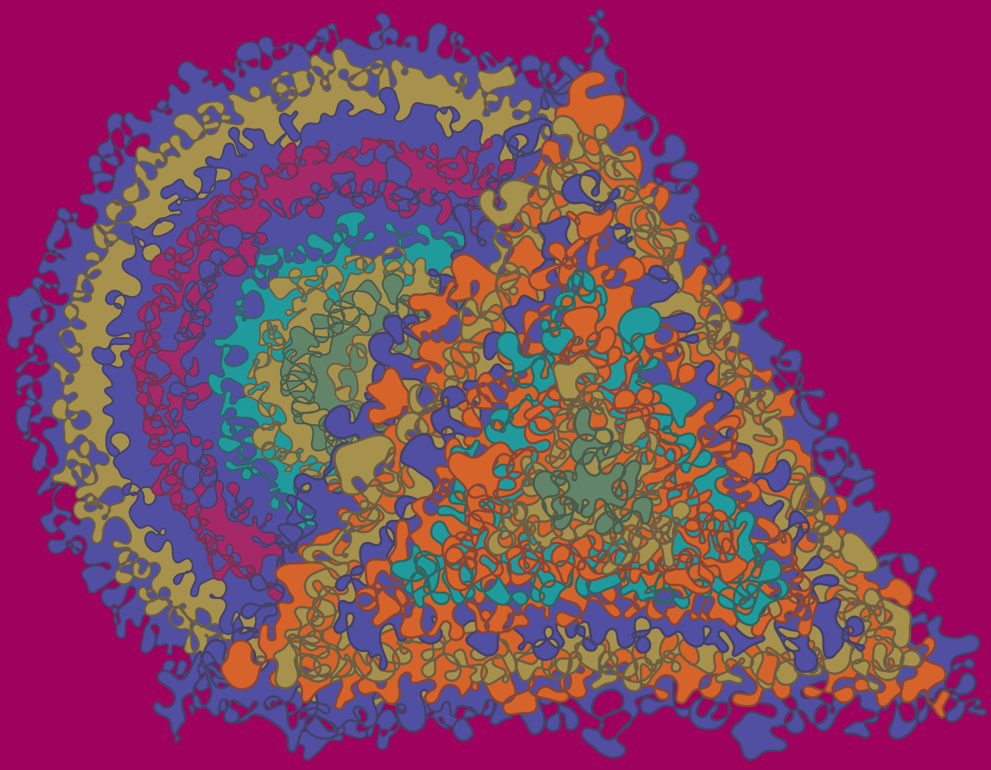
Wiskunde

3 VWO

Katern 2 / Theorie

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

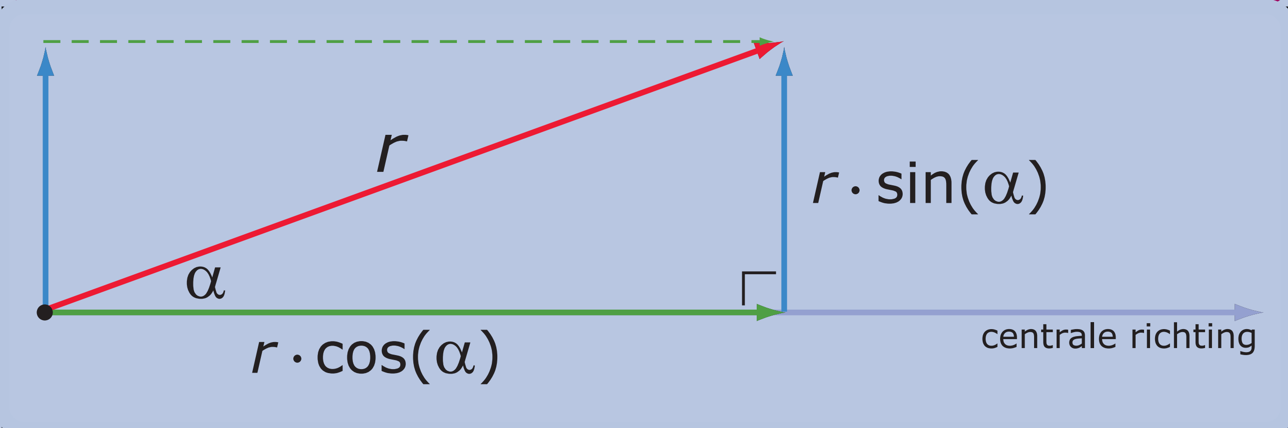
Begrippen

- vector — richtingshoek, draaihoek — componenten van een vector;
- sinus — cosinus — eenheidsvector — richtingshoek;
- hoeken berekenen met sinus en cosinus;
- tangens — hellingshoek;
- goniometrische verhoudingen — formules voor sinus, cosinus en tangens.

Activiteiten

- een vector ontbinden in een zijwaartse en een centrale component;
- sinus en cosinus gebruiken om componenten van vectoren te berekenen;
- hoeken berekenen met behulp van sinus en cosinus;
- berekeningen met helling, tangens en hellingshoeken uitvoeren;
- zijden en hoeken berekenen in rechthoekige driehoeken en dit toepassen meetkundige situaties.

Vectoren ontleden



Domein

Meetkunde

Hoofdstuk

Goniometrie

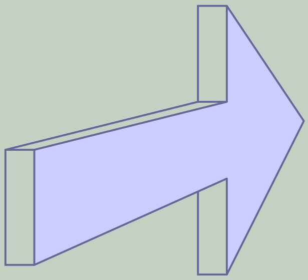
Inhoud

1

1.1 Vectoren

Inleiding

Twee belangrijke begrippen in de meetkunde zijn ‘afstand’ en ‘richting’. Een vector combineert die twee begrippen. Een vector is een pijl met een richting èn een afstand. Daarom ga je nu eerst werken met vectoren.



Je leert in dit onderwerp

- het begrip vector (een pijl met richting en afstand);
- de begrippen hoofdrichting (of centrale richting), centrale component en zijwaartse component;
- een vector ontbinden in de twee componenten.

Voorkennis

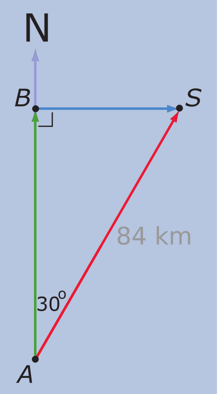
- de basisbegrippen van vlakke meetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek;
- hoeken meten in graden.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg 1

Applet

Een schip vaart op een koers van 30° met het noorden en heeft een snelheid van 42 km/uur en is gestart in punt A. Na 2 uur is het aangekomen in punt S. Zie de figuur hiernaast.



Deze ‘verplaatsing’ kun je voorstellen door een pijl van A naar S. Je spreekt van een ‘vector’ $\overrightarrow{AS}$. Vector $\overrightarrow{AS}$ heeft een lengte van 84 km en maakt een hoek ten opzichte van een vooraf vastgestelde richting. Voor koersen is dat meestal het Noorden.

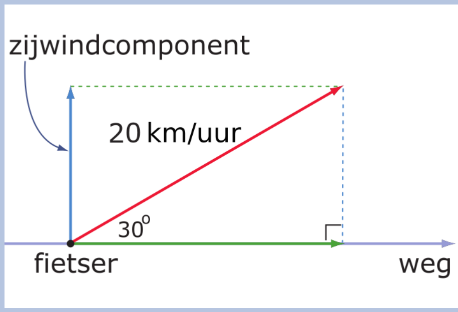
Je kunt de vector ‘ontbinden in twee loodrechte componenten’, namelijk een component in de noordelijke richting en een component in de oostelijke richting. Deze twee componenten staan loodrecht op elkaar. In de figuur zijn dit de vectoren $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{BS}$. Als je de figuur op schaal tekent, dan kun je vaststellen dat het schip ongeveer 72,7 kilometer ten noorden van punt A en 42 kilometer ten oosten van punt A zit.

De componenten waarin je de vector $\overrightarrow{AS}$ kunt ontbinden, hangen af van de koershoek met het Noorden. Die hoek heeft bovendien een bepaalde richting. Bij koersen worden hoeken ten opzichte van het Noorden en met de klok mee getekend.

Applet

Uitleg 2

Een fietser moet de vele kilometers die hij op een kaarsrechte polderweg moet afleggen, rekening houden met de wind. Je ziet in de figuur dat hij de wind schuin mee heeft. De hoek die de windvector met zijn fietsrichting maakt is $30°$. De windvector $\vec{w}$ druk je uit in km/h (km per uur).



Maar een deel van die windvector werkt in de richting waarin wordt gefietst. Dat deel van de windvector helpt de fietser vooruit. In de figuur zie je hoe groot die meewindcomponent in de fietsrichting is.

Maakt de wind een hoek van $140°$ met de fietsrichting, dan heeft de fietser de wind schuin tegen. Een deel van de windvector werkt nu precies tegen de fietsrichting in. In de figuur zie je hoe groot die component tegen de fietsrichting in is. Je geeft die tegenwindcomponent aan met een negatief getal, net als in een assenstelsel gebruikelijk is.

Merk op dat nu de hoek van de windvector met de fietsrichting tegen de wijzers van de klok in wordt uitgezet!

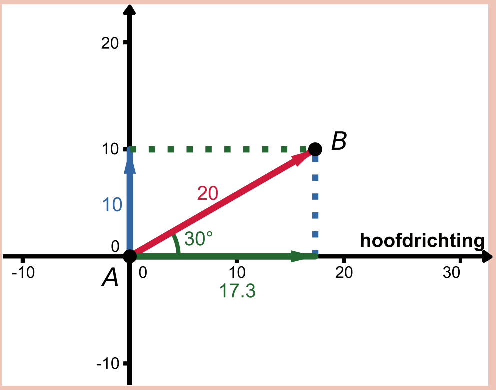
Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Applet

Theorie

Een **vector** heeft een bepaalde lengte en maakt een hoek met een vooraf afgesproken richting. Je noemt die vooraf afgesproken richting wel de **hoofdrichting** of de **centrale richting**. In een assenstelsel is dat de x-as.

Zo'n vector kun je aangeven door bijvoorbeeld $\vec{v}$, maar ook wel door $\overrightarrow{AB}$ als hij een verplaatsing van punt A naar punt B aangeeft.



De hoek wordt uitgezet vanaf de hoofdrichting en tegen de wijzers van de klok in. (Hoeken bij koersen ten opzichte van het Noorden vormen hierop een uitzondering, die meet je met de klok mee.)

Zo'n vector kun je **ontbinden in twee loodrechte componenten**:

- een **centrale component** in de centrale richting;
- een **zijwaartse component** in een richting loodrecht op de centrale richting.

Deze componenten kunnen - net als de coördinaten in een assenstelsel - zowel positieve als negatieve waarden hebben. Voorlopig bepaal je die componenten door tekeningen op schaal te maken en te meten.

Voorbeeld 1

Applet

Met de applet kun je bij elke vector van lengte 1 de centrale component en de zijwaartse component aflezen. Je moet zelf bedenken of de component positief of negatief is.

Een vliegtuig stijgt op onder een hoek van $20°$. Hoe hoog vliegt het na 1000 meter?

Antwoord

Met de applet maak je een eenheidsvector met een hoek van $20°$. Je leest de componenten af:

- de centrale component is $0{,}940$
- de zijwaartse component is $0{,}342$

Bij het vliegtuig is de begane grond de hoofdrichting. De vluchtvector heeft een lengte van 1000 m. De hoogte is de zijwaartse component van die vector en is dus ongeveer $1000 \cdot 0{,}342 = 342$ m.

Het vliegtuig vliegt op 342 m hoogte.

Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7 Opgave 8

Voorbeeld 2

Applet

Met de applet kun je bij elke vector van lengte 1 de centrale component en de zijwaartse component aflezen. Je moet zelf bedenken of de component positief of negatief is.

Een vliegtuig vliegt op een hoogte 5000 m en daalt onder een hoek van $20°$ met de horizontale richting. Hoe hoog vliegt het na 3000 meter te hebben afgelegd?

Antwoord

De hoek van de vluchtvector met de horizontale richting is nu $340°$. Met de applet maak je een eenheidsvector met een hoek van $340°$.
Je leest de componenten af:

- de centrale component is $0{,}940$
- de zijwaartse component is $-0{,}342$

Bij het vliegtuig is een horizontale lijn de hoofdrichting. De vluchtvector heeft een lengte van 3000 m. Het hoogteverlies is de zijwaartse component van die vector en is dus ongeveer $3000 \cdot -0{,}342 = -1026$ m.

Het vliegtuig vliegt op $5000 - 1026 = 3974$ m hoogte.

Opgave 9 Opgave 10

1.2 Sinus en cosinus

Inleiding

Een opstijgend vliegtuig heeft een snelheidsvector met een duidelijke richting en grootte. De zijwaartse component geeft de snelheid weer waarmee de hoogte verandert.

Maar lang voordat er vliegtuigen bestonden werd er met componenten van vectoren gerekend. De componenten van een eenheidsvector hebben al in de Oudheid de namen ‘sinus’ en ‘cosinus’ gekregen.

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen sinus en cosinus gebruiken voor de componenten van een eenheidsvector.

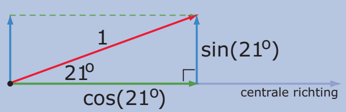
Voorkennis

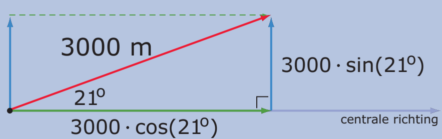
- het begrip vector met hoofdrichting (of centrale richting), centrale component en zijwaartse component;
- een vector ontbinden in de twee componenten.

Opgave V1

Uitleg

De centrale- en zijwaartse component van een vector hangen af van de hoek hij met de centrale richting maakt. Voor de centrale component van de eenheidsvector wordt het woord ‘cosinus’ gebruikt en voor de zijwaartse component van de eenheidsvector wordt het woord ‘sinus’ gebruikt.





In de linker figuur zie je sinus en cosinus van een eenheidsvector, een vector met lengte 1 en een ‘richtingshoek’ van 21°. Sinus wordt afgekort tot ‘sin’ en cosinus tot ‘cos’. Om aan te geven dat beide van de richtingshoek afhangen, zet je die er tussen haakjes bij.

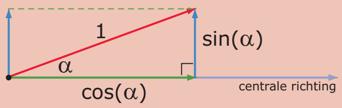
Als je vector de lengte 3000 heeft, dan worden alle afmetingen van de driehoek met 3000 vermenigvuldigd. De centrale component is dan $3000 \cdot \cos(21°)$ en de zijwaartse component is $3000 \cdot \sin(21°)$.
Op je rekenmachine kun je deze waarden berekenen, ook als de hoeken nauwkeuriger zijn gegeven. Let er wel op dat je rekenmachine dan moet staan ingesteld op rekenen met graden. Je kunt ook de applet in het **Practicum** gebruiken, die werkt alleen in drie decimalen nauwkeurig.

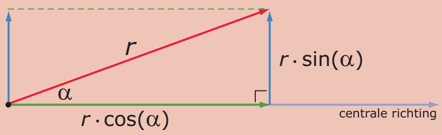
Je ziet in beide figuren dat de zijwaartse component zowel in het hoekpunt bij de richtingshoek kan worden geplaatst als langs een rechthoekszijde. Dat hangt van de toepassing af.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

De centrale- en zijwaartse component van een vector
hangen af van de hoek die hij met de centrale richting maakt. Voor de centrale component van de eenheidsvector wordt het woord **cosinus** gebruikt en voor de zijwaartse component van de eenheidsvector wordt het woord **sinus** gebruikt. Ze staan loodrecht op elkaar.





In de linker figuur zie je sinus en cosinus van een **eenheidsvector**, een vector met lengte 1. Sinus wordt afgekort tot 'sin' en cosinus tot 'cos'. Om aan te geven dat beide van de **richtingshoek** α afhangen, zet je dat er tussen haakjes bij. α (spreek uit 'alfa') is de eerste letter van het Griekse alfabet. Voor hoeken worden vaak griekse letters gebruikt zoals α, β (spreek uit 'bèta'), γ (spreek uit 'gamma'), enzovoorts.

Als je vector de lengte r heeft, dan worden alle afmetingen van de driehoek met r vermenigvuldigd. De centrale component is dan $r \cdot \cos(\alpha)$ en de zijwaartse component is $r \cdot \sin(\alpha)$.

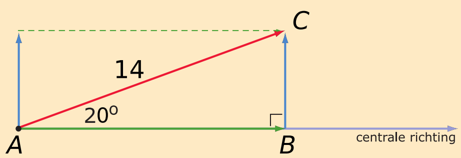
Je ziet in beide figuren dat de zijwaartse component zowel in het hoekpunt bij α kan worden geplaatst als langs een rechthoekszijde. Dat hangt van de toepassing af.

