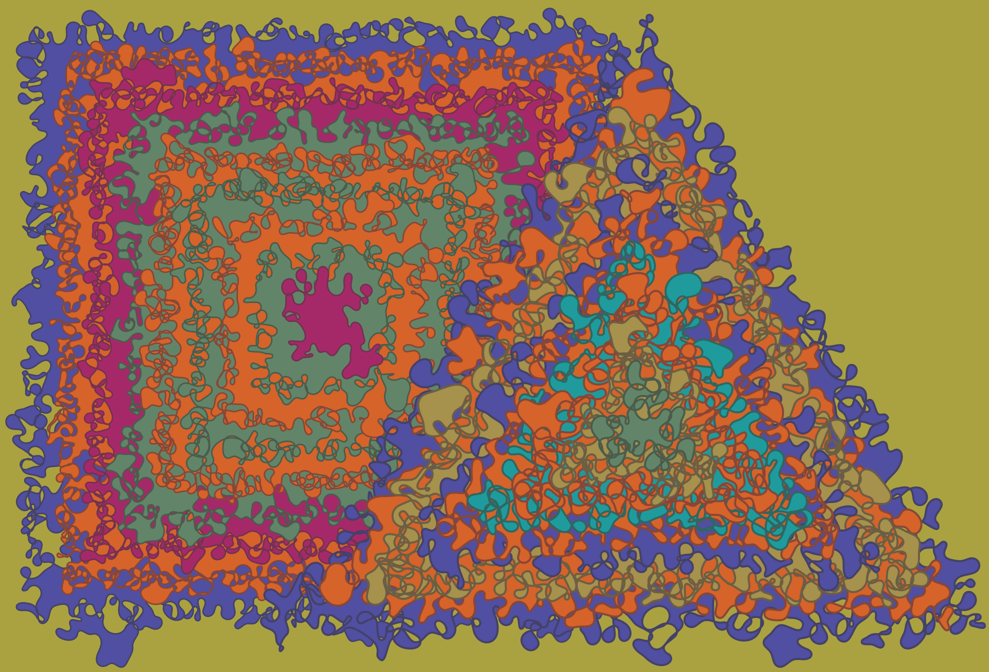
Wiskunde

3 VWO

Katern 1 / Opgaven

ConTeXt College



© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie http://creativecommons.org/licenses/by/3.0).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

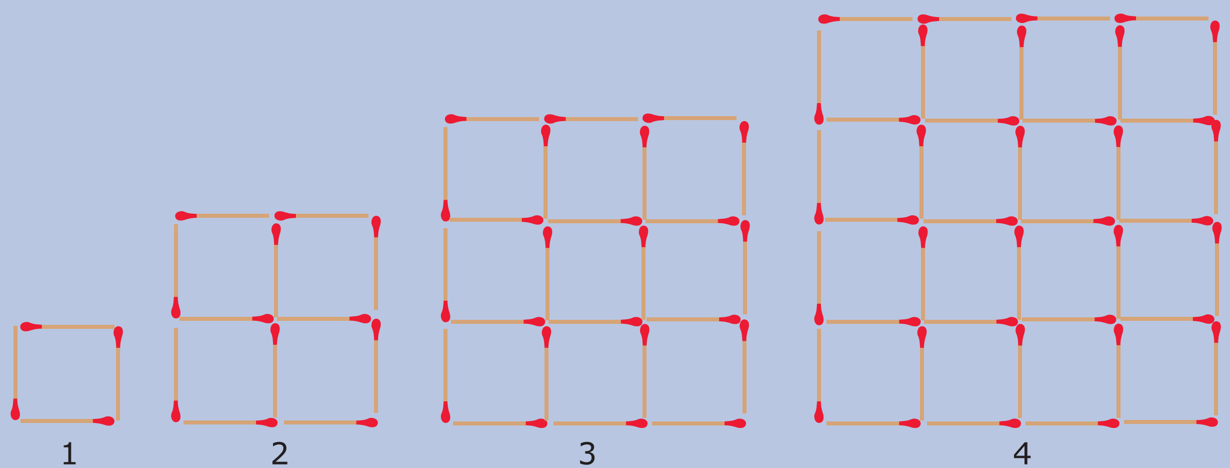
Begrippen

- variabelen — gelijksoortige en ongelijksoortige termen — wisseleigenschap — commutatieve bewerking;
- breuken — gelijknamig maken — kleinste gemeenschappelijke veelvoud — KGV;
- tweeterm — vierterm — distributieve eigenschap — haakjes uitwerken — ontbinden in factoren — grootste gemeenschappelijke deler — GGD;
- macht — grondtal — exponent — wetenschappelijke notatie;
- wortel — worteltrekken — nde machts worteltrekken.

Activiteiten

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met variabelen, formules en uitdrukkingen herleiden, gelijksoortige termen;
- breuken vereenvoudigen, gelijknamig maken, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, het KGV;
- haakjes uitwerken en ontbinden in factoren, de GGD en de som-en-productmethode;
- rekenen met machten met gehele exponenten, de wetenschappelijke notatie van getallen;
- rekenen met (hogere machts) wortels, wortelvormen herleiden.

Variabele luciferpatronen



Domein

Rekenen en algebra

Hoofdstuk

Algebra

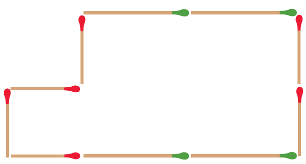
Inhoud

1

1.1 Rekenen met variabelen

Verkennen

Opgave V1



Bekijk deze luciferfiguur. Hij is gemaakt van rode lucifers met een lengte van a cm en groene lucifers met een lengte van b cm.

a Hoeveel bedraagt de omtrek van deze figuur?

b Hoeveel bedraagt de oppervlakte van het gebied binnen de figuur?

c Neem nu aan dat $a = 3$ cm en $b = 5$ cm. Hoeveel bedraagt dan de omtrek van de figuur?

d Neem nu aan dat $a = 3$ cm en $b = 5$ cm. Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van de figuur?

Opgave V2

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek 22 cm.

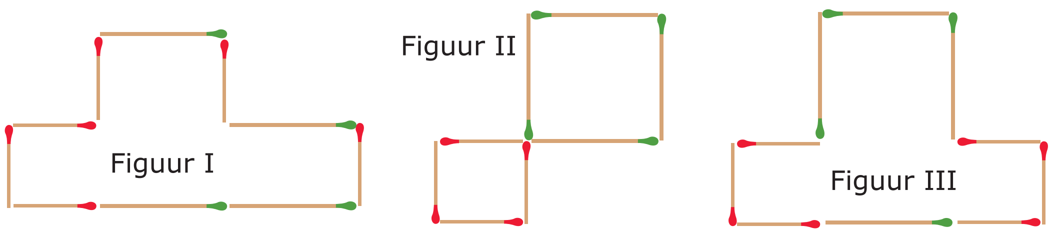
Hoe groot zijn de lengte en de breedte van die rechthoek?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met variabelen rekent. Let er op dat je gelijksoortige termen zoveel mogelijk samenneemt. Met luciferfiguren kun je het rekenen met variabelen zichtbaar maken.

Je ziet hier drie luciferfiguren. De korte lucifers hebben lengte a, de lange hebben lengte b.



a Bepaal van deze drie luciferfiguren de omtrek. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.

b Neem nu aan dat $a = 3$ cm en $b = 5$ cm. Hoeveel bedraagt dan de omtrek van elke figuur?

c Waarom is het herleiden van de uitdrukkingen met variabelen handig?

d Bepaal van deze drie luciferfiguren de oppervlakte. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.

e Neem nu aan dat $a = 3$ cm en $b = 5$ cm. Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van elke figuur?

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je voorbeelden van het rekenen met variabelen.

a Laat zien, dat $2a + 5a = 7a$.

b Laat zien, dat $2a + 5b + 3a + 4b = 5a + 9b$.

Herleid nu zelf:

c $18a + 6b + 10a + 4b$

d $12p + 6q + 10p + 4p$

e $x + 3y + 5y + 8x + 7y$

f $ab + b^2 + 3ab + b^2$

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je variabelen optelt en vermenigvuldigt. Herleid nu zelf:

a $3a + 12b + 2a + 4b$

b $8p + q + 2p + q$

c $4a \cdot 3b$

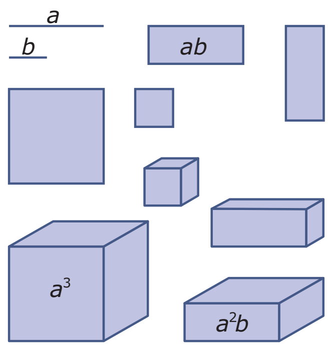
d $4a \cdot 3b + 5a \cdot 2b$

e $4a \cdot 3b + 5a \cdot 2a$

f $6p \cdot 2q + 4q \cdot p$

Opgave 4

In de figuur hiernaast ontbreken nog enkele uitdrukkingen. Hij staat ook op het **werkblad**.



a Schrijf bij elke figuur de juiste uitdrukking.

b Leg uit waarom ab^2 en a^2b geen gelijksoortige termen zijn.

c Hoe volgt uit de figuur dat $ab = ba$?

Opgave 5

Herleid:

a $7b + b$

b $2abc + 8abc + bac$

c $12p \cdot 4q + 3qp$

d $3ab^2 + 2a^2b + a^2b + 4ab^2$

e $4x \cdot 3y + 2x \cdot x + y \cdot 2x$

f $2x \cdot x + x + 4x^2 + 5x$

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je met mintekens werkt bij het herleiden. Herleid nu zelf:

a $-7p - 5p$

b $-7p \cdot -5p$

c $3a - 5b + 2a + 7b$

d $3 + 2x - 5x - 7$

e $4x \cdot 2y - 3y \cdot -7y$

f $3ab - 5a \cdot 2b + ab$

Opgave 7

Met behulp van AlgebraKIT kun je het herleiden van uitdrukkingen oefenen. In het **Practicum** kun je dit doen.

Opgave 8

Herleid:

a $6p \cdot 3q - 3p \cdot -4q$

b $-5xy - 3x \cdot -2y$

c $-3 \cdot -2p - 6 \cdot -8p$

d $-3 - 2p - 6 - 8p$

e $4ab \cdot b - a \cdot b \cdot 2b - 3ab \cdot a + 2a \cdot 3b^2$

f $ab \cdot c + 2b \cdot ac - 3abc$

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** wordt het probleem van **Opgave 2** nog eens bekeken. Om het probleem overzichtelijker te maken worden variabelen ingevoerd.

l	b	$l \cdot b$	$l + b$
1	24	24	25
2		24	
3		24	
4		24	
6		24	
...		24	

a De formule die te maken heeft met de omtrek van de rechthoek kun je vereenvoudigen. Laat dat zien.

b Maak een tabel zoals die hiernaast.

c Waarom wordt in de tabel uitgegaan van een vaste oppervlakte en niet van een vast getal voor omtrek?

d Welke twee getallen voldoen aan beide formules?

e In dit geval kwamen zowel de lengte als de breedte op gehele getallen uit. Hoe ga je verder als dit niet het geval is?

Opgave 10

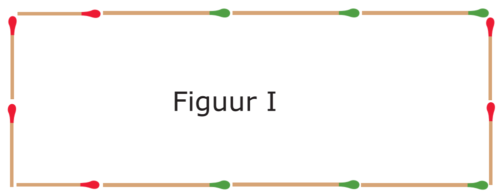
Van een rechthoek is de omtrek 152 cm en de lengte en de breedte verschillen 32 cm.

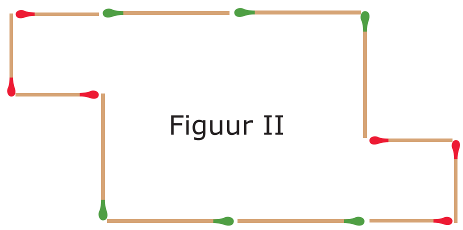
Bereken de lengte en de breedte van deze rechthoek.

Verwerken

Opgave 11

Je ziet hier twee luciferfiguren. De korte lucifers hebben lengte a, de lange hebben lengte b.





a Schrijf van beide figuren zowel de omtrek als de oppervlakte op. Herleid alle uitdrukkingen tot ze zo kort mogelijk zijn.

b Neem aan dat $a = 4$ en $b = 7$. Bereken nu van beide figuren zowel de omtrek als de oppervlakte.

Opgave 12

Herleid:

a $7x + 20x$

b $7x \cdot 20x$

c $7x \cdot 20y$

d $6x - x$

e $6x \cdot \text{-}10xy$

f $6x \cdot \text{-}20x - 15x \cdot \text{-}10x$

g $\text{-}x \cdot 5y + 3y \cdot 2x$

h $\text{-}x \cdot 5y + 3y \cdot 2y$

Opgave 13

Bereken voor $p = 10$, $q = 5$ en $p = \text{-}2$:

a $4p \cdot \text{-}2q + 6q \cdot p$

b $3p \cdot \text{-}5q \cdot r$

c $5q \cdot 3r \cdot p - 3p \cdot 2q \cdot r$

d $3p \cdot 2r^2 - 4pr \cdot 8r$

e $6r^2 + 3p - 3r \cdot 2r$

f $4pq \cdot 6qr - 3pr \cdot 8q^2$

Opgave 14

Van een rechthoek is de oppervlakte 104 cm^2 en de lengte en de breedte verschillen 5 cm.

Bereken de lengte en de breedte van deze rechthoek.

Opgave 15

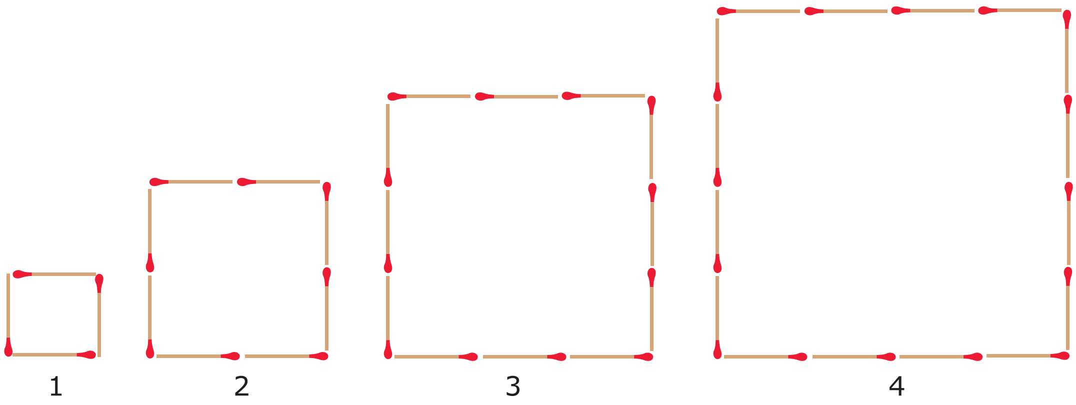
Kees en Jochum zijn samen 118 jaar oud. Kees is 16 jaar ouder dan Jochum.

Bereken hun leeftijden.

Toepassen

Je ziet hier het begin van een serie luciferfiguren waar regelmaat in zit. Die regelmaat kun je beschrijven met een formule voor het aantal lucifers a afhankelijk van het figuurnummer n.

Daarmee kun je vragen beantwoorden als: “Vanaf welk figuurnummer liggen er meer dan 1000 lucifers?”



Opgave 16: Luciferpatroon (1)

Bekijk het begin van de serie luciferfiguren hierboven en zet het patroon voort.

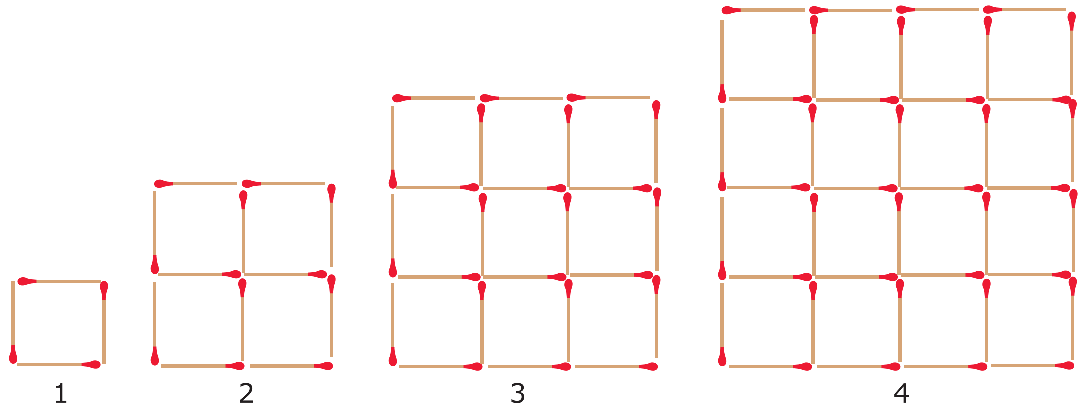
a Hoeveel lucifers bevat figuur nummer 10?

b Stel een formule op voor het aantal lucifers a afhankelijk van het nummer n van de figuur.

c Vanaf welk figuurnummer heb je meer dan 1000 lucifers nodig om die figuur te leggen?

Opgave 17: Luciferpatroon (2)

Hier zie je het begin van een ander luciferpatroon.



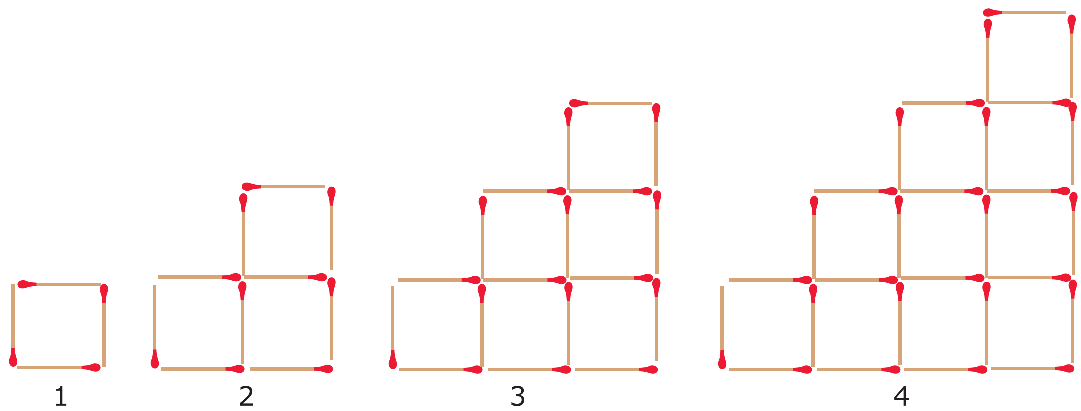
a Hoeveel lucifers bevat nu figuurnummer 10?

b Stel een formule op voor het aantal lucifers a afhankelijk van het nummer n van de figuur.

c Vanaf welk figuurnummer heb je meer dan 1000 lucifers nodig om die figuur te leggen?

Opgave 18: Luciferpatroon (3)

Hier zie je het begin van weer een ander luciferpatroon.



a Hoeveel lucifers bevat nu figuurnummer 10?

b Stel een formule op voor het aantal lucifers a afhankelijk van het nummer n van de figuur.

c Vanaf welk figuurnummer heb je meer dan 1000 lucifers nodig om die figuur te leggen?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van termen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier. Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

1.2 Breuken

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al rekenen met de breuken. Neem bijvoorbeeld $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$, het verschil van deze breuken.

c Hoeveel is het product van beide breuken?

d Bereken het quotiënt van beide breuken, deel de grootste door de kleinste.

Opgave V2

Je kunt op dezelfde manier rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen. Werk met de breuken $\frac{5}{a}$ en $\frac{3}{b}$. Neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken $\frac{5}{a} - \frac{3}{b}$, het verschil van deze breuken.

c Hoeveel is het product van beide breuken?

d Bereken $\frac{5}{a} \Big/ \frac{3}{b}$.

e Waarom moet je aannemen dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je breuken gelijknamig maakt om ze te kunnen optellen, aftrekken en delen. Neem de breuken $\frac{2}{a}$ en $\frac{3}{b}$.

a Maak beide breuken gelijknamig.

b Bereken nu $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$, $\frac{2}{a} - \frac{3}{b}$ en $\frac{2}{a} \Big/ \frac{3}{b}$.

c Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 2

Neem de breuken $\frac{2}{3a}$ en $\frac{3}{5a}$.

a Maak beide breuken gelijknamig.

b Bereken nu $\frac{2}{3a} + \frac{3}{5a}$, $\frac{2}{3a} - \frac{3}{5a}$ en $\frac{2}{3a} \Big/ \frac{3}{5a}$.

c Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 3

Neem de breuken $\frac{4p}{2pr}$ en $\frac{5}{3q}$.

a Welke van beide breuken kun je nog vereenvoudigen? Doe dat eerst.

b Tel beide breuken op.

c Vermenigvuldig beide breuken.

Opgave 4

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{3}{2p}$ en $\frac{5}{q}$ met $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

a Bereken de som en het product van beide breuken.

b Deel $\frac{3}{2p}$ door $\frac{5}{q}$.

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{2}{3}p$ en $\frac{1}{2p}$ met $p \neq 0$.

c Bereken de som en het product van beide breuken.

d Deel $\frac{2}{3}p$ door $\frac{1}{2p}$.

Opgave 5

Bekijk altijd vooraf of je de breuken niet beter eerst kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Misschien hoef je wel niet eens met breuken te rekenen. Zo is $\frac{12a^2b}{3ab} = 4a$.
Herleid de volgende uitdrukkingen (neem aan dat alle variabelen ongelijk 0 zijn):

a $\frac{2p}{4pq} + \frac{6}{3q}$

b $\frac{-3b}{ab} \Big/ \frac{2a}{a^2}$

c $\frac{2pq}{q} - \frac{15p}{3}$

d $\frac{4pq}{2p} \cdot \frac{6p}{3}$

Opgave 6

Oefen het rekenen met breuken met variabelen via het **Practicum**.

Opgave 7

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 2**.

a Ga zelf na, dat dit probleem kan worden vertaald in de formules $2l + 2b = 21{,}4$ en $l \cdot b = 24$.

b Laat zien, hoe je de formule $2l+2b = 21{,}4$ kunt herleiden tot een vorm waarin l is uitgedrukt in b.

c Hoe kun je de formule $l \cdot b = 24$ herleiden tot l is uitgedrukt in b? Welke waarde kan b dan niet meer hebben?

Je hebt nu twee formules gekregen waarbij je grafieken kunt maken.

d Van welke variabele komen de waarden op de horizontale as? En waarom?

e Maak bij beide formules een tabel en teken de bijbehorende grafieken in één figuur. Los het probleem op met behulp van inklemmen.

Opgave 8

Herleid de volgende formules tot een vorm waarin y is uitgedrukt in x. Neem aan dat $x \neq 0$ en $y \neq 0$.

a $3x + 2y = 8$

b $3x - 2xy = 8$

c $x \cdot 3y = 9$

d $\frac{x}{3y} = 9$

Opgave 9

Van een ruit is de oppervlakte 15 cm^2. Deze ruit past precies in een rechthoek waarvan de zijden evenwijdig zijn met de diagonalen van de ruit en die een omtrek heeft van 23 cm. Hoe lang zijn de diagonalen van deze ruit?

Stel bij dit probleem formules op en bereken het antwoord met behulp van grafieken.

Verwerken

Opgave 10

Reken met de twee breuken $\frac{2a}{b}$ en $\frac{a}{3b}$. Neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

a Bereken de som en het product van beide breuken.

b Bereken ook $\frac{2a}{b} - \frac{a}{3b}$ en $\frac{2a}{b} \Big/ \frac{a}{3b}$

Reken met de twee breuken $\frac{2a}{b}$ en $\frac{b}{3a}$.

c Bereken de som en het product van beide breuken.

