlak. In de linkerfiguur hieronder zie je een tekening van de spaarpot. Daarnaast staat een wiskundig model met de maten van de spaarpot.



spaarpot



wiskundig model

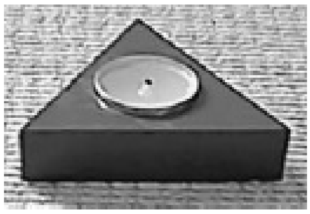
De spaarpot heeft een deksel. Dat is piramide $T.EFGH$. Het scharnier, waarom de deksel omgeklapt kan worden, is lijnstuk HG.

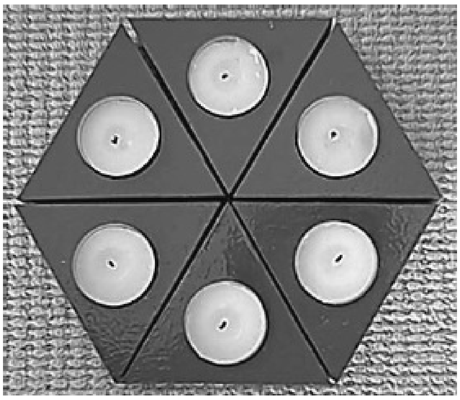
a De bank die deze spaarpot cadeau geeft beweert dat de inhoud van de deksel $4{,}6\%$ van de inhoud van de hele piramide is. Laat met een berekening zien dat dit niet waar is.

b De spaarpot wordt cadeau gegeven in de vorm van een bouwplaat. Hoeveel oppervlakte aan karton is er nodig voor deze spaarpot? Houd geen rekening met de opening om geld in te doen en geef je antwoord in cm^2 nauwkeurig.

Opgave 15

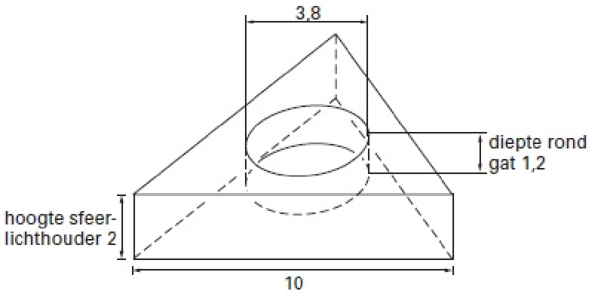
Op de foto hiernaast zie je een houder waarin een sfeerlichtje zit. Deze sfeerlichthouder heeft de vorm van een prisma met een gelijkzijdige driehoek als grondvlak. Op de foto hieronder zie je het bovenaanzicht van een figuur gemaakt van zes van deze sfeerlichthouders.





a Geef de kleinste hoek in graden waarover dit bovenaanzicht draaisymmetrisch is.

Hieronder zie je een tekening van de sfeerlichthouder. De sfeerlichthouder is massief en gemaakt van kunststof. De zijden van het driehoekige grondvlak zijn 10 cm. De hoogte van de sfeerlichthouder is 2 cm. Precies in het midden van de sfeerlichthouder zit een rond gat voor het sfeerlichtje. De diameter van dit gat is $3{,}8$ cm en de diepte is $1{,}2$ cm.



b Bereken in hele cm^3 hoeveel kunststof er nodig is om deze sfeerlichthouder te maken.

Opgave 16

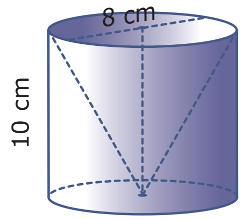
Droste chocolaatjes worden onder andere verpakt in kartonnen doosjes zoals je die hiernaast ziet. De bodem van deze doosjes is een regelmatige achthoek met zijden van ongeveer $7{,}8$ cm. De hoogte van zo'n Droste-doosje is ongeveer $3{,}3$ cm. Nadat je alle chocolaatjes op hebt haal je het plastic waar ze in hebben gelegen uit het doosje.

a Bereken de inhoud van het doosje in cm^3 nauwkeurig.

b Een model van dit Drostedoosje is een regelmatig achthoekig prisma met opstaande ribben van $3{,}3$ cm en andere ribben van $7{,}8$ cm. Bereken de oppervlakte van zo'n prisma in cm^2 nauwkeurig.

Opgave 17

Je ziet hier een cilindervormige plastic bak waar een kegel uit is weggesneden.

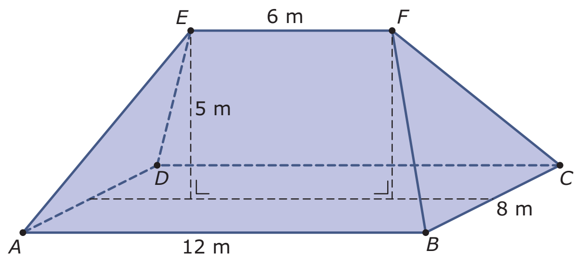


a Bereken de hoeveelheid plastic die hiervoor nodig is.

b Bereken de hoeveelheid plastic die nodig is voor eenzelfde bak waarvan alle afmetingen $1{,}5$ keer zo groot zijn.

Toepassen

Hier zie je een vereenvoudigd model van het dak van een stolpboerderij. Het dak is zuiver symmetrisch, dus de ribben AE, DE, BF en CF zijn even lang en EF loopt evenwijdig met AB en CD. Dit is een **samengestelde ruimtelijke figuur**, die bestaat uit een prisma en twee piramides die je tot één piramide kunt samenvoegen.



De hoeken van de verschillende delen van zo'n dak kun je berekenen en ook allerlei lengtes die je nodig hebt om ze op schaal te tekenen zijn te berekenen.

Als je op weg naar huis om je heen kijkt, zul je onderweg daken in verschillende vormen tegenkomen. Bijna altijd valt er met de hulpmiddelen die je in dit onderdeel hebt gebruikt aan te rekenen. En dat is nuttig, al is het maar om te kunnen berekenen hoeveel m^2 aan dakbedekking ervoor nodig is.

Opgave 18: Stolpboerderij: volume onder het dak

Bekijk het sterk vereenvoudigde dak van een stolpboerderij in **Toepassen**. Gebruik de gegevens in de figuur.

Bereken het volume onder dit dak en boven de zoldervloer.

Opgave 19: Stolpboerderij: dakoppervlak

Gebruik de gegevens in de figuur van het dak van de stolpboerderij hierboven.

Bereken de oppervlakte van het dak.

3.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je gezien hoe je alle meetkundige basistechnieken zoals het werken met congruente en gelijkvormige figuren, de stelling van Pythagoras en goniometrie kunt toepassen in ruimtelijke situaties, in 3D-situaties. De belangrijkste termen uit de ruimtemeetkunde worden herhaald. Dit onderwerp is vooral van belang voor leerlingen die in de bovenbouw met wiskunde B verder gaan.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **'Ruimtemeetkunde'** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3 en 4 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

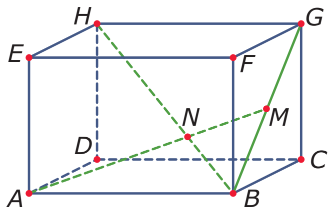
- ruimtelijk figuur (lichaam)) — veelvlak — ribbe — hoekpunt — diagonaalvlakken — zijvlaksdiagonalen — lichaamsdiagonalen;
- parallelprojectie — drieaanzicht — vooraanzicht — zijaanzicht — bovenaanzicht;
- doorsnede — op ware grootte tekenen — kruisende lijnen;
- inhoud (volume) — oppervlakte — lengtevergrotingsfactor — oppervlaktevergrotingsfac — volumevergrotingsfactor.

Activiteiten

- werken met congruentie, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie in ruimtelijke situaties;
- aanzichten en uitslagen van lichamen maken en die toepassen bij berekeningen, onder andere van de oppervlakte van een lichaam;
- herkennen wanneer er sprake is van een doorsnede van een lichaam en een plat vlak — een doorsnede op ware grootte tekenen — herkennen wanneer lijnen elkaar snijden of kruisen of evenwijdig zijn;
- inhoud en oppervlakte van diverse lichamen berekenen — werken met lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor.