In **Practicum** zie je een applet waarin je de cosinus en de sinus van een eenheidsvector kunt aflezen tot op drie decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 1

Applet

Je ziet hier $\overrightarrow{AC}$ met een grootte van 14 eenheden en een hoek van 20° met de hoofdrichting.



Bereken de twee componenten $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{BC}$ in één decimaal nauwkeurig.

Antwoord

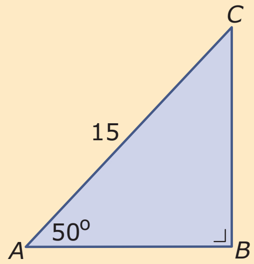
Gebruik je rekenmachine of de applet in het **Practicum** om de sinus en de cosinus van een hoek van 20° te bepalen.
Je berekent de componenten zo:

- $\overrightarrow{AB}$ is $14 \cdot \cos(20) \approx 13{,}2$
- $\overrightarrow{BC}$ is $14 \cdot \sin(20) \approx 4{,}8$

Beide componenten zijn positief. Dat wordt anders als $\angle\alpha$ meer dan 90° is.

Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2



Je ziet hier een rechthoekige ΔABC met $\angle A = 50°$ en hypotenusa $AC = 15$.
Bereken de lengtes van de twee rechthoekszijden in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

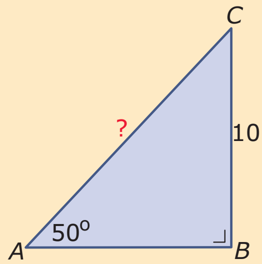
Je vat de hypotenusa AC op als vector die een hoek van $50°$ met de centrale richting AB maakt. Gebruik je rekenmachine of de applet in het **Practicum** om de sinus en de cosinus van een hoek van $50°$ te bepalen.

- AB is $15 \cdot \cos(50) \approx 9{,}64$
- BC is $15 \cdot \sin(50) \approx 11{,}49$

In een rechthoekige driehoek zijn dit meteen de lengtes van de rechthoekszijden, want daarin komen geen hoeken groter dan $90°$ voor. Je hoeft dan niet met eventuele mintekens van componenten rekening te houden.

Opgave 6 **Opgave 7** **Opgave 8**

Voorbeeld 3



Je ziet hier een rechthoekige ΔABC met $\angle A = 50°$ en rechthoekszijde $BC = 10$.
Bereken de lengte van de hypotenusa in één decimaal nauwkeurig.

Antwoord

Je vat de hypotenusa AC op als vector die een hoek van $50°$ met de centrale richting AB maakt. Nu geldt:

$AB = AC \cdot \sin(60)$

En dus is

$10 = AC \cdot \sin(50)$

Hieruit volgt $AC = \frac{10}{\sin(50)} \approx 13{,}1$ cm.

Opgave 9 **Opgave 10**

1.3 Hoeken berekenen

Inleiding

Een opstijgend vliegtuig heeft een snelheidsvector met een duidelijke richting en grootte. De zijwaartse component geeft de snelheid weer waarmee de hoogte verandert. Als je weet hoeveel m het vliegtuig heeft afgelegd en hoe hoog het dan zit, kun je vanuit de zijwaartse component (dus met behulp van de sinus) de hoek berekenen waaronder het vliegtuig opstijgt.

Je leert in dit onderwerp

- met behulp van sinus en cosinus hoeken berekenen.

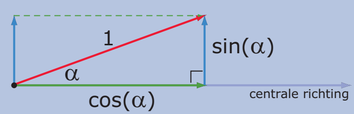
Voorkennis

- het begrip vector met hoofdrichting (of centrale richting), centrale component en zijwaartse component;
- een vector ontbinden in de twee componenten;
- de begrippen sinus en cosinus gebruiken voor de componenten van een eenheidsvector.

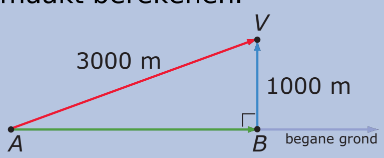
Opgave V1

Uitleg

Als de lengte van een vector en zijn hoek met de centrale richting bekend zijn kun je de zijwaartse- of de centrale component berekenen. Maar je kunt omgekeerd de richtingshoek berekenen als de lengte van de vector en de zijwaartse- of de centrale component zijn gegeven. Daarvoor gebruik je sinus of cosinus, de componenten van de eenheidsvector. Met je rekenmachine kun je vanuit sinus en cosinus terugrekenen.



Hier zie je de situatie van een opstijgend vliegtuig. Als het 3000 m heeft afgelegd, is het 1000 m gestegen. Je kunt nu de hoek die de baan van het vliegtuig met de begane grond maakt berekenen.



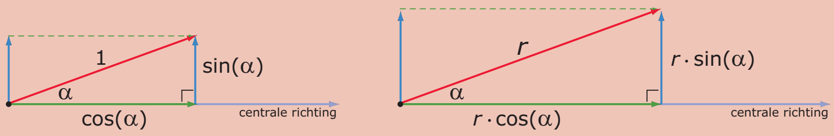
In de figuur geldt: $BV = AV \cdot \sin(\alpha)$ of wel $1000 = 3000 \cdot \sin(\alpha)$.
Hieruit volgt $\sin(\alpha) = \frac{1000}{3000} = \frac{1}{3}$.

Met je rekenmachine kun je vanuit sinus terugrekenen. Vaak wordt dat aangeduid als $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ of (op z'n Amerikaans) als $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 19{,}47$.
Je vindt: $\alpha \approx 19{,}5°$.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

De centrale- en zijwaartse component van een vector hangen af van de hoek die hij met de centrale richting maakt. Voor de centrale component van de eenheidsvector wordt het woord **cosinus** gebruikt en voor de zijwaartse component van de eenheidsvector wordt het woord **sinus** gebruikt. Ze staan loodrecht op elkaar.



In de linker figuur zie je sinus en cosinus van een **eenheidsvector**, een vector met lengte 1. Sinus wordt afgekort tot 'sin' en cosinus tot 'cos'. Om aan te geven dat beide van de **richtingshoek** α afhangen, zet je dat er tussen haakjes bij. Het rekenen met sinus en cosinus heet **goniometrie** en dat betekent 'hoekmeetkunde' ('gonia' is grieks voor 'hoek').

Als je vector de lengte r heeft, dan worden alle afmetingen van de driehoek met r vermenigvuldigd. De centrale component is dan $r \cdot \cos(\alpha)$ en de zijwaartse component is $r \cdot \sin(\alpha)$.

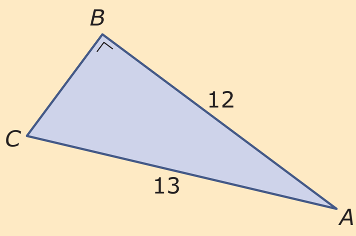
Je kunt dit ook gebruiken om de hoek α te berekenen als de lengte van de vector en één van beide componenten is gegeven.

In het **Practicum** zie je een applet waarin je de grootte van de hoek van een eenheidsvector kunt zoeken als de sinus of de cosinus ervan bekend is. Je moet wel goed kijken of je hoek scherp, stomp of zelfs overstrekt is, want er zijn in de applet steeds twee hoeken met dezelfde sinus en ook twee hoeken met dezelfde cosinus.

Ook de rekenmachine kan α berekenen als je $\sin(\alpha)$ of $\cos(\alpha)$ weet. Hij kan terugrekenen vanuit sinus en cosinus. Maar je rekenmachine kan niet zien welke hoek je wilt uitrekenen en geeft dus soms een scherpe hoek terwijl je een stompe hoek wilt hebben. Je kunt echter uit je antwoord wel de goede hoek afleiden.

Voorbeeld 1

Bereken de grootte van hoek C in de figuur hiernaast.



Antwoord

Vanuit hoekpunt C gezien kun je AC opvatten als vector die een hoek maakt met de centrale component BC. En dan is AB de zijwaartse component. Dus is

$13 \cdot \sin(\angle C) = 12$ en dus $\sin(\angle C) = \frac{12}{13}$.

En hierbij hoort $\angle C \approx 67{,}4°$.
Op je rekenmachine vind je dit (afhankelijk van het merk) door $\sin^{-1}(12/13)$ of $\arcsin(12/13)$ te berekenen.

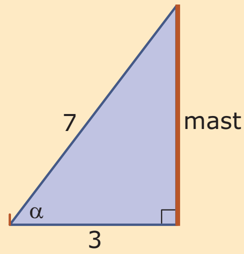
Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6

Voorbeeld 2

Op 3 meter van de voet van een antennemast worden enkele korte paaltjes de grond in geslagen. Van de top van de mast worden draden van 7 meter gespannen naar de voet van de paaltjes.
Bereken de hoogte van de antennemast en de hoek die elke draad met de grond maakt.

Antwoord

Verwerk de gegevens in een tekening zoals hiernaast. Je gaat er van uit dat de antennemast loodrecht op de grond staat.



Je neemt de grond als centrale richting. In de tekening zie je dat de 'vector' een lengte van 7 m en een centrale component met een lengte van 3 m heeft. Er geldt dus $7 \cdot \cos(\alpha) = 3$. De grootte van hoek α is ongeveer $65°$.

De hoogte van de mast is dan ongeveer $7 \cdot \sin(64{,}6) \approx 6{,}32$ m.

Opgave 7 Opgave 8 Opgave 9

1.4 Helling en tangens

Inleiding

Dit is een foto van de Dom van Utrecht. De toren is 111 m hoog.

Hoe zou je die hoogte kunnen berekenen als je ervoor op de begane grond staat en alleen je geodriehoek en een rekenmachine bij je hebt?

Je leert in dit onderwerp

- het begrip tangens en het verband met de helling van een vector;
- met behulp van tangens berekeningen uitvoeren van lengtes en hoeken.

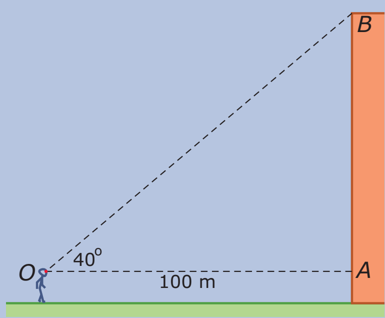
Voorkennis

- het begrip vector met hoofdrichting (of centrale richting), centrale component en zijwaartse component;
- een vector ontbinden in de twee componenten;
- de begrippen sinus en cosinus gebruiken voor de componenten van een eenheidsvector;
- met behulp van sinus en cosinus hoeken berekenen.

Opgave V1

Uitleg

Hiernaast zie je hoe Jan de hoogte van een flatgebouw berekent. Hij gaat 100 van een verticale gevel van de flat staan en meet de hoek waaronder hij de top van die gevel ziet. Dat is de hoek tussen een horizontale lijn (hier de centrale richting) en de kijklijn vanuit zijn oog naar de top van de gevel. Zo'n hoek met de centrale richting heet een ‘hellingshoek’. Jan meet een hellingshoek van 40°.



Met deze gegevens en je kennis van goniometrie kun je nu de hoogte van de flat berekenen. Maar dat is nogal wat werk. Je kunt beter gebruik maken van het begrip helling: de helling van een vector is de verhouding van zijn twee componenten, het is de zijwaartse component gedeeld door de centrale component. Hiervoor is het woord ‘tangens’ ingevoerd. Die tangens hangt af van de grootte van de hellingshoek. In dit geval geldt:

$\tan(40°) = \frac{AB}{100}$

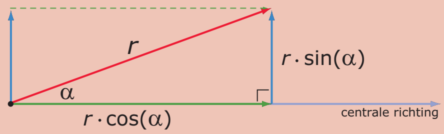
Je rekenmachine kan ook de tangens van een hellingshoek berekenen. Je vindt dan $\frac{AB}{100} \approx 0{,}839$ en dus $AB \approx 83{,}9$ m. Als Jan z'n ogen op $1{,}80$ m van de grond heeft, dan is de flat $85{,}7$ m hoog.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

De hoek α die een vector met zijn centrale richting maakt heet ook de **hellingshoek** van die vector. De bijbehorende **helling** wordt bepaald door de verhouding van de zijwaartse component en de centrale component van die vector. Voor die helling wordt het woord **tangens** gebruikt.

Voor een vector met lengte r en hellingshoek α betekent dit dat de helling $\tan(\alpha) = \frac{r \cdot \sin(\alpha)}{r \cdot \cos(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ is.



Omdat je rekenmachine de sinus en de cosinus van een hoek kan uitrekenen, kan hij ook de tangens van een hoek uitrekenen.

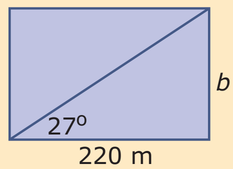
Soms wordt een helling (een tangens dus) als **hellingspercentage** weergegeven. Dan is de waarde van de tangens met 100 vermenigvuldigd.

Voorbeeld 1

Een rechthoekig veld is 220 m lang. De hoek tussen de langste zijde en de diagonaal is $27°$.
Bereken de breedte van het veld.

Antwoord

Maak een schets van de situatie.
Je ziet dat $\tan(27°) = \frac{b}{220}$. Dus $b = 220 \cdot \tan(27°) \approx 112$ m.



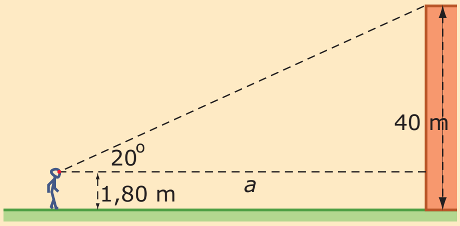
Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6

Voorbeeld 2

Een schoorsteen van een fabriek is 40 m hoog. Een landmeter meet de hellingshoek naar de top en vindt $20°$. De persoon in kwestie gebruikt een hoekmeter die $1{,}80$ m boven de begane grond op een statief zit.
Hoe ver staat dit statief van de schoorsteen af?

Antwoord

Maak een schets van de situatie.



Je ziet dat $\tan(20°) = \frac{38{,}20}{a}$.

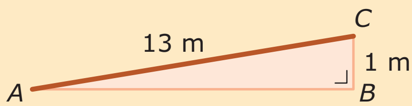
Dus $a = 38{,}20/\tan(20°) \approx 104{,}95$ m.

Hij staat ongeveer 195 m van de schoorsteen af.

Opgave 7 Opgave 8

Voorbeeld 3

Je ziet hier een oprit naar een huis van 13 m lengte die een hoogteverschil van 1 m overbrugt.
Hoeveel bedraagt het hellingspercentage van deze oprit? En hoe groot is de hellingshoek?



Antwoord

Met de stelling van Pythagoras vind je $AB = \sqrt{168} \approx 12{,}96$ m.
De helling is dus $1/12{,}96 \approx 0{,}077$ en dat geeft een hellingspercentage van ongeveer $7{,}7\%$.

Omdat de helling van een vector gelijk is aan de tangens van de hellingshoek α, geldt $\tan(\alpha) \approx 0{,}077$. Dit geeft met je rekenmachine $\alpha \approx 4{,}4°$.

Opgave 9 Opgave 10 Opgave 11

1.5 Rekenen in driehoeken

Inleiding

Je hebt de begrippen sinus, cosinus en tangens tot nu toe leren kennen als componenten van vectoren. Dat blijft ook de belangrijkste toepassing ervan en laat ook zien dat ze zowel positieve als negatieve waarden kunnen hebben. Maar nu ga je ze gebruiken bij berekeningen in (vooral rechthoekige) driehoeken.

Je leert in dit onderwerp

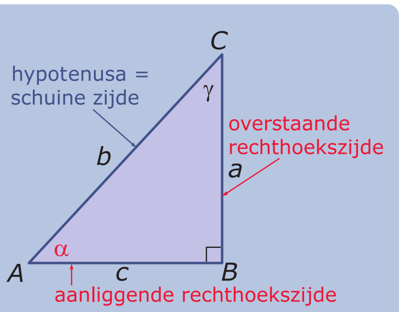
- sinus, cosinus en tangens gebruiken voor berekeningen van lengtes en hoeken in (rechthoekige) driehoeken.

Voorkennis

- het begrip vector met hoofdrichting (of centrale richting), centrale component en zijwaartse component;
- de begrippen sinus en cosinus gebruiken voor de componenten van een eenheids-vector;
- het begrip tangens en het verband met de helling van een vector;
- met behulp van sinus, cosinus en tangens hoeken en lengtes berekenen.