Opgave 11

Herleid tot een vorm met niet meer dan één breuk:

a $\frac{1}{2a} + \frac{3}{b}$

b $\frac{15ab}{3a} - \frac{12b^2}{4b}$

c $\frac{b}{4a} \cdot \frac{2a^2}{3b}$

d $\frac{1}{a} - \frac{2}{b}$

e $\frac{6}{a} \Big/ \frac{1}{2a}$

f $\frac{1}{a} + \frac{a}{2}$

Opgave 12

Bereken als $p = 3$ en $q = -4$.

a $\frac{6p}{pq} \cdot \frac{5q}{3p}$

b $\frac{4}{3q} - \frac{1}{q}$

c $\frac{1}{p} + \frac{2}{q}$

d $\frac{2p}{pq} \Big/ \frac{6}{q}$

Opgave 13

Herleid de volgende formules tot ze een vorm hebben waarin a is uitgedrukt in b.

a $a \cdot 3b = 6$

b $3a + b = 6$

c $\frac{3a}{2b^2} = \frac{1}{b}$

d $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$

Opgave 14

Twee getallen verschillen 14. Als je het grootste getal door het kleinste deelt, dan krijg je 5. Welke getallen zijn dat?

Stel bij dit probleem formules op en bereken het antwoord.

Toepassen

In sommige gevallen heb je met bijzondere gemiddelden te maken. Naast het ‘gewogen gemiddelde’ (waarin niet alle getallen even zwaar meetellen, maar meetellen volgens een bepaald gewicht), heb je het **harmonisch gemiddelde**. Een voorbeeld daarvan heb je misschien al eerder gezien.

Je vliegt heen en weer van Amsterdam naar Moskou. Op de heenreis is je gemiddelde snelheid 900 km/uur, op de terugreis is je gemiddelde vliegsnelheid 960 km/uur vanwege de weersomstandigheden. In beide gevallen is de gevlogen afstand hetzelfde.
Hoeveel bedraagt je gemiddelde snelheid over de gehele vlucht?

Die gemiddelde snelheid is een harmonisch gemiddelde...

Opgave 15: Harmonisch gemiddelde

Bekijk het probleem dat wordt beschreven in **Toepassen**.

a Hoeveel bedraagt je gemiddelde snelheid over de gehele vlucht?

Uit de **Wikipedia: Harmonisch gemiddelde**: “De gemiddelde snelheid van twee ritten over dezelfde afstand, gereden met verschillende maar constante snelheid, is het harmonisch gemiddelde van de beide snelheden. Als de heenreis wordt gereden met 100 km/uur en de terugreis met 120 km/uur, is de gemiddelde snelheid van de totale rit het harmonisch gemiddelde van de twee snelheden, 109 km/uur. Als in plaats van de lengte, de tijdsduur van de ritten gelijk is, dient men het rekenkundig gemiddelde te gebruiken.”

b Laat zien dat deze uitspraak correct is.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met breuken**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

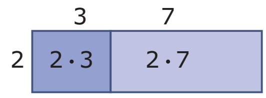
AlgebraKIT

1.3 Haakjes

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de figuur hiernaast.



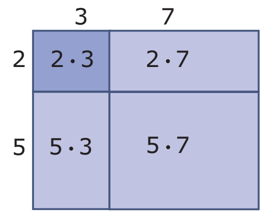
a Leg uit dat deze figuur laat zien dat $2 \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7$.

b Teken zelf een figuur die laat zien dat $2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3$.

c Reken ook nog even na, dat $2 \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7$ en $2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3$.

Opgave V2

Bekijk de figuur hiernaast.



a Leg uit dat deze figuur laat zien dat $(2 + 5) \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$.

b Teken zelf een figuur die laat zien dat $(5 - 2) \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$.

c Reken ook nog even na, dat $(2 + 5) \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ en $(5 - 2) \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$.

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je haakjes kunt uitwerken.

a Maak zelf een rechthoek waarmee je laat zien dat $4(2x + 3) = 8x + 12$.

b Maak zelf een rechthoek waarmee je laat zien dat $(2x + 3)\,(x + 4) = 2x^2 + 11x + 12$.

c Werk van $x(2x + 3)$ de haakjes uit.

Je kunt van $x(2x - 3)$ de haakjes uitwerken door de uitdrukking te schrijven als $x(2x - 3) = x(2x + \text{-}3)$.

d Wat krijg je dan als je het antwoord zo ver mogelijk herleidt?

e Werk van $(x + 5)\,(2x - 3)$ de haakjes uit.

f Laat met behulp van de verdeeleigenschap zien, dat $\text{-}(x - 3) = \text{-}x + 3$.

Opgave 2

Werk de haakjes uit en herleid zover mogelijk:

a $5(a + 2b)$

b $5a(a - 2b)$

c $(x+4)(x+5)$

d $(2x-4)(x-5)$

e $3(2p+4)+5(4-p)$

f $3(2p+4)-(4-p)$

Opgave 3

Het omgekeerde van haakjes uitwerken is ontbinden in factoren. Daarbij maak je van een tweeterm of een drieterm (of een uitdrukking met nog meer termen) een product van factoren. Eerst ga je op zoek naar de gemeenschappelijke delers van alle termen.

a Bekijk de uitdrukking $6x+9$. Welke GGD hebben beide termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?

b Bekijk de uitdrukking $8x-6x^2$. Welke GGD hebben beide termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?

c Bekijk de uitdrukking $2x^2-6x+12$. Welke GGD hebben alle drie de termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?

d Bekijk de uitdrukking x^2+5x+6. Is er een GGD van alle drie de termen? Laat zien dat $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

Opgave 4

Werk van de volgende uitdrukkingen de haakjes weg en herleid ze zo ver mogelijk.

a $2x+3(4-x)$

b $(2k+3)(k+4)$

c $4x(x-y+5)$

d $3(2x-1)(4-x)$

e $2\left(x^2-3x\right)-x(2-x)$

f $(6-p)\cdot{}\text{-}p+2(p-3)$

Opgave 5

Bij het wegwerken van haakjes kom je een paar bijzondere gevallen tegen. Dat zijn de merkwaardige producten: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ en $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

a Laat zien, dat $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

b Laat zien, dat: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Je kunt hiermee in sommige gevallen de haakjes sneller wegwerken. Pas dit bij het herleiden van de volgende uitdrukkingen toe.

c $(k-5)(k+5)$

d $(x+10)^2$

e $(3p+1)(1-3p)$

f $(2x - 3)^2$

g $(a + 2)^2 - (a - 2)^2$

h $x(5x - 4) - (x - 2)(x + 2)$

Opgave 6

Oefen het wegwerken van haakjes via het **Practicum**.

Opgave 7

Ook bij het werken met breuken kun je met haakjes te maken krijgen. Je wilt bijvoorbeeld van $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ één breuk maken.

a Wat is het KGV van x en $x + 1$?

b Maak nu beide breuken gelijknamig en tel ze op.

c Schrijf de breuk zonder haakjes.

Opgave 8

Je ziet in **Voorbeeld 2** hoe je kunt ontbinden in factoren door een zo groot mogelijke gemeenschappelijke deler buiten haakjes te halen.

a Bij de tweede uitdrukking zie je hoe er op twee manieren kan worden ontbonden in factoren. Is dat vaker het geval?

b Hoe kun je controleren of je ontbinding goed is?

Opgave 9

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

a $6x + 8y$

b $14k^2 - 21k$

c $-4xy - 12y^2 + 6y$

d $p^2 - p$

e $3a^2 + 16ab$

f $-12x^2 - 6x + 18$

Opgave 10

Oefen het buiten haakjes halen via het **Practicum**.

Opgave 11

Neem **Voorbeeld 3** eerst door. Bekijk nu de uitdrukking $x^2 + 6x + 8$. Je wilt deze uitdrukking ontbinden.

a Waarom kun je deze uitdrukking niet ontbinden door iets buiten haakjes te halen?

b Volgens de som-en-productmethode kun je deze uitdrukking ontbinden door twee getallen te zoeken die opgeteld 6 en vermenigvuldigd 8 opleveren. Welke getallen voldoen daar aan?

c Schrijf de juiste ontbinding op.

d Controleer je ontbinding door de haakjes weer uit te werken.

Opgave 12

Ontbind de volgende uitdrukkingen met de som-en-productmethode.

a $x^2 + 7x + 12$

b $x^2 + 12x + 20$

c $x^2 + 13x + 12$

d $x^2 + 2x + 1$

e $x^2 + 19x + 90$

f $x^2 + 18x + 81$

Opgave 13

Het ontbinden in factoren wordt wat lastiger als je ook mintekens hebt en de twee manieren van ontbinden door elkaar gaat gebruiken of zelfs beide moet gebruiken bij dezelfde uitdrukking. Dan wordt een systematische aanpak belangrijk.

product	getallen	som
-6	-6 en 1	-5
-6	6 en -1	5
-6	-3 en 2	-1
-6	3 en -2	1

a Laat zien, dat $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$. Leg ook uit hoe je dit in de tabel hiernaast kunt zien.

b Ontbind zelf $x^2 - 5x - 6$

c Ontbind ook $x^2 - x - 6$

Je ziet dat bij ontbinden met de som-en-productmethode een tabel van alle mogelijke gehele getallen die het juiste product opleveren handig is.

d Waarom doe je dit voor het product en niet voor de som van beide getallen?

e Ontbind $x^2 - 2x - 8$

De som-en-productmethode is alleen geschikt voor vormen zoals $x^2 + px + q$. Zo'n vorm herleid je dan tot $(x + a)(x + b)$.

f Druk p en q uit in a en b.

g Laat zien, dat p en q ook 0 kunnen zijn. Geef van beide situaties een voorbeeld.

Opgave 14

Ontbind de volgende uitdrukkingen. Kijk eerst of je iets buiten haakjes kunt halen en gebruik pas als dat niet (meer) kan de som-en-productmethode.

a $x^2 - 7x + 12$

b $x^2 + 2x - 48$

c $x^2 - 9$

d $x^2 - 9x$

e $2x^2 + 16x + 24$

f $3x^2 - 48$

Verwerken

Opgave 15

Werk de haakjes weg en herleid zover mogelijk.

a $2x(x + 5)$

b $2x - (x + 5)$

c $(2x - 1)(x + 5)$

d $3(2x - 1) - 4(x + 5)$

e $(x + 5)^2$

f $(2x - 1)^2 - (x - 5)(x + 5)$

g $(2x + y)(y + 5) + 2x(5 - y)$

h $(2x + y)^2 - (y + 5)^2$

Opgave 16

Breng een zo groot mogelijke factor buiten haakjes.

a $14x + 21y$

b $3p^2 - 6pq$

c $-4a^2b - 4ab$

d $p^3 - 3p^2 - p$

Opgave 17

Ontbind in factoren met behulp van de som-en-productmethode.

a $x^2 + 17x + 30$

b $x^2 - x - 12$

c $16 - 10x + x^2$

d $k^2 - 100$

Opgave 18

Ontbind in factoren.

a $12a^2 - 8a$

b $6p - 16 + p^2$

c $\frac{1}{2}k^2 - 8$

d $3x^2 - 6x - 9$

e $-4pq + 8pq^2$

f $8x - 16 - x^2$

Opgave 19

Oefen het ontbinden in factoren via het **Practicum**.

Opgave 20

Schrijf als één breuk en zonder haakjes.

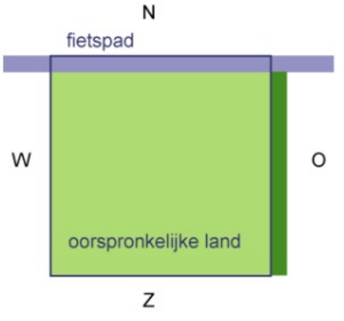
a $\frac{2}{a-2} + \frac{3}{a}$

b $\frac{3}{a-2} + \frac{2}{a+2}$

Toepassen

Een boer heeft een vierkant stuk land. De gemeente wil langs de noordrand een fietspad van 3 m breed aanleggen. Ze wil daarom een strook van die breedte aankopen. In plaats van het stuk land dat hij kwijtraakt mag de boer aan de oostkant zijn land uitbreiden met een strook van dezelfde breedte.

Heeft de boer nu een even groot stuk land als voorheen?



Opgave 21: Fietspad aanleggen

Bekijk het probleem dat wordt beschreven in **Toepassen**.
De afmetingen van het oorspronkelijke vierkante stuk land zijn onbekend. Je kunt daarom voor de lengte en de breedte de variabele x kiezen.

a Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van het oorspronkelijke stuk land?

Nu gaat er aan de noordkant een strook van 3 m af, die er aan de oostkant weer bij komt. Het landje wordt nu rechthoekig.

b Welke lengte en welke breedte krijgt het stuk land na aanleg van het fietspad?

c Bereken de oppervlakte van het stuk land na aanleg van het fietspad. Schrijf je antwoord zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

d Welke conclusie trek je?

Practicum: Werken met haakjes

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het uitwerken van haakjes** en met **het ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

AlgebraKIT

1.4 Machten

Verkennen

Opgave V1

Een **kettingbrief** is een brief die elke ontvanger enige malen moet kopiëren en vervolgens door moet sturen (dit kan ook digitaal). Je ziet hiernaast een voorbeeld, op de stippeltjes vul je natuurlijk het adres van een goed doel in. Stel je begint door vijf vrienden zo'n brief te sturen en die sturen hem weer door naar vijf van hun vrienden, enzovoort. Stel verder dat niemand van twee of meer personen deze zelfde brief krijgt.

Voorbeeld kettingbrief

Stuur deze brief door naar vijf van jouw vrienden en maak 1 euro over naar ...

a Waarom is het aantal brieven dat jouw vrienden versturen dan 5^2? En wat stelt 5^3 voor?

5^2 en 5^3 zijn machten van 5. Als de kettingbrief steeds doorgaat is het aantal brieven dat elke nieuwe groep ontvangers verstuurd steeds 5 keer zo groot en krijg je nog hogere machten van 5.

b Hoeveel is 5^4?

c Laat zien, dat $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$.

d Laat ook zien, dat $5^6 / 5^2 = 5^4$.

Opgave V2

In de eerste ronde worden er 5 brieven verstuurd, in de tweede ronde 5^2, in de derde ronde 5^3, enzovoorts.

a Hoeveel brieven worden er in de vierde ronde verstuurd? En in de achtste?

b Leg uit waarom $(5^4)^2 = 5^8$.

c Hoeveel is $(5^4)^6$? (Geef je antwoord als macht van 5.)

Opgave V3

Als je machten van 5 uitrekent, krijg je al snel gigantische bedragen. Dat is leuk voor je goede doel als de kettingbrief blijft doorlopen en iedereen die éne euro overmaakt.

a Hoeveel is 5^{10}?

b Waarom is het onwaarschijnlijk dat deze kettingbrief lang blijft doorlopen?

Grote getallen geef je weer met de wetenschappelijke notatie $a \cdot 10^n$ met n een geheel getal en $1 \leq a < 10$.

c Schrijf 5^{10} in de wetenschappelijke notatie afgerond op twee decimalen nauwkeurig.

d In welke ronde zou het aantal brieven dat wordt verstuurd ongeveer gelijk zijn aan de totale wereldbevolking?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met machten kunt rekenen. Deze rekenregels zijn vooral nuttig als de grondtallen en de exponenten groot zijn.

a Je rekenmachine kan $5^{200} / 5^{198}$ waarschijnlijk niet voor je uitrekenen. Toch kun je dit zelf wel. Laat dat zien.

b Bereken $\frac{19^{121} \cdot \left(19^{50}\right)^2}{19^{220}}$.

Je ziet in de uitleg dat ook 0 en zelfs negatieve getallen als exponent kunnen voorkomen. Bij delen mag je de exponenten van elkaar aftrekken.

c Laat zien dat daaruit volgt dat $5^0 = 1$.

d Laat zien dat daaruit volgt dat $3^{-6} = \frac{1}{3^6}$.

e Bereken $\left(15^{14}\right)^{10} \cdot 15^{108} / 15^{250}$.

Opgave 2

Werk met de rekenregels voor machten en herleid zo ver mogelijk. Neem aan dat $a \neq 0$.

a $a^5 \cdot a^2$

b $3a^5 \cdot 4a^2$

c $3a^5 / 4a^2$

d $\left(3a^5\right)^4$

e $\left(-2a^3\right)^4 \cdot a^3 / \left(-2a^5\right)^3$

Opgave 3

De omtrek van de Aarde is 40000 km.

a Hoeveel m is dat? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie.

b Een nanometer is 1 miljardste m. Schrijf dit getal in de wetenschappelijke notatie.

c Hoeveel nanometer is de omtrek van de Aarde? Laat zien hoe je daarbij met getallen in de wetenschappelijke notatie rekent.

Opgave 4

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 1** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen.

a $6a^5b^2 \cdot 2a^3b$

b $\frac{6a^5b^2}{2a^3b}$

c $(4a)^2 - 4a^2$

d $a^3 \cdot 2b + 2(ab)^2$

e $8a^3 \cdot 2ab^2 - \left(2a^2b\right)^2$

f $\frac{2a \cdot (\text{-}2b)^3}{b^2 \cdot 4ab}$

Opgave 5

Ook bij het uitwerken van haakjes kun je met machten te maken krijgen. Werk in de volgende uitdrukkingen de haakjes uit en herleid ze zover mogelijk.

a $2p^3\left(1 - 6p^2\right)$

b $\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 1\right)$

c $\left(y^3 - 2\right)^2$

d $4k^2(k + 3) - 2k\left(k^2 - 4\right)$

e $\left(4 + 3k^2\right)^2 - \left(k^2 - 1\right)\left(k^2 + 1\right)$

f $(p + 1)^3$

Opgave 6

Uitdrukkingen met machten die uit meerdere termen bestaan kun je soms ontbinden in factoren. Hieronder zie je dergelijke uitdrukkingen. Ontbind ze zover mogelijk.

a $2k^4 + 6k^3$

b $a^2b^3 - 4a^3b^5$

c $x^3 - 4x$

d $24a^2 - 8a^3 + 2a^4$

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je met getallen in de wetenschappelijke notatie rekent.

a Probeer de vier voorbeelden eerst zelf uit te rekenen zonder naar de oplossing te kijken. Schrijf je antwoorden ook in de wetenschappelijke notatie.

b Bereken $a \cdot d$.

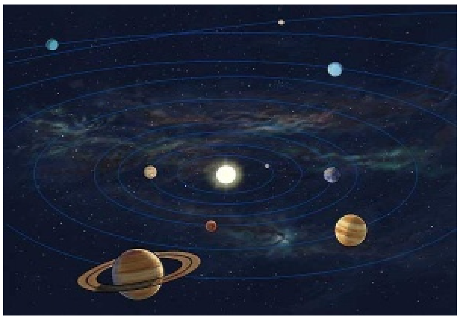
c Bereken $a - b$.

d Bereken b^3.

e Waarom is $a - c \approx a$?

Opgave 8

De astronomische eenheid (AE) is de gemiddelde afstand van de Aarde tot de Zon. 1 AE $\approx 1{,}5 \cdot 10^8$ km.



a Hoeveel AE is 1 km?

b Planeet Jupiter bevindt zich ongeveer 5,2 AE van de zon. Hoeveel km is dat?

c Pluto bevindt zich ongeveer $5{,}9 \cdot 10^9$ km van de zon. Hoeveel AE is dat?

d Een lichtjaar is de afstand die het licht in een jaar aflegt. De lichtsnelheid is $3 \cdot 10^8$ m/s. Hoeveel AE is 1 lichtjaar?

Verwerken

Opgave 9

Bereken $\frac{8^{60} \cdot 2^{200}}{4^{192}}$ door met machten van 2 te rekenen.

Opgave 10

Werk eventuele haakjes weg en herleid zover mogelijk.

a $3p^2q^3 \cdot \text{-}2pq^2$

b $\frac{3p^2q^3}{\text{-}2pq^2}$

c $\left(3k^2\right)^3 + 2k^2 \cdot k^3 - 2k^2 \cdot 5k^4$

d $3a^2\left(ab^2 - 2b\right) - 2ab\left(a^2b - a\right)$

e $\left(x^3 + 5\right)^2 - x^2 \cdot x^4$

f $\frac{2a^2b + 3ab^2}{2ab}$

g $p^5\left(p^2 - 4\right)\left(p^2 + 1\right)$

h $2x\left(3y^2\right)^3 - 2xy \cdot y^5$

Opgave 11

Ontbind in factoren.

a $12k^6 - 18k^3$

b $4ab^3 + 12a^2b - 4ab$

c $x^5 - x^4 - 2x^3$

d $4x - 8x^2 + 4x^3$

Opgave 12

Alle stoffen bestaan uit atomen. Die atomen hebben een zekere massa, de atoommassa. Die atoommassa wordt uitgedrukt in een eenheid u die gelijk is aan ééntwaalfde deel van een koolstof-12 atoom, namelijk $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ gram.

a Het koolstof-12 atoom heeft dus een massa van 12 u. Hoeveel gram is dat?

b Uit hoeveel atomen bestaat 12 gram koolstof-12?

Waterstof heeft een atoommassa van ongeveer 1 u en zuurstof een atoommassa van ongeveer 16 u.

c Laat zien dat 1 gram waterstof en 16 gram zuurstof evenveel atomen bevatten.

Water heeft moleculen die bestaan uit 1 atoom zuurstof en 2 atomen waterstof. De moleculmassa is daarom 18 u.

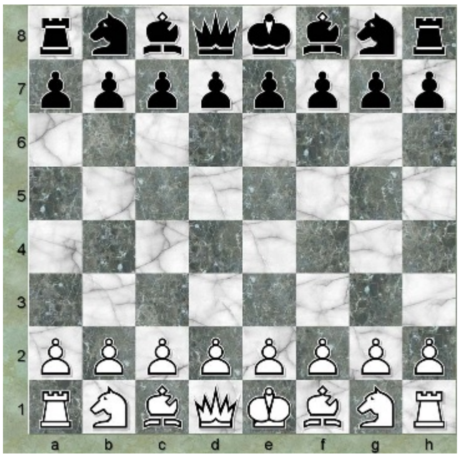
d Hoeveel moleculen zitten er in 1 kg (dat is 1 liter) water?

Opgave 13

Oefen het werken met machten van variabelen via het **Practicum**.

Toepassen

Sissah Ben Dahir is de uitvinder van het schaakspel. De Indiase koning Shirham vroeg hem wat hij als beloning voor die uitvinding wilde hebben. Sissah Ben Dahir zei: “Geef me één graankorrel om op het eerste veld van het bord te leggen, 2 graankorrels voor op het tweede veld, 4 voor op het derde veld, 8 op het vierde en laat me zo verder gaande alle 64 velden bedekken.”
De koning lachte en antwoordde: “Is dat echt alles dat je wilt hebben?” en hij gaf opdracht het graan uit te betalen. Toen bleek dat de koning te weinig graan had om Sissah uit te betalen, liet hij hem in de gevangenis opsluiten.



Opgave 14: Sissah ben Dahir

Bekijk het verhaal dat wordt beschreven in **Toepassen**. Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

a Hoeveel graankorrels moet de koning op het tiende vakje leggen?

b Hoeveel graankorrels komen er op het 64ste vakje?

c Je rekenmachine kan het aantal graankorrels op het 64ste vakje niet uitrekenen, alleen benaderen. Hoeveel graankorrels worden het ongeveer?

Neem aan dat een graankorrel ongeveer 65 mg weegt.

d Hoeveel gewicht zou er dan op het 64ste vakje rusten als alle graankorrels er op zouden kunnen liggen?

Neem aan dat een vakje van het schaakbord 5 bij 5 cm is en dat in elke cm^3 zo'n 100 graankorrels kunnen worden geperst. De hoeveelheid graan op het 64ste vakje past dan in een balkvormige toren met een grondvlak van 5 bij 5 cm.

e Hoe hoog zou die toren moeten worden?

Opgave 15: Machten optellen

Bekijk nog eens het verhaal dat wordt beschreven in **Toepassen**.
Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

a Hoeveel graankorrels moet de koning op de eerste tien vakjes samen leggen?

b Laat zien dat het antwoord op de vorige vraag gelijk is aan $2^{10} - 1$.

De totale hoeveelheid graankorrels die op het schaakbord zouden moeten komen is $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63}$. Dit is gelijk aan $2^{64} - 1$.

c Dat kun je zelf beredeneren. Probeer die redenering te vinden.