Opgave 1

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm en $CG = 8$ cm. Punt M is het midden van lijnstuk BG en punt N is het snijpunt van AM en HB.



Bereken de lengte van lijnstuk AN en de grootte van $\angle ANB$ in graden nauwkeurig.

Opgave 2

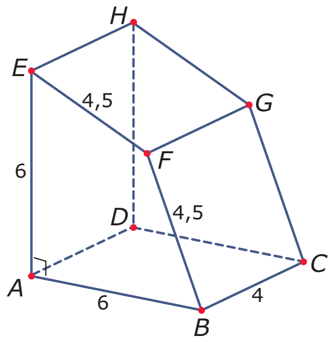
Van een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ is het grondvlak een vierkant met zijden van 5 en is de hoogte 10 cm.

Bereken de hoeken van de opstaande zijvlakken.

Opgave 3

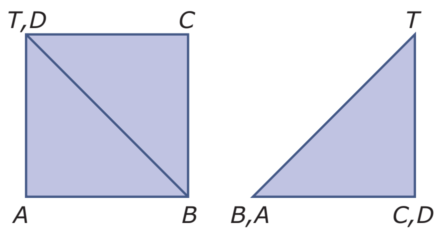
Hier zie je een vierzijdig prisma met een rechte hoek bij hoekpunt A. Alle lengtes zijn gegeven in cm.

Teken een drieaanzicht van dit prisma.



Opgave 4

In de figuur hieronder zie je het bovenaanzicht en het zijaanzicht van een veelvlak.



Wat voor veelvlak betreft het hier? Maak er een schets van.

Opgave 5

Bekijk de balk van **Opgave 1** nog eens.

Leg uit waarom de lijnen EG en AM elkaar kruisen.

Opgave 6

Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm en $CG = 8$ cm. Punt M is het midden van ribbe AB en punt N is het midden van ribbe GH.

Leg uit waarom $EMCN$ een doorsnede van een vlak met deze balk is en teken deze vierhoek op ware grootte.

Opgave 7

Van welk lichaam is het volume het grootst: een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle zijden 4 cm lang zijn, of een kegel waarvan het grondvlak een diameter van 4 cm heeft en de hoogte ook 4 cm is?

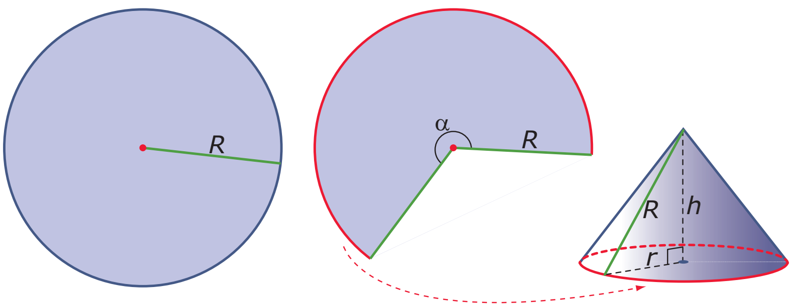
Opgave 8

Van een cilinder is de oppervlakte 628 cm^2. Verder is de hoogte twee keer zo groot als de diameter.

Hoe hoog is deze cilinder? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Toepassen

De **oppervlakte van een kegel** is een verhaal op zich. Je maakt een kegelvormig hoedje door uit een cirkelvormig stuk papier een sector weg te knippen en dan het geheel weer aan elkaar vast te lijmen. (Een plakrandje is handig.)



De oorspronkelijke cirkel heeft een straal van R cm. De omtrek van de grondcirkel van de kegel is het $\frac{\alpha}{360}$ deel van deze cirkel. Die omtrek is daarom $\frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R$. En dus is $r = \frac{\alpha}{360} \cdot R$.

Opgave 9: De oppervlakte van een kegel

Neem een blaadje papier, je moet er een cirkel met een straal van 5 cm uit kunnen halen. Pak ook een passer en een schaar. Je gaat een kegel maken en de oppervlakte ervan berekenen.

a Knip uit het stuk papier een cirkel met een straal van 5 cm. Knip uit die cirkel een sector met een sectorhoek van $90°$. Maak een kegel van het resterende deel van de cirkel.

b Hoe groot is de omtrek van de grondcirkel van je kegel? Hoe groot is dus de straal van de kegel? En waar zit nu de straal van de oorspronkelijke cirkel?

Het gebogen grensvlak van de kegel heet de kegelmantel.

c Hoe groot is de oppervlakte van de kegelmantel?

d Als je van een cirkelsector met een straal van 5 cm en een sectorhoek van $120°$ een kegel maakt, hoe groot is dan de oppervlakte van de kegelmantel? En hoe hoog wordt deze kegel? En welke straal heeft deze kegel?

e Beredeneer dat een kegelmantel met een straal van r die is gemaakt uit een cirkel met een straal van R een oppervlakte heeft van $\pi r R$.

f Bereken de oppervlakte van een kegel met een straal van 4 cm en een hoogte van 5 cm.

Opgave 10: Een bekertje

Een bekertje zoals dat hiernaast kun je opvatten als een kegel waar de punt (die op zichzelf ook een kegel is) is afgesneden. Neem aan dat het bekertje een bovendiameter van 10 cm heeft en een onderdiameter van 8 cm. En neem ook aan dat de hoogte van het bekertje 12 cm is.

a Hoeveel cm^3 bedraagt dan de inhoud van dit bekertje?

b Hoeveel cm^2 aan materiaal is er voor dit bekertje nodig?

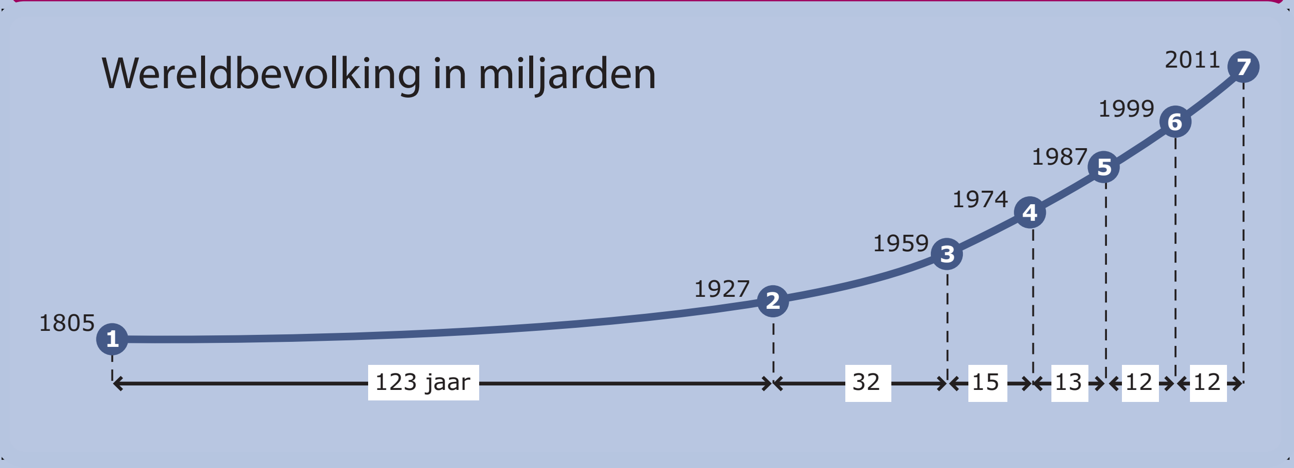
Begrippen

- groeifactor — groeipercentage — vervalpercentage — halveringstijd — verdubbelingstijd;
- lineaire groei — exponentiële groei;
- exponentiële functie — asymptoot.