Opgave V1

Uitleg



Werk je alleen in rechthoekige driehoeken met sinus, cosinus en tangens, dan kun je je beperken tot scherpe hoeken zoals de hoek α in deze figuur. In deze driehoek geldt: $a = b \cdot \sin(\alpha)$, $c = b \cdot \cos(\alpha)$ en $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$. En dus is $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$, $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$ en $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$.

Nu zeg je wel dat a de **overstaande rechthoekszijde** van α en b de **aanliggende rechthoekszijde** van α is.

En in plaats van hypothenusa zeg je wel **schuine zijde**. Dan geldt in elke rechthoekige driehoek:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

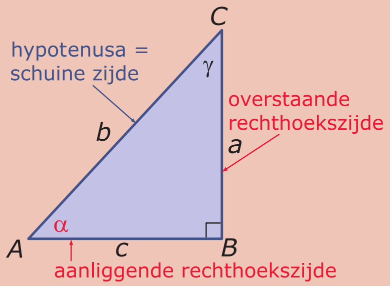
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

Je spreekt van de drie **goniometrische verhoudingen** in een rechthoekige driehoek.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Je ziet hier een rechthoekige driehoek. De lengtes van de zijden worden met kleine letters aangeduid die corresponderen met de hoofdletters van de hoekpunten er tegenover. De groottes van de hoeken worden met griekse letters aangeduid die corresponderen met de hoekpunten. In dit geval is $\beta = 90°$. In zo'n rechthoekige driehoek geldt:



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

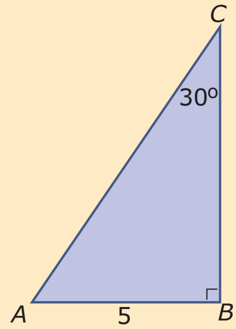
Je spreekt van de drie **goniometrische verhoudingen** in een rechthoekige driehoek. Je gebruikt ze bij berekeningen in driehoeken, ook als die geen rechte hoek hebben. Je spreekt wel van **trigonometrie** (‘driehoeksmeetkunde’).

Voorbeeld 1

Van een rechthoekige driehoek ABC is $AB = 5$ cm, $\angle B = 90°$ en $\angle C = 30°$.
Bereken de lengte van AC.

Antwoord

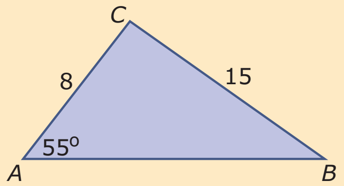
Maak een schets van de situatie.
Zijde AC is de schuine zijde van de driehoek en zijde AB is de overstaande rechthoekszijde van de gegeven $\angle C$. Je werkt daarom met de sinus van deze hoek.
Je ziet dat $\sin(30°) = \frac{5}{AC}$. Dus $AC = 5/\sin(30°) = 10$.



Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

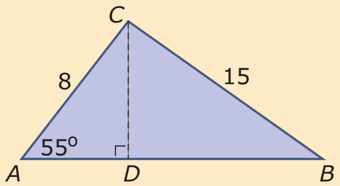
Voorbeeld 2

Je ziet hier een niet-rechthoekige driehoek ABC met AC = 8 cm, BC = 15 cm en $\angle A = 55°$. Bereken de omtrek en de oppervlakte van deze driehoek, beide in één decimaal nauwkeurig.



Antwoord

Omdat de driehoek niet rechthoekig is, kun je zijde AB niet berekenen met de stelling van Pythagoras. Alleen goniometrie toepassen is een optie, maar dan moet je ook een rechte hoek hebben. Dus maak je een rechte hoek door een hoogtelijn te tekenen. De hoogtelijn uit C ligt het meest voor de hand.



Nu kun je in ΔADC de twee rechthoekszijden berekenen met behulp van goniometrie. Ga na dat $AD \approx 4{,}59$ en $DC \approx 6{,}55$.

Nu kun je in ΔDBC met de stelling van Pythagoras berekenen, dat $DB \approx 13{,}49$.

Nu kun je zelf de omtrek en de oppervlakte van de gegeven driehoek berekenen...

Opgave 6 Opgave 7 Opgave 8

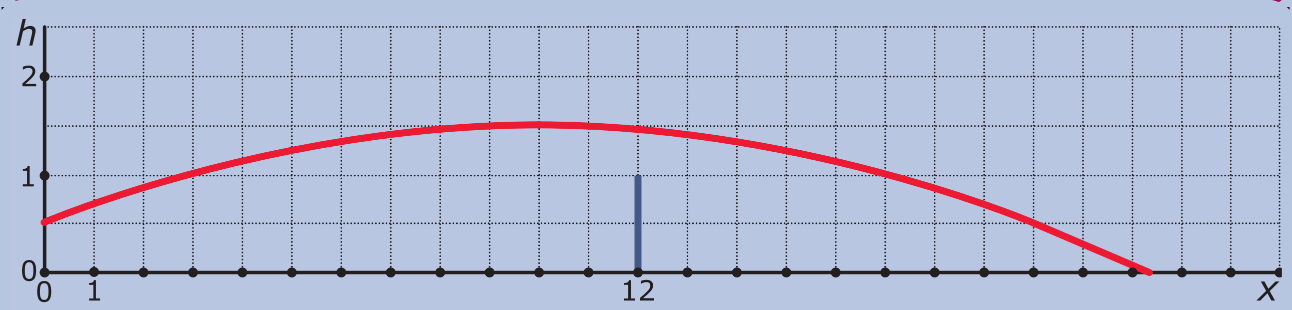
Begrippen

- kwadratische functie — parabool — top — extreme waarde;
- kwadraat afsplitsen — nulpunten;
- tweedegraads vergelijking (kwadratische functie) — abc-formule — discriminant;
- handige oplossingsmethoden;
- symmetrie-as — raaklijn — raakpunten.

Activiteiten

- van een kwadratische functie van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ de top en de extreme (uiterste) waarde bepalen en de grafiek tekenen;
- nulpunten en top bepalen, drie gedaantes van de formule bij een kwadratische functie — formules opstellen als de top of de nulpunten en nog een extra punt van de grafiek zijn gegeven;
- de abc-formule gebruiken om een kwadratische vergelijking systematisch op te lossen — de discriminant van een kwadratische vergelijking;
- kwadratische vergelijkingen handig oplossen, onder andere door ontbinden in factoren, terugrekenen en de abc-formule;
- werken met parabolen en lijnen die elkaar snijden en raken.

Boogballetjes



Domein

Functies en grafieken

Hoofdstuk

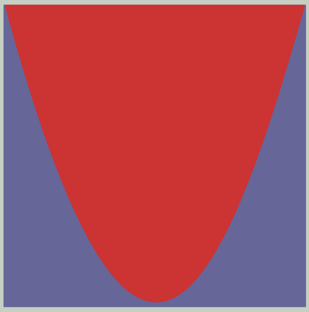
Kwadratische verbanden

Inhoud

2

2.1 Kwadratische functies

Inleiding



Je weet al dat bij kwadratische verbanden van de vorm $y = a \cdot (x-p)^2 + q$ parabolen horen met top (p,q).
Je gaat daar nu opnieuw mee werken.

Je leert in dit onderwerp

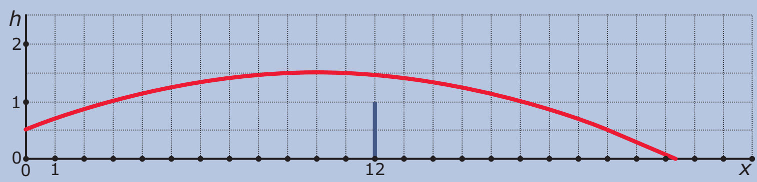
- werken met kwadratische verbanden en de bijbehorende parabolen.

Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- bij kwadratische verbanden van de vorm $y = a(x-p)^2 + q$ een bijbehorende grafiek tekenen, een parabool met top (p,q).

Opgave V1

Uitleg



Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies in de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog.
De baan van de bal is een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule

$$h = \text{-}0{,}01 \cdot (x-10)^2 + 1{,}5$$

Deze formule is van de vorm $h = \ldots$ en dus is h een functie van x. In dit geval is er sprake van een ‘kwadratische functie’. Hieronder zie je de bijbehorende tabel.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
h	0,50	0,86	1,14	1,34	1,46	1,50	1,46	1,34	1,14	0,86	0,50	0,06	-0,46
toename		0,36	0,28	0,20	0,12	0,04	-0,04	-0,12	-0,20	-0,28	-0,36	-0,44	-0,52

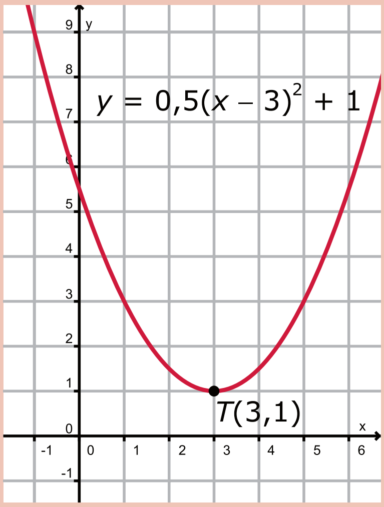
Je ziet dat de toename van de hoogte van de tennisbal steeds wat minder wordt. Hoeveel minder is moeilijk in te schatten. Op het eerste gezicht lijkt er geen regelmaat in de rij van de toenames te zitten. Maar als je de verandering van de toenames bekijkt is deze constant. Toeval of geen toeval?

De grafiek hierboven is een deel van een ‘parabool’. Je ziet dat het hoogste punt de coördinaten $(10; 1{,}5)$ is. Dit noem je de ‘top’ van de parabool. De top ligt op de ‘symmetrieas’ van de parabool. In dit geval is het de lijn $x = 10$.

Opgave 1 Opgave 2

Applet

Theorie



Bij een **kwadratische functie** hoort een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ met $a \neq 0$. De bijbehorende grafiek is een **parabool** met **top** (p,q) en **symmetrieas** $x = p$.

- Als $a > 0$ heb je een **dalparabool** met een laagste waarde, een **minimum** van q voor $x = p$.
- Als $a < 0$ heb je een **bergparabool** met een hoogste waarde, een **maximum** van q voor $x = p$.

Een maximum of een minimum noem je een **uiterste waarde** of ook wel een **extreme waarde** van een functie.

Als je in een bijbehorende tabel de waarden van x met vaste stappen laat toenemen, dan kun je een kwadratisch verband herkennen aan de symmetrie in de tabel. Kenmerkend voor een kwadratisch verband is ook dat de verandering van de toenames (of de afnames) constant is.

Voorbeeld 1

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = (x - 1)^2 + 3$.

Bereken de extreme waarde van deze kwadratische functie en teken de bijbehorende parabool.

Antwoord

De top van de parabool kun je uit de formule aflezen: $T(1{,}3)$. De parabool heeft daarom de lijn $x = 1$ als symmetrieas en je ziet dat het een dalparabool is.
De extreme waarde is daarom een minimum van 3 voor $x = 1$

Nu kun je gemakkelijk een tabel maken en de grafiek tekenen.

Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Dit is een tabel van een kwadratische functie.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	8	3	0	-1	0	3	8	16

Welke formule hoort er bij deze functie?

Antwoord

Uit de tabel lees je af, dat de symmetrieas van de parabool $x = \text{-}2$ is en de top is daarom $T(\text{-}2,\text{-}1)$.

De formule heeft dus de vorm $y = a(x+2)^2 - 1$.

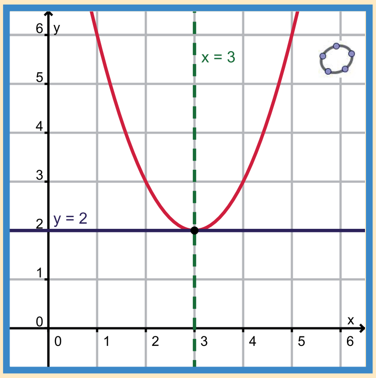
Neem nu een ander punt uit de tabel en bereken daarmee dat $a = 1$.

Opgave 6 Opgave 7 Opgave 8

Voorbeeld 3

Door de top van een parabool gaan twee lijnen die precies één punt met de parabool gemeenschappelijk hebben. Eén van die twee lijnen is de symmetrieas van de parabool. De andere lijn noem je een **raaklijn** aan de parabool in de top.

Bekijk nu de parabool met formule $y = (x-3)^2 + 2$. Welke lijn is de symmetrieas en welke lijn is de raaklijn door de top?



Antwoord

De top is $T(3,2)$.

De symmetrieas is de lijn $x = 3$.

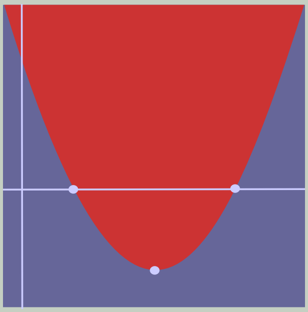
De raaklijn door de top is de lijn $y = 2$.

Opgave 9 Opgave 10

2.2 Nulpunten en top

Inleiding

Je weet al dat bij kwadratische verbanden van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ parabolen horen met top (p,q).
Maar kwadratische functies kunnen ook een andere vorm hebben. En ook dan wil je kunnen bepalen welke top de bijbehorende parabool heeft en welke nulpunten.



Je leert in dit onderwerp

- nulpunten en top berekenen van een kwadratische functie;
- de formule opstellen van een kwadratische functie bij geschikte gegevens.

Voorkennis

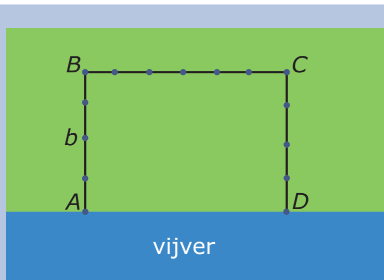
- werken met variabelen en met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- kwadraat afsplitsen en ontbinden in factoren, ook met de som-en-productmethode;
- bij kwadratische verbanden van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ een bijbehorende grafiek tekenen, een parabool met top (p,q).

Opgave V1

Uitleg

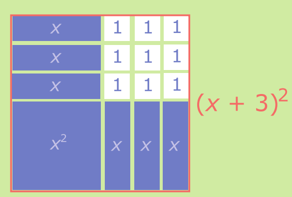
Een boer heeft een stuk weiland naast een vijver. Hij wil naast de vijver een stuk grond afzetten met 200 m hekwerk. Zie de figuur. Langs de vijver komt geen hek.
b is de lengte van AB. Voor de oppervlakte van het weiland krijg je dan de formule:

$A = b(100 - 2b) = 100b - 2b^2$



Deze formule kun je kennelijk in twee vormen schrijven: een vorm met haakjes en een vorm die als hoogste macht van b een kwadraat heeft, maar ook nog een term heeft waarin b niet in het kwadraat staat. Zou er nu toch ook gewoon sprake zijn van een kwadratische functie? En zo ja, wat is dan het maximum van die functie?

Het blijkt dat je kwadratische functies in diverse vormen kunt schrijven. Bijvoorbeeld is $y = 2(x - 3)^2 + 1 = 2x^2 - 12x + 19$ als je de haakjes uitwerkt. Dus ook een formule als $y = x^2 + 6x + 1$ is waarschijnlijk een kwadratische functie. Maar hoe weet je dat zeker en hoe kun je dan de top van de bijbehorende parabool bepalen?



$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$

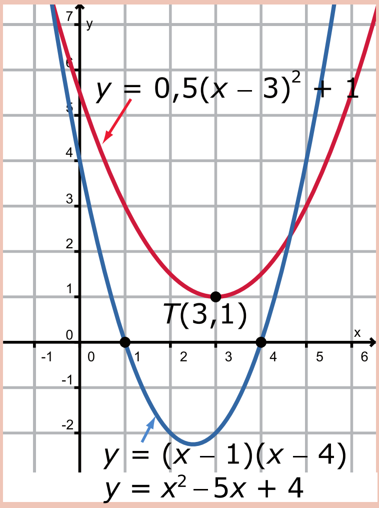
Daarvoor moet je in $y = x^2 + 6x + 1$ een kwadraat afsplitsen. Hiernaast zie je hoe de uitdrukking $x^2 + 6x$ te herleiden is tot $(x+3)^2 - 9$.
De formule $y = x^2 + 6x + 1$ herleid je daarmee tot $y = (x+3)^2 - 8$.

En nu weet je zeker dat er sprake is van een kwadratische functie en kun je de top van de bijbehorende parabool aflezen.