Practicum

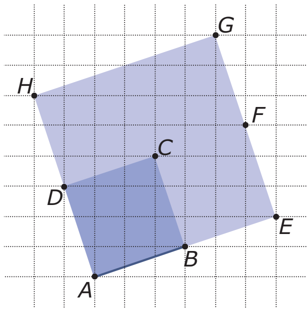
Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met machten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

1.5 Wortels

Verkennen

Opgave V1



Van een vierkant met zijde 3 is de oppervlakte $3^2 = 9$.
Van een vierkant met oppervlakte 9 is de zijde $\sqrt{9} = 3$.
Worteltrekken is terugrekenen vanuit een kwadraat.

a Je ziet hier een vierkant $ABCD$ met oppervlakte 10. Hoe lang is de zijde exact? En ongeveer?

Door vier van die vierkanten tegen elkaar te leggen, kun je weer een vierkant maken. De zijde ervan kun je op twee manieren berekenen.

b Welke oppervlakte heeft dit vierkant? Op welke twee manieren kun je de zijde ervan berekenen?

Rechthoek $AEFD$ heeft een lengte van $\sqrt{40}$ en een breedte van $\sqrt{10}$.

c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt{40} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{40 \cdot 10}$.

d Laat ook zien, dat $2 \cdot \left(2\sqrt{10} + \sqrt{10}\right) = 6\sqrt{10}$.

Opgave V2

Van een kubus met ribbe 2 is de inhoud $2^3 = 8$.
Van een kubus met inhoud 8 is de ribbe $\sqrt[3]{8} = 2$.
Derde machts worteltrekken is terugrekenen vanuit een derde macht.

a Hoe lang is een ribbe van een kubus met inhoud 10 exact? En ongeveer?

Door acht van die kubussen tegen elkaar te leggen, kun je weer een kubus maken. De ribbe ervan kun je op twee manieren berekenen.

b Welke inhoud heeft deze kubus? Op welke twee manieren kun je de ribbe ervan berekenen?

Een balk die bestaat uit twee van deze kubussen heeft een lengte van $\sqrt[3]{80}$ en een breedte en een hoogte van $\sqrt[3]{10}$.

c Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt[3]{80} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{80 \cdot 10 \cdot 10}$.

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt behalve over ‘gewone’ wortels ook gesproken over hogere machtswortels. Bereken de volgende hogere machtswortels en laat ook zien dat ze juist zijn.

a $\sqrt[3]{64}$

b $\sqrt[3]{343}$

c $\sqrt[4]{16}$

d $\sqrt[4]{-16}$

e $\sqrt[5]{243}$

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met wortels kunt rekenen. Je kunt door kwadrateren aantonen dat de rekenregels juist zijn.

a Waarom is een wortel wel een ‘tweede machtswortel’?

b Waarom staat bij $\sqrt{a^2} = a$ dat dit alleen geldt als $a \geq 0$? Laat met een voorbeeld zien dat die toevoeging nodig is.

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

c $5\sqrt{15} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$

d $\frac{4\sqrt{42}}{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$

Ook kun je bij sommige wortels kwadraten buiten het wortelteken halen: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

e Haal bij $\sqrt{48}$ een zo groot mogelijk kwadraat buiten het wortelteken.

Opgave 3

Met derdemachtswortels kun je net zo rekenen als met ‘gewone’ wortels. Toch is er een verschil.

a Waarom is de derdemachtswortel uit een negatief getal wel mogelijk? Geef een voorbeeld.

b $\sqrt[3]{a^3} = a$ voor elke waarde van a. Hoeveel is $\sqrt[3]{a^6}$?

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

c $5 \cdot \sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

d $\frac{4\sqrt[3]{42}}{2\sqrt[3]{3}} + 2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$

Ook kun je bij sommige derdemachtswortels derde machten buiten het wortelteken halen: $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$.

e Haal bij $\sqrt[3]{128}$ een zo groot mogelijke derde macht buiten het wortelteken.

Opgave 4

Ook met n-de machtswortels kun je net zo rekenen als met ‘gewone’ wortels.

a Wanneer is de n-de machtswortel uit een negatief getal mogelijk? Geef een voorbeeld.

b $\sqrt[n]{a^n} = a$ voor $a \geq 0$. Hoeveel is $\sqrt[n]{a^{2n}}$?

c Hoeveel is $\sqrt[n]{a^{5n}}$?

Opgave 5

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 1** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen.

a $\sqrt{12} - \sqrt{3}$

b $\sqrt{128} + 2\sqrt{98}$

c $6\sqrt{15a^2} - \sqrt{3a} \cdot \sqrt{5a}$ (met $a \geq 0$)

d $3\sqrt{a^2b} - a\sqrt{b} + \sqrt{2b^2}$ (met $a \geq 0$ en $b \geq 0$)

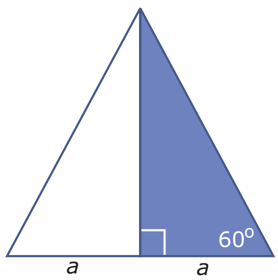
e $\sqrt[3]{108} - 2\sqrt[3]{32}$

f $\sqrt[3]{72a^3} - \sqrt[3]{3a} \cdot \sqrt[3]{3a^2}$

Opgave 6

Een geodriehoek is rechthoekig met twee even lange rechthoekszijden. Neem aan dat die zijden de lengte a hebben.

a Toon aan dat de hypotenusa dan altijd een lengte van $a\sqrt{2}$ heeft.



Een rechthoekige driehoek met een hoek van 60° is de helft van een gelijkzijdige driehoek. Als de kortste rechthoekszijde een lengte van a heeft, dan heeft de langste rechthoekszijde een lengte van $a\sqrt{3}$.

b Toon dat aan.

Opgave 7

Van een kubus zijn alle zijvlaksdiagonalen even lang en alle lichaamsdiagonalen even lang. Neem een kubus met een ribbe van lengte a.

a Toon aan dat de lengte van elke zijvlaksdiagonaal $a\sqrt{2}$ is.

b Toon aan dat de lengte van elke lichaamsdiagonaal $a\sqrt{3}$ is.

Opgave 8

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 2** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen tot er geen wortels meer in de noemer van een breuk staan en ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $\frac{2}{\sqrt{3}}$

b $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{5}{2\sqrt{10}}$

c $\frac{2p}{\sqrt{p}} - \sqrt{\frac{1}{4}p}$

d $k\sqrt{\frac{4}{k}} + \sqrt{\frac{k}{4}}$

e $\frac{2x}{\sqrt[3]{x}}$

f $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}} + \sqrt[4]{a}$

Opgave 9

Er bestaan nog andere technieken om wortelvormen te herleiden.

a Laat zien, dat $\left(1 + \sqrt{3}\right)\left(1 - \sqrt{3}\right)$ = -2

Gebruik wat je bij a hebt gevonden om de volgende uitdrukkingen te herleiden tot er geen wortels meer in de noemer van een breuk voorkomen.

b $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$

c $\frac{2p}{\sqrt{p}} - \sqrt{\frac{1}{4}p}$

Opgave 10

Oefen het herleiden van uitdrukkingen met wortels via het **Practicum**.

Verwerken

Opgave 11

Bereken de volgende wortels en controleer het antwoord door machtsverheffen.

a $\sqrt{1024}$

b $\sqrt[5]{1024}$

c $\sqrt[10]{1024}$

Opgave 12

Herleid de volgende wortelvormen tot ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$

b $\sqrt{28} + 2\sqrt{63}$

c $\left(\sqrt{6} - 1\right)^2$

d $\left(\sqrt[4]{10}\right)^8$

e $\frac{10}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$

f $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{12}$

g $\frac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$

h $\frac{2}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{2}$

Opgave 13

Herleid de volgende wortelvormen. Neem aan dat $a > 0$ en $b > 0$.

a $\sqrt{\frac{3}{4}a^2} + \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

b $\frac{3a^2}{\sqrt{a}} - a\sqrt{a}$

c $\sqrt[4]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{16a^2b^3}$

d $\frac{18-2b}{3+\sqrt{b}}$

Opgave 14

Er bestaan verbanden tussen de verschillende soorten wortels.

a Laat zien, dat $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$ als $a \geq 0$.

b Welk verband bestaat er tussen $\sqrt{a}$ en $\sqrt[8]{a}$?

c Laat zien dat $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$.

d Vereenvoudig $\sqrt[12]{a^3}$.

Opgave 15

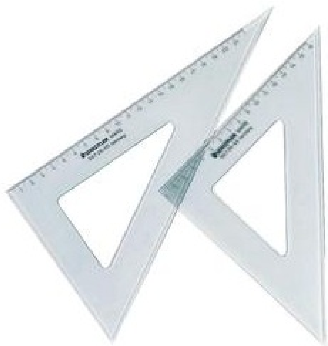
Een balk heeft ribben met een lengte van a, $2a$ en $3a$ cm.

a Bereken alle mogelijke lengtes van de zijvlaksdiagonalen.

b Bereken de lengte van alle lichaamsdiagonalen.

Toepassen

Je ziet hier twee **tekendriehoeken** zoals die in veel wiskundelokalen nog wel voorkomen.
De éne driehoek is rechthoekig en gelijkbenig en heeft daarom dezelfde vorm als je geodriehoek. Je hebt al eerder laten zien dat de zijden van die driehoek a, a en $a\sqrt{2}$ zijn.
De andere tekendriehoek is ook rechthoekig en is de helft van een gelijkzijdige driehoek. Daarvan heb je laten zien dat de zijden a, $2a$ en $a\sqrt{3}$ zijn.



Werk in de volgende opgaven met die tekendriehoeken.

Opgave 16: Tekendriehoeken

Bekijk de twee tekendriehoeken in **Toepassen**. Je ziet hoe lang hun zijden zijn als de kleinste een lengte van a cm heeft. Neem eerst de geodriehoek.

a Hoe lang zijn alle zijden als de kortste zijde 8 cm is?

b Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 16 cm is?

c Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 1 cm is?

Neem nu de andere tekendriehoek.

d Hoe lang zijn alle zijden als de kortste zijde 4 cm is?

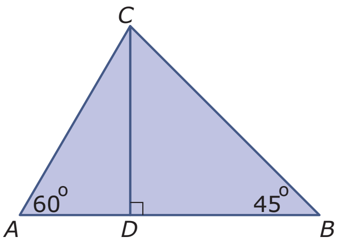
e Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 10 cm is?

f Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 1 cm is?

g Hoe lang zijn alle zijden als de langste rechthoekszijde 6 cm is?

Opgave 17: Tekendriehoeken tegen elkaar

De driehoek hiernaast bestaat uit twee tekendriehoeken tegen elkaar.



a Hoe groot is de omtrek als de langste zijde 8 cm is?

b Bereken de oppervlakte van deze driehoek.

Nu is BC geen 8, maar juist onbekend. De oppervlakte van de driehoek is $9 + 3\sqrt{3}$.

c Bereken de lengte van BC.

Practicum: Oefenen: werken met wortels

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met machten en wortels**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier. Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je vooral vaardigheden op het gebied van de algebra (het rekenen met variabelen) geleerd. Hopelijk heb je deze vaardigheden zo goed geoefend dat je ze de komende jaren echt ‘in de vingers hebt’. Bij veel van de onderwerpen die je al dit jaar tegenkomt zul je ze nodig hebben, maar in de toekomst zul je (zeker als je wiskunde B gaat kiezen) merken dat ze onontbeerlijk zijn.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Algebra** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- variabelen — gelijksoortige en ongelijksoortige termen — wisseleigenschap — commutatieve bewerking;
- breuken — gelijknamig maken — kleinste gemeenschappelijke veelvoud — KGV;
- tweeterm — vierterm — distributieve eigenschap — haakjes uitwerken — ontbinden in factoren — grootste gemeenschappelijke deler — GGD;
- macht — grondtal — exponent — wetenschappelijke notatie;
- wortel — worteltrekken — nde machts worteltrekken.

Activiteiten

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met variabelen, formules en uitdrukkingen herleiden, gelijksoortige termen;
- breuken vereenvoudigen, gelijknamig maken, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, het KGV;
- haakjes uitwerken en ontbinden in factoren, de GGD en de som-en-productmethode;
- rekenen met machten met gehele exponenten, de wetenschappelijke notatie van getallen;
- rekenen met (hogere machts) wortels, wortelvormen herleiden.

Opgave 1

Een belangrijke algebraïsche vaardigheid is het herleiden van uitdrukkingen met het doel ze eenvoudiger te maken. Een eenvoudiger uitdrukking betekent meestal dat je er minder tekens, minder symbolen voor nodig hebt. Dat kunnen ook uitdrukkingen met haakjes, breuken, machten en wortels zijn.

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen en schrijf ze (waar breuken voorkomen) als één breuk.

a $5a + 2b - 3a - b$

b $5a \cdot 2b - 3a \cdot -b$

c $\frac{1}{2p} + \frac{2}{q}$

d $\frac{1}{2p} - \frac{2}{p+1}$

e $(x+2)(x+1) - x(x+1)$

f $4 - (x+2)^2$

g $p^2 \cdot (2p)^3 - 2p^2 \cdot 4p^3$

h $\left(p^3 - 2\right)^2 - p^4\left(p^2 + 1\right)$

Opgave 2

Wanneer je in bepaalde uitdrukkingen getallen wilt invullen voor de variabelen, is het verstandig om ze eerst zo eenvoudig mogelijk te schrijven. Bereken de volgende uitdrukkingen voor $a = 4$ en $b = -6$.

a $\frac{4ab^3}{3ab}$

b $2a(b-1) - 2b(a-1)$

c $\frac{1}{2ab} + \frac{3}{ab}$

d $(a+b)^2 - (a-b)^2$

Opgave 3

Schrijf de volgende formules zo, dat y is uitgedrukt in x, dus in de vorm $y = ...$

a $4x - 2y = 7$

b $x(y-2) = 5$

c $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$

d $\frac{2y}{x+1} = 4$

Opgave 4

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

a $12p^3q - 16pq^2$

b $12a^3 - 4a$

c $k^2 - 2k - 80$

d $32 + k^2 + 12k$

e $84 - 2x - 2x^2$

f $4m^2 - 1$

Opgave 5

Gegeven zijn de getallen $p = 5{,}4 \cdot 10^9$, $q = 3{,}1 \cdot 10^8$ en $r = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$. Schrijf bij de volgende berekeningen het antwoord ook in de wetenschappelijke notatie.

a Bereken $p + q$.

b Bereken $p \cdot q$.

c Bereken $p \cdot r$.

d Bereken $1/p$.

Opgave 6

Het vereenvoudigen en samennemen van wortelvormen is ook een nuttige vaardigheid. Vereenvoudig:

a $2\sqrt{21} + 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{7}$

b $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$

c $\sqrt{96} - \sqrt{24}$

d $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

e $\sqrt[5]{10^2 - 7^3}$

Toepassen

In de volgende opgaven leer je de som-en-productmethode voor het ontbinden in factoren toepassen in situaties met hogere machten. Vooral als je later wiskunde B wilt kiezen kom je dat af en toe tegen.
Een leuke manier van ontbinden is ook de staartdeling. Maar die is alleen bruikbaar als je weet welke factor je buiten haakjes wilt halen. Later zul je bij wiskunde B nog manieren tegen komen waarmee je kunt herkennen in welke situaties dat bruikbaar is.

En tenslotte tref je nog een opgave aan die gaat over het rekenen met getallen in de wetenschappelijke notatie. Daarmee zul je bij alle wiskundevakken in de bovenbouw gaan werken.

Opgave 7: Bijzondere ontbindingen

Bekijk de uitdrukking $x^6 + 5x^3 + 6$.

a Leg uit waarom je deze uitdrukking kunt schrijven als $p^2 + 5p + 6$.

b Ontbind $p^2 + 5p + 6$ met de som-en-productmethode.

c Schrijf nu de juiste ontbinding op voor $x^6 + 5x^3 + 6$.

d Waarom kun je $x^5 + 5x^3 + 6$ niet op deze manier ontbinden in factoren?

Je kunt deze manier van ontbinden in factoren af en toe toepassen. Ontbind:

e $x^4 - 3x^2 - 18$

f $x^{10} - 12x^5 + 32$

g $2 - x^3 - x^6$

h $x^{12} - 13x^6$

Opgave 8: Vermenigvuldigen en delen

Ook uitdrukkingen met letters kun je gewoon vermenigvuldigen door ‘onder elkaar zetten’ en delen met behulp van een staartdeling. Hier zie je daar twee eenvoudige voorbeelden van. In de figuur hieronder wordt de vermenigvuldiging $(2x+1)\cdot(x-3)$ uitgevoerd.

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ \underline{x-3} \;\times \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x+1 \\ \underline{x-3} \;\times \\ -6x-3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x+1 \\ \underline{x-3} \;\times \\ -6x-3 \\ 2x^2+x \quad\; \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x+1 \\ \underline{x-3} \;\times \\ -6x-3 \\ \underline{2x^2+x \quad\;} \;+ \\ 2x^2+5x-3 \end{array}$$

Eerst vermenigvuldigen met -3.

Daarna vermenigvuldigen met x.

Tenslotte alles optellen

In het volgende voorbeeld wordt $2x^2-5x-3$ gedeeld door $x-3$.

$$\begin{array}{l} 2x^2-5x-3 \,/\, x-3 = \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2x^2-5x-3 \,/\, x-3 = 2x \\ 2x^2-6x \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2x^2-5x-3 \,/\, x-3 = 2x \\ \underline{2x^2-6x} \;- \\ \qquad\quad x-3 \end{array}$$

Begin bij de hoogste macht. Hoe vaak gaat $x-3$ in $2x^2$?

Bereken $2x(x-3)$ en trek dat af van $2x^2-5x-3$.

$$\begin{array}{l} 2x^2-5x-3 \,/\, x-3 = 2x+1 \\ \underline{2x^2-6x} \;- \\ \qquad\quad x-3 \\ \qquad\quad x-3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2x^2-5x-3 \,/\, x-3 = 2x+1 \\ \underline{2x^2-6x} \;- \\ \qquad\quad x-3 \\ \qquad\quad \underline{x-3} \;- \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Kijk nu hoe vaak $x-3$ gaat in x. Dat gaat precies 1 keer.

Bereken $1(x-3)$ en trek dat van $x-3$ af. Je komt op 0 uit, de deling komt uit.

a Voer zelf zowel de vermenigvuldiging als de deling uit. Waarom horen er in de deling eigenlijk haakjes te staan?

Eerst even een paar vermenigvuldigingen oefenen. Bereken:

b $(3x+5)\,(2x-1)$

c $\left(x^2+5x-6\right)(2x-4)$

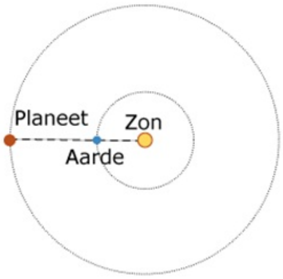
En nu een paar delingen oefenen. Bereken:

d $\left(3x^2+15x+18\right)/(x+3)$

e $\left(3x^3+17x^2-54x+16\right)/(3x-1)$

f Gebruik nu je antwoord bij e om $3x^3+17x^2+42x+16$ in factoren te ontbinden.

Opgave 9: Oppositie van planeten



Wanneer een planeet gezien vanuit de zon met de Aarde op één lijn ligt, zeg je dat deze planeet in oppositie staat. Oppositie komt bij elke planeet met vaste tussenpozen voor. De tijd T (in dagen) tussen twee opposities hangt af van de omlooptijd van de Aarde T_A (in dagen) om de zon en de omlooptijd van de planeet T_P (in dagen) om de zon.

Er geldt: $\frac{1}{T_P} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T}$.

a Hoe verder een planeet van de zon af staat hoe groter T_P. Betekent dit dat dan ook T groter wordt?

b Tussen twee opposities van Jupiter zitten $398{,}6$ dagen. Bereken de omlooptijd van Jupiter in dagen nauwkeurig. De omlooptijd van de Aarde is $365{,}25$ dagen.

c De omlooptijd van Mars is $1{,}88$ jaar. Bereken de tijd tussen twee opposities in dagen nauwkeurig.

Alle planeten van ons zonnestelsel voldoen aan de wet van Kepler die zegt dat ${T_P}^2 = 3{,}95 \cdot 10^{-20} \cdot r^3$ waarin r de gemiddelde afstand van de planeet tot de zon in km is.

d Voor Saturnus geldt $r \approx 1{,}43 \cdot 10^9$ km. Bereken de tijd tussen twee opposities van Saturnus in dagen nauwkeurig.

Begrippen

- congruentie — overeenkomstige hoeken — overeenkomstige zijden — vergrotingsfactor — verhoudingstabel;
- congruentie — gelijkvormigheid;
- middelloodlijn — bissectrice (deellijn) — zwaartelijn — hoogtelijn — omgeschreven en ingeschreven cirkel — gelijkbenige driehoek — gelijkzijdige driehoek — definitie, stelling, bewijs;
- regelmatige veelhoeken — omgeschreven cirkel;
- gelijkvormige figuren — lengtevergrotingsfactor — oppervlaktevergrotingsfactor.

Activiteiten

- de begrippen gelijkvormig en congruent;
- herkennen wanneer driehoeken congruent of gelijkvormig zijn en behulp daarvan berekeningen in driehoeken uitvoeren;
- bijzondere lijnen in driehoeken en eigenschappen van driehoeken en deze bijzondere lijnen bewijzen — de stelling van Thales bewijzen;
- rekenen in vierhoeken, vijfhoeken, etc, met behulp van congruentie en gelijkvormigheid;
- werken met de lengtevergrotingsfactor en de bijbehorende oppervlaktevergrotingsfactor.

Jacobsstaf

Domein

Meetkunde

Hoofdstuk

Vlakke meetkunde

Inhoud

2

2.1 Gelijk of gelijkvormig

Verkennen

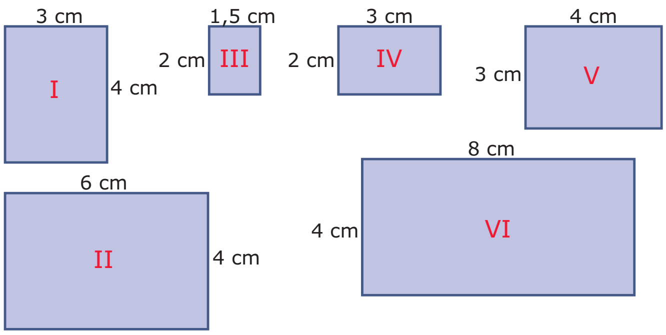
Opgave V1

Je wilt een poster maken en hebt hiervan een voorbeeld gemaakt op een A4-tje. De afmetingen van het A4-tje zijn 210 mm bij 297 mm. De poster moet op A3-formaat worden afgedrukt. Een vel A3-papier is twee keer zo groot als een vel A4-papier. Ten minste: de oppervlakte is twee keer zo groot! Voor het vergroten kun je een kopieermachine gebruiken. Bij de meeste kopieermachines kun je dat eenvoudig instellen. Bij sommige kopieermachines moet je een percentage instellen.

Kies je dan voor 200%? Of moet je een ander percentage kiezen? En zo ja, welk percentage?

Opgave V2

Je ziet hier een aantal rechthoeken.



Welke rechthoeken zijn gelijk? En welke rechthoeken zijn niet gelijk maar hebben dezelfde verhoudingen van lengte en breedte?

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je wat het verschil is tussen gelijke (dus congruente) driehoeken en gelijkvormige driehoeken.

Bekijk eerst de bovenste figuur.

a Waaraan zie je dat de overeenkomstige zijden van beide figuren gelijk zijn?

b Je ziet dat er twee paren gelijke hoeken zijn in de bovenste figuur. Waarom is dan automatisch het derde paar hoeken ook gelijk?

c Je ziet dat $\Delta ABC \cong \Delta LMK$. Waarom wordt bij de tweede driehoek de lettervolgorde zo gekozen?

Bekijk nu de tweede figuur. Je ziet dat evenwijdige lijnstukken worden aangeduid door pijltjes in de lijnstukken.

d Waarom weet je nu zeker dat $\angle ABC = \angle ADE$?

e Wordt er bij het opschrijven van de gelijkvormige driehoeken ook op de volgorde van de letters gelet?

f Hoeveel bedraagt de vergrotingsfactor als je ΔABC opvat als 'vergroting' van ΔADE?

g Stel de vergrotingsfactor van ΔABC naar ΔADE is $2{,}5$. Zijn beide driehoeken dan nog steeds gelijkvormig?