Activiteiten

- werken met de begrippen groeifactor, groei(verval)percentage, halveringstijd en verdubbelingstijd;
- lineaire groei vergelijken met exponentiële groei, bijbehorende formules opstellen;
- werken met meer algemene exponentiële functies en formules daarvan opstellen.

Bevolkingsgroei



Domein

Functies en grafieken

Hoofdstuk

Exponentiële verbanden

Inhoud

4

4.1 Groeifactor

Verkennen

Opgave V1

Autobanden zijn meestal een beetje poreus (luchtdoorlatend). Dit betekent dat een opgepompte band steeds een beetje zachter wordt. De **bandenspanning** van een band is na het oppompen ongeveer gelijk aan $2{,}103$ bar. Deze bandenspanning neemt elke dag met ongeveer $11{,}3$% af.

a Bereken de bandenspanning na 1 dag en na 2 dagen.

b Hoe kun je de antwoorden bij a vinden door vermenigvuldigen? En waarmee dan?

c Na hoeveel dagen is de bandenspanning gehalveerd?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Hoe kom je aan het getal $1{,}12$?

b Stel dat het aantal leerlingen van de scholengemeenschap in 2012 in totaal 696 was. Wanneer moeten de noodlokalen dan komen?

c Stel dat de groeifactor per jaar $1{,}08$ is. Hoeveel procent neemt het aantal leerlingen per jaar dan toe?

d Als van een school het aantal leerlingen jaarlijks niet toeneemt, maar met een vast percentage afneemt, wat weet je dan van de groeifactor per jaar?

Opgave 2

Medicijnen worden door het lichaam opgenomen en vervolgens afgebroken. Dit gaat meestal ook met een vast percentage. Van paracetamol wordt elk uur 15% afgebroken. Stel dat Piet hoofdpijn heeft en een tablet met 500 mg paracetamol inneemt. Het medicijn is uitgewerkt als de hoeveelheid paracetamol in het lichaam onder de 100 mg komt.

a Hoeveel procent van de paracetamol is na 1 uur nog over?

b Hoeveel milligram paracetamol is dat?

c Welke groeifactor per uur hoort er bij de afbraak van de paracetamol door het lichaam?

d Na hoeveel uur is deze stof uitgewerkt? (Geef je antwoord in gehele uren.)

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je kunt omrekenen van een procentuele toename of afname naar een groeifactor.

a Bij het omrekenen wordt steeds van 100 uit gegaan. Is het ook mogelijk om van een ander getal uit te gaan? Licht je antwoord toe.

b Een hoeveelheid neemt elk uur met 35% toe. Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

c Een hoeveelheid neemt elk uur met 35% af. Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

d Een hoeveelheid neemt elke minuut met $0{,}1$% toe. Hoeveel bedraagt de groeifactor per minuut?

e Een hoeveelheid neemt elke minuut met $0{,}1$% af. Hoeveel bedraagt de groeifactor per minuut?

f Een hoeveelheid neemt elke maand met 150% toe. Hoeveel bedraagt de groeifactor per maand?

g Een hoeveelheid neemt elke maand met 150% af. Hoeveel bedraagt de groeifactor per maand?

Opgave 4

Een groeipercentage kan zowel positief als negatief zijn.

a Waar in **Voorbeeld 1** is sprake van een negatief groeipercentage?

b Waarom kan een groeifactor nooit negatief zijn?

c Welk groeipercentage hoort bij een groeifactor van $1{,}5$ per uur?

d Welk groeipercentage hoort bij een groeifactor van $0{,}15$ per uur?

e Welk groeipercentage hoort bij een groeifactor van 1 per jaar?

f Welk groeipercentage hoort bij een groeifactor van 2 per jaar?

Opgave 5

Geef bij de volgende groeifactoren per week aan met welk percentage de hoeveelheid elke week toe- of afneemt.

a $1{,}105$

b $0{,}998$

c 4

d $0{,}1$

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Waarom is de groeifactor per half uur $0{,}91$?

b Hoeveel zou in dit geval de groeifactor per uur zijn? Hoe kun je dit afleiden uit het voorbeeld?

c Hoeveel zou de groeifactor per kwartier bedragen? Waarom?

Opgave 7

Bij een zwaarder persoon wordt de alcohol langzamer afgebroken. Stel dat iemand's alcoholpromillage elk half uur met 5% afneemt. Hij mag rijden als dit promillage onder de $0{,}5$ zit.

Hoe lang duurt voordat deze persoon mag rijden nadat hij op zeker moment een alcoholpromillage van $1{,}0$ heeft? (Dat promillage heeft iemand van 70 kg twee uur nadat hij zeven biertjes in een uur heeft gedronken.)

Opgave 8

Bekijk in **Voorbeeld 3** de groei van de oppervlakte die door de witte waterlelie wordt bedekt.

a Waarom is de groeifactor per etmaal gelijk aan 2?

b Het is niet nodig om de grootte van de vijver of de waterlelie precies te weten. Waarom niet?

c Stel dat de vijver een oppervlakte heeft van 150 m^2. Hoe groot was de door de waterplant bedekte oppervlakte dan op dag 19?

d En hoe groot was de bedekte oppervlakte dan op dag 10?

e En hoe groot was de bedekte oppervlakte dan op dag 1, als de plant begint te groeien?

Als g de groeifactor per uur is, dan geldt $g^{24} = 2$.

f Bereken de groeifactor per uur in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 9

Een bepaalde stof wordt in water afgebroken. De halveringstijd van de hoeveelheid H (in mg/L) van die stof bedraagt 8 uur.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor van H per dag?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor van H per uur?

Verwerken

Opgave 10

Bepaal bij de volgende groeifactoren per uur het toe- of afnamepercentage per uur.

a $1{,}21$

b $1{,}924$

c $0{,}99$

d $2{,}5$

e 100

Opgave 11

Zet de onderstaande toe- of afnamepercentages om naar groeifactoren.

a Een afname van 14% per uur.

b Een toename van $34{,}76\%$ per dag.

c Een toename van 104% per jaar.

d Een afname van 100% per uur.

Opgave 12

Banden zijn meestal een beetje poreus (luchtdoorlatend). Dit betekent dat een opgepompte band steeds een beetje zachter wordt. De bandenspanning van een band is na het oppompen ongeveer gelijk aan $2{,}103$ bar. Deze bandenspanning neemt elke dag met ongeveer $1{,}3$% af.

a Welke groeifactor per dag heeft de bandenspanning?

b Welke groeifactor per week heeft de bandenspanning?

c Je kunt niet meer rijden als de bandenspanning minder is dan 1 bar. Hoeveel dagen duurt dit nadat je de band hebt opgepompt?

Opgave 13

Het aantal WhatsApp-berichten W is sinds 2001 flink toegenomen. Zie onderstaande tabel (aantallen berichten W in miljoenen):

jaartal	2005	2006	2007	2008
W	$4{,}9$	$9{,}8$	$19{,}6$	$39{,}2$

a Met welke groeifactor per jaar neemt W in die periode toe? Hoe groot was toen de verdubbelingstijd van het aantal WhatsApp-berichten per jaar?

b Met hoeveel procent nam het aantal WhatsApp-berichten per jaar toe?

c Hoeveel van deze berichten verwacht je dan in 2012?

d En hoeveel van deze berichten verwacht je in 2022 als de groei zo doorgaat? Is dat realistisch?

Opgave 14

Elke ochtend om 9:00 uur krijgt een patiënt door middel van een injectie 2 mL van een pijnstillend medicijn toegediend. Door afbraak in het lichaam van de patiënt neemt de hoeveelheid geneesmiddel elke 12 uur af met 32%.

a Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elke 12 uur af?

b Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elke 6 uur af? Welk afnamepercentage per zes uur hoort daar bij?

c Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elk uur af? Welk afnamepercentage per uur hoort daar bij?

d Hoeveel mL van het pijnstillend middel bevindt zich na één dag vlak voor de volgende injectie in het lichaam van de man? En hoeveel mL direct na de injectie?

e Bereken de hoeveelheid pijnstiller na 30 uur. En ook na 60 uur.

f Schets een grafiek van de hoeveelheid geneesmiddel gedurende de eerste 60 uur.