Opgave 1 Opgave 2

Applet

Theorie



Kwadratische functies kunnen verschillende vormen aannemen:

- $y = a \cdot (x-p)^2 + q$ waarin (p,q) de **top** van de parabool is.
- $y = a(x-m)(x-n)$
- $y = ax^2 + bx + c$

Bij kwadratische functies van de vorm $y = a \cdot (x-p)^2 + q$ is de top van de parabool meteen uit de formule af te lezen. Het berekenen van de snijpunten met de x-as, de **nulpunten** doe je door de vergelijking $y = 0$ op te lossen.

Bij kwadratische functies van de vorm $y = a(x-m)(x-n)$ kun je juist de nulpunten meteen zien: $(m,0)$ en $(n,0)$. De top bepaal je dan door te bedenken dat hij op de symmetrieas ligt, dus een x-coördinaat heeft midden tussen m en n in.

Kwadratische functies van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ breng je door **kwadraat afsplitsen** eerst in de vorm waarin je meteen de top kunt aflezen.

Applet

Voorbeeld 1

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = 2x^2 - 6x - 1$.
Bereken eerst de top van de bijbehorende parabool en daarna de exacte nulpunten.

Antwoord

Om de top te kunnen aflezen herleid je de formule tot de vorm $y = a \cdot (x-p)^2 + q$.
Dat doe je door een kwadraat af te splitsen.
Maar dan moet je eerst de a buiten haakjes halen.
Hier is dat de factor 2.
Je kunt zo te werk gaan:

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2 - 6x - 1 && \text{factor 2 buiten haakjes halen}\\
y &= 2\left(x^2 - 3x - 0{,}5\right) && \text{een kwadraat afsplitsen}\\
y &= 2\left((x-1{,}5)^2 - 2{,}25 - 0{,}5\right) && \text{in de juiste vorm schrijven}\\
y &= 2(x-1{,}5)^2 - 5{,}5
\end{aligned}
$$

Nu je de formule hebt geschreven als $y = 2(x-1{,}5)^2 - 5{,}5$ kun je aflezen dat de top $T(1{,}5;\text{-}5{,}5)$ is.

De exacte nulpunten bereken je door $2(x - 1{,}5)^2 - 5{,}5 = 0$ op te lossen. Dat doe je door terugrekenen.

Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Applet

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = \text{-}0{,}2(x - 3)(x + 2)$.

Bepaal de nulpunten van de bijbehorende parabool en bereken de top.

Antwoord

Als de formule van een kwadratische functie een vorm heeft zoals die hierboven, kun je de nulpunten uit de formule aflezen. Immers $\text{-}0{,}2(x - 3)(x + 2) = 0$ kun je (na delen door $\text{-}0{,}2$) splitsen in $x - 3 = 0 \vee x + 2 = 0$ en dat geeft $x = 3 \vee x = \text{-}2$.
De nulpunten zijn daarom $(\text{-}2{,}0)$ en $(3{,}0)$.

De top van deze parabool kun je berekenen door gebruik te maken van de symmetrie. De symmetrieas is de verticale lijn die midden tussen beide nulpunten door de x-as gaat. Dus dat is de lijn $x = 0{,}5$.
Omdat de top van de parabool op de symmetrieas ligt kun je hem nu berekenen: de x-waarde van de top is $0{,}5$ en die kun je in de formule invullen om de bijbehorende y-waarde te vinden.

Opgave 6 Opgave 7 Opgave 8

Voorbeeld 3

Applet

Van een parabool is gegeven dat hij de nulpunten $(1{,}0)$ en $(3{,}0)$ heeft en gaat door het punt $(0{,}6)$.

Bepaal de bijbehorende formule.

Antwoord

Omdat de nulpunten bekend zijn kun je de formule schrijven als $y = a(x - m)(x - n)$ met $m = 1$ en $n = 3$ (of andersom). Je krijgt dan $y = a(x - 1)(x - 3)$.

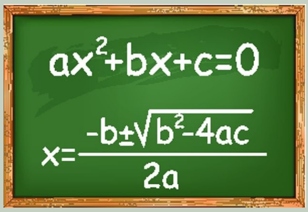
Substitueer nu de coördinaten van het punt $(0{,}6)$ in deze vergelijking en je krijgt de juiste waarde van a, namelijk $a = 2$.

Je kunt nu de formule opschrijven.

Opgave 9 Opgave 10

2.3 Kwadratische vergelijkingen

Inleiding



Zo'n 1200 jaar geleden bedacht de Perzische wiskundige **Al-Khwarizmi** een oplossing voor alle kwadratische vergelijkingen. Die oplossing heet tegenwoordig de abc-formule. Je ziet hem hier in moderne notatie.
Je moet van een gegeven vergelijking alleen de waarden van a, b en c aflezen en die invullen in de oplossingsformule en klaar.

Je leert in dit onderwerp

- alle kwadratische vergelijkingen oplossen met de abc-formule;
- met behulp van de discriminant het aantal oplossingen van een kwadratische vergelijking bepalen.

Voorkennis

- werken met variabelen en met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- kwadraat afsplitsen en ontbinden in factoren, ook met de som-en-productmethode;
- bij kwadratische functies (met een geschikte formule) de top en de nulpunten bepalen.

Opgave V1 Opgave V2 Opgave V3

Uitleg 1

Elke vergelijking die je kunt schrijven in de vorm $ax^2+bx+c=0$ heet een 'kwadratische vergelijking' of ook wel 'tweedegraads vergelijking' (mits $a \neq 0$) omdat de hoogste macht van de onbekende x die voorkomt 2 is. (Een lineaire vergelijking noem je ook wel een eerstegraads vergelijking.)

Elke kwadratische vergelijking kun je oplossen met behulp van kwadraat afsplitsen. Maar soms is dat nogal vervelend gereken met breuken en wortels. En dus doe je dat kwadraat afsplitsen één keer met de algemene vorm. Je vindt dan:

De oplossing van de vergelijking $ax^2+bx+c=0$ is $x=\frac{\text{-}b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x=\frac{\text{-}b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ als $a \neq 0$.

Als je nu $3x^2+7x+1=0$ wilt oplossen, dan maak je van de bovenstaande oplossing gebruik. Je leest af $a=3$, $b=7$ en $c=1$. Deze drie getallen vul je in de oplossing van de algemene vergelijking in en je krijgt de oplossing van jouw vergelijking:

$x=\frac{\text{-}7+\sqrt{7^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3} \vee x=\frac{\text{-}7-\sqrt{7^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3}$

ofwel:

$x=\frac{\text{-}7+\sqrt{37}}{6} \vee x=\frac{\text{-}7-\sqrt{37}}{6}$

De oplossing van de algemene vorm $ax^2+bx+c=0$ van een kwadratische vergelijking heet de 'abc-formule' of 'wortelformule'. Je kunt hem toepassen op elke kwadratische vergelijking die je eerst in de algemene vorm hebt geschreven.

In de abc-formule komen wortels en breuken voor. Soms komen die wortels uit en kun je de oplossing herleiden tot eenvoudige getallen. Maar vaak komen ze niet uit en laat je gewoon de oplossing met wortels en breuken zo staan.

Omdat beide uitdrukkingen dan maar weinig verschillen, schrijf je wel kortweg:

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ met $D = b^2 - 4ac$.

Het teken ± betekent 'plus of min' en geeft aan dat er twee oplossingen zijn. (En het heeft dus niets te maken met 'plusminus', een woord waarmee 'ongeveer' wordt bedoeld.)

Uitleg 2

Applet

In de applet kun je formules van vorm $y = ax^2 + bx + c$ instellen en de nulpunten van de grafiek bekijken.
Om die nulpunten te berekenen moet je $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen. De oplossing vind je met de abc-formule.

Bekijk in de applet, dat:

- $2x^2 - 6x - 1 = 0$ een oplossing met twee x-waarden heeft;
- $2x^2 - 6x + 4{,}5 = 0$ een oplossing met één x-waarde heeft;
- $2x^2 - 6x + 6 = 0$ geen reële oplossing heeft.

Je merkt dit ook snel als je de oplossing met de abc-formule probeert te vinden. De wortel uit een negatief getal levert immers geen reële waarde op! Daarom wordt het aantal waarden in de oplossing (of kortweg het aantal oplossingen) van een kwadratische vergelijking bepaald door de uitdrukking $b^2 - 4ac$ die onder het wortelteken staat. Als deze uitdrukking negatief is heeft de oplossing geen reële waarden. En als er uit deze uitdrukking 0 komt, dan is er maar één waarde in de oplossing.

Het is dus bij het oplossen van een kwadratische vergelijking handig om eerst $D = b^2 - 4ac$ te berekenen. Als $D > 0$ heb je twee waarden in de oplossing, als $D = 0$ heb je er één en als $D < 0$ zijn er geen reële waarden in de oplossing. Je noemt D de 'discriminant' van de kwadratische vergelijking. Dat komt van het woord 'discrimineren' wat 'onderscheid maken' betekent.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Theorie

Elke vergelijking die je kunt schrijven in de vorm $ax^2+bx+c = 0$ heet een **kwadratische vergelijking** of ook wel **tweedegraads vergelijking** (mits $a \neq 0$) omdat de hoogste macht van de onbekende x die voorkomt 2 is. (Een lineaire vergelijking noem je ook wel een eerstegraads vergelijking.)

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ is

$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Deze oplossing noem je de **abc-formule**.

Bewijs 1

Hieronder zie je een **bewijs van de abc-formule**. Dat wil zeggen dat je aantoont dat de formule in alle gevallen klopt. Je gaat daartoe $ax^2 + bx + c = 0$ in algemene zin oplossen met behulp van kwadraat afsplitsen.

Neem aan dat $a \neq 0$ (anders is het ook geen kwadratische vergelijking!). Je kunt dan aan beide kanten van het isgelijkteken delen door a. Dat geeft:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Een kwadraat afsplitsen levert op:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$ en $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

Worteltrekken:

$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

En nu een beetje herleiden:

$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

En hiermee is de abc-formule gevonden.

Het is bij het oplossen van een kwadratische vergelijking handig om eerst de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ te berekenen.

- Als $D > 0$ heb je twee waarden in de oplossing.
- Als $D = 0$ heb je één waarde in de oplossing.
- Als $D < 0$ heb je geen reële waarden in de oplossing.

Je kunt hiermee de oplossing van elke kwadratische vergelijking kortweg zo opschrijven:

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is $x = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Bekijk ook de (engelstalige) videoclip 'quadratic formula' in het **Practicum**.

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $(x-2)(x-3) = 3$ op.

Antwoord

Haakjes wegwerken en op 0 herleiden levert de vergelijking $x^2 - 5x + 3 = 0$ op.

Deze vergelijking kun je oplossen met de abc-formule. Je berekent dan liever eerst de discriminant, dan weet je of er een oplossing is.

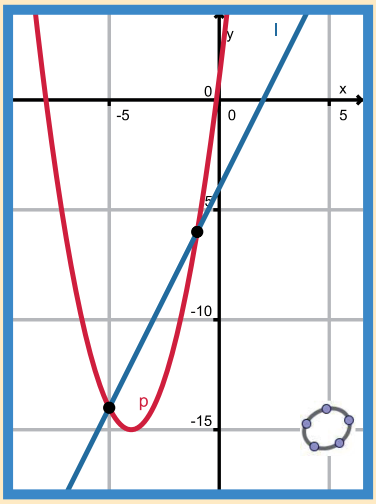
Lees af: $a = 1$, $b = -5$ en $c = 3$.

En dus is $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13$. De discriminant is positief en de oplossing bestaat dus uit twee waarden.

De oplossing is $x = \frac{- -5\pm\sqrt{13}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$.

Opgave 5 **Opgave 6** **Opgave 7** **Opgave 8**

Voorbeeld 2



Gegeven zijn een kwadratische functie met formule $y_1 = x^2 + 8x + 1$ en een lineaire functie met formule $y_2 = 2x - 4$. Bereken de coördinaten van de snijpunten van hun grafieken.

Antwoord

In de snijpunten geldt $x^2 + 8x + 1 = 2x - 4$.

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst op 0 te herleiden en dan de abc-formule toe te passen. Aan de grafieken zie je dat er twee x-waarden uit moeten komen.

Uit $x^2 + 6x + 5 = 0$ lees je af: $a = 1$, $b = 6$ en $c = 5$.

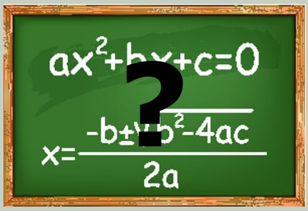
De oplossing is $x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$. En dus vind je $x = -5 \vee x = -1$.

Om beide snijpunten te vinden, moet je deze x-waarden nog invullen. Ga na, dat dit de snijpunten $(-5,-14)$ en $(-1,-6)$ oplevert.

Opgave 9 Opgave 10 Opgave 11

2.4 Handig oplossen

Inleiding



In het voorgaande onderdeel heb je geleerd de abc-formule te gebruiken.
Daarmee kun je elke kwadratische vergelijking oplossen.
Waarom dan toch nog kijken naar andere manieren om dit te doen? Welnu, de abc-formule is vaak nogal onhandig in gebruik, er zijn snellere methoden. Dus nu ga je proberen om kwadratische vergelijkingen zo handig mogelijk op te lossen. Niet altijd maar domweg de abc-formule toepassen, maar eerst even kijken of het niet sneller kan...

Je leert in dit onderwerp

- kwadratische vergelijkingen zo handig mogelijk oplossen.

Voorkennis

- werken met variabelen en met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- kwadraat afsplitsen en ontbinden in factoren, ook met de som-en-productmethode;
- kwadratische vergelijkingen oplossen met de abc-formule;
- bij kwadratische functies de top en de nulpunten berekenen.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

De vergelijking $2x^2 + 12x = -10$ kan op meerdere manieren opgelost worden.
Allereerst merk je op dat het een kwadratische vergelijking en een drieterm is. Je herleid dan eerst op 0:

$2x^2 + 12x + 10 = 0$

Je kunt nu de abc-formule gebruiken om de vergelijking op te lossen. Maar delen door 2 maakt hem in ieder geval eenvoudiger:

$x^2 + 6x + 5 = 0$

Nog steeds kun je de abc-formule toepassen, of je kunt een kwadraat afsplitsen, maar nu is ontbinden met de som-en-product-methode handiger.

Bij drietermen kies je meestal voor ontbinden (als je snel een ontbinding ziet) of anders voor de abc-formule. Maar hoe werk je bij een tweeterm?
Stel je wilt de vergelijking $2x^2 + 12x = 0$ oplossen.
De abc-formule kan natuurlijk met $a = 2$, $b = 12$ en $a = 0$. Maar dat is wel erg onhandig. Gewoon de GGD buiten haakjes halen gaat echt veel sneller...

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Een kwadratische vergelijking (of tweedegraads vergelijking) kun je op meerdere manieren oplossen. De abc-formule lukt altijd als je hem in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ hebt geschreven (met $a \neq 0$). Maar regelmatig is de abc-formule niet nodig. Hier zie je welke keuzes je daarbij kunt maken.

- Komt de variabele maar op één plaats voor?
  Ga dan terugrekenen, met name worteltrekken.
- Heeft de vergelijking de vorm van een ontbinding die op 0 uitkomt?
  Splits de vergelijking dan in twee eenvoudiger vormen.
- Komen er in de vergelijking haakjes voor, maar kun je niet meteen ontbinden in factoren?
  Werk dan eerst de haakjes weg.
- Kun je na op 0 herleiden alle termen door hetzelfde getal delen?
  Doe dit dan en maak de vergelijking eenvoudiger.
- Kun je na op 0 herleiden en vereenvoudigen ontbinden in factoren?
  Doe dit dan en lees de oplossing uit de ontbinding af.
- Kun je na op 0 herleiden en vereenvoudigen niet ontbinden in factoren?
  Gebruik de abc-formule of splits een kwadraat af.

Als je deze stappen in deze volgorde doorloopt, kun je elke kwadratische vergelijking op een zo handig mogelijke manier oplossen.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een drietal kwadratische vergelijkingen die op elkaar lijken.

- $(x-2)(x+3)=6$
- $(x-2)(x+3)=7$
- $(x-2)(x+3)=0$

Van welke van deze vergelijkingen kun je de oplossingen ‘zo zien’? En welke kun je alleen oplossen met de abc-formule?

Antwoord

In de vind je een lijstje met keuzes die je kunt maken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Dit lijstje kan je helpen bij het beantwoorden van de vragen hierboven.

Bij geen van deze vergelijkingen komt de variabele op één plek voor, dus terugrekenen is nu onmogelijk. De derde vergelijking bestaat echter uit een ontbinding waar 0 uit komt. Die kun je dus heel snel oplossen door hem te splitsen in twee eenvoudiger vergelijkingen.