Opgave 2

Het herkennen van gelijkvormige figuren of congruente figuren is vaak lastig.

a Waarom zijn alle vierkanten gelijkvormig en/of congruent?

b Waarom zijn niet alle rechthoeken gelijkvormig en/of congruent?

c Zijn alle gelijkzijdige driehoeken gelijkvormig en/of congruent?

d Zijn alle gelijkbenige driehoeken gelijkvormig en/of congruent?

e Waarom zijn alle congruente figuren ook gelijkvormig? Van welke vergrotingsfactor is er dan sprake?

Opgave 3

Jurre heeft twee rechthoekige afbeeldingen van een verschillend formaat op zijn computer. Afbeelding A is 20 mm bij 16 mm en afbeelding B is 36 mm bij 24 mm.
Hij wil ze op een groot rechthoekig scherm van $1{,}65$ m breedte en $1{,}10$ m hoogte laten zien. Ze worden daarom vergroot.

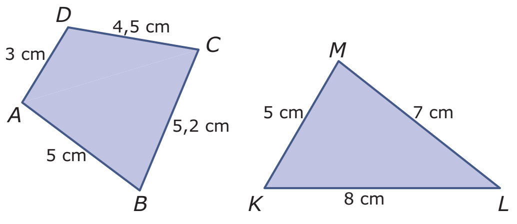
a Welke van deze twee afbeeldingen past na vergroting precies op het grote scherm?

De andere afbeelding vergroot Jurre zo dat hij alles kan zien.

b Blijft er op het scherm dan ruimte over in de breedte of de hoogte? Licht je antwoord toe.

Opgave 4

Hier zie je een vierhoek en een driehoek waarvan de zijden bekend zijn.



a Kun je de vierhoek natekenen zonder verdere metingen te verrichten? En hoe zit dat met de driehoek?

b Leg uit hoe je de vierhoek kunt natekenen.

c Leg uit hoe je een gelijkvormige vierhoek kunt tekenen met een vergrotingsfactor van $1{,}5$.

Opgave 5

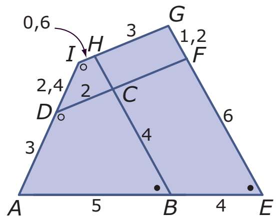
Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Laat met behulp van een tabel zien dat de vierhoeken $ABCD$ en $NKLM$ wel gelijkvormig zijn.

b De vierhoek $PQRS$ heeft zijden die allemaal precies 2 keer zo groot zijn als de overeenkomstige zijden van vierhoek $ABCD$. Zijn deze twee vierhoeken dus gelijkvormig? Gebruik eventueel de applet in het **Practicum**.

Opgave 6

In de figuur hiernaast tref je een heleboel vierhoeken aan.



a Hoeveel?

b Waarom hebben de vierhoeken $ABCD$ en $AEFD$ wel gelijke hoeken, maar zijn ze toch niet gelijkvormig?

c Waarom zijn de vierhoeken $ABCD$ en $AEGI$ gelijkvormig?

Opgave 7

De vierhoeken $ABCD$ en $PQRS$ zijn gelijkvormig. Verder is $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 3$, $AD = 4$ en $QR = 8$ cm.

Bereken de lengte van PQ.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** worden driehoeken vergeleken.

a Teken de beschreven ΔABC door te beginnen met zijde AB.

b Teken ΔABC nog eens, maar begin nu met zijde BC. Krijg je dezelfde ΔABC?

c Als je van een vierhoek de lengtes van de zijden weet, kun je hem dan tekenen?

d Teken ook ΔDEF. Ga na, dat de hoeken gelijk zijn aan die van ΔABC.

e Teken ook ΔKLM waarvan de overeenkomstige zijden de helft zijn van die van ΔABC. Ga na, dat ook nu beide driehoeken gelijkvormig zijn.

Opgave 9

Gegeven zijn ΔABC met $AB = 4$ cm, $\angle A = 50°$ en $\angle B = 60°$ en ΔDEF met $DE = 6$ cm, $\angle D = 50°$ en $\angle E = 60°$.

a Teken de beschreven driehoeken.

b Waarom is $\angle C = \angle F$?

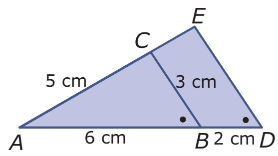
c Meet van beide driehoeken ook de overige zijden op. Ga na dat de overeenkomstige zijden met dezelfde factor worden vermenigvuldigd.

Uit het voorgaande kun je opmaken dat twee driehoeken gelijkvormig zijn als de overeenkomstige hoeken gelijk zijn.

d Geldt dit ook voor vierhoeken? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Je ziet hier ΔABC en ΔADE. In de figuur vind je enkele afmetingen.



a Leg uit waarom $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

b Bereken de lengte van de lijnstukken DE en CE.

Verwerken

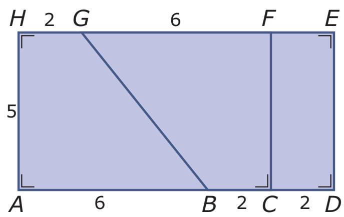
Opgave 11

Een rechthoek heeft zijden van 18 cm en 30 cm. Van een verkleining van die rechthoek is één van de zijden 6 cm.

Welke afmetingen kan de verkleining hebben? Geef beide mogelijkheden.

Opgave 12

Bekijk de figuur hiernaast. Alle afmetingen zijn in cm.



a Licht toe waarom de vierhoeken $ABGH$ en $FGBC$ congruent zijn.

b Zijn de vierhoeken $ABGH$ en $EGBD$ gelijkvormig? Licht je antwoord toe.

c Zijn de rechthoeken $ADEH$ en $DEFC$ gelijkvormig? Licht je antwoord toe.

Opgave 13

$\Delta PQR \sim \Delta ABC$. Verder is gegeven $AC = 7{,}2$, $AB = 9$, $BC = 5$ en $PQ = 13$.

Bereken de overige twee zijden van ΔPQR.

Opgave 14

$\Delta KLM \sim \Delta ABC$. Verder is gegeven $AB = 7{,}4$, $BC = 5$, $KM = 2{,}8$ en $ML = 3{,}5$.

Bereken de twee zijden van deze driehoeken die je nog niet weet.

Opgave 15

De lengte van een vrachtwagen is $5{,}04$ meter. De lengte van een schaalmodel van deze vrachtwagen is 18 cm. Op een foto lijken ze even groot. De afstand tussen de fotograaf en het schaalmodel is 35 cm.

Bereken hoeveel de vrachtwagen verder van de fotograaf staat dan het schaalmodel.

Opgave 16

Willem heeft een poster van 50 bij 80 cm. Hij heeft een lijst voor de poster van 60 bij 100 cm. Willem ontdekt dat de poster daar niet mooi inpast en wil de poster zo bijsnijden dat hij gelijkvormig is met de lijst.

Hoe moet hij de poster bijsnijden opdat er zo min mogelijk van verloren gaat?

Toepassen

Applet

In de applet zie je een rechthoek met daarin een vierkant met een kleinere rechthoek ernaast. Is die kleinere rechthoek gelijkvormig met de grote rechthoek? Is het mogelijk om de rechthoek zo aan te passen dat dit het geval is?

Deze vraag leidt tot de bekende **Gulden Snede**. Dat is een al uit de Oudheid bekende manier om een lijnstuk zoals AE in twee delen te verdelen.
De vergrotingsfactor van AB naar AE waarbij de rechthoeken gelijkvormig zijn is de **Gulden Snede**.

Opgave 17: Gulden Snede

Hierboven wordt de vraag gesteld of het mogelijk is om een rechthoek te verdelen in een vierkant en een kleinere rechthoek die met de gegeven rechthoek gelijkvormig is.

Met de applet kun je de lengte van de rechthoek wat aanpassen.

Probeer met de applet te bepalen welke afmetingen de rechthoek $AEFD$ moet hebben om ervoor te zorgen dan hij gelijkvormig is met rechthoek $EFCB$. Bepaal ook de vergrotingsfactor van AB naar AE, de Gulden Snede dus.

Practicum: Gelijkvormige vierhoeken en driehoeken

Applet

Applet

Met de applets hieronder kun je een vierhoek met gegeven zijden en een driehoek met gegeven zijden vergroten. Ga na dat je van de vierhoeken de vorm nog kunt veranderen (zonder de lengtes van de zijden te veranderen) door de punten C en H te bewegen. Van de driehoeken kun je de vorm niet meer veranderen als de zijden vast liggen.

2.2 Driehoeken

Verkennen

Opgave V1

Om een driehoek te kunnen tekenen moet je er iets van weten. Bijvoorbeeld hoe lang de drie zijden zijn. Of hoe groot een hoek is en hoe lang de twee zijden op de benen van die hoek zijn.

a Teken ΔABC met $\angle A = 55°$, $AB = 5$ cm en $AC = 4$ cm. Krijgt iedereen die dit doet dezelfde driehoek?

b Teken ΔABC met $\angle A = 55°$, $AB = 5$ cm en $BC = 4$ cm. Is er nu maar één driehoek mogelijk?

Opgave V2

Je weet van ΔABC alleen de twee hoeken $\angle A = 55°$ en $\angle B = 80°$.

a Teken twee van die driehoeken.

b Wat valt op als je beide driehoeken vergelijkt?

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt besproken wanneer twee driehoeken congruent zijn. Dat is bijvoorbeeld zo als hun overeenkomstige zijden gelijk zijn.

a Waarom zijn twee driehoeken ook congruent als ze een hoek en de zijden op de benen van die hoek gelijk hebben?

b Waarom zijn twee driehoeken niet congruent als ze twee zijden en een hoek die niet door deze twee zijden wordt ingesloten gelijk hebben?

c Maak een overzicht van alle situaties waarin twee driehoeken congruent zijn.

Opgave 2

Bekijk de figuur in de **Uitleg**.

a Waarom is $\angle ASB = \angle CSD$?

b Waarom is $\angle ABS = \angle CDS$?

c In de tekst wordt uitgelegd dat $\Delta ABS \sim \Delta CDS$. Staan de letters hierbij in de juiste volgorde?

d Hoeveel bedraagt de vergrotingsfactor van ΔABS naar ΔCDS?

e Bereken de lengtes van CD en DS.

Opgave 3

Je hebt in de vorige paragraaf gezien dat twee driehoeken gelijkvormig zijn als hun overeenkomstige hoeken gelijk zijn. Je hoeft dan niet ook nog te kijken of bij de overeenkomstige zijden een verhoudingstabel past, dat zit dan automatisch wel goed.
Zo zijn twee driehoeken ook gelijkvormig als bij de overeenkomstige zijden een verhoudingstabel past. Je hoeft dan niet meer de hoeken te vergelijken, dat zit meteen goed.

Maak een overzicht van alle gevallen waarin je kunt besluiten dat twee driehoeken gelijkvormig zijn.

Opgave 4

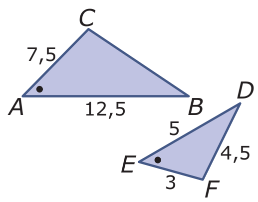
Bekijk **Voorbeeld 1**. De twee driehoeken zijn gelijkvormig omdat ze twee paren gelijke hoeken hebben.

a Waarom betekent dit automatisch dat er drie paren gelijke hoeken zijn?

b Zijde EF wordt berekend met de vergrotingsfactor $\frac{2}{3}$. Kun je die zijde ook berekenen met de omgekeerde vergrotingsfactor $\frac{3}{2}$? Licht je antwoord toe.

Opgave 5

Hier zie je twee gelijkvormige driehoeken.



a Waarom zijn ze gelijkvormig?

b Vul aan (denk om de juiste volgorde van de letters): $\Delta ABC \sim$ ....

c Bereken de lengte van BC.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**. Je ziet hoe je in situaties waarin sprake is van evenwijdige lijnen gelijkvormige driehoeken kunt vinden en met behulp daarvan lengtes van lijnstukken berekenen.

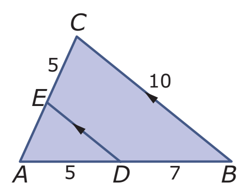
a Waarom is $\Delta ABE \sim \Delta DCE$?

b Leg uit waarom $DE = 8$.

c Laat zien, dat inderdaad $CE = 6$.

Opgave 7

In deze figuur is $BC // DE$. De gegeven lengtes zijn in cm.

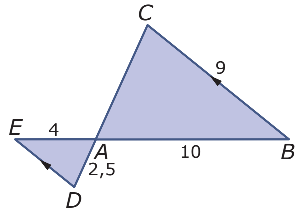


a Waarom is $\Delta ABC \sim \Delta ADE$?

b Bereken de lengte van DE en van AE.

Opgave 8

In deze figuur is $BC//DE$. De gegeven lengtes zijn in cm.



a Vul aan $\Delta ABC \sim$ ... en leg uit waarom deze driehoeken gelijkvormig zijn.

b Bereken de lengte van DE en van AC.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** gaat het om het herkennen van gelijkvormige rechthoekige driehoeken.

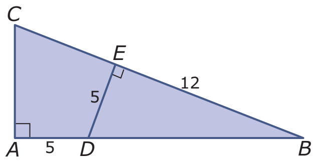
a Waarom is $\Delta ABC \sim \Delta DAC$?

b Voer zelf de berekening van AD uit.

c Bereken de lengte van BD in één decimaal nauwkeurig. Doe dit een keer met behulp van de stelling van Pythagoras en ook een keer met behulp van gelijkvormigheid.

Opgave 10

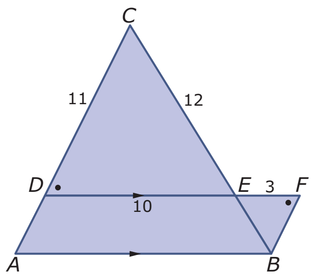
Bereken AC.



Verwerken

Opgave 11

Bekijk de figuur hiernaast. Alle afmetingen zijn in cm.



a Licht toe waarom de driehoeken DEC en FEB gelijkvormig zijn.

b Bereken de lengte van EB.

Je wilt de lengte van AB berekenen.

c Welke gelijkvormige driehoeken gebruik je? Schrijf de gelijkvormigheid op de juiste wijze op.

d Bereken de lengte van AB.

Opgave 12

Gegeven is ΔABC met $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm en $AC = 7$. Op zijde AC ligt punt D zo, dat $\angle DBC = \angle A$.

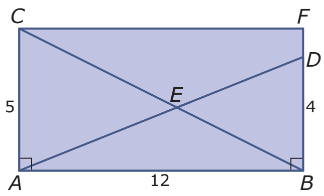
a Teken de driehoek met lijnstuk BD er in. Welke twee gelijkvormige driehoeken zijn er? Leg uit waarom ze gelijkvormig zijn.

b Punt D verdeelt de zijde AC in de twee stukken AD en DC. Bereken de lengte van die twee lijnstukken.

Opgave 13

Bekijk de figuur.

Bereken CE en ED in één decimaal nauwkeurig.



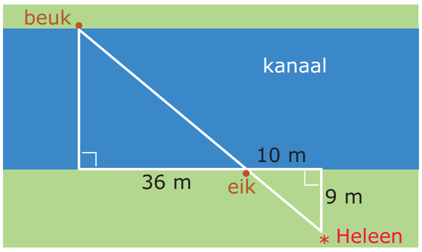
Opgave 14

De hoogte van een boom kun je bepalen door de lengte van zijn schaduw te meten. Boris meet dat een boom een schaduw heeft van 25 m. Hijzelf heeft een schaduw van $1{,}40$ m. Nu is Boris $1{,}80$ m lang.

Bereken de hoogte van de boom in m nauwkeurig.

Opgave 15

Heleen wil de breedte van een kanaal schatten. Ze gebruikt daarbij twee bomen die aan de oevers van het kanaal staan. Eerst bepaalt ze dat de afstand tussen beide bomen gemeten langs de oever 36 m is. Ze loopt dan nog 10 m door en bepaalt dan de afstand tot de oever van het punt waar ze beide bomen op één lijn ziet staan. In de figuur zie je een schets van de situatie.

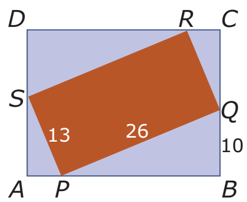


Bereken de breedte van het kanaal in m nauwkeurig.

Opgave 16

Je ziet hier hoe rechthoek $PQRS$ precies past in rechthoek $ABCD$. Alle afmetingen zijn in mm.

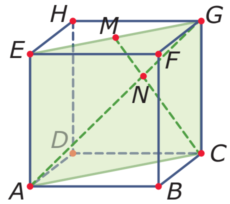
Bereken de lengte en de breedte van rechthoek $ABCD$.



Toepassen

Ook in ruimtelijke figuren komen congruente of gelijkvormige vlakke figuren voor. Je kunt daarvan bij het berekenen van lengtes van lijnstukken goed gebruik maken.

Bekijk de kubus hiernaast maar eens. Alle ribben zijn 4 cm lang. Punt M is het midden van EG. Met behulp van gelijkvormigheid en de stelling van Pythagoras kun je de lengtes van AN en CN berekenen.



Opgave 17: Lijnstukken in een kubus

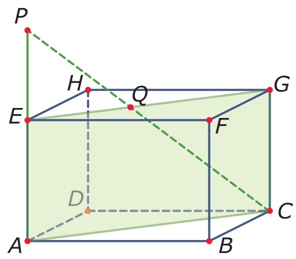
Hierboven wordt verteld dat je gelijkvormigheid ook goed kunt toepassen in ruimtelijke figuren, zoals een kubus.

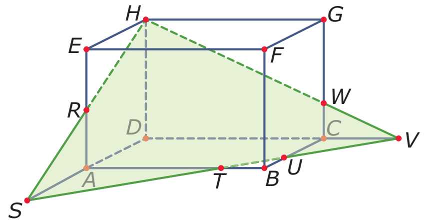
Bekijk de figuur. Bedenk dat diagonaalvlak $ACGE$ een rechthoek is.

Teken dit diagonaalvlak op ware grootte en bereken met behulp van gelijkvormigheid de lengtes van AN en CN.

Opgave 18: Lijnstukken in een balk

Hier zie je twee keer de balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is $AB = 8$, $AD = 4$ en $AE = 4$ cm. Punt P ligt op het verlengde van AE en $EP = 3$ cm. Verder is punt R het midden van AE, ligt punt S op het verlengde van DA en ligt punt V op het verlengde van DC met $CV = 2$ cm.





Bereken de lengtes van EQ, AS, CW en TU.

2.3 Stelling en bewijs

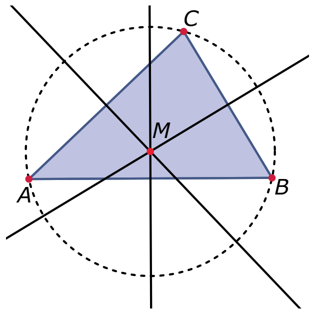
Verkennen

Opgave V1

Applet

Gegeven is een driehoek ABC. Van elke zijde is een middelloodlijn getekend. Deze middelloodlijnen lijken door één punt te gaan.

Wat is een middelloodlijn eigenlijk precies? Probeer te beredeneren dat deze middelloodlijnen door één punt moeten gaan en dat dit punt het middelpunt is van een cirkel die altijd door A, B en C gaat.



Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** is een bewijs gegeven van het vermoeden dat de drie middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan. Het bewijs is nog niet waterdicht als je er goed over nadenkt.

a Hoe volgt uit het feit dat M op middelloodlijn van AB ligt dat $AM = MB$? Probeer te laten zien dat $\Delta APM \cong \Delta BPM$.

b Hoe volgt uit het $AM = MB$ en $BM = MC$ dat $AM = MC$?

c Waarom volgt uit het feit dat $AM = MC$ dat M ook op de middelloodlijn van AC ligt? (Tip: Teken nu een lijn door M en loodrecht op AC en vindt twee geschikte congruente driehoeken.)

Opgave 2

De deellijn of bissectrice van een hoek is een lijn die deze hoek in twee gelijke delen verdeeld.

a Teken een (niet al te kleine) driehoek ABC. Teken daarin de deellijnen van elk van de drie hoeken van de driehoek.

b Gaan de drie deellijnen door één punt D?

c Teken vanuit punt D het lijnstuk DP loodrecht op AB. Teken zo ook DQ loodrecht op BC en DR loodrecht op AC. Zijn deze drie lijnstukken even lang?

d Probeer met behulp van twee congruente driehoeken te bewijzen dat $DP = DR$.

e Omdat $DP = DQ = DR$ kun je een cirkel tekenen die precies door P, Q en R gaat en D als middelpunt heeft. Ga dat in je figuur na, dit is de ingeschreven cirkel van ΔABC.

Opgave 3

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en het midden van de zijde tegenover dat hoekpunt.

a Teken een (niet al te kleine) driehoek ABC. Teken daarin de drie zwaartelijnen CP, AQ en BR van de driehoek.

b Gaan de drie zwaartelijnen door één punt Z?

Het bedoelde punt Z heet het zwaartepunt van de driehoek.

c Wat heeft dit punt met de zwaartekracht te maken? Kun je ook verklaren waarom dit zo is?

d Door punt Z wordt elke zwaartelijn in twee stukken verdeeld. Bijvoorbeeld de zwaartelijn AQ wordt verdeeld in de stukken AZ en ZQ. Probeer aan te tonen dat die stukken zich steeds verhouden als $2:1$.

Opgave 4

Bekijk het bewijs in **Voorbeeld 1**. Ga weer uit van een gelijkbenige driehoek ABC met C als tophoek.

a Bewijs op dezelfde manier dat zwaartelijn CS ook deellijn van $\angle C$ is.

b Bewijs dat de deellijn van $\angle C$ ook middelloodlijn van AB is.

Opgave 5

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van 6 cm.

Construeer van deze driehoek zowel de omgeschreven cirkel als de ingeschreven cirkel.

Opgave 6

In elke driehoek ABC is de som van de hoeken $180°$.

Bewijs dat met behulp van een willekeurige driehoek waarin je door hoekpunt C een lijn trekt die evenwijdig is met AB.

Opgave 7

Bekijk het bewijs in **Voorbeeld 2**. Er wordt gebruik gemaakt van de stelling dat in een gelijkbenige driehoek de twee basishoeken gelijk zijn. Dat moet je eigenlijk nog bewijzen.

a Waarom zijn de driehoeken AMC en BMC gelijkbenig?

b Waar wordt van die stelling gebruik gemaakt?

c Bewijs de stelling dat in een gelijkbenige driehoek ABC de basishoeken even groot zijn. Gebruik als hulplijn een zwaartelijn uit de tophoek C.

d Laat zien, waarom $\angle ACM + \angle BCM = 90°$.

e Mag punt C overal op de cirkel liggen? Licht je antwoord toe.

Opgave 8

Teken een cirkel met middelpunt M en middellijn AC. Teken ook de middellijn BD.

Bewijs dat vierhoek $ABCD$ een rechthoek is.

Opgave 9

Bekijk het bewijs in **Voorbeeld 3**. Het bewijs is niet helemaal volledig uitgewerkt.

a Teken zelf ΔABC met de zwaartelijnen AE en BF en teken lijnstuk EF.
Waarom zijn de driehoeken ABC en FEC gelijkvormig?

b Leg uit, dat dit betekent dat $EF//AB$ en $EF = \frac{1}{2} \cdot AB$.

c Leg uit, dat uit het voorgaande volgt dat $\Delta ABZ \sim \Delta EFZ$.

d Hoe kom je aan de vergrotingsfactor van ΔABZ naar ΔEFZ?

Opgave 10

De stelling dat de zwaartelijnen in een driehoek elkaar verdelen in stukken die zich verhouden als $2:1$ kun je gebruiken bij meetkundige berekeningen.

Van een gelijkbenige driehoek ABC is $AB = AC = 6$ en $BC = 4$ cm. De drie zwaartelijnen snijden elkaar in punt Z.
Bereken de lengte van lijnstuk AZ.