Toepassen

Je hebt al gezien dat exponentiële groei veel voorkomt in de praktijk. Vooral natuurbeschermers en landschapsbeheerders hebben regelmatig te maken met de problemen die dit kan veroorzaken. Maar ook veel toekomst voorspellende scenario's en historici maken gebruik van exponentiële groei. De **Club van Rome** is een voorbeeld van een groep wetenschappers en milieuactivisten die probeerde met behulp van groeimodellen te voorspellen hoe de wereld zich in de toekomst zou gaan ontwikkelen. Beroemd is hun rapport 'Grenzen aan de groei' uit 1972.

Opgave 15: Vossen en konijnen

In een uiterwaard langs de IJssel heeft Rijkswaterstaat in 2005 vossen uitgezet om het aantal konijnen dat er leeft te doen verminderen. De konijnen vormden namelijk een plaag in dit gebied. Biologen hebben sinds 2005 jaarlijks het aantal konijnen geteld. Dit is weergegeven in de volgende tabel:

jaartal	2005	2006	2007	2008	2009
aantal konijnen	1450	1261	1097	954	830

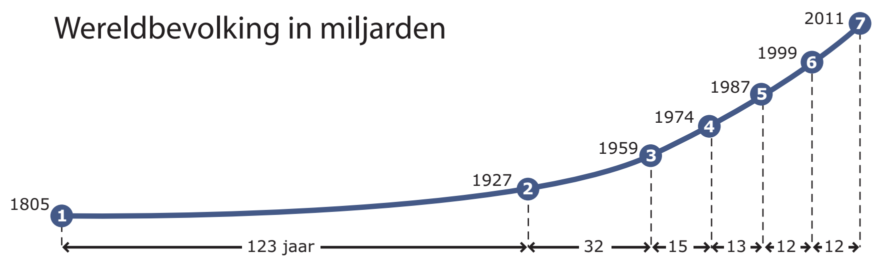
a Met hoeveel procent per jaar neemt het aantal konijnen sinds 2005 af? Is dat percentage elk jaar ongeveer evenveel?

Het aantal konijnen mag echter niet onder de 175 komen, want dan loopt hun voortbestaan gevaar en hebben ook de vossen niet meer voldoende voedsel.

b Vanaf welk jaar moet Rijkswaterstaat beginnen met het vangen van vossen om te voorkomen dat dit gebeurt?

Opgave 16: De wereldbevolking

Een dergelijke grafiek stond eind 2011 in De Volkskrant. Men dacht op dat moment dat het aantal mensen op Aarde de 7 miljard was overschreden. De grafiek doet sterk denk aan exponentiële groei. Toch is dat niet helemaal juist.



a Laat zien dat de wereldbevolking tussen 1805 en 1927 met ongeveer $0{,}56\%$ per jaar toenam.

Tussen 1927 en 1959 groeide de wereldbevolking sneller.

b Met hoeveel procent per jaar ongeveer?

c Laat zien dat de wereldbevolking tussen 1959 en 1974 het snelst groeide en dat de groei daarna weer wat afnam.

d Als de groei de komende jaren op dezelfde wijze zal doorgaan, wat betekent dit dan voor de wereldbevolking op den duur?

4.2 Exponentiële groei

Verkennen

Opgave V1

Kuala Lumpur is de hoofdstad van Maleisië en had in januari 2005 ongeveer $9{,}5$ miljoen inwoners. Dit aantal groeit exponentieel met een groeifactor van $1{,}045$ per jaar.

a In welk jaar zal het aantal inwoners van Kuala Lumpur zijn verdubbeld?

Noem het aantal inwoners in miljoenen A en laat t de tijd in jaren na 2005 zijn.

b Welke formule kun je dan opstellen voor de groei van de bevolking van Kuala Lumpur?

c Hoe ziet de bijbehorende grafiek er uit?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de groei van het aantal leden van voetbalclubs.

a Welke formule kun je opstellen voor A afhankelijk van t?

b Bereken het aantal leden van voetbalclubs in A in 2020 als de lineaire groei zo door blijft gaan.

c Stel een formule op voor B afhankelijk van t.

d Bereken het aantal leden van voetbalclubs in B in 2020 als de exponentiële groei zo door blijft gaan.

Opgave 2

Bekijk opnieuw de groei van het aantal leden van voetbalclubs. Gebruik de formules bij de vorige opgave. Ga er van uit dat in beide landen de groei zo doorgaat.

a Teken de grafieken van A en B in één figuur. Laat zien dat beide grafieken twee punten gemeenschappelijk hebben.

b In welk jaar zijn er in land B meer leden van voetbalclubs dan in land A?

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe de populatie zeehonden in het Nederlandse deel van de Waddenzee groeit.

a Bereken het aantal zeehonden op 1 januari 2009.

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar? En het groeipercentage?

c Stel een formule op voor het aantal zeehonden Z afhankelijk van de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ op 1 januari 2009.

d Bereken ook met de formule die je in c hebt gevonden het aantal zeehonden op 1 januari 2013. Verklaar het kleine verschil.

Opgave 4

In de **Theorie** zie je een applet waarin grafieken van lineaire groei en exponentiële groei met dezelfde beginhoeveelheid worden vergeleken.

a Stel de functies $H_1 = 4 \cdot 1{,}10^t$ en $H_2 = 0{,}6t + 4$ in met behulp van de schuifbalkjes. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van deze functies?

b Het éne snijpunt is uiteraard $(0{,}4)$. Bereken met behulp van inklemmen het tweede snijpunt in één decimaal nauwkeurig.

c Als je de groeifactor van H_1 verandert, hebben de grafieken soms nog maar één snijpunt. Moet je de groeifactor daartoe groter of kleiner maken?

d Stel de functies $H_1 = 4 \cdot 0{,}80^t$ en $H_2 = -0{,}5t + 4$ in met behulp van de schuifbalkjes. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van deze functies?

e Het éne snijpunt is uiteraard $(0,4)$. Bereken met behulp van inklemmen het tweede snijpunt in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 5

De afdeling bevolking van de gemeente Amsteldijk verwacht dat er eind van dit jaar zo'n 40.000 mensen in deze gemeente zullen wonen. Het gemeentebestuur hoopt dat het inwoneraantal nog verder zal uitbreiden omdat dit de mogelijkheid biedt om enkele voorzieningen te verbeteren. Wethouder Simonsz zegt: "We streven er naar om elk jaar 1500 inwoners meer te hebben." De burgemeester mw. Jansma hoopt echter elk jaar 3% meer inwoners te kunnen inschrijven dan het jaar ervoor.

a Maak nu grafieken voor de bevolkingsgrootte voor de komende acht jaar. Eén die past bij de uitspraak van dhr. Simonsz en één die past bij de uitspraak van mw. Jansma.

b Geef een passende formule voor het aantal inwoners N afhankelijk van de tijd t in jaren die past bij de uitspraak van wethouder Simonsz. Ga er van uit dat op $t = 0$ het aantal inwoners 40.000 is.

c Geef een passende formule voor het aantal inwoners N afhankelijk van de tijd t in jaren die past bij de uitspraak van burgemeester Jansma Ga er van uit dat op $t = 0$ het aantal inwoners 40.000 is.

d Welk van beide formules levert op den duur de meeste inwoners op voor de gemeente Amsteldijk? Licht je antwoord toe.

e Volgens welke formule is het aantal inwoners van Amsteldijk voor het eerst verdubbeld?

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Hoe ga je na dat er voor stad A (ongeveer) sprake is van lineaire groei? Ga dit ook echt na.

b Hoe leid je voor stad A de formule af uit de tabel?