Bij beide andere vergelijkingen moet je eerst de haakjes wegwerken en op 0 herleiden. Dan zul je zien dat bij de tweede vergelijking de abc-formule nodig is. Of je moet een kwadraat afsplitsen, dat werkt ook altijd wel...

Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Bereken de oplossing van de vergelijking $(p+2)^2 = (5-2p)^2$.

Antwoord

Misschien denk je aan haakjes wegwerken en dan ontbinden of de abc-formule toepassen? De oplossing hieronder is dan totaal anders, echt ‘out-of-the-box’ denken.

Beide zijden worteltrekken geeft:

$p+2 = 5-2p \vee p+2 = -(5-2p)$

Dit zijn twee lineaire vergelijkingen die je met de balansmethode kunt oplossen.
Je krijgt: $p = 1 \vee p = 7$.

Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 3

Bereken de oplossing van de vergelijking $2x(x+4) = 3x+12$.

Antwoord

Misschien denk je aan haakjes wegwerken en daarna ontbinden of de abc-formule toepassen?
De oplossing hieronder is dan totaal anders, alweer ‘out-of-the-box’ denken.

Schrijf de vergelijking als:

$2x(x+4) = 3(x+4)$

Omdat beide zijden van de vergelijking nu een factor $x+4$ bevatten, kun je hem direct splitsen in:

$2x = 3 \vee x+4 = 0$

En de oplossing wordt $x = 1{,}5 \vee x = -4$.

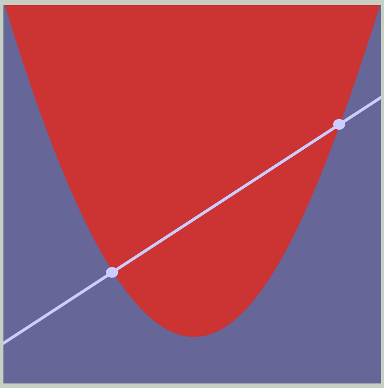
Dat gaat een stuk sneller dan haakjes wegwerken, op 0 herleiden en dan de abc-formule...

Opgave 8 Opgave 9

2.5 Lijnen en parabolen

Inleiding

Bij kwadratische functies horen parabolen, bij lineaire functies rechte lijnen. Je gaat nu hun onderlinge ligging bekijken, snijpunten uitrekenen bijvoorbeeld. Maar ook onderzoeken of ze elkaar raken.
Je leert raaklijnen aan parabolen op te stellen.



Je leert in dit onderwerp

- de top van een parabool snel berekenen;
- onderzoeken wanneer lijnen en parabolen elkaar raken;
- raaklijnen aan parabolen opstellen.

Voorkennis

- werken met variabelen en met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- kwadraat afsplitsen en ontbinden in factoren, ook met de som-en-productmethode;
- kwadratische vergelijkingen oplossen met de abc-formule;
- bij kwadratische functies de top en de nulpunten berekenen.

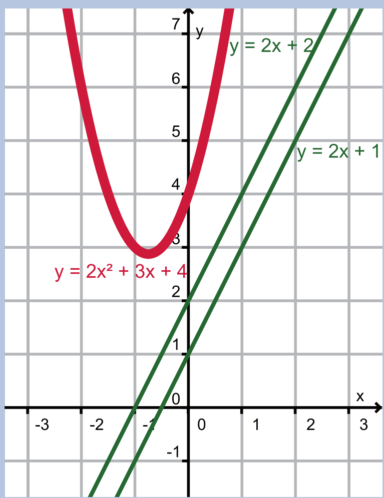
Opgave V1

Uitleg 1

Applet

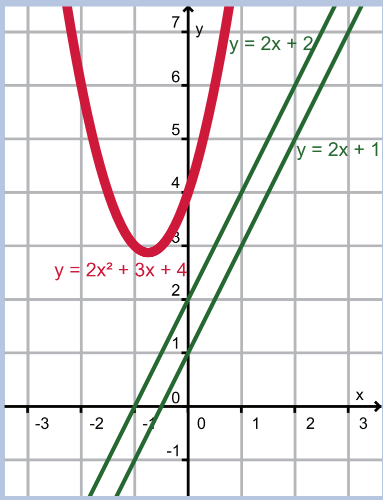
Je ziet hier een parabool met de bijbehorende formule $y = 2x^2 + 3x + 4$ en een rechte lijn met formule $y = 2x + p$. De waarde voor p kun je nog aanpassen. Dus je hebt eigenlijk met een hele **familie van lijnen** te maken.

Eén van die lijnen gaat door de top van de parabool. Om de bijbehorende waarde van p te berekenen, moet je eerst de coördinaten van de top vaststellen. Dat kan door kwadraat afsplitsen. Maar bij formules van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ vind je dan altijd dat de x-coördinaat van de top $-\frac{b}{2a}$ is.
In dit geval vind je $x_{top} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -0{,}75$. De bijbehorende y-coördinaat vind je door invullen in de paraboolformule.



Uitleg 2

Applet



Je ziet hier een parabool met de bijbehorende formule $y = 2x^2 + 3x + 4$ en een rechte lijn met formule $y = 2x + p$. De waarde voor p kun je nog aanpassen. Dus je hebt eigenlijk met een hele serie lijnen te maken.

Veel lijnen uit deze serie hebben twee punten met de parabool gemeen. Maar er is ook een lijn uit de serie die precies één punt met parabool gemeen heeft. Die lijn is een ‘raaklijn’ aan de parabool. Je kunt berekenen welke waarde van p die lijn heeft.

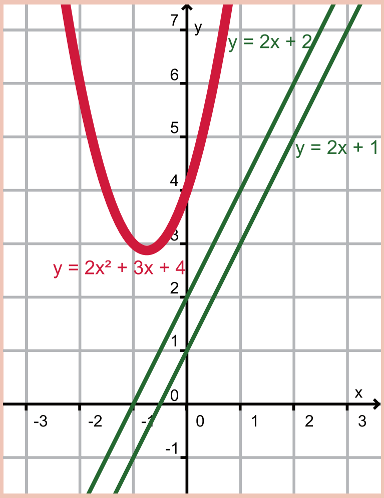
Dan moet de vergelijking $2x^2 + 3x + 4 = 2x + p$ precies één oplossing hebben.
Op 0 herleiden geeft $2x^2 + x + 4 - p = 0$.
Lees af: $a = 2$, $b = 1$ en $c = 4 - p$.
Eén oplossing betekent $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (4 - p) = 0$. Hieruit vind je $p = 3{,}875$.

Je kunt nu ook het punt berekenen dat de raaklijn en de parabool gemeen hebben. Dit noem je het ‘raakpunt’.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Theorie

Applet



Van een parabool met een formule van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ is de **symmetrieas** de lijn
$x = -\frac{b}{2a}$
Omdat de **top** van de parabool op de symmetrieas ligt geldt $x_{top} = -\frac{b}{2a}$. En de bijbehorende y-waarde van de top vind je door deze x_{top} in de formule in te vullen.

Een lijn kan met een parabool precies één punt gemeen hebben. Als die lijn niet (evenwijdig met) de symmetrieas van de parabool is, dan spreek je van een **raaklijn** aan de parabool. Het gemeenschappelijke punt heet het **raakpunt**.
Omdat de kwadratische vergelijking waarmee je de coördinaten van zo'n raakpunt uitrekent maar één waarde mag opleveren voor de variabele, moet daarvan de discriminant 0 zijn.
Als de discriminant groter is dan 0 dan hebben lijn en parabool twee punten gemeen. Als de discriminant kleiner is dan 0 dan hebben lijn en parabool geen punten gemeen.

Applet

Voorbeeld 1

Gegeven de parabool met formule $y = \text{-}2x^2 + 3x + 4$ en de serie lijnen met formule $y = 2x + n$.

Welke van deze serie lijnen gaat door de top van de parabool? En welke van deze serie lijnen raakt de parabool?

Antwoord

Bereken eerst de top van de parabool met $x_{\text{top}} = \text{-}\frac{b}{2a} = \text{-}\frac{3}{2 \cdot \text{-}2} = 0{,}75$.
De top van de parabool is daarom $T(0{,}75; 5{,}125)$.

De lijn $y = 2x + n$ gaat door T als $5{,}125 = 2 \cdot 0{,}75 + n$ en dat geeft $n = 3{,}625$.
De lijn $y = 2x + 3{,}625$ gaat door de top van de parabool.

Om te berekenen welke van deze serie lijnen de parabool raakt, bekijk je de vergelijking $\text{-}2x^2 + 3x + 4 = 2x + n$. Dit is een kwadratische vergelijking die maar één oplossing moet hebben, omdat er bij raken sprake is van slechts één gemeenschappelijk punt.
En daarbij werk je met de discriminant T van deze kwadratische vergelijking. Uit $D = 0$ vind je de gewenste waarde van n en kun je de vraag beantwoorden. Doe dat zelf.

Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7 Opgave 8

Voorbeeld 2

Ook twee parabolen kunnen elkaar snijden, raken, of geen gemeenschappelijke punten hebben.

Laat zien dat de parabolen met formules $y_1 = x^2 - 4x + 6$ en $y_2 = 4 - x^2$ elkaar raken.

Antwoord

Gemeenschappelijke punten van beide parabolen bepaal je met $x^2 - 4x + 6 = 4 - x^2$.
Deze vergelijking herleid je op 0 en je bepaalt dan met behulp van de discriminant D het aantal snijpunten. Je vindt $D = 0$ en daarom raken beide parabolen elkaar.

Het raakpunt bepaal je door de vergelijking verder op te lossen.

Opgave 9 Opgave 10

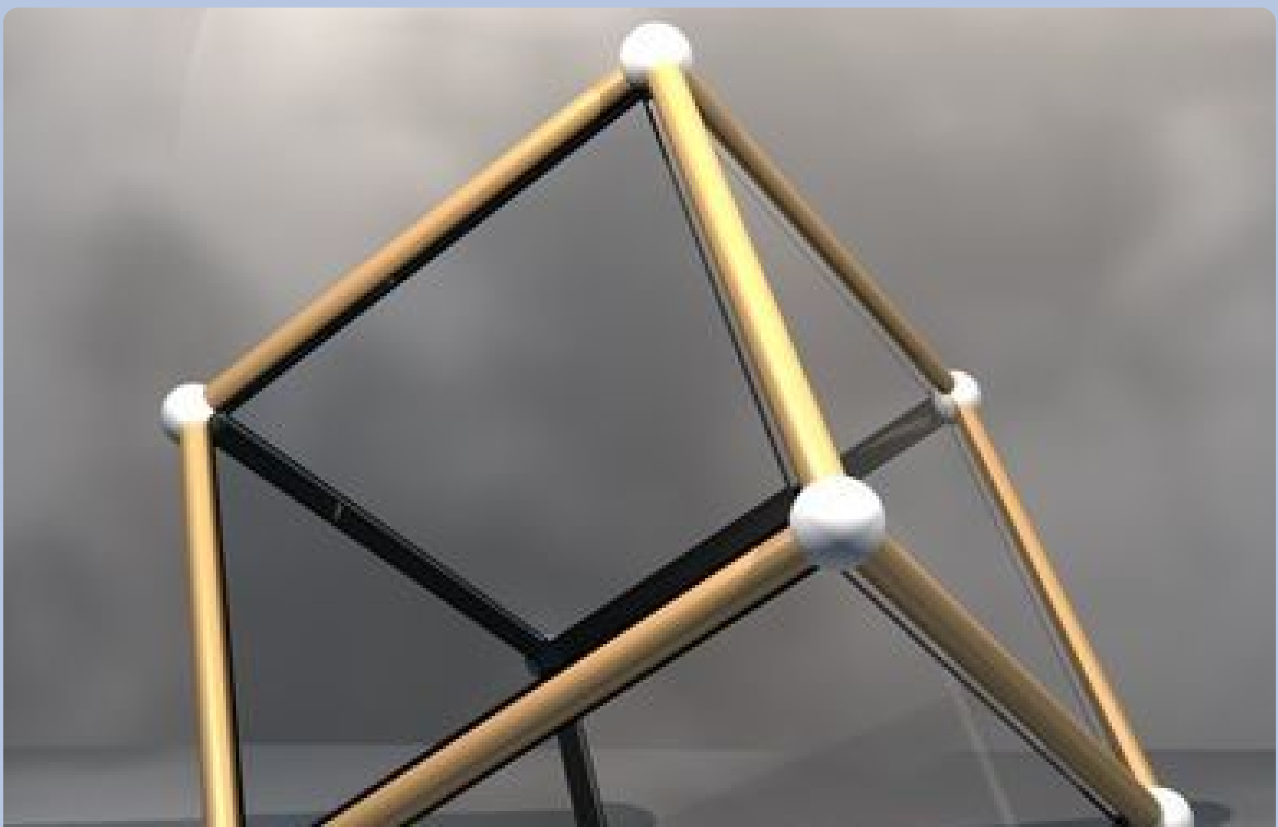
Begrippen

- ruimtelijk figuur (lichaam)) — veelvlak — ribbe — hoekpunt — diagonaalvlakken — zijvlaksdiagonalen — lichaamsdiagonalen;
- parallelprojectie — drieaanzicht — vooraanzicht — zijaanzicht — bovenaanzicht;
- doorsnede — op ware grootte tekenen — kruisende lijnen;
- inhoud (volume) — oppervlakte — lengtevergrotingsfactor — oppervlaktevergrotingsfactor — volumevergrotingsfactor.

Activiteiten

- werken met congruentie, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie in ruimtelijke situaties;
- aanzichten en uitslagen van lichamen maken en die toepassen bij berekeningen, onder andere van de oppervlakte van een lichaam;
- herkennen wanneer er sprake is van een doorsnede van een lichaam en een plat vlak — een doorsnede op ware grootte tekenen — herkennen wanneer lijnen elkaar snijden of kruisen of evenwijdig zijn;
- inhoud en oppervlakte van diverse lichamen berekenen — werken met lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor.

Een doorkijkje



Domein

Meetkunde

Hoofdstuk

Ruimtemeetkunde

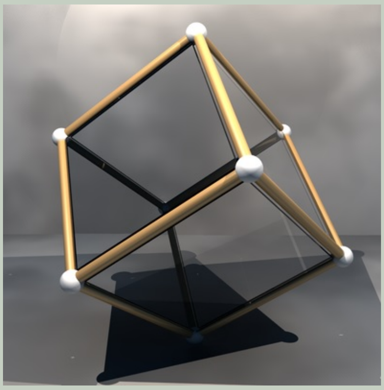
Inhoud

3

3.1 Lichamen

Inleiding

Hier zie je een kubus gemaakt met behulp van **Blender**, een computerprogramma waarmee mooie 3D effecten kunnen worden bereikt. Je gaat nu de eerder geleerde meetkundige rekentechnieken toepassen in 3D.



Je leert in dit onderwerp

- de al bekende rekentechnieken (zoals de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie) toepassen in ruimtelijke situaties.

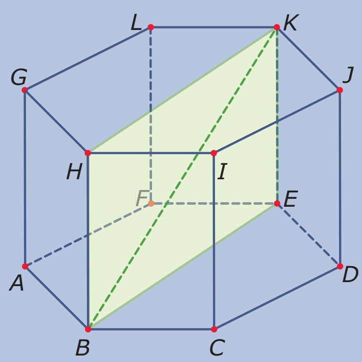
Voorkennis

- de basisbegrippen van ruimtemeetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek, zijvlak (grensvlak), (lichaams)diagonaal en de namen en de eigenschappen van de bekende ruimtelijke figuren;
- de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie.

Opgave V1

Uitleg

Het probleem bij heb je waarschijnlijk wel meteen kunnen oplossen. Daarbij heb je dan gebruik gemaakt van kennis over ruimtelijke figuren. Je moet weten wat een balk is, waar de rechte hoeken in een balk zitten, en dergelijke meer.



Je noemt een ruimtelijke figuur vaak een lichaam. Zo'n lichaam heeft één of meer grensvlakken, die vaak plat, maar ook gebogen kunnen zijn. Gebogen grensvlakken heb je bij een bol, een kegel, een cilinder.

Lichamen die alleen uit platte grensvlakken bestaan heten veelvlakken. Deze hebben hoekpunten en ribben. Ook zijn er dan vaak diagonalen in twee soorten: zijvlaksdiagonalen en lichaamsdiagonalen.

Het veelvlak $ABCDEF.GHIJKL$ bijvoorbeeld heet een regelmatig zeshoekig prisma. Dat komt omdat van dit lichaam:

- het grondvlak en het bovenvlak congruente regelmatige zeshoeken zijn;
- alle opstaande zijvlakken rechthoeken zijn.