Opgave 11

Ook in een vierhoek kun je kijken naar de middens van de zijden. Van een vierhoek $ABCD$ is P het midden van AB, Q het midden van BC, R het midden van CD en R het midden van DB.

a Teken zo'n vierhoek met de punten P, Q, R en S.

b Bewijs dat $PQ = RS = \frac{1}{2} \cdot AC$ en dat $PQ//RS$.

c Wat voor soort vierhoek is $PQRS$?

Verwerken

Opgave 12

Van een driehoek PQR is gegeven dat de deellijn van $\angle P$ en de hoogtelijn vanuit hoekpunt P samenvallen.

a Bewijs dat driehoek ΔPQR een gelijkbenige driehoek is.

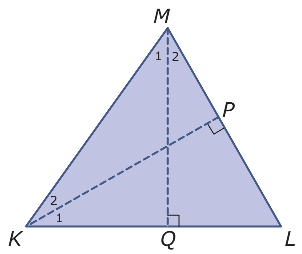
b Teken de omgeschreven cirkel van zo'n ΔPQR.

c Teken de ingeschreven cirkel van zo'n ΔPQR.

Opgave 13

Je ziet hier een driehoek KLM met de hoogtelijnen vanuit M op zijde KL en vanuit K op zijde ML.

Bewijs dat $\angle K_1 = \angle M_2$.



Opgave 14

Je hebt bewezen dat de som van de hoeken van een driehoek altijd $180°$ is. Elke vierhoek kun je verdelen in twee driehoeken.

a Hoe groot is de som van de hoeken van een vierhoek? Geef ook een bewijs.

b Hoe groot is de som van de hoeken van een vijfhoek?

c Hoe groot is de som van de hoeken van een n-hoek?

Opgave 15

In een lokaal hangt een schoolbord dat 4 meter breed is. Priscilla ziet het bord onder een hoek van 90 graden. Dit houdt in dat haar beide kijklijnen naar de uiterste verticale randen van het bord een hoek van $90°$ met elkaar maken.

Teken het bord als een lijnstuk AB op schaal $1 : 100$ en geef drie plaatsen aan waar Priscilla gestaan kan hebben.

Opgave 16

In een rechthoekige driehoek PQR is $\angle Q = 90°$, $PQ = 24$ en de zwaartelijn $PT = 26$ cm. De zwaartelijnen PT en RU snijden elkaar in Z.

Bereken de lengte van lijnstuk UZ.

Opgave 17

Als de zwaartelijn in een driehoek even lang is als de helft van de zijde waar hij naar toe loopt, dan is de driehoek rechthoekig.

Bewijs deze stelling.

Toepassen

Applet

Gegeven is een rechthoek $ABCD$. In elk hoekpunt is een deellijn getekend. Deze deellijnen sluiten een vierhoek $EFGH$ in. Het lijkt er op dat dit een vierkant is.

Kun je dit bewijzen?

Opgave 18: Deellijnen in een rechthoek

In **Toepassen** wordt verteld dat de vier deellijnen van een rechthoek een vierkant insluiten.

Bewijs deze stelling.

Opgave 19: Deellijnen in een parallellogram

Gegeven is een parallellogram met de deellijnen van de vier hoeken. Het lijkt dat deze deellijnen een rechthoek insluiten.

Bewijs deze stelling.

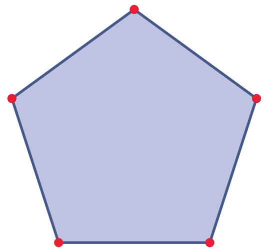
2.4 Vlakke figuren

Verkennen

Opgave V1

Hiernaast zie je een regelmatige vijfhoek. In zo’n vijfhoek zijn alle zijden even lang en alle hoeken even groot.

Bereken hoe groot een hoek van een regelmatige vijfhoek is en leg uit hoe je zo'n vijfhoek construeert.



Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt verteld hoe je een regelmatige zevenhoek kunt tekenen.

a Construeer een regelmatige zevenhoek met zijden van 2 cm.

b Geldt de hoekensom van $900°$ ook voor niet-regelmatige zevenhoeken? Licht je antwoord toe.

Als van een driehoek de drie zijden gelijk zijn, dan geldt dit ook voor de hoeken.

c Als van een zevenhoek alle zijden gelijk zijn, geldt dit dan automatisch ook voor de hoeken?

Opgave 2

Van een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ zijn alle zijden 4 cm.

a Construeer deze regelmatige zeshoek.

b Teken de omgeschreven cirkel van deze zeshoek.

c Bij een regelmatige zeshoek is de straal van de omgeschreven cirkel gelijk aan de lengte van een zijde. Leg uit waarom dit zo is.

d Teken de ingeschreven cirkel van deze regelmatige zeshoek en bereken de straal ervan.

Opgave 3

Van een vierhoek $ABCD$ zijn alle zijden 4 cm.

a Hoe noem je zo'n vierhoek? Kun je hem tekenen?

b Neem $\angle A = 60°$. Kun je nu de vierhoek construeren?

c Is dit een regelmatige vierhoek?

d Heeft deze vierhoek een omgeschreven cirkel?

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Een rechthoekige driehoek met hoeken van $60°$ en $30°$ blijkt een bijzondere driehoek te zijn. Als je één zijde weet, kun je de andere twee berekenen.

a Laat zien, dat $BC = \sqrt{3}$ cm.

b Teken de omgeschreven cirkel van deze driehoek en bereken de straal ervan.

c Teken in deze driehoek hoogtelijn BD en bereken de lengte ervan.

Opgave 5

Op een cirkel met een straal van 4 cm liggen acht punten die op gelijke afstanden van elkaar over de cirkelomtrek zijn verdeeld. Zo ontstaat een regelmatige achthoek $ABCDEFGH$. Punt M is het midden van de cirkel.

a Teken deze achthoek.

b Hoe groot is elke hoek van deze achthoek?

Je kunt van deze achthoek de lengtes van de zijden berekenen. Misschien wil je daar eerst zelf op puzzelen. Met behulp van de volgende opdrachten kom je er ook achter.

c Teken driehoek ACE en leg uit waarom die driehoek zowel rechthoekig als gelijkbenig is.

d Als P het midden van AC is, dan is $MP = 2\sqrt{2}$. Laat dat zien.

e Nu weet je van driehoek APB de lengtes van AP en PB. Bereken de lengte van AB in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Teken zelf enkele mogelijke vierhoeken $ABCD$ zoals in het voorbeeld beschreven.

b Teken de vierhoek die een omgeschreven cirkel heeft en aan de beschrijving voldoet.

c Neem aan dat de vierhoek geen omgeschreven cirkel heeft. Hoe groot is dan de kortste lengte die CD kan hebben?

Opgave 7

Van een gelijkbenig trapezium $ABCD$ zijn de zijden AB en DC evenwijdig, $AD = BC$ en $AB \neq DC$. Gegeven is verder $\angle A = 60°$, $AB = 6$ cm en $AD = 4$ cm.

a Construeer dit trapezium.

b Bereken de lengte van DC.

c Bereken de hoogte en de oppervlakte van dit trapezium.

d In dit trapezium kun je de diagonalen AC en BD tekenen. Deze diagonalen snijden elkaar in punt S. Bereken de lengte van BS.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3**.

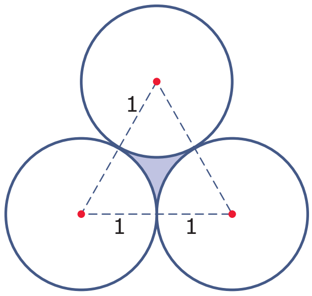
a Leg uit hoe je de vergelijking $r^2 = (r-1)^2 + (r-8)^2$ zelf kunt vinden.

b Bereken zelf dat $r = 13$.

Opgave 9

De straal van deze drie cirkels is gelijk aan 1. Hun middelpunten vormen een gelijkzijdige driehoek met zijden van 2.

Bereken de oppervlakte van het gedeelte dat de drie cirkels gezamenlijk insluiten.



Opgave 10

Door de hoekpunten C en D van vierkant $ABCD$ gaat een cirkel die met de zijde AB precies één punt P gemeenschappelijk heeft. De zijden van dit vierkant zijn 2 cm.

Bereken de straal van deze cirkel.

Verwerken

Opgave 11

Een regelmatige twaalfhoek heeft zijden met een lengte van 2 cm.

Construeer deze twaalfhoek. Beschrijf hoe je te werk gaat.

Opgave 12

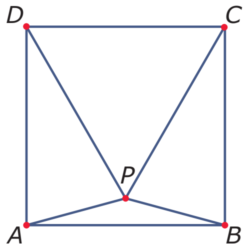
Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van 6 cm.

Bereken de straal van de ingeschreven cirkel van deze driehoek.

Opgave 13

Je ziet hier een vierkant $ABCD$ met daarin een gelijkzijdige driehoek PCD.

Bereken de grootte van $\angle APB$.



Opgave 14

Een vlieger is een vierhoek waarvan één van de diagonalen de symmetrieas is. Van vlieger $ABCD$ is dat de diagonaal AC. Dit betekent dat $AB = AD$ en $BC = DC$.

a Kun je vlieger $ABCD$ tekenen als je weet dat $AB = 6$ en $BC = 4$ cm?

b Construeer vlieger $ABCD$ tekenen als je weet dat $AB = 6$, $BC = 4$ cm en $\angle DAB = 60°$.

c Bereken de lengte van diagonaal AC.

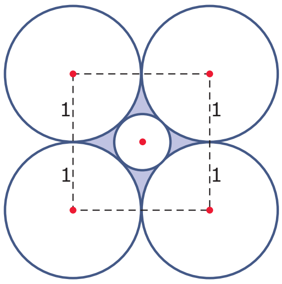
De punten K, L, M en N zijn de middens van achtereenvolgens AB, BC, CD en DA.

d Beredeneer dat $KLMN$ een rechthoek is en bereken de oppervlakte van deze rechthoek.

Opgave 15

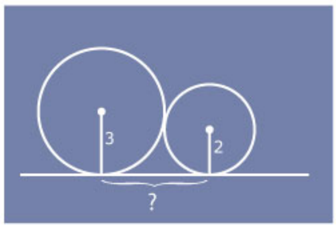
Op de hoekpunten van een vierkant met zijden van 2 cm liggen cirkels met een straal van 1 cm. Binnen deze cirkels ligt midden op het vierkant een kleinere cirkel die met elk van die cirkels precies één punt gemeen heeft.

Bereken de straal van die kleinere cirkel.



Toepassen

Een **sangaku** () is een Japanse 'wiskunde-plank', waarop een meetkundige stelling is uitgebeeld.
De originelen dateren uit de Edo-periode (1603—1867) toen Japan in volledig isolement leefde ten opzichte van de Westerse wereld. Ze werden gemaakt door geleerden uit alle lagen van de bevolking. Ze zijn te vinden in oude Shinto-heiligdommen en soms in Boeddhistische tempels waarin ze werden opgehangen uit dankbaarheid voor het vinden van de stelling. Maar meestal werd het bewijs van de stelling achterwege gelaten als uitdaging voor andere meetkundigen.
Ook nu kun je ze nog als uitdaging, als puzzel opvatten...



Kun je deze oplossen?

Opgave 16: Sangaku (1)

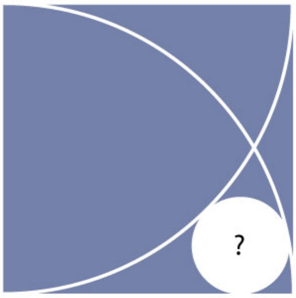
Je ziet hierboven een zogenaamde 'sangaku'. Een mooie puzzel om op te lossen.

Los de puzzel in **Toepassen** op.

Opgave 17: Sangaku (2)

Dit is een vierkant met zijden van 4 waarin twee kwart cirkels zijn getekend.

Bereken de oppervlakte van de witte cirkel.



2.5 Vergrotingsfactoren

Verkennen

Opgave V1

In een assenstelsel is ΔABC gegeven door $A(0,2)$, $B(4,1)$ en $C(2,4)$

a Teken ΔABC en bereken de omtrek en de oppervlakte ervan.

Van ΔADE zijn alle zijden 2 keer zo groot.

b Teken ΔADE en bereken de omtrek en de oppervlakte ervan.

Van ΔAFG zijn alle zijden 5 keer zo groot.

c Bereken de omtrek en de oppervlakte ervan.

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je dat de oppervlakte van een rechthoek 6^2 keer zo groot wordt als alle zijden 6 keer zo groot worden.

a Teken de rechthoek van 24 bij 36 mm en laat zien, dat de rechthoek van 4 bij 6 mm er inderdaad 36 keer op past.

b Stel dat de zijden van de kleine rechthoek met vergrotingsfactor 4 worden vermenigvuldigd. Hoeveel keer zo groot wordt dan de oppervlakte?

c En hoeveel bedraagt de oppervlaktevergrotingsfactor als de lengtevergrotingsfactor $0{,}5$ bedraagt?

De kleine rechthoek wordt vergroot tot zijn oppervlakte 9 keer zo groot is geworden.

d Hoeveel bedraagt de lengtevergrotingsfactor dan?

Opgave 2

Gegeven is een trapezium $ABCD$ met $AB//CD$. $AB = 10$ cm, $DC = 4$ cm en $AD = 5$ cm. De hoogte $DE = 3$ cm.

a Teken het trapezium en bereken de oppervlakte en de omtrek ervan.

b Het trapezium wordt verkleind met lengtevergrotingsfactor $0{,}2$. Bereken de oppervlakte en de omtrek van het kleinere trapezium.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Waarom is $\Delta PQR \sim \Delta STR$?

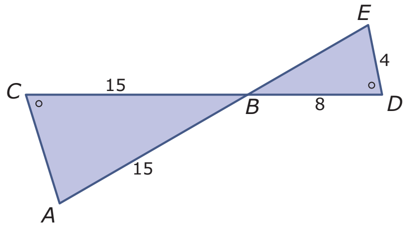
b Laat zien dat de hoogte van driehoek PQR gelijk is aan $\sqrt{153}$.

c Loop de berekening van de oppervlakte van ΔSTR zelf na.

d Laat zien hoe je vanuit de lengtevergrotingsfactor kunt berekenen hoeveel procent van de oppervlakte van ΔPQR wordt ingenomen door ΔSTR.

Opgave 4

Deze figuur bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken.

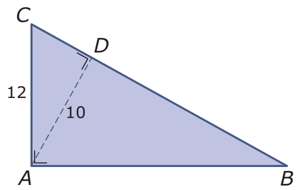


Bereken de totale oppervlakte van deze twee driehoeken samen.

Opgave 5

Je ziet hier een rechthoekige driehoek ABC met enkele afmetingen erbij.

Bereken de oppervlakte van deze driehoek.



Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Waarom is de oppervlaktevergrotingsfactor 12?

b Waarom is de lengtevergrotingsfactor dan $\sqrt{12}$?

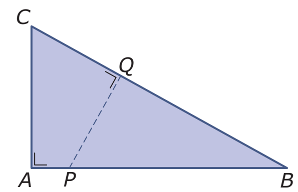
Van een blad papier op A4-formaat is de oppervlakte de helft van een blad papier op A3-formaat. Een blad A4 is 297 mm bij 210 mm.

c Welke afmetingen heeft een blad A3?

Opgave 7

Je ziet hier een rechthoekige driehoek ABC met $AC = 5$ en $AB = 10$ cm. Lijnstuk PQ staat loodrecht op BC en verdeelt de driehoek is twee stukken met gelijke oppervlaktes.

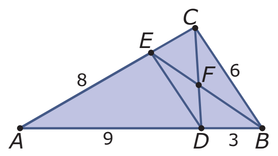
Bereken de lengte van AP.



Verwerken

Opgave 8

Je ziet hier ΔABC met enkele afmetingen. De lijnstukken DE en BC zijn evenwijdig.



a Waarom zijn de driehoeken ADE en ABC gelijkvormig? Bepaal ook de lengtevergrotingsfactor van ΔABC naar ΔADE.

b Welke twee gelijkvormige driehoeken zitten er nog meer in deze figuur? Hoe verhouden zich de oppervlaktes van deze twee driehoeken?

Opgave 9

Marian heeft van een vakantiefoto van 7 cm hoog en 10 cm breed een vergroting laten maken. De vergroting is 24 cm breed.

a Hoe hoog wordt de vergroting? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Op deze foto staat een vuurtoren. Op de vergroting is deze toren 15 cm hoog.

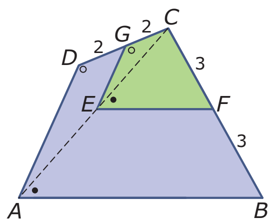
b Hoe hoog is deze toren op de originele vakantiefoto?

Op de originele foto staat een reclamebord met een oppervlakte van 6 cm^2.

c Welke oppervlakte heeft dit reclamebord op de vergroting? Geef je antwoord in mm^2 nauwkeurig.

Opgave 10

Bekijk de twee vierhoeken $ABCD$ en $EFCG$.



a Waarom zijn deze vierhoeken gelijkvormig?

b Hoe verhouden zich de oppervlaktes van beide vierhoeken?

Opgave 11

In **Madurodam** is een deel van Nederland op schaal $1 : 25$ nagebouwd.

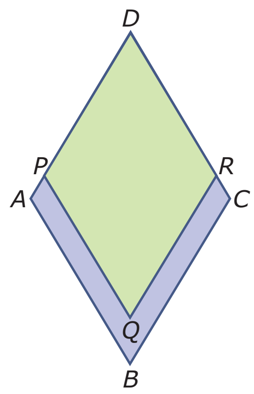
a De Dom in Utrecht is in Madurodam 448 cm hoog. Hoe groot is de toren in werkelijkheid?

b De oppervlakte van Paleistuin Het Loo is $1{,}1$ ha. Hoe groot zou dit dan in Madurodam zijn?

Opgave 12

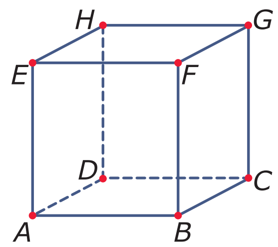
De ruit $ABCD$ heeft zijden van 6 cm en twee hoeken van $60°$.
De ruit $PQRD$ is gelijkvormig met $ABCD$ en hun oppervlaktes verhouden zich als $3 : 4$.

Bereken de lengte van BQ.



Toepassen

Met lengtevergroting en oppervlaktevergroting heb je ook in ruimtelijke figuren te maken. Neem bijvoorbeeld deze kubus met ribben van 4 cm. De **oppervlakte** van deze kubus (en van elke ruimtelijke figuur) is de totale oppervlakte van alle grensvlakken samen. Bij deze kubus is dat de oppervlakte van zes gelijke vierkanten met afmetingen van 4 bij 4 cm.



Als de lengte van de ribben 3 keer zo groot wordt, wordt de oppervlakte $3^2 = 9$ keer zo groot. Dat kun je eenvoudig zelf nagaan.

Opgave 13: Kubus vergroten

Je ziet hierboven een kubus met ribben van 4 cm.

a Bereken de oppervlakte van deze kubus.

b Laat zien, dat een kubus waarvan de ribben 3 keer zo groot zijn ook inderdaad een 9 keer zo grote oppervlakte heeft.

c Laat zien, dat een kubus waarvan de ribben k keer zo groot zijn ook inderdaad een k^2 keer zo grote oppervlakte heeft.

Opgave 14: Verfblikken

Verfblikken zijn er in allerlei maten. In deze opgave ga je uit van een wiskundig model van een verfblik: een cilinder met een cirkel als bodem en een cirkel als deksel. Je houdt geen rekening met de dikte van het blik.

a Bereken de oppervlakte van een verfblik met een hoogte van 14 cm en een straal van 8 cm.

b Bereken de oppervlakte van een verfblik waarvan zowel de hoogte als de diameter 2 keer zo groot is.

c Als je de straal van een blik verdubbelt en de hoogte halveert, blijft de oppervlakte van het blik dan hetzelfde? Licht je antwoord toe.

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je leren werken met gelijkvormigheid en congruentie. Je hebt gezien wanneer twee figuren congruent en wanneer ze gelijkvormig zijn. Met behulp van gelijkvormige driehoeken kun je (soms samen met de stelling van Pythagoras) berekeningen uitvoeren in figuren in het platte vlak. Met behulp van congruentie kun je veel eigenschappen van driehoeken en andere vlakke figuren onderzoeken en bewijzen. Je hebt ook enigszins kennis gemaakt met het bewijzen in de meetkunde. Je zult dit in de bovenbouw vooral bij wiskunde B en D veel tegenkomen.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Vlakke meetkunde** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

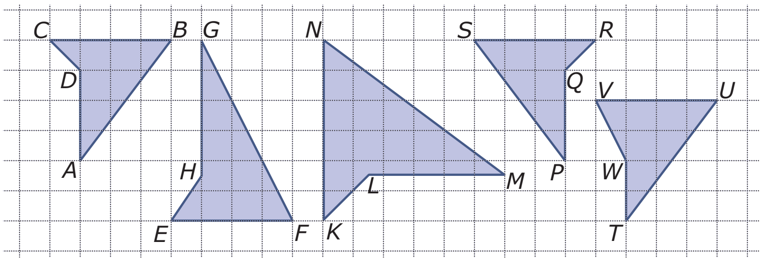
- congruentie — overeenkomstige hoeken — overeenkomstige zijden — vergrotingsfactor — verhoudingstabel;
- congruentie — gelijkvormigheid;
- middelloodlijn — bissectrice (deellijn) — zwaartelijn — hoogtelijn — omgeschreven en ingeschreven cirkel — gelijkbenige driehoek — gelijkzijdige driehoek — definitie, stelling, bewijs;
- regelmatige veelhoeken — omgeschreven cirkel;
- gelijkvormige figuren — lengtevergrotingsfactor — oppervlaktevergrotingsfactor.

Activiteiten

- de begrippen gelijkvormig en congruent;
- herkennen wanneer driehoeken congruent of gelijkvormig zijn en behulp daarvan berekeningen in driehoeken uitvoeren;
- bijzondere lijnen in driehoeken en eigenschappen van driehoeken en deze bijzondere lijnen bewijzen — de stelling van Thales bewijzen;
- rekenen in vierhoeken, vijfhoeken, etc, met behulp van congruentie en gelijkvormigheid;
- werken met de lengtevergrotingsfactor en de bijbehorende oppervlaktevergrotingsfactor.

Opgave 1

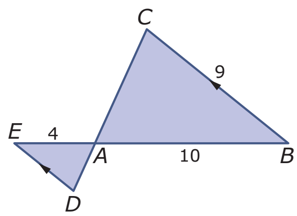
Je ziet hier vijf vierhoeken op een rooster.



Welke van deze vierhoeken zijn congruent? Welke zijn gelijkvormig? Licht je antwoorden toe.

Opgave 2

Bekijk de figuur hiernaast.

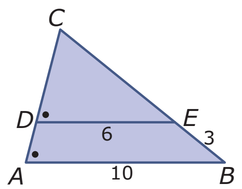


a Welke twee driehoeken zijn gelijkvormig en waarom?

b Welke zijde van ΔAED kun je berekenen? Laat zien, hoe je die zijde berekent.

Opgave 3

Bekijk de figuur hiernaast.

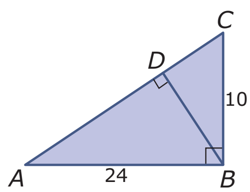


a Welke twee driehoeken zijn gelijkvormig en waarom?

b Welke zijde van ΔDEC kun je berekenen? Laat zien, hoe je die zijde berekent.

Opgave 4

Hier zie je een rechthoekige driehoek ABC met daarin de hoogtelijn BD.



a Welke gelijkvormige driehoeken zie je in deze figuur?

b Waarom weet je van ΔABC eigenlijk alle drie de zijden?

c Bereken de lengte van BD. Geef een duidelijke uitwerking en het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 5

Een gelijkbenige driehoek is een driehoek waarvan twee zijden even lang zijn.

Bewijs dat elke gelijkbenige driehoek twee even lange hoogtelijnen heeft.

Opgave 6

Van elke driehoek kun je een omgeschreven en een ingeschreven cirkel construeren.