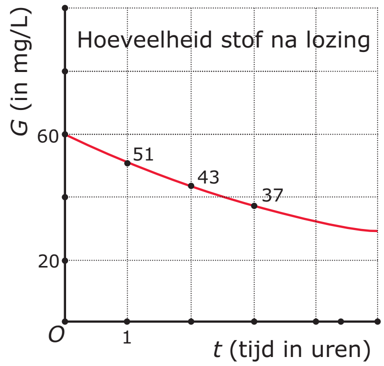
c Hoe ga je na dat er voor stad B (ongeveer) sprake is van exponentiële groei? Ga dit ook echt na.

d Hoe leid je voor stad A de formule af uit de tabel?

e Laat zien in welk jaar het aantal inwoners van B dat van A gaat overschrijden als de groei zo doorgaat.

Opgave 7

Hier zie je een grafiek die laat zien hoe een hoeveelheid gif G (in mg/L) in het water wordt afgebroken. De eerste drie metingen staan in de figuur. Er lijkt sprake te zijn van exponentieel verval.



a Leg uit waarom er sprake lijkt te zijn van exponentieel verval.

b Leid een formule af voor G afhankelijk van t.

c Na hoeveel uur is er minder dan 10% van deze giftige stof over?

Opgave 8

Bekijk hoe in **Voorbeeld 3** een formule voor exponentiële groei van een hoeveelheid N wordt gevonden op basis van de waarden van N op twee verschillende tijdstippen.

a Bereken zelf de groeifactor per tijdseenheid.

b Voer ook zelf de berekening van de beginhoeveelheid uit.

c Je kunt de beginhoeveelheid ook berekenen door op $t = 11$ is $N = 800$ te gebruiken. Laat zien dat je ongeveer op hetzelfde uitkomt.

Opgave 9

Bij de gegevens in **Voorbeeld 3** past ook een lineaire formule voor N als functie van t.

a Stel zo'n bijpassende formule op.

Je hebt nu twee rekenmodellen bij dezelfde gegevens: een lineaire functie en een exponentiële functie. Maar ze verschillen nogal.

b Bereken bij beide rekenmodellen de waarde van N als $t = 20$.

c Bij de lineaire functie is de hoeveelheid N op zeker moment op. Op welk moment is dat? En hoe zit het dan met het exponentiële rekenmodel?

d Is bij de exponentiële functie de hoeveelheid N ook op zeker moment op? Licht je antwoord toe.

Verwerken

Opgave 10

Een hoeveelheid H heeft op $t = 0$ de waarde 160. Stel in de volgende gevallen een formule op voor H afhankelijk van t (in dagen) en bereken de waarde van H op $t = 10$ in gehelen nauwkeurig.

a H neemt dagelijks toe met 15%.

b H neemt dagelijks toe met 15.

c H neemt dagelijks af met 15%.

d H neemt dagelijks af met 15.

e H neemt wekelijks toe met 15%.

f H neemt wekelijks af met 15%.

Opgave 11

Van een middelgrote stad geeft deze tabel de aantallen inwoners afgerond op honderdtallen. Op de afdeling huisvesting wil men de groei voor de komende jaren voorspellen.

jaartal	bevolking
2008	154000
2009	156300
2010	158700
2011	161000

Eén van de medewerkers zegt: “Je zou kunnen veronderstellen dat er jaarlijks zo'n 2300 inwoners bijkomen.”

a Van welke soort groei gaat deze medewerker uit? Laat zien dat dit wel ongeveer zou kunnen kloppen binnen de afgesproken afronding.

b Neem aan dat t de tijd in jaren na 2008 is. Welke formule voor het aantal inwoners I volgt uit de aanname van lineaire groei?

Een andere medewerker merkt op: “Er zou ook sprake kunnen zijn van exponentiële groei met 1,5% per jaar.”

c Laat zien hoe zij aan dit groeipercentage is gekomen.

d Welke formule kun je opstellen voor I als functie van t uitgaande van deze exponentiële groei?

e Er zijn nu twee formules gevonden waarmee je de bevolking van deze stad in volgende jaren zou kunnen voorspellen. Wat is het grote verschil tussen beide?

f Voorspel met beide formules het aantal inwoners van deze stad in 2020.

Opgave 12

Als je gaat duiken in de diepzee dan zul je merken dat hoe dieper je komt, hoe blauwer alles eruit ziet. Dit komt doordat het rode licht minder ver in water doordringt dan blauw licht. Dit blauwe licht kan dan dieper doordringen. Per meter diepte wordt $32{,}7\%$ van het blauwe licht tegengehouden door het water.

Tot welke diepte dringt dan nog maar 1% van het blauwe licht door?

Opgave 13

Hieronder worden telkens twee punten gegeven van een grafiek van y als functie van x. Geef bij elk geval zowel een formule van een passende lineaire functie als van een passende exponentiële functie.

a De grafiek gaat door $(0{,}3)$ en $(1{,}4)$.

b De grafiek gaat door $(0{,}3)$ en $(1{,}2)$.

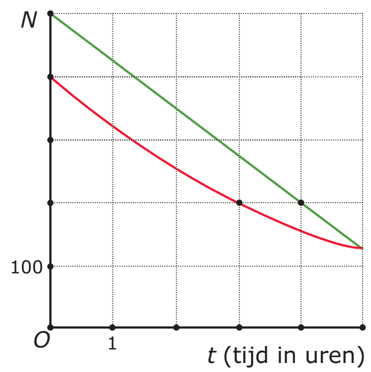
c De grafiek gaat door $(2{,}150)$ en $(12{,}389)$.

d De grafiek gaat door $(2{,}389)$ en $(12{,}150)$.

Opgave 14

Hiernaast zie je de grafieken van een lineair en exponentieel verband.

Geef bij beide grafieken een passende formule.



Toepassen

Als er iets is dat steeds sneller lijkt te groeien dan is dat wel het computergebruik en het internetverkeer. Het plaatje hiernaast laat daar iets van zien uit de beginjaren van het computertijdperk waarin we nu leven. Het komt uit een Amerikaans tijdschrift en symboliseert de ‘wet van Moore’. Daarbij moet je weten dat de zogenaamde ‘processor’ (een minuscuul printplaatje, een chip) de hele rekenkracht van de computer vertegenwoordigde. Daarbij speelde het aantal transistoren dat men op zo'n processor kwijt kon een grote rol: hoe meer processoren, hoe groter de rekenkracht. In 1970 voorspelde Gordon Moore (één van de oprichters van chipsfabrikant Intel) dat het aantal transistoren dat men op zo'n processor kwijt kon elke 2 jaar zou verdubbelen. En hij kreeg gelijk...
Na 2000 werden er meerdere processoren gebruikt die samen de rekencapaciteit nog verder konden verhogen. Pas in de huidige tijd wordt er gewerkt aan andere technologieën voor computers en zal de wet van Moore wellicht ooit in het museum terechtkomen.

Maar niet alleen de rekenkracht van van de computer groeide exponentieel, ook het aantal gebruikers van internet, van Google, van Facebook, ..., groeide enorm. En het lijkt erop dat de grenzen van die groei in zicht komen...

Opgave 15: De wet van Moore

Bekijk de figuur in **Toepassen**.

In 1972 introduceerde Intel de 8008 processor met 2300 transistoren. Ga uit van de wet van Moore dat elke 2 jaar het aantal transistoren op een processor verdubbelt.

a In 1992 introduceerde Intel de Pentium-processor. Lag men met die processor nog op Moore's schema?

b In 2000 kwam de Pentium 4. Paste die in de wet van Moore?