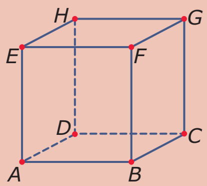
In feite is elke doorsnede van dit lichaam die evenwijdig is met het grondvlak een regelmatige zeshoek.
Verder zie je diagonaalvlak $BEKH$ met daarin lichaamsdiagonaal BK.

In de vind je een overzicht van de belangrijkste lichamen en hun eigenschappen.

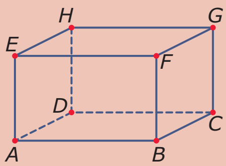
Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

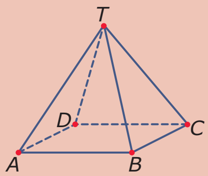
Een **lichaam** is een ruimtelijke figuur. Een lichaam heeft één of meer (eventueel gebogen) grensvlakken. Je ziet hier een overzicht van enkele veel voorkomende lichamen.



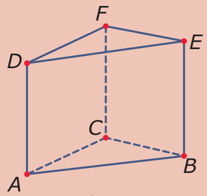
kubus



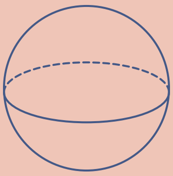
balk

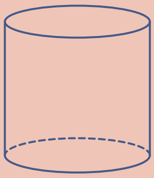


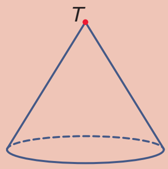
piramide



prisma


bol


cilinder



kegel

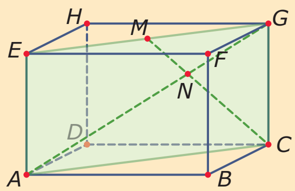
Een lichaam met alleen platte grensvlakken heet een **veelvlak**. Een veelvlak heeft **ribben** en **hoekpunten**.
Veel veelvlakken hebben ook **diagonaalvlakken**, die twee overstaande evenwijdige ribben verbinden. En verder zijn er vaak **zijvlaksdiagonalen** en **lichaamsdiagonalen**.

In lichamen kun je lengtes van lijnstukken en hoeken berekenen met behulp van:

- de stelling van Pythagoras in rechthoekige driehoeken;
- gelijkvormige driehoeken;
- goniometrie in rechthoekige driehoeken.

Voorbeeld 1

Hier zie je een balk $ABCD.EFGH$. In het diagonaalvlak $ACGE$ is de lichaamsdiagonaal AG getekend. Ook zie je daarin lijnstuk AM, waarbij M het midden van EG is. In deze figuur is $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm en $CG = 5$ cm.



Bereken de lengte van lijnstuk CN in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Het lijnstuk waarvan je de lengte wilt berekenen ligt in diagonaalvlak $ACGE$ en dat is een rechthoek met zijden $AC = 10$ cm en $CG = 5$ cm.

Met behulp van de stelling van Pythagoras kun je de lengte van zowel AG als CM berekenen. En dan kun je met gelijkvormigheid werken. Zie je al welke driehoeken gelijkvormig zijn?

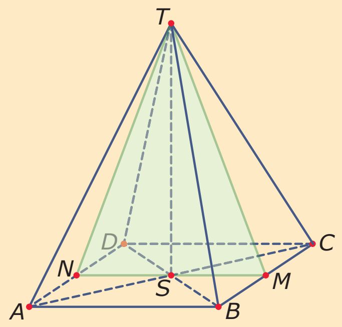
Je vindt $CN \approx 4{,}71$ cm.

Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6

Voorbeeld 2

Je ziet hier de regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$.
Alle zijden van het grondvlak zijn 6 cm. De hoogte is 8 cm.
De punten M en N zijn de middens van de ribben waar ze op liggen.

Bereken de grootte van $\angle NTM$.



Antwoord

ΔNTM is gelijkbenig, dus $\angle NTS$ is de helft van $\angle NTM$.

Nu is $NS = 3$ cm en $TS = 8$ cm, dus $\tan(\angle NTS) = \frac{3}{8} = 0{,}375$.
En dus is $\angle NTS \approx 20{,}6°$ en $\angle NTM \approx 41°$.

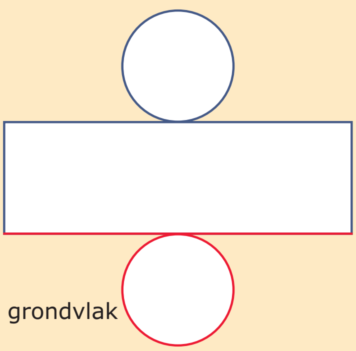
Opgave 7 Opgave 8

Voorbeeld 3

Hoe ziet een uitslag van een cilinder met een straal van 4 cm en een hoogte van 8 cm er uit?

Antwoord

Als een rechthoek met een lengte die net zo groot is als de omtrek van de grondcirkel en een breedte van 8 cm. Daar zitten dan twee cirkels met een straal van 4 cm aan vast, eentje aan de bovenkant en eentje aan de onderkant.

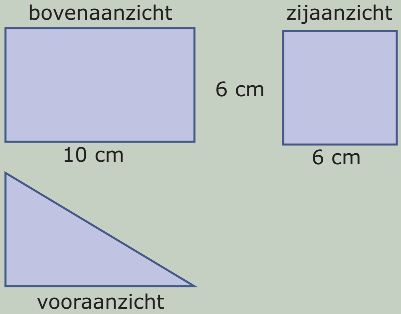


Opgave 9 Opgave 10

3.2 Aanzichten

Inleiding

Hier zie je drie aanzichten van een lichaam, een ruimtelijke figuur. Eigenlijk is het niet zonder meer mogelijk om precies te weten wat voor figuur dit precies is, je ziet de figuur maar van drie kanten. Hoe de achterkant, de onderkant en de linker zijkant er uitzien, of daar gaten in de figuur zitten, weet je niet. Maar je kunt wel iets zeggen...



Je leert in dit onderwerp

- aanzichten tekenen van ruimtelijke figuren;
- vanuit een drieaanzicht de ruimtelijke figuur en zijn afmetingen herleiden.

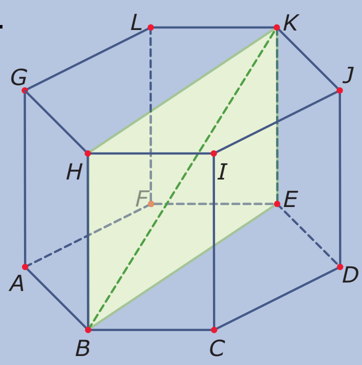
Voorkennis

- de basisbegrippen van ruimtemeetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek, zijvlak (grensvlak), (lichaams)diagonaal en de namen en de eigenschappen van de bekende ruimtelijke figuren;
- de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie en dit toepassen in ruimtelijke situaties.

Opgave V1

Uitleg

Dit is het regelmatige zeszijdige prisma $ABCDEF.GHIJKL$. In zo'n regelmatig lichaam zijn veel ribben en diagonalen gelijk aan elkaar. Toch blijkt daar in de figuur niet zoveel van. Als je zou gaan meten zijn AB, BC en CD zeker niet gelijk, dat komt door de tekening in parallelprojectie. In een parallelprojectie worden alleen even lange lijnstukken die evenwijdig lopen ook weer even lang.

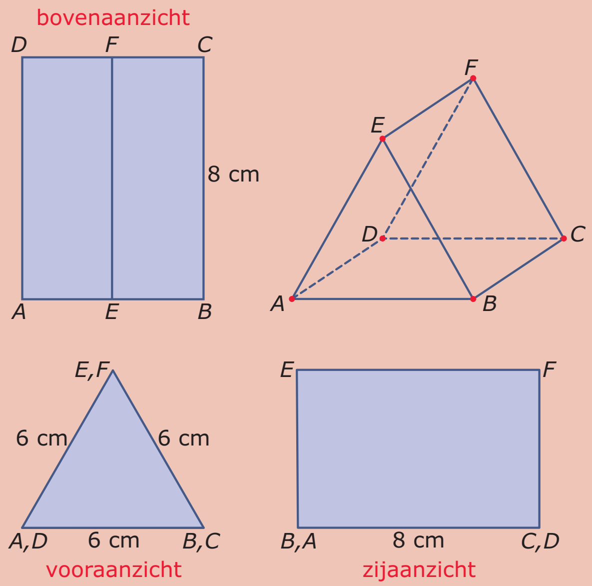


Soms helpt het om dan aanzichten van een lichaam te gebruiken. Een drieaanzicht zoals dat hieronder laat het vooraanzicht, het zijaanzicht en het bovenaanzicht van het lichaam zien. Daarin zie je allerlei grensvlakken in de juiste vorm en op ware grootte.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

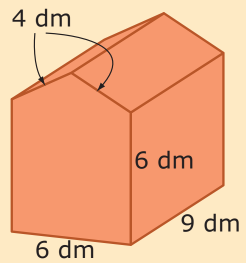
Je ziet hier een regelmatig driezijdig prisma $ABE.DCF$. Dit lichaam is getekend als **parallelprojectie**.
Maar er is ook een **drieaanzicht** van getekend. Dat is een combinatie van een **vooraanzicht**, een **bovenaanzicht** en een **zijaanzicht**. In aanzichten zie je meestal veel afmetingen op ware grootte, je kunt er beter metingen in verrichten dan in een parallelprojectie. Wel is het soms lastig om op basis van aanzichten te herkennen om wat voor figuur het gaat.



Voorbeeld 1

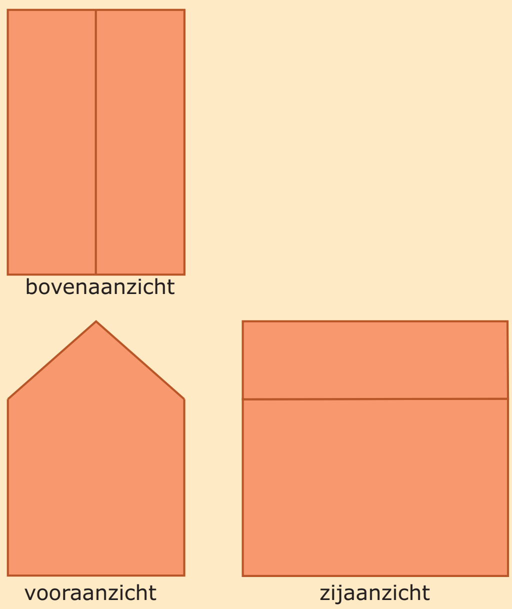
Deze kartonnen doos heeft de vorm van een vijfzijdig prisma. De voorkant en de achterkant zijn symmetrische vijfhoeken met twee rechte hoeken. De afmetingen vind je bij de figuur.

Teken een drieaanzicht van deze doos.



Antwoord

Van het bovenaanzicht weet je alle afmetingen, dus dat kun je meteen tekenen. Van het vooraanzicht weet je ook alle afmetingen en als je dan van de symmetrie gebruik maakt en de passer gebruikt voor de twee zijden van 4 dm, dan kun je ook dat tekenen. Het zijaanzicht vind je door vooraanzicht en bovenaanzicht te combineren.



Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Van een aantal eenheidskubusjes kun je een balk stapelen. Het vooraanzicht van de balk bestaat uit 12 kubusjes, het rechter zijaanzicht van de balk uit 8 kubusjes.

Uit hoeveel kubusjes kan de balk bestaan?

Antwoord

Noem de lengte, breedte en hoogte van de balk l, b en h. Uit het gegeven aantal kubusjes in het vooraanzicht volgt $b \cdot h = 12$. Uit het gegeven aantal kubusjes in het zijaanzicht volgt $l \cdot h = 8$.

Het aantal mogelijkheden kun je nu in een tabel weergeven:

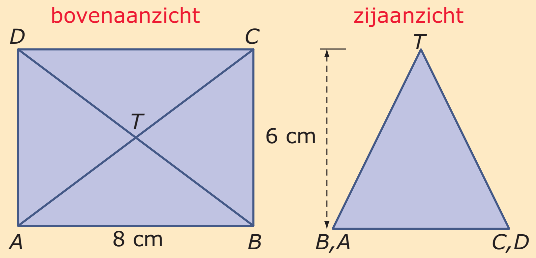
l	h	b	totale balk
1	8	X	X
2	4	3	24
3	X	X	X
4	2	6	48
8	1	12	96

Mogelijkheden zijn dus 24, 48 en 96 kubusjes.

Opgave 6 Opgave 7 Opgave 8 Opgave 9

Voorbeeld 3

Je ziet hier het bovenaanzicht en het zijaanzicht van een veelvlak. Welk veelvlak betreft het en hoe groot is de totale oppervlakte van dat lichaam?



Antwoord

Dit betreft een vierzijdige piramide $ABCD.T$ met een rechthoekig grondvlak.
Voor de totale oppervlakte van dit lichaam moet je de oppervlakte van het grondvlak en van de vier opstaande grensvlakken bij elkaar optellen.

De grensvlakken ABT en CDT zijn twee congruente gelijkbenige driehoeken met een basis van 8 cm en een hoogte die je in het zijaanzicht op ware grootte ziet. Die hoogte is dus $\sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ cm. De oppervlakte van elk van deze twee grensvlakken is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$ cm^2.

De grensvlakken BCT en DAT zijn twee congruente gelijkbenige driehoeken met een basis van 6 cm en een hoogte die je in het vooraanzicht op ware grootte ziet. Die hoogte is dus $\sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$ cm. De oppervlakte van elk van deze twee grensvlakken is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{13} = 6\sqrt{13}$ cm^2.

Nu kun je de totale oppervlakte wel berekenen...

Opgave 10 Opgave 11

3.3 Doorsneden

Inleiding

Dit is een dwarsdoorsnede van een boom, je ziet de jaarringen. Zo'n doorsnede is altijd een plat vlak binnen de randen van de figuur, in dit geval de bast van de boom (op een bepaalde hoogte). Zo kun je ook vloeren in gebouwen als doorsneden opvatten en worden die met name in de architectuur vaak op schaal getekend om er berekeningen in te kunnen uitvoeren.

Je leert in dit onderwerp

- doorsneden herkennen in ruimtelijke figuren;
- wat je verstaat onder kruisende lijnen;
- doorsneden van ruimtelijke figuren op ware grootte tekenen en erin rekenen.

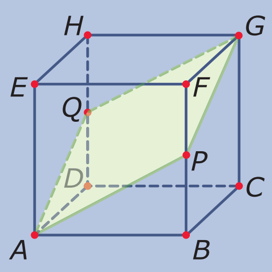
Voorkennis

- de basisbegrippen van ruimtemeetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek, zijvlak (grensvlak), (lichaams)diagonaal en de namen en de eigenschappen van de bekende ruimtelijke figuren;
- de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie en dit toepassen in ruimtelijke situaties.

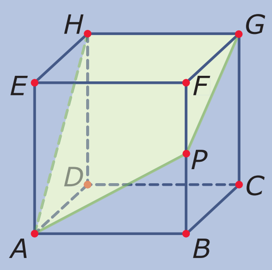
Opgave V1

Uitleg

Je ziet hiernaast de doorsnede $APGQ$ van een plat vlak met een kubus getekend. De kubus heeft ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.



Als je naar de kubus kijkt loodrecht op diagonaalvlak $ACGE$ (dus in richting BD), zie je A, B, P en Q op één lijn liggen. En daarom weet je zeker dat ze in één vlak liggen. Je kunt het ook zo zien: de snijlijnen in twee overstaande evenwijdige grensvlakken van de kubus (bijvoorbeeld AP en QC) zijn evenwijdig en dus is $APGQ$ een plat vlak. Bedenk dat lijnen die in één vlak liggen elkaar altijd snijden of evenwijdig lopen. Lijnen die elkaar niet snijden èn niet evenwijdig lopen noem je kruisende lijnen. In een vlak kunnen nooit kruisende lijnen liggen! En daarom kan de ‘vierhoek’ $APGH$ nooit een vierhoek in een plat vlak zijn: de lijnstukken AH en PG zijn niet evenwijdig en liggen dus op kruisende lijnen.