Maak een overzicht van hoe dat in zijn werk gaat.

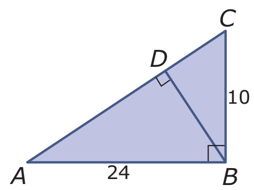
Opgave 7

Construeer een regelmatige vijfhoek met zijden van 4 cm. Licht je constructie toe.

Opgave 8

Hier zie je een rechthoekige driehoek ABC met daarin de hoogtelijn BD.

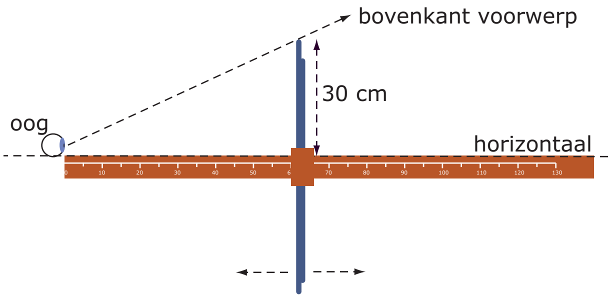
Hoe verhouden zich de oppervlaktes van de driehoeken ABD en BCD?



Toepassen

Je ziet hier een **Jacobsstaf**, een oud instrument om de hoogte of de breedte van een bouwwerk te bepalen, maar ook de hoek van de zon ten opzichte van de horizon. Hiermee kun je op zee de breedtegraad vaststellen waarop je je bevindt. De jacobsstaf is de voorloper van de sextant.

Hij bestaat uit een lat met daarop een schaalverdeling die je vlak onder je oog kon houden. Loodrecht daarop kun je een andere lat (soms meerdere latten) verschuiven. Je houdt de schaalverdeling horizontaal en kijkt langs de bovenkant van die loodrechte lat. Je verschuift hem tot je het hoogste punt van het bouwwerk nog precies ziet. Nu kun je op de schaalverdeling de horizontale afstand tot je oog aflezen.



Opgave 9: Hoogte meten met de Jacobsstaf

Je kunt hierboven nalezen wat een Jacobsstaf is.

Stel je voor dat je met zo'n Jacobsstaf de hoogte wilt bepalen van een kerktoren. Je gaat dan ongeveer 100 m van die toren af staan en houdt de Jacobsstaf op ooghoogte horizontaal tegen je gezicht. Je verschuift de verticale lat totdat je langs de bovenkant nog net de torenspits kunt zien. Je ziet in de figuur dat die verticale lat 30 cm boven de horizontale lat uitsteekt.

a Maak een schets van de situatie.

b Je leest op de schaalverdeling af dat de verticale lat bij 65 cm staat. Bereken nu de hoogte van de toren als jouw ooghoogte $1,70$ m boven de grond is.

Opgave 10: Practicum Jacobsstaf

Je kunt zelf een Jacobsstaf maken en dan de hoogte van allerlei voorwerpen in jouw buurt bepalen.

a Maak een bouwtekening van een Jacobsstaf.

b Bepaal met behulp van jouw eigen Jacobsstaf de hoogte van enkele objecten in jouw omgeving.

Begrippen

- vergelijking — oplossen van vergelijkingen — nulpunt;
- terugrekenen — rekenschema — terugrekenschema;
- balansmethode;
- ontbinden in factoren — buiten haakjes halen — som product methode — op 0 herleiden;
- gebroken vergelijking — analogierekenen.

Activiteiten

- het begrip vergelijking en een vergelijking grafisch oplossen;
- vergelijkingen algebraïsch oplossen door terugrekenen;
- vergelijkingen algebraïsch oplossen door de balansmethode te gebruiken;
- vergelijkingen algebraïsch oplossen door ontbinden in factoren;
- vergelijkingen waarin de onbekende in de noemer van een breuk voorkomt algebraïsch oplossen.

Wikken en wegen

Domein

Rekenen en algebra

Hoofdstuk

Vergelijkingen

Inhoud

3

3.1 Basishandelingen

Verkennen

Opgave V1

Je hebt twee cilindervormige kaarsen. De éne kaars is blauw en 27 cm lang, de andere is geel en 17 cm lang. De blauwe kaars wordt $4{,}5$ cm per uur korter en de gele kaars wordt elk uur 2 cm korter.

a Welke kaars is eerder opgebrand? Hoe lang duurt het dan nog voordat ook de andere is opgebrand?

Je steekt de kaarsen tegelijkertijd aan.

b Op welk tijdstip zijn beide kaarsen even lang?

c Hoe lang is de gele kaars langer dan de blauwe?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Waaraan zie je dat de kaarsen opbranden? Welke kaars brandt het snelst op en hoe zie je dat aan de grafiek?

b Hoe zie je aan de formules welke kaars het snelst opbrandt?

c Hoe lang zijn deze kaarsen op het moment van aansteken?

d Geef de coördinaten van het nulpunt van de blauwe grafiek. Welke vergelijking hoort hierbij? Laat zien hoe je met deze vergelijking het antwoord kunt controleren.

e Hoeveel tijd zit er tussen het moment waarop de blauwe kaars is opgebrand en het moment waarop de groene kaars is opgebrand?

Opgave 2

Bekijk de **Uitleg**.

a Hoe lang is de groene kaars na 1 uur? En de blauwe kaars?

b Hoe groot is het verschil in lengte op $t = 1$? En welke kaars is dan het langst?

c Bepaal met de grafieken op welk tijdstip het verschil tussen de lengtes van beide kaarsen 0 is. Wat betekent dit?

d Hoe zou je dit tijdstip met behulp van de vergelijking in de uitleg kunnen controleren? Waarom klopt dit niet precies?

e Hoe zou je een nauwkeuriger tijdstip kunnen vinden?

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

a Waarom zijn de kosten per kopie voor de leerling constant? Welke formule hoort daar bij?

b Waarom zijn de kosten per kopie voor de school niet constant?

c Bereken de kosten per kopie voor de school als er 1000 kopieën worden gemaakt. Hoeveel zijn deze kosten bij 2000 kopieën? En bij 3000 kopieën?

d Welke formule beschrijft dus de kosten per kopie voor de school?

e Onderzoek bij welk aantal kopieën de kosten per kopie onder de 15 cent komen. Probeer dit met de applet tot op de kopie nauwkeurig te bepalen. Welk probleem kom je tegen?

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

a In hoeveel decimalen nauwkeurig kun je de kosten per kopie aflezen?

b Onderzoek opnieuw bij welk aantal kopieën de kosten onder de 15 cent komen. Probeer dit met de applet tot op de kopie nauwkeurig te bepalen. Hoeveel antwoorden zijn er nu nog mogelijk?

c Hoe kun je nu bepalen welke van deze antwoorden het juiste is?

d Laat zien hoe dit met een tabel door inklemmen kan.

Opgave 5

Bekijk de oplossing die in **Voorbeeld 2** wordt gegeven.

a Waarom past de gegeven vergelijking bij het gestelde probleem?

b Bij een vergelijking moeten de linkerkant en de rechterkant van het isgelijkteken dezelfde waarde hebben. Leg uit hoe hieruit volgt dat $\frac{152}{a} = 0{,}09$.

c En hoe is hieruit afgeleid dat $a = \frac{152}{0{,}09}$?

d Komt je antwoord overeen met het voorgaande voorbeeld? Vanaf hoeveel kopieën gaat de school verdienen?

Opgave 6

Los nu de volgende vergelijkingen op met behulp van analogierekenen:

a $\frac{600}{x} = 0{,}05$

b $20 + \frac{40}{g} = 23$

c $\frac{200-x}{20} = 0{,}4$

d $\frac{20}{200-x} = 0{,}4$

Verwerken

Opgave 7

De tarieven voor drinkwater verschillen nogal per regio:

- Regio A: € 78,00 per jaar en 1,30 euro per m^3.
- Regio B: € 60,00 per jaar en 1,66 euro per m^3.

De bedragen zijn inclusief belastingen.

a Stel een formule op voor de jaarlijkse kosten voor water in regio A.

b Doe hetzelfde voor regio B.

c Bij welk aantal kubieke meter is men in regio A duurder uit dan in regio B? En bij welk aantal is juist regio B duurder?

d De familie Geurts verbruikt gemiddeld 125 m^3 water per jaar en woont in regio A. Zijn ze goedkoper of duurder uit dan wanneer ze in regio B zouden wonen?

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen op in twee decimalen nauwkeurig:

a $x^3 = 6 - x$

b $\frac{750}{2x+1} = 300$

c $2^x = 12$

d $2 - \frac{1}{x} = 0{,}5$

Opgave 9

Bekijk hoe je de vergelijkingen in de voorgaande opgave hebt opgelost.
In welke gevallen kon je het analogierekenen toepassen?

Opgave 10

Een winkel huurt een kopieerapparaat speciaal voor haar klanten. Dit kost maandelijks 180 euro en het maken van een kopie met dit apparaat kost de winkelier 6,5 cent. De klanten betalen 10 cent per kopie. De winkelier wil weten hoeveel kopieën er moeten worden gemaakt wil hij er niet bij inschieten.

a Welke vergelijking kun je nu opstellen om het probleem op te lossen?

b De winkelier schat dat hij vanaf 6000 kopieën per maand uit de kosten komt. Klopt dit met de vergelijking die je hebt gevonden?

c Kun je een nauwkeuriger oplossing vinden met behulp van de vergelijking?

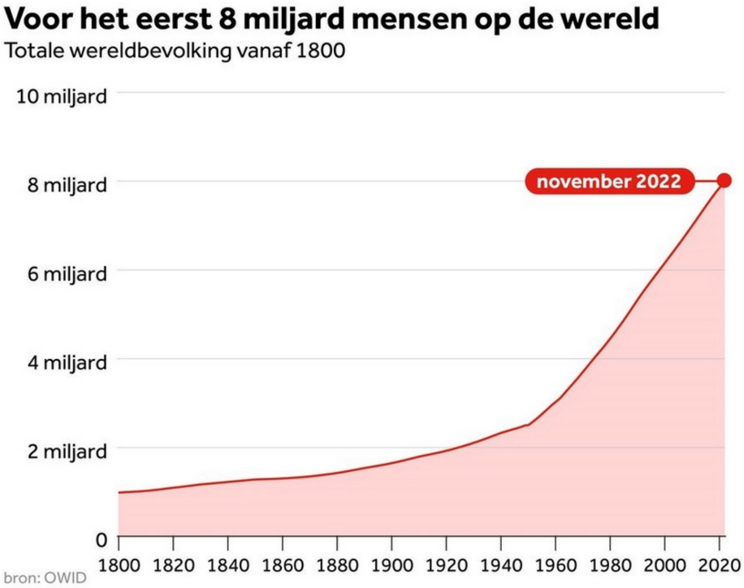
Opgave 11

De afstand Apeldoorn - Deventer is via de snelweg 16 km. Hoe sneller je rijdt, hoe korter je over die 16 km doet. Onderweg gebruik je 5 minuten om brandstof te tanken. Je doet over deze rit 14 minuten, hoeveel is de gemiddelde snelheid?

Toepassen

In gevallen van vergelijkingen met exponentiële groei is op dit moment het inklemmen nog onvermijdelijk.

De NOS liet op 15 november 2022 deze grafiek over de groei van de wereldbevolking zien. In 1999 bereikte de bevolking de 6 miljard, in 2011 de 7 miljard mensen. Toen nam de wereldbevolking nog toen met $1{,}3\%$ per jaar.



Opgave 12: Wereldbevolking

Bekijk het verhaal van het verloop van de wereldbevolking hierboven.

a Controleer de toename van $1{,}3\%$ per jaar met de gegevens voor 1999 en 2011.

b Ga na of de wereldbevolking met dit groeipercentage in november 2022 de 8 miljard zou halen.
Kun je iets zeggen over het groeipercentage op dit moment?

c Maak jij nog mee dat de 10 miljardste mens op Aarde mag worden begroet?

d Welke onderbouwde kritiek kun je op deze berekeningen hebben?

3.2 Terugrekenen

Verkennen

Opgave V1

Laat een medeleerling een begingetal in gedachten nemen zonder het je te vertellen. Laat hem nu de volgende berekeningen doen:

- Doe het begingetal maal 2. Onthoud de uitkomst.
- Tel bij de uitkomst 6 op. Onthoud het resultaat.
- Haal van het resultaat van de vorige berekening 12 af. Onthoud weer het resultaat.
- Deel het resultaat door 6.

Als je nu het eindresultaat te horen krijgt, weet je zijn begingetal?

a Hoe kun je het begingetal vinden als je het eindresultaat van deze berekeningen hoort?

b Leg uit hoe dit werkt.

Opgave V2

Gegeven is de vergelijking $2x + 5 = 11$.

a Je ziet hier een bijpassend rekenschema. Maak er een terugrekenschema bij.

$$x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{+5} \overset{11}{2x+5}$$

b Gebruik dit terugrekenschema om de vergelijking op te lossen.

c Maak zelf een rekenschema en een terugrekenschema bij $2(x + 5) = 11$ en los zo deze vergelijking op.

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** het rekenschema voor de vergelijking $3x + 5 = 20$.

a Waarom is $x \xrightarrow{+5} \dots \xrightarrow{\times 3} 20$ geen juist rekenschema?

b Bij welke vergelijking is dit wel een juist rekenschema? Welke oplossing heeft die vergelijking?

c Waarom heeft het bij de vergelijking $3x + 5 = 2x$ geen zin om een rekenschema te maken?

d Waarom heeft het bij de vergelijking $x + \frac{1}{x} = 2$ geen zin om een rekenschema maken?

Opgave 2

Je wilt de vergelijking $2(x-5)+3=16$ oplossen.

a Doe dit met behulp van terugrekenen en zonder eerst de haakjes uit te werken.

b Je kunt ook eerst de haakjes uitwerken en dan terugrekenen. Laat zien dat je dan hetzelfde antwoord krijgt.

Opgave 3

Je wilt de vergelijking $0{,}5(x-1)^2=8$ oplossen.

a Maak hierbij een passend rekenschema.

b Bij het maken van een terugrekenschema moet je vanuit een kwadraat terugrekenen. Hoe doe je dat? En waar moet je dan om denken?

c Los de vergelijking op met behulp van terugrekenen.

Opgave 4

Gegeven is de vergelijking $3x^2+2=17$.

a Maak bij deze vergelijking een rekenschema.

b Hieronder zie je een terugrekenschema dat iemand bij deze vergelijking heeft gemaakt. Wat is er fout aan? Maak zelf het juiste terugrekenschema.

$17 \xrightarrow{-2} \dots \xrightarrow{\sqrt{\dots}} \dots \xrightarrow{/3} x$

c Schrijf nu de oplossing van deze vergelijking op.

Opgave 5

Gegeven is de vergelijking $3\left(x^2+2\right)=15$.

a Maak bij deze vergelijking een rekenschema.

b Maak een terugrekenschema.

c Schrijf nu de oplossing van deze vergelijking op.

Opgave 6

Bekijk de vergelijking $x^2+8x=10$.

a Waarom kun je deze vergelijking zo niet oplossen met behulp van terugrekenen?

b Door een kwadraat af te splitsen kun je deze vergelijking schrijven als $(x+4)^2=26$. Laat dat zien.

c Door de vergelijking te herleiden naar de vorm bij b kun je hem wel oplossen door terugrekenen. Laat zien hoe en geef de oplossing.

Opgave 7

Bekijk de vergelijking $0{,}5x^3 + 2 = 8$ uit **Voorbeeld 2**.

a Maak bij deze vergelijking een rekenschema.

b Maak een bijpassend terugrekenschema en schrijf de oplossing op.

Opgave 8

Bekijk de vergelijking $\sqrt{2x - 3} = 5$ uit **Voorbeeld 2**.

a Maak bij deze vergelijking een rekenschema.

b Maak een bijpassend terugrekenschema en schrijf de oplossing op.

Opgave 9

De vergelijking $0{,}5x^3 + 2x = 8$ uit **Voorbeeld 2** kun je niet oplossen met behulp van terugrekenen.

a Vul deze tabel voor $y = 0{,}5x^3 + 2x$ in.

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

b Kun je nu uit de tabel de oplossing van deze vergelijking aflezen?

Verwerken

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen op met behulp van terugrekenen. Schrijf de antwoorden van de vergelijking exact op. Niet afronden dus!

a $5(x - 3) = -3$

b $2(x - 3)^2 = 50$

c $-0{,}2(-0{,}2x - 0{,}2) = -0{,}2$

d $2(x - 5)^3 = 31{,}25$

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen op. Kies zelf de handigste manier van werken.

a $4\sqrt{x - 2} = 2$

b $4\sqrt{x} - 2 = 2$

c $\frac{2}{x^2 - 1} = 1$

d $\sqrt{(x + 2)^2 - 1} = 0$

Opgave 12

Janet lost de vergelijking $2(x-1)^2 = 50$ zo op:

- Rekenschema: $x \xrightarrow{-1} \ldots \xrightarrow{(\ldots)^2} \ldots \xrightarrow{\times 2} 50$
- Terugrekenschema: $50 \xrightarrow{/2} \ldots \xrightarrow{\sqrt{\ldots}} \ldots \xrightarrow{+1} x$

Dus het antwoord is $x = 6$. Bij controle blijkt dit antwoord ook te kloppen.

Leg uit wat er fout gaat en verbeter haar uitwerking.

Opgave 13

Het Empire State Building is 381 m hoog vanaf de begane grond tot het topje van het gebouw. Iemand laat vanuit een raam op 371 m hoogte een steentje naar beneden vallen. De hoogte h in m boven de grond van dit steentje is afhankelijk van de valtijd t in seconden. Er geldt (als er geen luchtweerstand zou zijn): $h = 371 - 4{,}9t^2$. Op $t = 0$ wordt het steentje losgelaten.

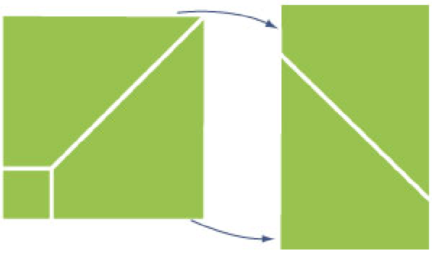
a Na hoeveel seconden landt het steentje op de grond? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Voor de snelheid van het steentje geldt $v = 9{,}8t$, met v in m/s.

b Met welke snelheid landt dit steentje? Geef het antwoord in km/uur in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 14

Een vierkant papiertje van 10 bij 10 cm wordt tot een rechthoek gemaakt door er een vierkantje uit te knippen en het dan diagonaal door te knippen. Zie figuur.



De oppervlakte van de rechthoek is 60 cm^2. Hoe groot moet het uitgeknipte vierkantje zijn? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Toepassen

Getallenraadsels zijn altijd weer aardig. Hier zie je er ééntje:

> Bedenk een getal zonder het me te vertellen. Vermenigvuldig het getal met 4. Tel bij het antwoord 20 op. Trek van de uitkomst twee keer het getal waarmee je begon af. Neem nu de helft van wat je hebt gevonden. Als je me de uitkomst vertelt, weet ik je begingetal.

De vraag is natuurlijk: Hoe kan dat?

Opgave 15: Getallenraadsels (1)

a Kies een aantal van die geheime getallen. Wat is telkens de uitkomst van het getallenraadsel?

b Neem g voor het geheime getal. Wat is dan de uitkomst van het getallenraadsel?

c Hoe kun je dus gemakkelijk het getal raden?

Opgave 16: Getallenraadsels (2)

Neem een getal in gedachten en tel er 2 bij op. Vermenigvuldig de uitkomst met 4 en deel dan door 2. Haal nu twee maal jouw getal er weer van af. De uitkomst is altijd 4.

a Laat met een rekenschema zien hoe dat komt.

b Maak zelf zo'n getallenraadsel.

Opgave 17: Getallenraadsels (3)

Mascha wil graag weten wanneer haar vriendin Jodka jarig is. Ze geeft haar het volgende raadsel op:

> Schrijf het nummer op van de maand waarin je jarig bent, maar laat het me niet zien. Vermenigvuldig dit getal met 5. Tel er 6 bij op en vermenigvuldig het resultaat met 4. Tel er 1 bij op en vermenigvuldig de uitkomst met 5. Tel daar tenslotte het nummer van de dag bij waarop je jarig bent en trek er nog 125 van af. Als je mij nu de einduitkomst vertelt, weet ik op welke datum je jarig bent.

Laat met een rekenschema zien hoe dat komt.

3.3 De balansmethode

Verkennen

Opgave V1

De titel van dit onderdeel is balansmethode.

a Wat is een balans? Wat is het verschil met een weegschaal?

b Wat heeft dit te maken met vergelijkingen?

Opgave V2

Stel je eens voor dat je een aantal blikjes voor je hebt liggen met een onbekend gewicht g. Je geeft een vriend van jou twee blikjes en 21 losse gewichtjes van 1 gram. Zelf pak je zes blikjes en 5 losse gewichtjes van 1 gram. Als je dit op een balans legt, merk je dat die evenwicht is.

Hoe kun je nu te weten komen hoeveel gram een blikje weegt?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet een balans in evenwicht.

a Op welke schaal liggen jouw blikjes en gewichten?

b Bekijk de uitwerking. Wat betekent de eerste stap voor de weegschaal?

c Bekijk de uitwerking. Wat betekent de tweede stap voor de weegschaal?

d Waarom wordt in de laatste stap 16 door 4 gedeeld en niet 4 door 16?

Opgave 2

Nu heeft je vriend 6 blikjes en 2 losse gewichtjes van 1 gram. Zelf heb je één blikje en 12 losse gewichtjes van 1 gram.

Breng nu zelf het oplossen in beeld.

Opgave 3

De balansmethode kun je ook toepassen als het niet over gewichten en een echte balans gaat. Je kunt altijd links en rechts van het isgelijkteken hetzelfde optellen en aftrekken en met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigen of door hetzelfde (behalve 0) delen.

Los de volgende vergelijkingen op.

a $5g + 6 = 3g + 9$

b $5g + 6 = 8g - 18$

c $-2{,}5g + 14 = 8g - 19$

d $-2{,}5g - 19 = 8g - 14$

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1** de oplossing van de gegeven vergelijking.

a Waarom wordt er niet gebruik gemaakt van terugrekenen?

b Waarom wordt er in de eerste stap met 6 vermenigvuldigd?

c Vul de gevonden oplossing in het linkerdeel van de vergelijking in en bereken het antwoord. Doe dit ook bij het rechterdeel van de vergelijking. Wat valt je op?

d Hoe kun je in het algemeen je oplossing controleren?

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $7x - 15 = 4x - 3$

b $0{,}7 - 0{,}2x = 1 - 0{,}6x$

c $\frac{1}{5}x + 2 = 0{,}3x - 3$

d $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{x+4}{5}$

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** de gegeven vergelijking.

a Werk de haakjes uit en los zo eerst zelf de vergelijking algebraïsch op zonder naar de oplossing te kijken.

b Controleer je antwoord door substitutie.

c Vergelijk je manier van oplossen met die in het voorbeeld. Heb je precies hetzelfde gedaan?

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $5(x + 2) = 2x + 15$

b $\frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{2}$

c $\frac{2}{5}x + 1 = \frac{1}{3}(x + 5)$

d $1 - \frac{2}{3}p = \frac{1}{7}(2 - p)$

e $x - \frac{1}{4}(x + 3) + \frac{3}{4} = 0$

Opgave 8

Bij het oplossen van vergelijkingen kun je bijzondere gevallen tegenkomen. Soms heeft een vergelijking helemaal geen oplossing en soms heeft hij juist oneindig veel oplossingen. In dat laatste geval kun je voor de onbekende elk denkbare getal invullen, altijd krijg je aan beide zijden van het isgelijkteken hetzelfde. Hier tref je een paar voorbeelden van vergelijkingen aan waar je dit tegenkomt. Probeer ze algebraïsch op te lossen.

a $2(x+4)=x-(4-x)$

b $2(x-2)=x-(4-x)$

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3** de gegeven vergelijking.

a Los eerst zelf de vergelijking algebraïsch op zonder naar de oplossing te kijken.

b Heb je gewerkt met terugrekenen of met de balansmethode? Als je hebt gewerkt met terugrekenen bekijk dan de oplossing die in het voorbeeld wordt gegeven nog eens goed.

c Bij de stap ‘terugrekenen vanuit een kwadraat (beide zijden worteltrekken)’ is meer aan de hand dan gewoon de balansmethode toepassen. Waar moet je rekening mee houden?

d Controleer je oplossing door substitutie.