Zeker tot 2012 is de rekenkracht van een computer ongeveer elke twee jaar verdubbeld. Stel je voor dat R die rekenkracht voorstelt afhankelijk van t het aantal jaren na 1972. Op $t = 0$ is $R = 2300$.

c Stel een formule op voor R als functie van t.

d Bereken hiermee de rekenkracht die een computer uit 2012 volgens de wet van Moore zou hebben.

e Onderzoek in welk jaar die rekenkracht boven de 1 biljoen, dus boven $1 \cdot 10^{12}$ uit gaat komen volgens de wet van Moore.

Opgave 16: Facebook

Uit **Wikipedia, december 2012**:
"In april 2009 had Facebook meer dan 200 miljoen actieve gebruikers, vijf maanden later waren dat er 50 miljoen meer. In juli 2010 bediende Facebook een half miljard gebruikers, circa zeven procent van het aantal aardbewoners. Anno 2012 heeft Facebook ongeveer 955 miljoen gebruikers."

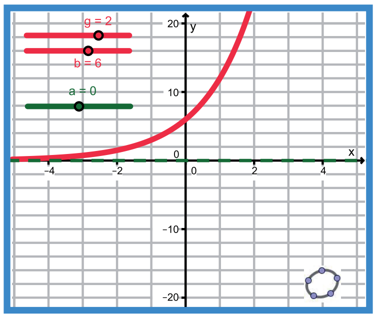
a Gebruik de gegevens over het aantal Facebookgebruikers van april 2009, juli 2010 en december 2012 om te onderzoeken of het aantal Facebookgebruikers exponentieel is gegroeid in die jaren.

b Ook zonder berekening is wel duidelijk dat de groei van de eerste maanden niet in dit tempo door kon blijven gaan. Waarom?

4.3 Exponentiële functies

Verkennen

Opgave V1



Hier zie je de grafiek van $y = 2^x$, ook voor negatieve waarden van x.

a Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 toeneemt?

b Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 afneemt?

c Hoeveel is 2^0? Kun je dat verklaren?

d Hoeveel is 2^{-1}?

e Krijg je ooit een uitkomst 0?

Opgave V2

Tot nu toe heb je bij exponentiële functies weinig met mintekens te maken gehad. Toch kun je heel goed een grafiek maken van $y = -2^x$, ook voor negatieve waarden van x.

a Hoe ziet dit grafiek er uit?

Maar bekijk nu $y = (\text{-}2)^x$

b Vul nu de volgende tabel in:

x	0	1	2	3	4
y					

c Kun je nu bij deze functie een zinvolle grafiek tekenen? Licht je antwoord toe.

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de grafiek van een exponentiële functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$ ook voor negatieve waarden van x.

Eerst bekijk je de grafiek met $b = 6$, $g = 2$ en $a = 0$.

a Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 toeneemt? En als x met 1 afneemt?

b De beginhoeveelheid, de uitkomst bij $x = 0$, is 6. Vul nu de tabel in door middel van verdubbelen en halveren.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

Je kunt nu vanuit de tabel zelf de grafiek tekenen bij de gegeven exponentiële functie. Maar de uitkomsten voor bijvoorbeeld $x = 0{,}5$ kun je (waarschijnlijk) niet zonder rekenmachine uitrekenen. Maar als je die uitkomst weet, dan kun je wel door verdubbelen en halveren de uitkomsten bij $x = 1{,}5$, $x = 2{,}5$, $x = -0{,}5$, enzovoorts, uitrekenen.

c Welke uitkomst (in drie decimalen nauwkeurig) geeft je rekenmachine voor $x = 0{,}5$? En welke uitkomsten volgen hieruit voor $x = 1{,}5$, $x = 2{,}5$, $x = -0{,}5$ en $x = -1{,}5$?

d Kies nu bijvoorbeeld $x = 0{,}3$ en bekijk de uitkomst die je rekenmachine geeft. Leid andere uitkomsten af door verdubbelen en halveren. En zo kun je ook te werk gaan met andere niet gehele waarden voor x.

e Welke horizontale lijn is de asymptoot van deze grafiek?

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je de grafiek van een exponentiële functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$ ook voor negatieve waarden van x. Werk met de applet.

Nu bekijk je de grafieken van functies van de vorm $y_a = 6 \cdot 2^x + a$ en ga je de waarden van a veranderen. Je vergelijkt de grafieken met die van $y_0 = 6 \cdot 2^x$.

a Neem $a = 3$. Wat is er aan de hand met alle uitkomsten van y_3 en vergelijking met die van y_0?

b Welke asymptoot heeft de grafiek van y_3?

c Beantwoord dezelfde twee vragen als bij a en b voor andere waarden van a. Kies ook enkele negatieve waarden voor a.

d Voor welke a gaat de grafiek van y_a door de oorsprong?

Opgave 3

Gegeven is de exponentiële functie $y = 6 \cdot 0{,}5^x$.

a Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 toeneemt? En als x met 1 afneemt?

b De beginhoeveelheid, de uitkomst bij $x = 0$, is 6. Vul nu de tabel in door middel van verdubbelen en halveren.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

c Welke uitkomst (in drie decimalen nauwkeurig) geeft je rekenmachine voor $x = 0{,}5$? En welke uitkomsten volgen hieruit voor $x = 1{,}5$, $x = 2{,}5$, $x = -0{,}5$ en $x = -1{,}5$?

d Kies bijvoorbeeld $x = 0{,}3$ en bekijk de uitkomst die je rekenmachine geeft. Leid andere uitkomsten af door verdubbelen en halveren. En zo kun je ook te werk gaan met andere niet gehele waarden voor x.

e Welke horizontale lijn is de asymptoot van deze grafiek?

f Welke horizontale lijn is de asymptoot van de grafiek van $y = 6 \cdot 0{,}5^x - 5$?

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe de grafiek van een exponentiële functie kunt tekenen door gebruik te maken van de eigenschappen van zo'n grafiek.

a Je begint met een tabel bij $y = 10 \cdot 1{,}5^x$ te maken vanuit de beginhoeveelheid. Vul deze tabel in:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

b Alle uitkomsten bij de gegeven functie krijg je door in de tabel bij a van alle uitkomsten 20 af te trekken. Doe dat en teken de gevraagde grafiek.

c Nu ga je de ongelijkheid oplossen. Teken eerst de lijn $y = 20$ in je grafiek en geef het snijpunt van deze lijn met de grafiek aan.

d Laat zien hoe je aan het uiteindelijke antwoord van de ongelijkheid kunt komen. Licht vooral ook de afronding toe.

Opgave 5

De formule van een exponentiële functie is $y = 20 \cdot 0{,}8^x + 5$.

Teken een bijpassende grafiek en los op: $y \leq 10$ in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Van een exponentiële functie $y = b \cdot g^x + a$ is gegeven dat de grafiek door de punten $A(0,40)$ en $B(4,25)$ gaat en de lijn $y = 10$ de asymptoot is.

Stel een passend functievoorschrift op.

Opgave 7

Van een exponentiële functie $y = b \cdot g^x + a$ is gegeven dat de grafiek door de oorsprong en het punt $A(4,6)$ gaat en de lijn $y = \text{-}3$ de asymptoot is.

Stel een passend functievoorschrift op.

Verwerken

Opgave 8

Gegeven is de exponentiële functie met formule $y = 60 \cdot 0{,}75^x + 12$.

a Maak eerst een tabel zoals deze van $y = 60 \cdot 0{,}75^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

b Hoe maak je nu vanuit de tabel bij a de grafiek van de gegeven functie?

c Welke asymptoot heeft de grafiek?

d Voor welke waarden van x geldt $60 \cdot 0{,}75^x + 12 \leq 15$? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 9

De lucht in een autoband wordt vaak opgepompt tot een druk van $2{,}2$ bar. De luchtdruk van de buitenlucht is ongeveer $1{,}0$ bar. De band verliest langzaam zijn druk tot die druk gelijk is aan die van de buitenlucht. En dus is die druk P (in bar) afhankelijk van de tijd t (in dagen) na het oppompen.