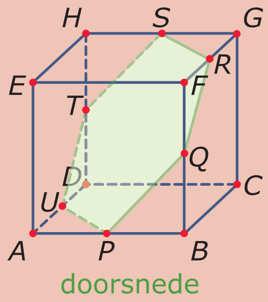


Als je $APGQ$ op ware grootte wilt zien moet je de kubus zo draaien dat je loodrecht op dat vlak kijkt. Je ziet dan dat $APGQ$ een ruit is met ribben van $\sqrt{5^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{31{,}25}$ cm en een diagonaal PQ van $\sqrt{50}$ cm. Je tekent hem zelf op ware grootte door eerst PQ te tekenen en dan de zijden vanuit P en Q om te cirkelen.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

Een **doorsnede** van een ruimtelijke figuur met een plat vlak is de figuur die wordt gevormd door alle snijlijnen. Heeft die doorsnede de vorm van een driehoek, dan kun je ervan verzekerd zijn dat het inderdaad om een plat vlak gaat. Bij vierhoeken, vijfhoeken, etc., moet je nauwkeuriger kijken. Om te controleren dat zo'n figuur echt vlak is, kun je gebruiken dat in een plat vlak alleen evenwijdige of elkaar snijdende lijnen liggen. Lijnen die niet evenwijdig zijn èn elkaar niet snijden heten **kruisende lijnen**. Lijnen die elkaar kruisen kunnen nooit in één vlak liggen.

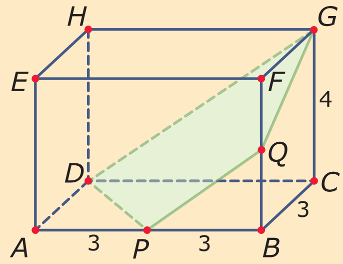


doorsnede

Om in een doorsnede berekeningen te kunnen uitvoeren teken je hem **op ware grootte**. Daarmee wordt bedoeld dat alle hoeken hun werkelijke vorm hebben en alle zijden hun werkelijke lengte (eventueel op schaal getekend). Bij het tekenen op ware grootte construeer je vaak driehoeken m.b.v. de passer. Teken hulpfiguren waarvan je de afmetingen al kent om onbekende lengten en hoeken te vinden.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is $AB = 6$, $BC = 3$, $CG = 4$. De punten P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.
Waarom is vierhoek $DPQG$ een doorsnede van een plat vlak met de gegeven balk?
Teken doorsnede $DPQG$ op ware grootte.



Antwoord

De lengte van DG kun je halen uit rechthoekige ΔDCG: $DG = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

De lengte van DP kun je halen uit rechthoekige ΔDAP: $DP = \sqrt{18}$.

Omdat $DPQG$ een plat vlak is, moet $DG//PQ$. Dus zijn de driehoeken PBQ en CDG gelijkvormig. Omdat $PB = \frac{3}{6}DC$ is ook $BQ = \frac{3}{6}CG$, zodat $BQ = 2$.

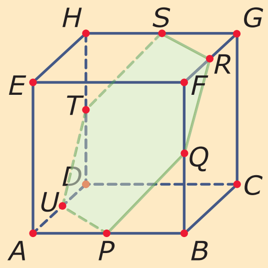
En dan kun je de lengtes van PQ en QG ook berekenen: $PQ = QG = \sqrt{13}$.

Om het trapezium $DPQG$ te kunnen tekenen, is het handig om eerst nog de lengte van een diagonaal te berekenen, bijvoorbeeld $PG = \sqrt{34}$. Nu kun je de figuur construeren door twee driehoeken te maken met passer en liniaal.

Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 2

Je ziet hier een doorsnede van een plat vlak met een kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 8 cm. Alle hoekpunten van deze doorsnede zijn de middens van de ribben waar ze op liggen. Teken doorsnede $PQRSTU$ op ware grootte.



Antwoord

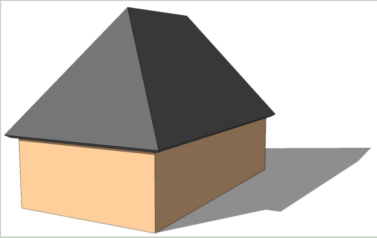
De doorsnede is een regelmatige zeshoek $PQRSTU$ met zijden $\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$ cm.

Hoe je een regelmatige zeshoek tekent heb je al eerder gezien.

Opgave 8 Opgave 9

3.4 Oppervlakte en inhoud

Inleiding



Dit heet een schilddak, een dakvorm die je vaak op een stolpboerderij ziet.
Belangrijk bij de bouw ervan zijn de oppervlakte ervan (om te bepalen hoeveel dakbedekking er voor nodig is) en het volume er onder (om te bepalen hoeveel opslag/woonruimte er onder zit).

Je leert in dit onderwerp

- de oppervlakte van ruimtelijke figuren berekenen;
- de inhoud (het volume) van ruimtelijke figuren berekenen;
- werken met oppervlakte- en volumevergrotingsfactoren.

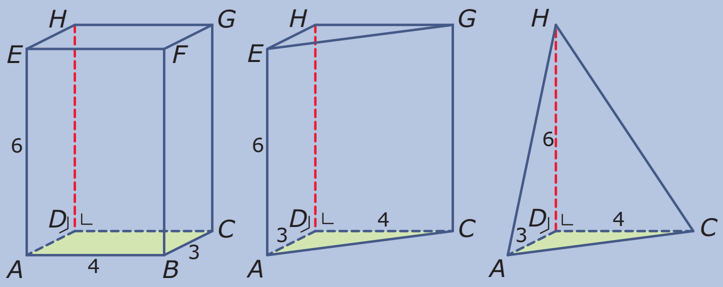
Voorkennis

- de basisbegrippen van ruimtemeetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek, zijvlak (grensvlak), (lichaams)diagonaal en de namen en de eigenschappen van de bekende ruimtelijke figuren;
- de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie en dit toepassen in ruimtelijke situaties;
- werken met aanzichten van een doorsneden in ruimtelijke figuren.

Opgave V1

Uitleg

Je ziet hier drie lichamen die alle drie dezelfde hoogte DH hebben. Het prisma en de piramide hebben ook nog hetzelfde grondvlak ACD en dat is precies de helft van het grondvlak van de balk.



De inhoud van de balk is duidelijk het grootst: $V(\text{balk}) = 4 \cdot 3 \cdot 6 = 12 \cdot 6 = 72$ eenheden (eenheidskubussen).
Het prisma is de helft van de balk, dus: $V(\text{prisma}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = 6 \cdot 6 = 36$.
Merk op dat dit precies de oppervlakte van het grondvlak (ΔACD) maal de hoogte is. En dat wist je ook wel: het volume van een prisma is $V(\text{prisma}) = G \cdot h$ als G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

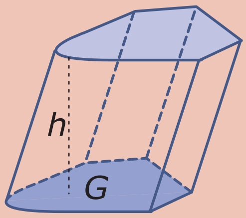
De piramide heeft hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte als het prisma. Je kunt laten zien, dat er in het prisma drie piramides passen waarvan het product van grondvlak en hoogte hetzelfde is als dat van de getekende piramide. Elk van deze piramides heeft daarom dezelfde inhoud, namelijk $\frac{1}{3}$ deel van die van het prisma. Voor de getekende piramide geldt $V(\text{piramide}) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Van alle drie de getekende lichamen is de totale oppervlakte gelijk aan de oppervlakte van hun uitslag. En wat gebeurt er met de oppervlakte en de inhoud van zo'n lichaam als alle ribben bijvoorbeeld 3 keer zo groot worden?

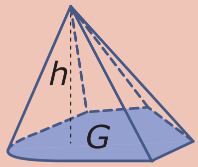
Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

Onder de **inhoud** of het **volume** van een lichaam wordt het totaal aantal eenheidskubussen dat dit lichaam opvult verstaan. Voor verschillende soorten lichamen kun je die inhoud berekenen met behulp van een formule.



- De inhoud van een balk, een prisma, of een cilinder met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte is: $V = G \cdot h$.
- De inhoud van een piramide, of een kegel met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte is: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.



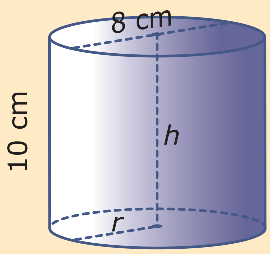
Onder de **oppervlakte** van een lichaam wordt de oppervlakte van de uitslag van dat lichaam verstaan.

Om zowel de inhoud als de oppervlakte van een lichaam te kunnen berekenen moet je de oppervlakteformules van allerlei vlakke figuren, zoals rechthoek, driehoek en cirkel kennen. Ook de formule voor de omtrek van een cirkel is van belang. Zorg dat je al deze formules goed kent!

Als je de afmetingen van een lichaam k keer zo groot maakt, dan wordt de oppervlakte k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot. k heet de **lengtevergrotingsfactor**, k^2 de **oppervlaktevergrotingsfactor** en k^3 de **volumevergrotingsfactor**.

Voorbeeld 1

Een cilinder heeft een diameter van 8 cm en een hoogte van 10 cm. Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze cilinder.



Antwoord

Voor de inhoud V gebruik je de formule $V = G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

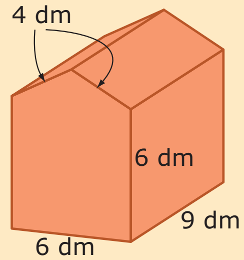
Nu is $G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ en $h = 10$.
En dus is $V = 16\pi \cdot 10 = 160\pi$ cm^3.

Voor de oppervlakte A moet je weten hoe de uitslag van een cilinder er uit ziet. Die bestaat uit twee cirkels en een rechthoek. De rechthoek heeft breedte 10 cm en als lengte de omtrek van de grondcirkel $\pi \cdot 8 = 8\pi$ cm.
Dus krijg je $A = 8\pi \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = 112\pi$ cm^2.

Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 2

Deze kartonnen doos heeft de vorm van een vijfzijdig prisma. De voorkant en de achterkant zijn symmetrische vijfhoeken met twee rechte hoeken. De afmetingen vind je bij de figuur.



Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze doos.

Antwoord

Voor de inhoud V van deze doos gebruik je de formule $V = G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is. Hier is het ‘grondvlak’ het voorvlak van het prisma, de hoogte is 9 dm.

Ga na, dat $G = 6 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{7} = 36 + 3\sqrt{7}$. Nu kun je met de formule berekenen dat de inhoud van de doos ongeveer 395 dm^3 is.

De oppervlakte van de doos is de oppervlakte van de uitslag van deze doos. Die uitslag bestaat uit twee gelijke vijfhoeken (waarvan je de oppervlakte al hebt berekend) en vijf rechthoeken. De totale oppervlakte is de som van de oppervlaktes van deze vijfhoeken en de vijf rechthoeken.

Opgave 8 Opgave 9 Opgave 10

Voorbeeld 3

Bij zandwinning ontstaan grote hopen van verschillende soorten zand. Die hopen zand hebben allemaal dezelfde kegelvorm.

Hoeveel m^3 zand bevat zo'n kegelvormige hoop met een diameter van 4 m en een hoogte van 1,50 m? En hoeveel m^3 zand bevat een hoop zand waarvan de afmetingen 2 keer zo groot zijn?

Antwoord

Voor de inhoud V van een kegel gebruik je de formule $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is. Hier is het grondvlak een cirkel met een straal van 2 m en de hoogte is 1,50 m.

De inhoud is dus $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 1.5 = 2\pi$ m^3.

Van de hoop zand waarvan alle afmetingen twee keer zo groot zijn is de lengtevergrotingsfactor 2 en dus de volumevergrotingsfactor $2^3 = 8$. De inhoud van die zandhoop is daarom $2\pi \cdot 8 = 16\pi$ m^3.

Opgave 11 Opgave 12

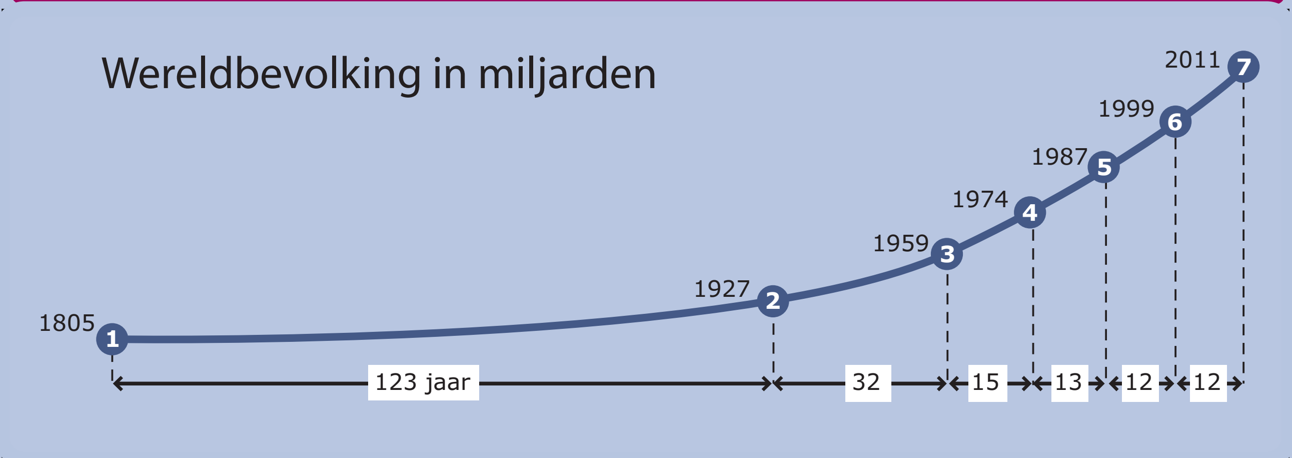
Begrippen

- groeifactor — groeipercentage — vervalpercentage — halveringstijd — verdubbelingstijd;
- lineaire groei — exponentiële groei;
- exponentiële functie — asymptoot.

Activiteiten

- werken met de begrippen groeifactor, groei(verval)percentage, halveringstijd en verdubbelingstijd;
- lineaire groei vergelijken met exponentiële groei, bijbehorende formules opstellen;
- werken met meer algemene exponentiële functies en formules daarvan opstellen.

Bevolkingsgroei



Domein

Functies en grafieken

Hoofdstuk

Exponentiële verbanden

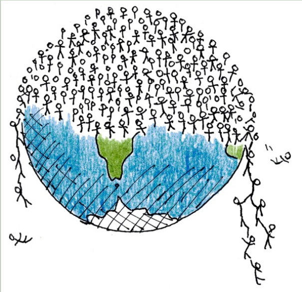
Inhoud

4

4.1 Groeifactor

Inleiding

Soms groeien hoeveelheden steeds sneller.
Dat was tot nu toe het geval met de wereldbevolking. In 1800 waren er ongeveer 1 miljard mensen, maar in 2011 ging het aantal over de 7 miljard heen. Dat bereik je al met een groeipercentage van 1% per jaar.



Je leert in dit onderwerp

- opnieuw werken met de begrippen groeifactor, groeipercentage, vervalpercentage, verdubbelingstijd en halveringstijd.

Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- het begrip exponentiële groei/verval met de bijbehorende groeifactor en groei/vervalpercentage.

Opgave V1

Uitleg

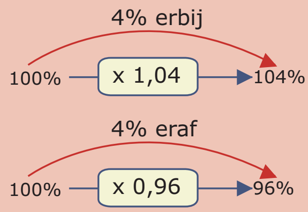
Een scholengemeenschap heeft in een groeigemeente in het jaar 2012 in totaal 800 leerlingen. Het aantal leerlingen van de scholengemeenschap neemt elk jaar met 12% toe. Naar verwachting zal deze groei zich nog enkele jaren voortzetten. De school heeft plaats voor maximaal 1250 leerlingen. Om uit te rekenen wanneer de school noodlokalen moet laten plaatsen kun je per jaar het aantal leerlingen uitrekenen.

Dit kan als volgt:
In 2012 is het leerlingenaantal 800.
In 2013 is het leerlingenaantal $800 \cdot 1{,}12 = 896$.
In 2014 is het leerlingenaantal $800 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}12 = 800 \cdot 1{,}12^2 \approx 1004$.
In 2015 is het leerlingenaantal $800 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}12 = 800 \cdot 1{,}12^3 \approx 1124$.
In 2016 is het leerlingenaantal $800 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}12 = 800 \cdot 1{,}12^4 \approx 1259$.
In 2015 moeten er dus extra noodlokalen komen om in 2016 voldoende plaatsen te hebben. Het getal 1,12 waar je steeds mee vermenigvuldigt, noem je de ‘groeifactor per jaar’.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Soms wordt een hoeveelheid per tijdseenheid (dus bijvoorbeeld steeds per seconde) met een vaste **groeifactor** g vermenigvuldigd. Als $g > 1$ dan is er sprake van een toename en als $0 < g < 1$ dan is er sprake van een afname. Als $g = 1$ dan is er geen sprake van een toename of afname maar blijft de hoeveelheid steeds constant.



- Bij een groeifactor van $1{,}04$ hoort een **groeipercentage** van 4%.
- Bij een groeifactor van $0{,}96$ hoort een **groeipercentage** van -4% of een **vervalpercentage** van 4%.

Bij een groeifactor per uur van $1{,}04$ hoort een groeifactor per dag van $1{,}04^{24} \approx 2{,}56$.