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $5(x+10)^2+50=70$

b $10-x^2=3x^2$

c $(x-1)^2=x^2$

Verwerken

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef exacte antwoorden en controleer ze door substitutie.

a $3x-7=\text{-}x+10$

b $5x-4=3(5-x)$

c $0{,}2x+10=310$

d $4\left(5-\frac{3}{4}x\right)+5x=\text{-}x+10$

e $5x-(3-2x)=11$

f $\frac{5-x}{3}=\text{-}\frac{1}{2}(x+6)$

g $6-2(x-5)^2=2$

h $(x-5)^2=5+x^2$

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. In een aantal gevallen zul je op bijzondere situaties stuiten. Leg uit wat er dan aan de hand is.

a $1 - (x - 3) = 2(3x - 7)$

b $2x - 4 = 2(1 + x)$

c $\frac{3x-5}{2} = 0{,}25(2x - 10) + x$

d $6 + 2(x - 2)^2 = 4$

e $6 - 2(x - 2)^2 = 4$

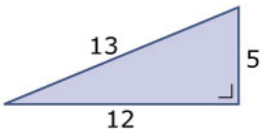
Opgave 13

Oefen het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode via het **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Opgave 14

In rechthoekige driehoeken geldt de stelling van Pythagoras. Soms zijn alle drie de zijden van een rechthoekige driehoek gehele getallen. Zo is er bijvoorbeeld een rechthoekige driehoek met een rechthoekszijde van 5 cm waarvan de twee andere zijden opeenvolgende gehele getallen zijn.



a Laat zien dat dit klopt voor de rechthoekige driehoek die hiernaast is getekend.

De vraag is nu of dit de enige rechthoekige driehoek is met een rechthoekszijde van 5 waarvan de andere twee zijden opeenvolgende gehele getallen zijn. Om dit uit te zoeken kun je met onbekende zijden en een vergelijking werken.

b Waarom kun je de lengtes van de twee onbekende zijden x en $x + 1$ noemen? Welke van beide is de hypothenusa van de driehoek?

c Aan welke vergelijking moet x voldoen?

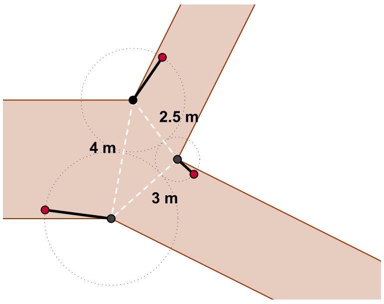
d Laat zien dat deze vergelijking alleen $x = 12$ als oplossing heeft.

Toepassen

Applet

Hier zie je hoe een brede weg zich splitst in twee smallere. Om de mogelijkheid te hebben telkens precies één van die drie wegen af te sluiten, worden drie draaibare hekken geplaatst. De af te sluiten openingen zijn 4 m, 3 m en 2,5 m.

Met de rode punten kunnen de hekken worden gedraaid. Ga na, dat dan telkens één weg kan worden afgesloten. Dit komt omdat de breedtes van de hekken goed zijn berekend. Daarbij kun je een vergelijking gebruiken...



Opgave 15: Hekkenprobleem

Bekijk het hekkenprobleem in **Toepassen**.

Gebruik de animatie om na te gaan dat elke weg is af te sluiten.

a Probeer eerst maar eens of je het gestelde probleem zelf kunt oplossen. Misschien kun je het wel zonder een vergelijking...

b Stel nu bij het hekkenprobleem een passende vergelijking op.

c Los je vergelijking en daarmee het probleem op.

Opgave 16: Leeftijdenprobleem

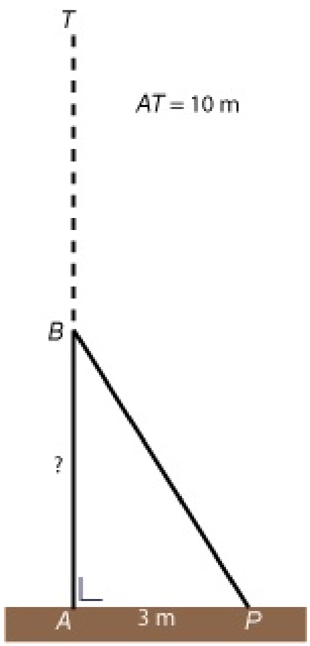
Joop en Myrthe zijn samen 91 jaar oud. Toen Joop even oud was als Myrthe nu is, was Myrthe 26 jaar.

Hoe oud zijn beiden nu?

Opgave 17: Gebroken mast

De vlaggenmast AT is 10 m hoog. Bij een hevige storm is deze mast geknakt. De top van de mast rust nu op de grond, 3 m van het punt A. Het onderste deel van de mast staat nog loodrecht op de grond. Zie de figuur hiernaast.

Op welke hoogte zit het breekpunt B?



Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode (of door terugrekenen)**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

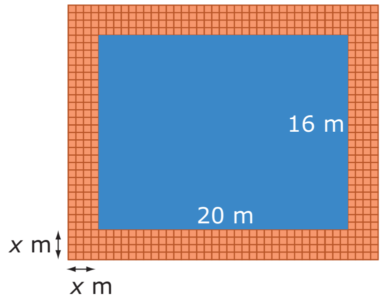
AlgebraKIT

3.4 Ontbinden in factoren

Verkennen

Opgave V1

Hiernaast zie je een plaatje van een zwembad en een tegelpad getekend. De afmetingen van dit zwembad zijn 20 bij 16 meter. Het tegelpad is x meter breed.



a Ga na dat de lengte van het zwembadterrein nu $20+2x$ meter is.

b Hoeveel is dan de breedte?

c Welke formule vind je zo voor de oppervlakte A van het hele zwembadterrein?

Het zwembadterrein heeft een totale oppervlakte van 480 m^2. Hoe breed is het tegelpad?

d Welke vergelijking hoort er bij deze vraag?

e Hoe los je die vergelijking op?

Opgave V2

Vul op de stippeltjes een getal in:

a $2 \cdot ... = 0$

b $... \cdot 6 = 0$

c $... \cdot ... = 0$

d $... \cdot 0 = 0$

e Wat weet je van twee getallen waarvan het product 0 is?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je met ontbinden in factoren de vergelijking $3x^2 + 18x = 0$ oplost.

a Leg uit hoe de ontbinding in zijn werk gaat.

b Hoe kun je de ontbinding controleren?

c Waarom helpt de ontbinding bij het oplossen van de vergelijking?

d Los nu zelf de vergelijking $4x^2 - 12x = 0$ op door ontbinden in factoren.

e Je hebt nu twee getallen gevonden die de vergelijking bij d waar zouden moeten maken. Laat door invullen zien dat dit ook inderdaad zo is.

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen op.

a $x^2 + 4x = 0$

b $3b - 9b^2 = 0$

c $c(-2c - 4) = 0$

d $d^2 - \frac{1}{10}d = 0$

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**. Je wilt de drieterm $x^2 + 5x + 6$ in factoren ontbinden.

a Welke twee gehele getallen hebben als product 6 en zijn opgeteld samen gelijk aan 5?

b Welke tabel kun je nu maken om de ontbinding te vinden? Welke ontbinding vind je?

c Los hiermee de vergelijking $x^2 + 5x + 6 = 0$ op.

d Controleer je oplossing door substitutie.

Opgave 4

Je wilt de vergelijking $x^2 + 27x + 72 = 0$ oplossen.

a Welke ontbinding heeft de drieterm: $x^2 + 27x + 72$?

b Hoe los je nu met behulp van die ontbinding de gegeven vergelijking op?

c Controleer door invullen dat beide x-waarden die je als oplossing hebt gevonden ook inderdaad de vergelijking waar maken.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Leg uit waarom het belangrijk is om de vergelijking eerst op 0 te herleiden en dan de uitdrukking aan de linkerzijde van het isgelijkteken te ontbinden.

b Leg uit hoe deze vergelijkingen worden opgelost.

Opgave 6

Je wilt de vergelijking $3x^2 = 5x$ oplossen.

a Je gaat de vergelijking eerst op 0 herleiden en dan de linkerzijde ontbinden. Wat krijg je dan?

b Leg uit hoe de vergelijking wordt opgelost.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**. Neem nu de vergelijking $x^2 - 14x + 45 = 0$.

a Laat zien hoe je nu de linkerzijde kunt ontbinden in factoren.

b Laat zien hoe je nu verder deze vergelijking oplost.

c Controleer of de gevonden oplossingen de vergelijking ook inderdaad waar maken.

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen op:

a $x^2 + 12x - 45 = 0$

b $x^2 - 12x - 45 = 0$

Opgave 9

Beantwoord de volgende vragen.

a Leg uit wat het verschil is tussen een tweeterm en een drieterm. Geef bij elk een voorbeeld.

b Leg uit hoe je een tweeterm kunt ontbinden. Geef hierbij een voorbeeld.

c Leg uit hoe een drieterm kan worden ontbonden. Geef hierbij een voorbeeld.

d Kun je een drieterm altijd ontbinden in factoren?

Opgave 10

Bekijk de vergelijking van **Voorbeeld 3**.

a Los eerst zelf deze vergelijking op zonder naar het antwoord te kijken.

b Heb je in je oplossing dezelfde stappen in dezelfde volgorde gezet?

c Los nu op dezelfde manier op: $5x^2 - 10x = 15$.

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen op.

a $a^2 + 2a = 35$

b $(b - 2)(2b + 3) = 0$

c $x^2 - 15 = 2x$

d $3x^2 - 45 = -6x$

Verwerken

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen, indien mogelijk, op met behulp van ontbinden in factoren.

a $3x^2 - 36x = 0$

b $x^2 = x$

c $c^2 + 2c = 35$

d $k^2 - 9 = 7$

e $2x^2 - 4x - 16 = 0$

f $2x^2 - 4x - 17 = 0$

Opgave 13

Een boer wil een rechthoekig stuk grond afzetten van 1200 m^2. De breedte is 10 meter korter dan de lengte.

Hoe lang en hoe breed wordt het stuk grond?

Opgave 14

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Kies zelf de handigste methode.

a $(x - 5)(2x - 6) = 0$

b $(x - 5)(2x - 6) = 30$

c $2(x - 3)^2 = 8x$

d $2(x - 3)^2 = 18$

Opgave 15

Oefen het oplossen van kwadratische vergelijkingen met ontbinden via het **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Opgave 16

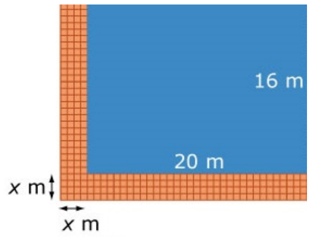
Een vierkant heeft zijde x. Een rechthoek heeft zijden $5 - x$ en $8 - 2x$. Voor welke waarde van x zijn de oppervlakten van het vierkant en de rechthoek even groot?

Opgave 17

De formule $y = x^2 + ax - 14$ is ontbonden als $y = (x - 7)(x + b)$. Bereken a en b.

Toepassen

Hiernaast zie je weer een plaatje van een zwembad van 16 bij 20 meter. Om de helft van het zwembad heen is een tegelpad aangelegd. De breedte van dit tegelpad is x cm. Een tegelzetter heeft 160 m^2 aan tegels nodig gehad om het tegelpad aan te leggen.
Je kunt nu met behulp van ontbinden in factoren zelf uitrekenen hoeveel de breedte van dit tegelpad bedraagt.



Opgave 18: Zwembadprobleem

Bekijk het zwembadprobleem in **Toepassen**.

Los dit probleem op met behulp van ontbinden in factoren.

Opgave 19: Landruil

Boer Harmsen heeft een groot vierkant stuk land. Aan de oostzijde van dit land wil het waterschap een afwateringskanaal van 12 m breed aanleggen. Dit betekent dat de breedte van deze sloot van het land van de boer afgaat. Hij wil daarvoor compensatie en krijgt aan de zuidzijde van zijn land een extra strook van 16 m breedte toegewezen.
De boer is tevreden, zijn land is 40 m^2 groter geworden.

Bereken hoe groot de oppervlakte van boer Harmsen's land nu geworden is.

Practicum

Met *Algebra*KIT kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen door ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

3.5 Breuken in vergelijkingen

Verkennen

Opgave V1

Je rijdt met de auto 30 km over de snelweg. Je hebt een constante (gemiddelde) snelheid. Maar je moet onderweg wel even stoppen om te tanken en dat kost 5 minuten.

a Als je 30 km met 120 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord in minuten.

Noem de snelheid in km/uur v en de reistijd in minuten t.

b Waarom is hier geen sprake van een omgekeerd evenredig verband?

c Welke formule geeft het verband tussen t en v weer?

d Welke vergelijking krijg je als je v wilt berekenen voor $t = 25$ minuten?

e Probeer deze vergelijking op te lossen.

Opgave V2

Je hebt als het goed is eerder geleerd hoe je twee breuken kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Neem nu de breuken $\frac{2}{x}$ en $\frac{1}{2x}$.

a Laat zien hoe je beide breuken optelt en de tweede breuk van de eerste aftrekt.

b Laat zien hoe je beide breuken vermenigvuldigt.

c Laat zien hoe je de eerste breuk door de tweede deelt.

Theorie

Opgave 1

Je rijdt 32 km met een vrijwel constante snelheid v over de snelweg en je stopt onderweg 5 minuten om te tanken. Je totale reistijd is 25 minuten. Hoeveel bedraagt je snelheid?

a Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?

b Los deze vergelijking algebraïsch op.

Opgave 2

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daar bovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig laat drukken.

Noem het aantal folders dat je wilt laten drukken a en de kosten per folder k. Je wilt weten voor welke waarde van a de kosten per folder 6 cent bedragen.

a Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?

b Los deze vergelijking algebraïsch op.

Opgave 3

Bekijk hoe in **Voorbeeld 1** een gebroken vergelijking wordt opgelost met de balansmethode.

a Bij welke stap moet je rekening houden met het feit dat beide zijden van een vergelijking met 0 vermenigvuldigen niet mag?

b Waarom mag je beide zijden van een vergelijking niet met 0 vermenigvuldigen?

c Stel je nu voor dat je een afstand van 150 km aflegt met een constante snelheid en een tussentijdse pauze van 12 minuten. Je doet er 1:40 uur over. Hoe snel rijd je?

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Kies de handigste manier van werken.

a $12 - \frac{1}{x} = 8$

b $\frac{50}{2x-3} = 10$

c $\frac{6}{x} + x = 5$

d $\frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = 10$

Opgave 5

Je wilt de vergelijking $\frac{x^2+9x-10}{x-1} = 0$ algebraïsch oplossen.

a Gebruik de balansmethode. Waarmee ga je beide zijden vermenigvuldigen? En waar moet je dan om denken?

b Los de vergelijking verder op.

c Eén van beide waarden die je bij c hebt gevonden hoort nu niet bij de oplossing. Hoe komt dat?

Opgave 6

Bekijk hoe in **Voorbeeld 2** een gebroken vergelijking wordt gebruikt om de gemiddelde snelheid van twee wielrenners te berekenen.

a Ga na, dat de gegeven vergelijking bij het verhaal past.

b Laat zien hoe de vergelijking stap voor stap met de balansmethode kan worden opgelost.

c Waarom voldoet maar één van beide gevonden waarden voor v?

Opgave 7

Twee automobilisten A en B rijden dezelfde afstand van 60 km met een constante snelheid. B rijdt 20 km/h langzamer dan A, maar A moet onderweg tanken en heeft daar 6 minuten voor nodig. Daardoor doen ze even lang over de gegeven afstand.

Hoe snel rijden ze?

Verwerken

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{200}{a} + 0{,}3 = 0{,}7$

b $x - \frac{8}{x} = 2$

c $20 - \frac{p}{p-2} = 5$

d $\frac{600}{p^2+4} = 50$

e $\frac{3}{x} = 2 - \frac{4}{2x}$

f $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{10}{3}$

Opgave 9

Op veel scholen kunnen leerlingen kopieën maken. De kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 240,00 per maand;
- de kosten per kopie: € 0,06;

Noem het aantal kopieën per maand a.

a Welke vergelijking kun je opstellen als de school maandelijks uit de kosten wil komen en elke leerling € 0,10 per kopie betaalt?

b Los deze vergelijking op.

c Hoeveel kopieën moeten er maandelijks worden gemaakt als de school uit de kosten wil komen?

Opgave 10

Voor een gas in een afgesloten ruimte geldt de **algemene gaswet**. Het verband tussen de druk p in pascal, het volume V in m^3 en T de temperatuur in kelvin is:

$\frac{pV}{T} = c$ waarin c een constante is.

Omdat de temperatuur toeneemt met 80 kelvin, neemt de druk toe van $1{,}2$ naar $1{,}5$ pascal bij een gelijkblijvend volume van 4 m^3.

a Welke vergelijking kun je opstellen bij deze situatie?

b Los deze vergelijking op.

Opgave 11

Iemand legt de 6 km van huis naar school altijd in dezelfde tijd af. Op een bepaalde dag vertrekt hij door omstandigheden 4 minuten te laat van huis. Hij komt precies in dezelfde tijd aan omdat hij 3 km/h sneller rijdt dan normaal.

Hoe hard rijdt hij normaal? Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

Opgave 12

Als er elektrische stroom loopt door een weerstand geldt de wet van Ohm: $V = I \cdot R$. Hierin is V het spanningsverschil in volt (V), I de stroomsterkte in ampère (A) en R de weerstand in ohm (Ω).

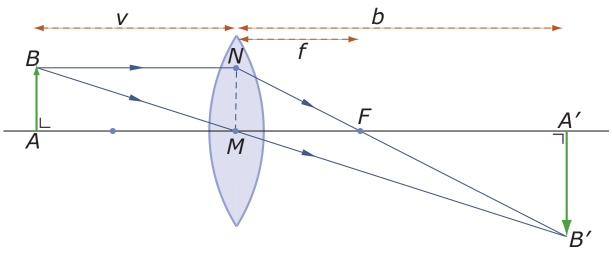
a Bereken het spanningsverschil ingeval $I = 2$ mA en $R = 1{,}5$ MΩ.

Ga uit van een constant spanningsverschil over een bepaalde stroomdraad van 24 V. Bij een stroomdraad waarvan de weerstand twee keer zo groot is wordt de stroomsterkte 10 mA kleiner.

b Hoeveel bedraagt de weerstand van deze stroomdraden?

Toepassen

In bijvoorbeeld een fototoestel of een verrekijker zitten lenzen. De standaardlens is een **sferische lens**, dat is een lens waarvan beide kanten delen van een bol vormen. De lijn door het midden M van zo'n lens noem je de hoofdas. Lichtstralen die evenwijdig aan de hoofdas op de lens vallen gaan na de lichtbreking allemaal door het brandpunt F van de lens. Lichtstralen die door het midden M gaan worden niet gebroken. Deze eigenschappen gelden alleen als de lens niet te dik en niet te groot is en als de beide boloppervlakken dezelfde straal hebben. In de figuur hieronder is dat zo. Het voorwerp AB krijgt aan de andere kant van een lens een beeld $A'B'$.



In deze figuur kun je met behulp van gelijkvormigheid de zogenaamde **lenzenformule** afleiden:

$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

Hierin is v de afstand van het voorwerp tot het midden van de lens (de voorwerpsafstand), b de afstand van het beeld tot het midden van de lens (de beeldsafstand) en f de afstand van het brandpunt tot het midden van de lens (de brandpuntsafstand). Deze formule geldt ook voor holle lenzen, en voor holle en bolle spiegels.

Opgave 13: De lenzenformule

Bekijk de lenzenformule in **Toepassen**. Als je de afstand v van het voorwerp tot (het midden van) de lens weet en de brandpuntsafstand f van de lens is bekend, dan kun je de beeldsafstand b berekenen.

a Neem $v = 10$ cm en $f = 4$ cm. Welke (gebroken) vergelijking moet je oplossen om b te berekenen?

b Hoe kun je van deze vergelijking in één klap een vergelijking zonder breuken maken?

c Los nu de vergelijking bij a op.

d Neem $v = 6$ cm en $f = 4$ cm en bereken de beeldsafstand.

e Als je zo'n berekening veel moet uitvoeren, dan is het handig om de lenzenformule te herleiden tot de vorm $b = \ldots$ Laat zien hoe je dat kunt doen.

Opgave 14: Nog eens de lenzenformule

Gebruik de lenzenformule uit de voorgaande opgave.

Van een bepaalde lens is de brandpuntsafstand 3 cm. De beeldsafstand is 8 cm groter dan de voorwerpsafstand.

Bereken de voorwerpsafstand.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met breuken**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

3.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je meer technieken geleerd om vergelijkingen op te lossen. Het terugrekenen en de balansmethode zijn de twee krachtigste daarvan. Deze twee technieken kende je al uit voorgaande leerjaren, je oefent er mee in wat verdergaande situaties. Bij kwadratische vergelijkingen is soms ontbinden in factoren handig. Je zult later nog meer methoden leren voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen. En ook valt er nog wel meer de zeggen over vergelijkingen in het algemeen, maar dat gebeurt in een volgend onderwerp.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Vergelijkingen** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

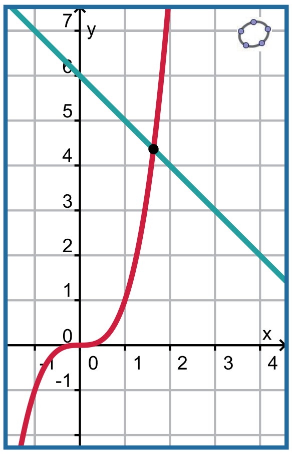
Begrippen

- vergelijking — oplossen van vergelijkingen — nulpunt;
- terugrekenen — rekenschema — terugrekenschema;
- balansmethode;
- ontbinden in factoren — buiten haakjes halen — som product methode — op 0 herleiden;
- gebroken vergelijking — analogierekenen.

Activiteiten

- het begrip vergelijking en een vergelijking grafisch oplossen;
- vergelijkingen algebraïsch oplossen door terugrekenen;
- vergelijkingen algebraïsch oplossen door de balansmethode te gebruiken;
- vergelijkingen algebraïsch oplossen door ontbinden in factoren;
- vergelijkingen waarin de onbekende in de noemer van een breuk voorkomt algebraïsch oplossen.

Opgave 1



Bij een vergelijking vergelijk je twee formules met dezelfde invoervariabele met elkaar. Je probeert de waarde(n) voor die invoervariabele te vinden waarbij beide formules dezelfde uitkomst hebben.

Neem bijvoorbeeld de vergelijking $x^3 = 6 - x$.

a Om welke twee formules gaat het hier? En wat is de invoervariabele?

b Je ziet hier de grafieken van beide formules. Hoe kun je met behulp hiervan de oplossing van de gegeven vergelijking vinden?

c Geef een oplossing in twee decimalen nauwkeurig.

d Welke twee grote nadelen heeft deze manier van oplossen van een vergelijking?

Opgave 2

Bij een vergelijking waarin de invoervariabele maar op één plaats voor komt kun je gebruik maken van terugrekenen.

Neem bijvoorbeeld de vergelijking $-0{,}01(x - 40)^2 + 1{,}5 = 1$.

a Om welke twee formules gaat het hier? Maak een schets van de bijbehorende grafieken.

b Waarom weet je in dit geval uit hoeveel waarden de oplossing van de vergelijking bestaat?

c Los deze vergelijking exact op met behulp van terugrekenen.

d Kun je deze vergelijking ook oplossen door eerst de haakjes weg te werken?

Opgave 3

Bij veel vergelijkingen komt de onbekende op meerdere plaatsen voor en dan wil je toewerken naar $x = ...$ door termen bij elkaar te nemen als dat kan en/of de balansmethode te gebruiken.