Neem aan dat voor een bepaalde band geldt $P = 2{,}2 \cdot 0{,}96^t + 1$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van P als functie van t? En welke betekenis heeft die asymptoot voor de druk in de band?

b Waarom hebben negatieve waarden van t hier geen betekenis?

c Een autoband is te zacht als de druk lager is dan $1{,}6$ bar. Hoeveel dagen na het oppompen is dat het geval?

Opgave 10

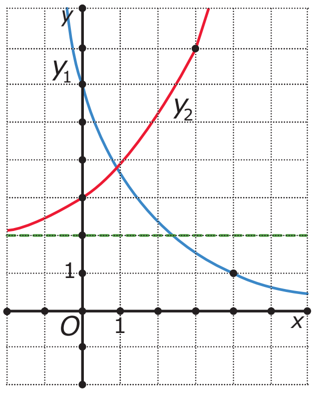
Van een exponentiële functie zijn de volgende gegevens bekend. De grafiek benadert voor grote waarden van x de lijn $y = 5$. De punten $A(0,10)$ en $B(2,8)$ liggen op de grafiek.

Stel een bijpassende formule op.

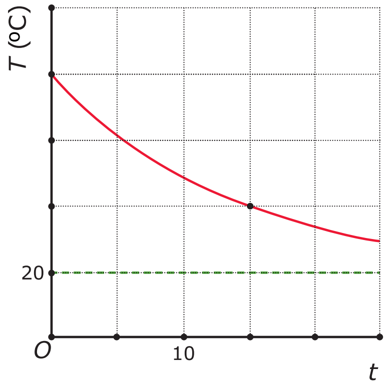
Opgave 11

Je ziet hier twee grafieken van exponentiële functies. De x-as is asymptoot van y_1, de lijn $y = 2$ is de asymptoot van y_2.

Stel bijpassende formules op.



Toepassen



Deze grafiek geeft het afkoelen weer van een kop thee. Daarvoor geldt volgens de warmtewet van Newton dat het temperatuurverschil met de omgeving elke tijdseenheid met een vast percentage afneemt.

De temperatuurmeting begint op $t = 0$ als de thee een temperatuur van 80 °C heeft, een temperatuurverschil van 60 °C met de omgeving. Dat de omgevingstemperatuur 20 °C is, wordt door de asymptoot van de grafiek aangegeven.

Je ziet in de grafiek dat het temperatuurverschil met de omgeving $T-20$ na 15 minuten $\frac{1}{3}$ deel van het temperatuurverschil op $t = 0$ is. Hiermee kun je de groeifactor van het temperatuurverschil uitrekenen en een formule opstellen voor $T-20$ en dus ook voor T als functie van t in minuten.

Opgave 12: Afkoelende thee

Bekijk de grafiek van het afkoelen van een kop hete thee hierboven.

Voor het temperatuurverschil met de omgeving geldt volgens de tekst $T - 20 = b \cdot g^t$.

a Licht dit toe.

b Bereken g in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een formule op voor T als functie van t.

d Na hoeveel minuten is de temperatuur van de thee lager van 25 °C?

Opgave 13: Opwarmende melk

Melk komt met een temperatuur van 6 °C uit de koelkast en warmt langzaam op naar kamertemperatuur (20 °C). Ook in dit geval geldt de warmtewet van Newton, dus bij de opwarming neemt het temperatuurverschil met omgeving exponentieel af.

Iemand meet dat de melk 10 minuten nadat ze uit de koelkast is gehaald een temperatuur van 13 °C heeft.

Maak een schets van een mogelijke grafiek van de opwarming van de melk. Stel ook een bijpassende formule op.

4.4 Totaalbeeld

Samenvatten

Met exponentiële verbanden heb je al leren werken. In dit onderwerp is die kennis herhaald en uitgebreid. Het begrip exponentiële functie is ingevoerd en je hebt geleerd hoe je een formule moet maken bij een exponentiële functie. Vooral het werken met groeifactoren en het omrekenen van een groeifactor bijvoorbeeld per jaar naar een groeifactor per maand (en omgekeerd) zijn behandeld. Daarbij heb je hogere machtswortels nodig. Ook het werken met exponentiële vergelijkingen is aan de orde geweest, daarbij moet je (voorlopig) nog werken met inklemmen en tabellen.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **'Exponentiële verbanden'** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2 en 3 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- groeifactor — groeipercentage — vervalpercentage — halveringstijd — verdubbelingstijd;
- lineaire groei — exponentiële groei;
- exponentiële functie — asymptoot.

Activiteiten

- werken met de begrippen groeifactor, groei(verval)percentage, halveringstijd en verdubbelingstijd;
- lineaire groei vergelijken met exponentiële groei, bijbehorende formules opstellen;
- werken met meer algemene exponentiële functies en formules daarvan opstellen.

Opgave 1

Een hoeveelheid groeit met 5% per uur.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per dag? En het groeipercentage per dag?

c Hoeveel bedraagt de groeifactor per kwartier in vier decimalen nauwkeurig? En het groeipercentage per kwartier?

d Hoeveel bedraagt de verdubbelingstijd van deze hoeveelheid?

Opgave 2

Een hoeveelheid neemt af met 16% per jaar.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?

b Hoeveel bedraagt de groeifactor per maand in drie decimalen nauwkeurig? En het groeipercentage per maand?

c Hoeveel bedraagt de halveringstijd van deze hoeveelheid?

Opgave 3

In een natuurgebied is het aantal wilde zwijnen aan het toenemen. In de tabel zie je het aantal wilde zwijnen in dit gebied in de loop van een aantal jaren, afgerond op tientallen. Bij Staatsbosbeheer wil men het verloop van het aantal dieren voorspellen. Als er meer dat 500 wilde zwijnen zijn, dan moeten er maatregelen worden getroffen. Noem het aantal wilde zwijnen Z, afhankelijk van de tijd t in jaren na 2008.

jaartal	2008	2009	2010	2011
aantal zwijnen	310	330	350	370

a Als je uitgaat van lineaire groei, welke formule kun je dan opstellen voor Z afhankelijk van t?

b Als je uitgaat van exponentiële groei, hoeveel bedraagt dan het groeipercentage per jaar ongeveer? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

c Welke formule geldt voor Z afhankelijk van t als je van exponentiële groei uitgaat?

d Bereken voor beide soorten groei in welk jaar het aantal wilde zwijnen voor het eerst de 500 zal overschrijden.

Opgave 4

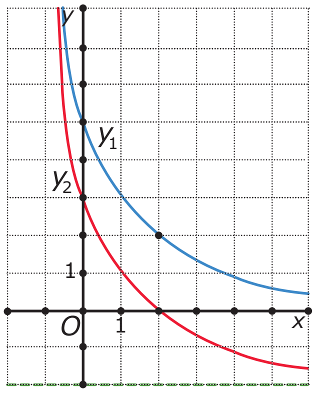
De grafiek van een exponentiële functie van de vorm $y = b \cdot g^x$ gaat door de punten $A(2,20)$ en $B(6,10)$.

Bereken b in gehelen nauwkeurig en g in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 5

Je ziet hier de grafieken van twee exponentiële functies. y_1 heeft de x-as als asymptoot en y_2 de lijn $y = -2$

Stel bij beide functies een passende formule op.



Toepassen

Bij de rente die je van de bank krijgt op een spaartegoed speelt exponentiële groei een rol. Door het bijschrijven van rente verandert namelijk je spaartegoed en daar krijg je ook weer rente over. Er is sprake van ‘rente op rente’. Je geld stoppen in een spaarvarken is dus geen goed idee...

Stel je zet op de eerste dag van deze maand € 1000,- op een spaarrekening waarop je 3% rente per jaar krijgt. Dan maakt het wel wat verschil of de bank de rente maandelijks bijschrijft of jaarlijks, of pas als je de spaarrekening weer opheft en leeghaalt. Je kunt dat zelf narekenen...