De **verdubbelingstijd** is de tijdsduur die hoort bij een groeifactor van 2. De **halveringstijd** is de tijdsduur die hoort bij een groeifactor van $0{,}5$.

Voorbeeld 1

Hier zie je enkele voorbeelden van het omrekenen van een groeipercentage naar een groeifactor.

- Bij een groei van 15% per jaar neemt 100 elk jaar toe tot 115. Er is een groeifactor van $115/100 = 1{,}15$ per jaar.
- Bij een afname van 17% per maand neemt 100 elke maand af tot 83. Er is een groeifactor van $83/100 = 0{,}83$ per maand.

Hier zie je enkele voorbeelden van het omrekenen van een groeifactor naar een groeipercentage.

- Bij een groeifactor van $1{,}20$ per jaar neemt 100 elk jaar toe tot $100 \cdot 1{,}20 = 120$. Er komt dus jaarlijks $120 - 100 = 20\%$ bij.
- Bij een groeifactor van $0{,}76$ per dag neemt 100 elke dag af tot $100 \cdot 0{,}76 = 76$. Er gaat dus jaarlijks $76 - 100 = 24\%$ af.

Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Alcohol is een stof die door het lichaam slechts langzaam wordt afgebroken. De snelheid hiervan hangt onder andere af van het lichaamsgewicht. Voor de twintigjarige Jelte geldt dat het promillage alcohol in het bloed per half uur met 9% afneemt. Op een feestje heeft hij wat alcohol genuttigd en moest om 01:00 uur in de nacht blazen. Hij had toen een promillage in zijn bloed van $0{,}6$. Als het promillage lager is dan $0{,}5$ mag hij weer rijden. Hoe lang moet Jelte wachten?

Antwoord

De groeifactor is $0{,}91$ per half uur.
Om 01:30 uur had hij een promillage van: $0{,}6 \cdot 0{,}91 = 0{,}546$.
Om 02:00 uur had hij een promillage van: $0{,}6 \cdot 0{,}91^2 \approx 0{,}497$.
Om iets voor twee uur mag Jelte weer verder rijden.

Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 3

In een vijver groeit een **witte waterlelie**. De **verdubbelingstijd** van de oppervlakte van de waterlelie op de vijver is 24 uur. Na 20 dagen is de hele vijver bedekt. Na hoeveel dagen was de helft van de vijver bedekt door de waterlelie? En wanneer werd 10% van de vijver door de waterlelie bedekt?

Antwoord

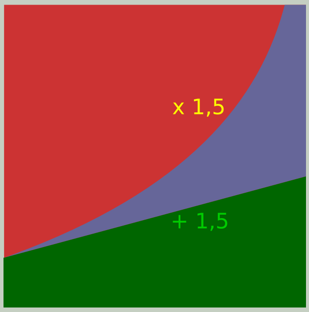
De groeifactor per 24 uur is 2.
Aangezien de bedekte oppervlakte steeds verdubbelt is dus de vorige dag (dag 19) de helft van de vijver bedekt. Op dag 18 dus 25% en op dag 17 $12{,}5\%$ gevolgd door $6{,}25\%$ op dag 16. De 10% wordt dus bereikt in de loop van dag 16.

Opgave 8 Opgave 9

4.2 Exponentiële groei

Inleiding

Het maakt veel verschil of iets elke tijdseenheid bij een bepaalde hoeveelheid $1{,}5$ wordt opgeteld of dat die hoeveelheid met $1{,}5$ wordt vermenigvuldigd. Lineaire groei is zeer gelijkmatig. Exponentiële groei wordt steeds extremer, het is min of meer explosieve groei.



Je leert in dit onderwerp

- exponentiële groei en lineaire groei vergelijken met behulp van bijpassende formules en grafieken;
- een formule opstellen bij exponentiële groei als twee punten van de grafiek bekend zijn.

Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- het begrip exponentiële groei/verval met de bijbehorende groeifactor en groei/vervalpercentage.

Opgave V1

Uitleg

Er zijn landen waarin de voetbalsport nog maar weinig beoefenaren kent, maar waarin die sport wel in opkomst is.

Stel dat in zo'n land A vanaf 2000 het aantal leden van voetbalclubs jaarlijks met 15000 is toegenomen. Op 1 januari 2010 waren er 200000 leden. Neem aan dat deze groei ongewijzigd doorgaat.
Het aantal leden op 1 januari 2015 is dan $200000 + 15000 \cdot 5 = 275000$.
In dit geval is er sprake van lineaire groei, er komt jaarlijks een vast aantal leden bij.

In een andere opkomende voetbalnatie B neemt het aantal leden van voetbalclubs jaarlijks met 5% toe. Op 1 januari 2010 waren er 200000 leden. Neem aan dat deze groei ongewijzigd doorgaat.
Op 1 januari 2015 heeft dit land dan $200000 \cdot 1{,}05^5 \approx 255256$, dus ongeveer 255000 leden.
Nu spreek je van exponentiële groei met een beginhoeveelheid van 200000 en een groeifactor van $1{,}05$ per jaar.

Je kunt voor beide manieren van groei formules en grafieken opstellen. Je noemt dan A het aantal leden in land A, B het aantal leden in land B en t de tijd in jaren na 2010.

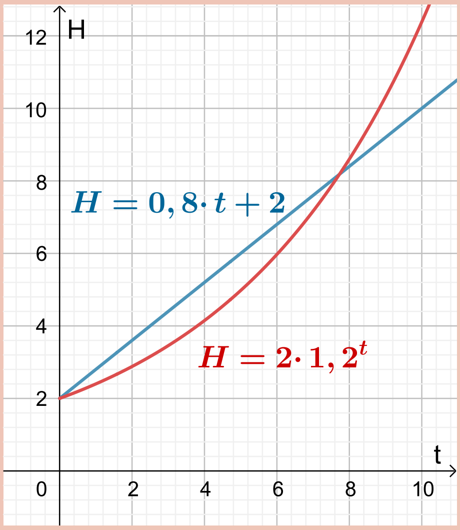
Opgave 1 Opgave 2

Applet

Theorie

Je ziet hier grafieken van twee belangrijke manieren van groei:

- **Lineaire groei** met beginhoeveelheid b en een vaste toename per eenheid van a.
  Bijbehorende formule: $H = a \cdot t + b$.
  Bijbehorende grafiek: een rechte lijn door $(0,b)$ met hellingsgetal a.
- **Exponentiële groei** met beginhoeveelheid b en een vaste groeifactor per eenheid van g.
  Bijbehorende formule: $H = b \cdot g^t$.
  Bijbehorende grafiek: een steeds sterker stijgende curve door $(0,b)$ als $g > 1$ en een steeds minder sterk dalende curve door $(0,b)$ als $0 < g < 1$.



Bij lineaire groei met een vaste toename van 0 spreek je van een **constante functie**. En dat is ook het geval bij exponentiële groei met groeifactor 1.

Als bij exponentiële groei twee punten van de grafiek bekend zijn, kun je de groeifactor berekenen door de uitkomsten te delen. Als het bijbehorende tijdsverschil t is, dan is de groeifactor de t-de machtswortel daarvan. Daarmee kun je de bijbehorende formule opstellen.

Voorbeeld 1

Na jaren van terugloop is de populatie zeehonden in het Nederlandse deel van het Waddengebied gelukkig weer gestegen. Sinds juni 2008 is het aantal zeehonden in dit gebied maandelijks met $2{,}6\%$ toegenomen. Ga ervan uit dat er op 1 juli 2008 1534 zeehonden waren.
Neem aan dat de groei van het aantal zeehonden in dit gebied een tijdlang zo doorgaat en stel een bijpassende formule op. Bereken het aantal zeehonden op 1 januari 2013.

Antwoord

Omdat er per maand een vast percentage zeehonden bij komt, is er sprake van exponentiële groei. De groeifactor per maand is $1{,}026$. Neem $t = 0$ op 1 juli 2008, dan is de beginhoeveelheid 1534.
Is het aantal zeehonden Z en de tijd in maanden t dan is een juiste formule $Z = 1534 \cdot 1{,}026^t$.

Voor het aantal zeehonden op 1 januari 2013 geldt nu $t = 54$. Vul je dit in de formule in, dan vind je $Z \approx 6135$.

Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

In deze tabel wordt de groei van het aantal inwoners (afgerond op honderdtallen) van twee steden A en B weergegeven. Bij stad A is bij benadering sprake van lineaire groei en bij stad B heb je meer te maken met exponentiële groei. In welk jaar gaat het aantal inwoners van B dat van A overschrijden als de groei zo door gaat?

jaartal	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
aantal inwoners A	79600	81100	82600	84200	85600	87100	88500	90100	91600
aantal inwoners B	72100	73900	75800	77600	79600	81600	83600	85700	87800

Antwoord

In stad A is de groei ongeveer lineair, er komen jaarlijks ongeveer 1500 mensen bij. Er geldt $A = 79600 + 1500t$ waarin A het aantal inwoners van A en t de tijd in jaren na 2000 is.

In stad B is de groei ongeveer exponentieel met groeifactor $1{,}025$. Er geldt $B = 72100 \cdot 1{,}025^t$ waarin B het aantal inwoners van A en t de tijd in jaren na 2000 is.

Met behulp van deze formules kun je de tabellen voortzetten. Je merkt dan dat vanaf 2013 stad B meer inwoners heeft dan stad A.

Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 3

Van een hoeveelheid N is het volgende gegeven:
Op $t = 3$ is $N = 1200$ en op $t = 11$ is $N = 800$.

Stel een formule op voor N als functie van t er sprake is exponentiële groei.

Antwoord

Bij exponentiële groei is er sprake van een groeifactor g per tijdseenheid. Per 8 tijdseenheden vermenigvuldig je met $800 \big/ 1200 = \frac{2}{3}$. Je moet daarvoor acht keer met de groeifactor g vermenigvuldigen, dus $g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g = g^8 = \frac{2}{3}$.
Je vindt $g \approx 0{,}95$.
Merk daarbij op dat het gebruikelijk is om de groeifactor (tenzij anders wordt vermeld) in twee decimalen, dus in procenten, nauwkeurig te bepalen.

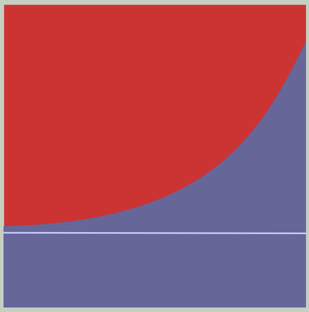
De gevraagde formule is nu $N = b \cdot 0{,}95^t$.
Om de juiste waarde voor de beginhoeveelheid b te vinden gebruik je bijvoorbeeld $t = 3$ en $N = 1200$. Je vindt dan $b \approx 1400$.

De formule wordt $N \approx 1400 \cdot 0{,}95^t$.

Opgave 8 Opgave 9

4.3 Exponentiële functies

Inleiding



Bij exponentiële groei horen exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x$. De waarden van deze functies variëren van heel dicht bij 0 tot oneindig groot. Om 0 te naderen moet je als $g > 1$ dan wel negatieve x-waarden toelaten.
De grafieken van deze exponentiële functies komen aan één kant steeds dichter bij de x-as, de horizontale asymptoot.
In dit onderdeel bekijk je exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x + a$.

Je leert in dit onderwerp

- de belangrijkste karakteristieken van exponentiële functies herkennen;
- de formule van een exponentiële functie opstellen vanuit twee gegeven punten.

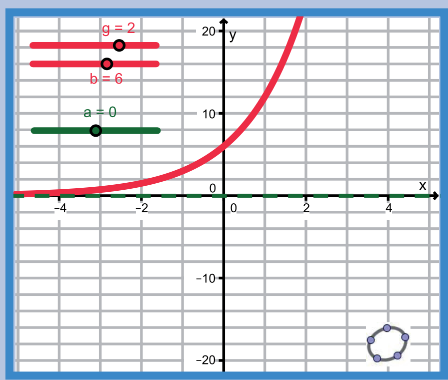
Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- het begrip exponentiële groei/verval met de bijbehorende groeifactor en groei/vervalpercentage;
- exponentiële groei en lineaire groei vergelijken met behulp van bijpassende formules en grafieken.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Applet



Tot nu toe heb je exponentiële functies beschreven met formules van de vorm $y = b \cdot g^x$. Hierin kun je de beginhoeveelheid b en de groeifactor g variëren en zien wat er met de grafiek gebeurt. Maar je kunt ook de grafiek met a omhoog schuiven. Dan krijg je een exponentiële functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$.

Neem je $b = 6$ en $g = 2$. Kies ook $a = 0$. Bekijk de grafiek en je ziet dat de uitkomsten steeds dichter naar $y = 0$ naderen.

Neem je $a = 4$ dan zie je de grafiek van $y_4 = 6 \cdot 2^x + 4$. Deze grafiek heeft dezelfde vorm, maar nu naderen de uitkomsten steeds dichter naar $y = 4$.

En zo kun je a variëren. De uitkomsten van $y = b \cdot g^x + a$ zullen steeds naderen naar de horizontale lijn $y = a$. Deze lijn heet daarom de horizontale asymptoot van de functie. Het woord ‘asymptoot’ is afgeleid uit het Grieks en betekent zoiets als ‘niet samenvallend’. De grafiek valt nooit samen met een asymptoot.

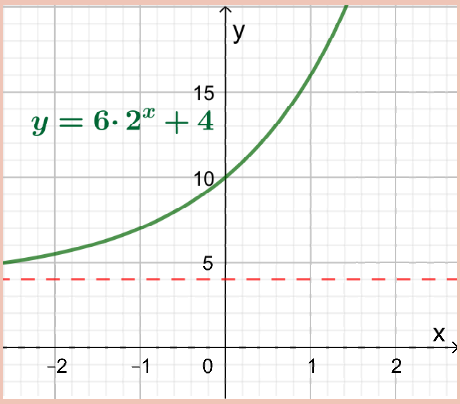
Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Applet

Theorie

Elke functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$ heet een **exponentiële functie**. Er zijn twee soorten exponentiële functies:

- exponentiële functies met een stijgende grafiek als $g > 1$;
- exponentiële functies met een dalende grafiek als $0 < g < 1$.



Bij al deze functies is er sprake van een **asymptoot**. In dit geval is de asymptoot de lijn $y = a$, een lijn waar de grafiek wel steeds dichter bij komt te lopen, maar waar hij nooit mee samenvalt.

Hoe je een formule opstelt van de exponentiële functie vanuit twee gegeven punten op de grafiek, zie je in **Voorbeeld 2**.

Voorbeeld 1

De formule van exponentiële functie is $y = 10 \cdot 1{,}5^x - 20$.
Teken een bijpassende grafiek en los op: $y \leq 20$ in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Deze functie heeft dezelfde grafiek als die van $y = 10 \cdot 1{,}5^x$ behalve dat hij 20 eenheden naar beneden is geschoven.

De grafiek van $y = 10 \cdot 1{,}5^x$ heeft een beginhoeveelheid van 10. Als x met 1 toeneemt, dan wordt de uitkomst met $1{,}5$ vermenigvuldigd. Als x met 1 afneemt, dan wordt de uitkomst door $1{,}5$ gedeeld.
Hiermee maak je snel een tabel bij $y = 10 \cdot 1{,}5^x$. Als je dan van alle uitkomsten 20 aftrekt, heb je een tabel bij de gegeven functie.

Om de ongelijkheid op te lossen, bepaal je eerst de waarde van x waarvoor $10 \cdot 1{,}5^x - 20 = 20$. Dat kan meteen met inklemmen, maar het rekenwerk wordt iets eenvoudiger als je de vergelijking eerst herleidt tot $1{,}5^x = 4$. Je vindt $x \approx 3{,}419$.
De oplossing is daarom $x \leq 3{,}41$.

Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Van een exponentiële functie $y = b \cdot g^x + a$ is gegeven dat de grafiek door de punten $A(0{,}12)$ en $B(3{,}7)$ gaat en de lijn $y = 2$ de asymptoot is.
Stel een passend functievoorschrift op.

Antwoord

Omdat de asymptoot $y = 2$ is, geldt in de gegeven formule $a = 2$.

De formule komt er nu zo uit te zien: $y = b \cdot g^x + 2$.
$A(0{,}12)$ invullen geeft: $b \cdot g^0 + 2 = 12$ en dus $b = 10$.
$B(3{,}7)$ invullen geeft: $10 \cdot g^3 + 2 = 7$ en dus $g^3 = 0{,}5$ zodat $g = \sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}79$.

De gevraagde formule wordt $y = 10 \cdot 0{,}79^x + 2$.

Opgave 6 Opgave 7

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

www.math4all.nl