Opgave 6: Rente op rente

Gebruik de gegevens uit de tekst hierboven.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar van je spaartegoed? En hoeveel bedraagt de groeifactor per maand?

b Als de bank maandelijks rente bijschrijft en het rentepercentage per maand op één decimaal nauwkeurig afrondt, hoeveel bedraagt je spaartegoed dan na een jaar? En hoeveel zou het moeten bedragen?

c En als de bank het rentepercentage op twee decimalen nauwkeurig berekent en maandelijks rente bijschrijft. Wie wordt er nu blij, jij of de bank?

d Doe de berekening uit c nog eens, maar neem nu aan dat de bank niet afrondt, maar gewoon de decimalen na de tweede weglaat bij het berekenen van het rentepercentage. (Dat heet ‘afkappen’.)

Opgave 7: Tussentijdse stortingen

Gebruik weer de gegevens uit de tekst hierboven.

Nu stort je zelf maandelijks nog € 25,00 op je spaarrekening, te beginnen op de eerste dag van de volgende maand.

Bereken je spaartegoed na een jaar sparen. Ga uit van een maandrente van $0{,}24\%$.

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

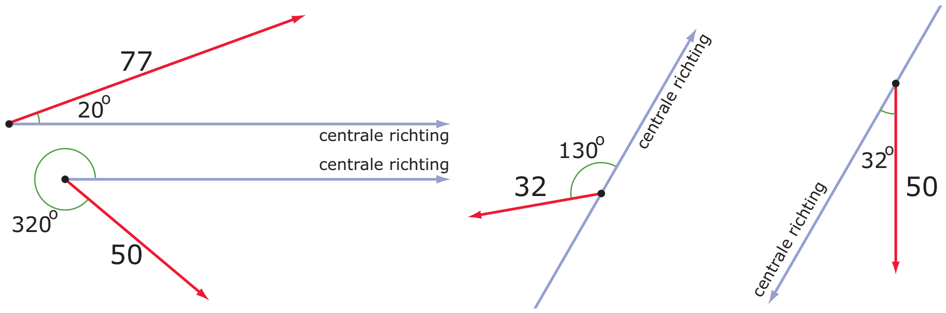
De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

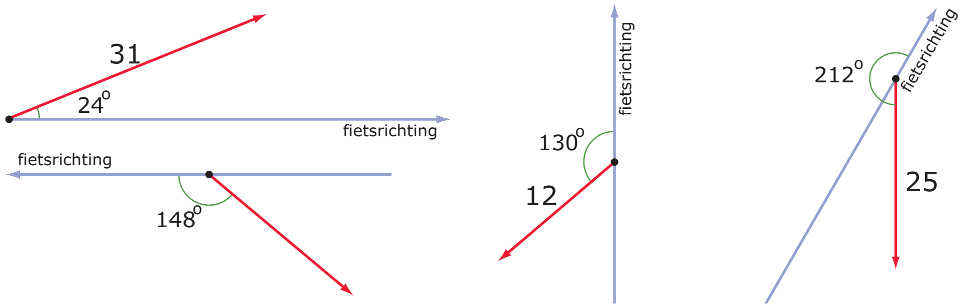
Inhoud Katern 2

www.math4all.nl

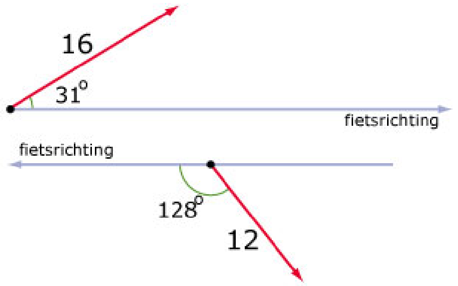
Werkblad bij Opgave 6 op pagina 8



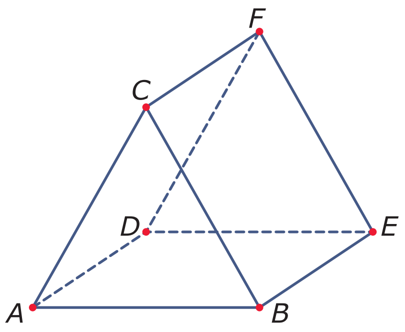
Werkblad bij Opgave 11 op pagina 11



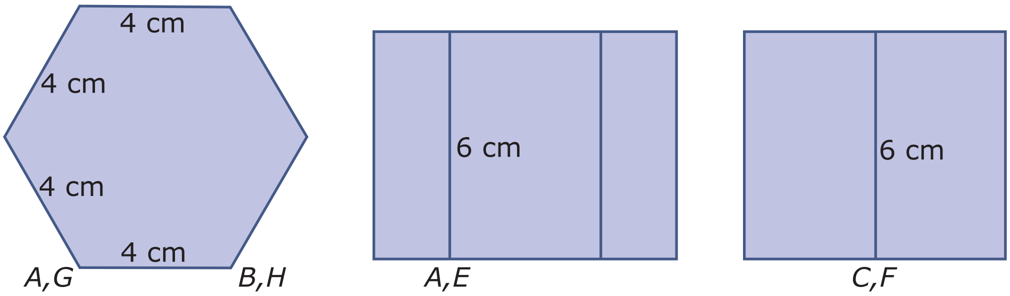
Werkblad bij Opgave 1 op pagina 55



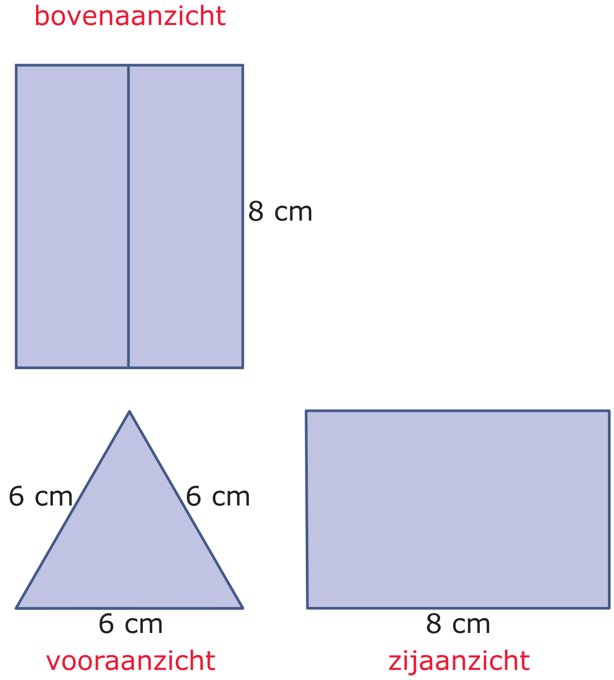
Werkblad bij Opgave 2 op pagina 143



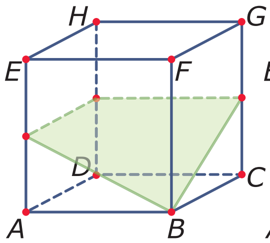
Werkblad bij Opgave 1 op pagina 153



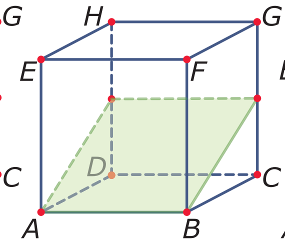
Werkblad bij Opgave 3 op pagina 156



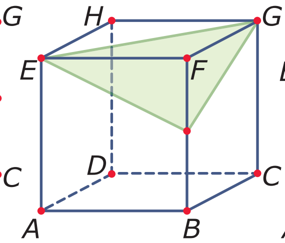
Werkblad bij Opgave 1 op pagina 167



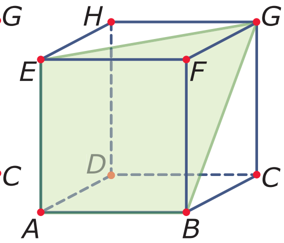
figuur I



figuur II



figuur III



figuur IV

Werkblad bij **Opgave 14 op pagina 179**