Neem bijvoorbeeld de vergelijking $(x - 20)(x - 30) = x^2 + 40$.

a Waarom is bij zo'n vergelijking de eerste stap het wegwerken van de haakjes?

b Los de vergelijking algebraïsch op.

Opgave 4

Bij sommige vergelijkingen kun je gebruik maken van ontbinden in factoren.

Neem bijvoorbeeld de vergelijking $(x - 20)(x - 30) = 0$.

a Waarom is bij zo'n vergelijking het wegwerken van de haakjes geen verstandige keuze?

b Los de vergelijking algebraïsch op.

Bekijk nu de vergelijking $(x - 20)(x - 30) = 600$.

c Waarom is bij zo'n vergelijking het wegwerken van de haakjes wel een verstandige keuze?

d Los de vergelijking algebraïsch op.

Opgave 5

Bij sommige vergelijkingen kun je gebruik maken van ontbinden in factoren. Soms gebruik je daarbij de som-product-methode.

Neem bijvoorbeeld de vergelijking $(x - 20)(x - 30) = 300 - x^2$.

Los de vergelijking algebraïsch op.

Opgave 6

Vergelijkingen waarin de onbekende voorkomt in de noemer van een breuk noem je wel gebroken vergelijkingen. De beste strategie is dan om zo snel mogelijk alle breuken weg te werken.

Neem bijvoorbeeld de vergelijking $\frac{4}{x} + x = 6 - x$.

a Hoe kun je hier meteen alle breuken wegwerken?

b Los de vergelijking algebraïsch op.

c Waarom moet je nog wel even kijken of alle waarden van je oplossing ook voldoen?

Toepassen

Waarschijnlijk ben je al eens eerder een opgave, een vraagstuk, een puzzel, tegengekomen waarvan je niet meteen de oplossing wist. Je moet dan gaan zoeken naar een manier om het probleem op te lossen. Je zoekt een **probleemaanpak**. En daarbij heb je soms kennis op allerlei terreinen nodig.

Bij de onderstaande problemen heb je behalve kennis op het gebied van vergelijkingen oplossen ook meetkundige kennis nodig. Denk aan gelijkvormigheid en de stelling van Pythagoras.

Hier kun je meer lezen over probleemaanpak.

Opgave 7: Omgeschreven cirkel

Van een gelijkbenige driehoek is de basis 60 en zijn de twee benen elk 50 cm. Er gaat een cirkel door de drie hoekpunten van deze driehoek.

Bereken de straal van deze cirkel.

Opgave 8: Stadsmuur in het Oude China

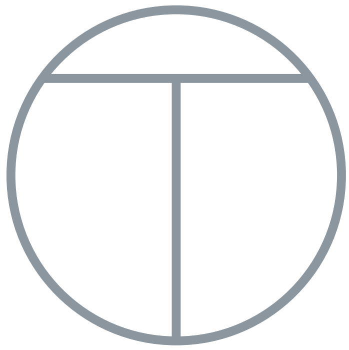
Een vraagstuk van de oude Chinese geleerde **Liu Hui (ongeveer 220 - ongeveer 280)**.

Veel steden in het Oude China waren omgeven door vier stadsmuren die een vierkant vormen. De Noordelijke muur bijvoorbeeld kijkt uit op het Noorden en loopt precies Oost-West. Er is een poort in het midden van elke zijde van dit vierkant. Twintig passen in de Noordelijke richting buiten de Noordelijke poort bevindt zich een boom. Als je de stad vanuit de Zuidelijke poort verlaat en je loopt 14 passen naar het Zuiden en 1775 passen naar het Westen, kun je die boom net zien.

Hoe lang is elk van de vier stadsmuren van deze stad?

Opgave 9: Orhan-Teerenstra logo

Dit is het lijnsymmetrische logo van transportbedrijf Orhan-Teerenstra. De twee lijnstukken die de T vormen zijn elk 6 dm lang en staan loodrecht op elkaar. Het logo wordt gemaakt van dunne stalen buizen en aan de gevel van hun bedrijfspand opgehangen.



Hoe groot moet de straal van de cirkel worden die de letter O voorstelt?

Begrippen

- recht evenredig verband — evenredigheidsconstante — hellingsgetal — richtingscoëfficiënt;
- lineaire functie — parameter;
- vergelijking van een lijn door twee gegeven punten — evenwijdige lijnen;
- snijpunten en nulpunten bij grafieken van lineaire functies.

Activiteiten

- een recht evenredig verband en de evenredigheidsconstante herkennen en er grafieken bij tekenen;
- een lineaire functie en de richtingscoëfficiënt herkennen en er grafieken bij tekenen;
- een formule opstellen bij een lijn door twee gegeven punten;
- snijpunten en nulpunten bij grafieken van lineaire functies berekenen en interpreteren.

Hoe hoger, des te kouder

Domein

Functies en grafieken

Hoofdstuk

Lineaire verbanden

Inhoud

4

4.1 Recht evenredig

Verkennen

Opgave V1

In Denemarken wordt als betaalmiddel de Deense Kroon (DKK) gebruikt. Een Deense Kroon is ongeveer € 0,13 waard.

a Je wilt iets kopen van € 29,00. In jouw portemonnee zitten 350 Deense Kronen. Heb je genoeg?

b Hoeveel Deense Kronen hou je over of kom je tekort?

c Als iets in Denemarken twee keer zo duur wordt, is dat omgerekend in euro dan ook zo?

d Schrijf een formule op die het verband aangeeft tussen de kosten in euro (E) en die in Deense Kronen (D).

Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Hoe groot is de opbrengst als de winkelier 1250 LegoBasic doosjes heeft verkocht?

b Hoeveel LegoBasic doosjes heeft de winkelier verkocht als de dagopbrengst hiervan € 332,63 is?

c Laat met een voorbeeld zien dat R verdubbelt als a verdubbelt.

d Als a drie keer zo groot wordt, wat gebeurt er dan met R? Laat dit zien met een berekening.

e Hier zijn R en a recht evenredig. Teken een bijpassende grafiek.

f Hoe kun je aan de grafiek zien dat het hier om een recht evenredig verband gaat?

Opgave 2

Een kopie maken met een kopieermachine kost € 0,125 per velletje.

a Hoeveel ben je kwijt als je in een jaar tijd 1750 kopieën maakt?

b Met welke formule kun je de kosten K in euro afhankelijk van het aantal kopieën a weergeven?

c Zijn deze twee variabelen recht evenredig met elkaar? Waarom?

d Maak een tabel en teken de grafiek bij deze formule.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

a Stel de juiste waarde van a in en maak de grafiek van $y_1 = 2x$.

b Waarom weet je zeker dat de grafiek van $y_1 = 2x$ door $(0,0)$ gaat?

c De formule $y_2 = 2x+3$ beschrijft geen recht evenredig verband. Laat met een getallenvoorbeeld zien dat een verdubbeling van de waarde van x geen verdubbeling van de waarde van y oplevert bij deze formule.

d Teken de grafieken van $y_1 = 2x$ en $y_2 = 2x + 3$ in één figuur.

e Van welk soort verband is er sprake bij de grafiek van $y_2 = 2x + 3$?

Opgave 4

Welke van de volgende formules beschrijven een recht evenredig verband? Licht je antwoord toe en geef in dat geval de evenredigheidsconstante. (Lees eventueel eerst in de **Theorie** na wat je daaronder verstaat.)

- $y_1 = x$
- $y_2 = -0{,}5x$
- $y_3 = -x + 1$
- $y_4 = 1/x$
- $y_5 = x^2$
- $y_6 = 0$

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Welke twee variabelen zijn hier recht evenredig met elkaar? En waarom?

Je kunt de formule ook vinden door uit te gaan van $t = a \cdot s$ en dan a uit te rekenen door de gegeven waarden van t en s in te vullen.

b Laat zien dat je daarmee op dezelfde formule uit komt.

Leeuwarden en Sneek liggen $26{,}4$ kilometer uit elkaar.

c Hoe lang doet de schaatser over deze tocht?

d Hoe lang duurt het voordat de schaatser de Elfstedentocht (200 km) heeft afgelegd als zijn gemiddelde snelheid gelijk is aan de constante snelheid tussen Leeuwarden en Sneek?

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2** nog eens. Je kunt ook een formule maken van de vorm $s = a \cdot t$.

a Waarom stelt nu de evenredigheidsconstante a de snelheid voor? In welke eenheden?

b Bereken nu opnieuw de waarde van a. Hoe ziet de formule er nu uit?

Je kunt de formule die je in deze opgave hebt gevonden ook afleiden uit die van de vorige opgave.

c Laat zien hoe dat gaat.

Verwerken

Opgave 7

In Zwitserland wordt met de Zwitserse Frank (SFr) betaald. De omrekenkoers is op zeker moment: 1 SFr = 0,83 euro.

a Je bent in Zwitserland op vakantie en je koopt een souvenir voor SFr.34,50. Hoeveel euro kost dit souvenir?

b Met welke formule kun je omrekenen van SFr naar euro? Noem het aantal SFr z en het aantal euro e.

c Als een ander souvenir anderhalf keer zo duur is in SFr, hoeveel keer zo duur is het dan in euro?

Voordat je op vakantie ging heb je waarschijnlijk Zwitserse Franks gekocht bij een bank in Nederland. Die bank rekent voor de aankoop van SFr nog € 5,00 aan kosten. Wel gebruiken ze dezelfde wisselkoers.

d Hoeveel kosten je SFr.250,00?

e Is bij een aankoop van SFr in de situatie beschreven bij d het aantal euro dat je betaalt recht evenredig met het aantal gekochte SFr? Licht je antwoord toe.

Opgave 8

De variabele y is recht evenredig met de variabele x. De bijbehorende evenredigheidsconstante is $5{,}8$.

a Welke formule beschrijft het verloop van y afhankelijk van x?

b Hoe ziet de grafiek van y afhankelijk van x er uit?

c Als x tien keer zo groot wordt, dan geldt dit ook voor y. Toon dit aan.

Opgave 9

Van een cirkel is de omtrek P recht evenredig met de diameter d. De bijbehorende evenredigheidsconstante is π genoemd.

a Welke formule geldt dus voor de omtrek van een cirkel?

b Is de omtrek van een cirkel ook recht evenredig met de straal r? Welke formule geldt er voor P afhankelijk van r?

c Is de oppervlakte A van een cirkel ook recht evenredig met de diameter? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Alexandra rijdt op haar fiets van haar huis naar dat van haar oma, een afstand van 25 km. Ze rijdt in een rustig tempo van 12 km/uur.

a Waarom is Alexandra's afstand a_1 in km tot haar eigen huis recht evenredig met haar reistijd t in uur? Geef een bijpassende formule.

b Waarom is Alexandra's afstand a_2 in km tot haar oma's huis niet recht evenredig met haar reistijd t in uur? Geef ook nu een bijpassende formule.

c Bereken hoeveel minuten Alexandra over die 25 km doet.

Opgave 11

In welke van de volgende situaties is y recht evenredig met x? Stel in dat geval een passende formule op.

a De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door de oorsprong en door $(12{,}39)$.

b De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door de punten $(4{,}12)$ en $(12{,}39)$.

c De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door de punten $(10{,}\text{-}6)$ en $(15{,}\text{-}9)$.

d De bijbehorende formule heeft de vorm $x \cdot y = c$ en gaat door het punt $(10; 0{,}5)$.

e De bijbehorende formule heeft de vorm $\frac{y}{x} = c$ en gaat door het punt $(10; 0{,}5)$.

Toepassen

Naast de temperatuurschaal van Celsius (die wij meestal wordt gebruiken) bestaan er nog andere **temperatuurschalen**, waaronder:

- De temperatuurschaal van Fahrenheit (die nog gebruikt wordt in de V.S.).
  Je krijgt het aantal graden Fahrenheit door het aantal graden Celsius te delen door 10, de uitkomst te vermenigvuldigen met 18 en vervolgens nog 32 erbij te tellen.
- De temperatuurschaal van Réamur.
  Je krijgt het aantal graden Réamur door het aantal graden Celsius te delen door 10 en dan te vermenigvuldigen met 8.

Opgave 12: Celsius, Fahrenheit, Réamur

Hierboven worden drie verschillende temperatuurschalen beschreven.

De temperatuur in graden Celsius noem je T_C, die in graden Fahrenheit T_F en die in graden Réamur T_R.

a Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_C naar T_F.

b Leid ook een omrekenformule af van T_F naar T_C.

c Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_C naar T_R.

d Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_R naar T_C.

e Welke van deze drie temperatuurschalen zijn recht evenredig?

4.2 Lineaire functies

Verkennen

Opgave V1

In het deel van de atmosfeer waarin het menselijk leven plaats vindt daalt de luchttemperatuur elke km dat je hoger komt gemiddeld met ongeveer $6{,}5$ °C. Onder bepaalde weersomstandigheden kan met de formule $T = 25 - 0{,}0065h$ temperatuur T in graden celsius op een hoogte van h meter worden berekend. Dat is handig voor bijvoorbeeld bergbeklimmers, dan weten ze welke temperaturen ze tijdens de klim kunnen verwachten.

a Hoe ziet de grafiek van T afhankelijk van h er uit?

b Is er sprake van een recht evenredig verband tussen T en h? Waarom?

c Bereken de temperatuur op 7500 meter hoogte.

d Op welke hoogte komt de temperatuur voor het eerst onder het vriespunt?

Opgave V2

Bij de GroenWinkel zijn de thuja's in de aanbieding voor € 4 en de jeneverbessen voor € 5. Een klant wil voor een heg struiken kopen en heeft daar € 150 voor begroot. Hoe kan de GroenWinkel hem van dienst zijn?

a Hoeveel thuja's levert de Groenwinkel als de klant 10 jeneverbessen koopt?

b Als het aantal jeneverbessen j en het aantal thuja's t is, welke formule kun je dan opschrijven voor de beschreven situatie?

c Is de bijbehorende grafiek een rechte lijn? Hoe kun je dat aan de formule zien?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Leg uit hoe je bij de formule $y = \frac{1}{3}x + 1$ snel een grafiek kunt tekenen.

b Teken snel een grafiek bij de formule $y = -0{,}25x + 4$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?

c Teken snel een grafiek bij de formule $y = 4x - 6$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?

d Teken snel een grafiek bij de formule $y = 5 - x$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?

e Hoe kun je aan de richtingscoëfficiënt zien of de grafiek daalt of stijgt?

f Hoe ziet de grafiek er uit als de richtingscoëfficiënt 0 is? Geef een voorbeeld van een formule waarin dit zo is.

Opgave 2

Je ziet in de **Uitleg** ook de formule $2x + 3y = 6$.

a Laat zien hoe je deze formule kunt herleiden tot $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

b Teken snel een grafiek bij deze formule.

c Herleid de formule $3x + 4y = 6$ tot y een lineaire functie is van x.

d Teken snel een grafiek bij de formule uit c. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?

e Bereken de richtingscoëfficiënt van de rechte lijn die hoort bij de formule $x - 2y = 10$.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

a Stel de juiste waarde van a en b in en maak de grafiek van $y = 2x + 1$.

b Waarom weet je zeker dat de grafiek van $y = 2x + 1$ door $(0,1)$ gaat?

c Het punt $(100,201)$ ligt op deze lijn. Ga dat na en bereken met behulp van de richtingscoëfficiënt van de lijn het punt dat hoort bij $x = 101$.

Opgave 4

Teken de grafieken van de volgende lineaire functies. Controleer je antwoorden met behulp van de applet.

- $y_1 = x - 3$
- $y_2 = -0{,}5x$
- $y_3 = -x + 1$
- $y_4 = 5 - 2x$
- $y_5 = 3$

Opgave 5

Schrijf de volgende formules zo, dat y een functie is van x. In welke gevallen is er sprake van een lineaire functie? Schrijf dan het hellingsgetal van de bijbehorende rechte lijn op.

a $x + y = 1$

b $2x - 3y = -2$

c $x \cdot y = 6$

d $y/x = 1$

Opgave 6

Laat zien, dat elke formule van de vorm $px+qy = r$ kan worden herleid tot een vorm waarin y een lineaire functie is van x. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende rechte lijn.

Opgave 7

In de vorige opgave heb je de formule $px + qy = r$ herleid tot een lineaire functie van de vorm $y = ...$ Dit lukt alleen als $q \neq 0$.

a Waarom is dat zo?

b Neem $p = 1$, $q = 0$ en $r = 2$. Welke formule krijg je? Welke punten in het assenstelsel voldoen aan deze formule?

c Leg uit waarom bij een formule zoals $x = 5{,}2$ een verticale lijn hoort. En waarom is hier geen sprake van een lineaire functie?

d Leg uit waarom bij een formule zoals $y = 5{,}2$ een horizontale lijn hoort. En waarom is hier wel sprake van een lineaire functie?

Opgave 8

Gegeven zijn de lineaire functies $y = ax + 6$.

Voor welke waarde van de parameter a gaat de grafiek door het punt $(3{,}5)$?

Opgave 9

De punten $A(2{,}5)$, $B(6{,}5)$, $C(6{,}8)$ en $D(2{,}8)$ vormen een rechthoek. De functies $y = ax + 1$ hebben als grafiek een rechte lijn.

Voor welke waarden van de parameter a gaat de grafiek door een zijde en/of een hoekpunt van rechthoek $ABCD$?

Verwerken

Opgave 10

Vier lineaire functies zijn gegeven door $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -2x + 1$, $y_3 = 2x + 5$ en $y_4 = -0{,}5x + 5$.

a Teken de vier bijbehorende rechte lijnen in één assenstelsel.

b Bij welke van deze lineaire functies hoort een rechte lijn die evenwijdig loopt met die van $y_1 = 2x + 1$? Hoe kun je dat aan de formule zien?

c Wat valt op aan de twee lijnen die horen bij y_3 en y_4?

Opgave 11

In mijnen geldt als vuistregel dat de temperatuur $0{,}025$ °C stijgt voor elke meter die je in de mijn afdaalt. Op een bepaald moment is de buitentemperatuur bij de ingang van een mijnschacht 20 °C.

a Welke temperatuur verwacht je dan op een diepte van 300 meter?

b Stel bij de buitentemperatuur van 20 °C een formule op voor T (de temperatuur in de mijn in °C) afhankelijk van d (de diepte in meters).

c Een mijnwerker meet op dat moment een temperatuur van $34{,}3$ °C. Hoe diep zit hij?

Op een ander tijdstip meet een mijnwerker die op 684 meter diepte zit een temperatuur $37{,}8$ °C.

d Hoeveel bedraagt op dat tijdstip de buitentemperatuur?

Opgave 12

Bij de lijnen l, m en n horen de formules:

- bij l: $4x + 6y = 21$;
- bij m: $x - 7y - 70 = 0$;
- bij n: $5x - 4y + 25 = 75$.

Bereken van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt en teken ze in één assenstelsel.

Opgave 13

Een kaars met een lengte van 40 cm brandt elk uur nadat hij is aangestoken $0{,}125$ cm op. De lengte L (in cm) van deze kaars hangt af van de brandtijd t (in uur).

a Welke formule geldt voor L afhankelijk van t? Waarom is hier sprake van een lineaire functie?

b Welke vergelijking hoort er bij de vraag: “Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?”?

c Los deze vergelijking op en geef antwoord op de bij b gestelde vraag.

Opgave 14

Door de formule $y = 2x + b$ is een hele serie lineaire functies gegeven.

a Als $b = 5$ krijg je één van die functies. Teken de bijbehorende grafiek.

b Voor welke waarde van de parameter b gaat de grafiek door het punt $(7{,}12)$?

c Voor welke waarde van de parameter b is $(12{,}0)$ het snijpunt van de grafiek met de x-as?

Opgave 15

Door de formule $y = ax + 10$ is een hele serie lineaire functies gegeven.

a Door welk punt gaan alle grafieken van deze functies?

b Voor welke waarde van de parameter a gaat de grafiek door het punt $(7,12)$?

c Voor welke waarde van de parameter a is zo'n functie evenwijdig met de lijn die hoort bij de formule $x + 2y = 4$?

Toepassen

Ieder huishouden verbruikt energie. Meestal betreft dat gas en elektra. De prijs daarvoor hangt natuurlijk af van de leverancier en bestaat uit twee gedeelten: een prijs voor het verbruik en een vaste leveringsprijs, die het vastrecht wordt genoemd. In huis heb je meters die het verbruik registreren. Hiernaast zie je een elektriciteitsmeter.

Bij een bepaalde energieleverancier betaal je bijvoorbeeld:

- voor het verbruik van gas:
  een vastrecht van € 45,00 per jaar en daar boven op € 0,38 per verbruikte m^3
- voor het verbruik van elektriciteit:
  een vastrecht van € 52,00 per jaar en daar boven op € 0,07 per verbruikte kWh (kilo-Wattuur)

Opgave 16: Energieverbruik

Hierboven vind je enkele gegevens over de kosten voor het energieverbruik van huishoudens.

a Een gemiddeld vierpersoons huishouden verbruikt ongeveer 1950 m^3 gas per jaar. Hoeveel moeten ze daarvoor bij deze leverancier betalen?

b Een gemiddeld vierpersoons huishouden verbruikt ongeveer 4800 kWh elektriciteit per jaar. Hoeveel moeten ze daarvoor bij deze leverancier betalen?

c Leid uit de tekst een formule af voor de kosten K_g per jaar afhankelijk van het aantal verbruikte m^3 gas g. Leid ook een formule af voor de kosten K_e per jaar afhankelijk van het aantal verbruikte kWh elektriciteit e.

Jordi woont op een studentenkamer en verbruikt jaarlijks ongeveer 430 m^3 gas en 1100 kWh elektriciteit. Zijn vriendin Amira heeft een eigen appartement en verbruikt jaarlijks ongeveer 680 m^3 gas en 1600 kWh elektriciteit. Jordi trekt bij Amira in. Hun gezamenlijk verbruik is nu ongeveer 760 m^3 gas en 1840 kWh elektriciteit. Ze zijn allebei bij deze energieleverancier.

d Zijn ze nu goedkoper uit?

Opgave 17: Waterverbruik

Bij een bepaalde waterleidingmaatschappij betaal je € 1,20 per kubieke meter water. Daarnaast betaal je ook een bedrag voor vaste lasten zoals administratie en onderhoud van de leidingen. Die vaste lasten bedragen bij deze maatschappij € 40,00 per jaar.

a Je verbruikt per jaar a m^3 water. Waarom zijn de kosten voor het waterverbruik exclusief de vaste lasten recht evenredig met a?

b Welke formule geldt voor de totale jaarlijkse kosten voor het waterverbruik K inclusief de vaste lasten?

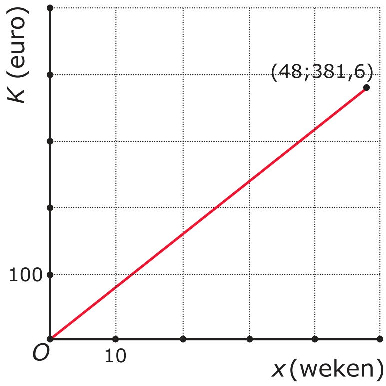
c Iemand moet over 2010 voor het waterverbruik € 810,40 betalen. Hoeveel m^3 water heeft hij dat jaar verbruikt.

4.3 Het hellingsgetal

Verkennen

Opgave V1

In de gemeente Overdal wordt maximaal 48 weken per jaar het huisvuil opgehaald. In elke zwarte vuilcontainer zit een chip die er voor zorgt dat elke leging geregistreerd wordt. De gemeente stuurt dan op het eind van het jaar een rekening. Als je iedere week de zwarte container laat legen moet je na een jaar € 381,60 betalen. Hiernaast zie je een grafiek waarin de kosten zijn uitgezet tegen het aantal weken.



a Bij de grafiek hoort een formule van de vorm $K = a \cdot x$ waarin a een constante is. Waarom is dat?

b Bereken de waarde van de evenredigheidsconstante a die bij deze grafiek past.

Opgave V2

In de gemeente Vijfhouten worden de kosten voor het ophalen van de zwarte vuilcontainers anders berekend. Elk gezin betaalt per jaar € 103,20 plus een vast bedrag voor elke geleegde zwarte container. Als je iedere week de container laat legen moet je na een jaar, net als in Overdal, € 381,60 betalen.

a Teken de grafiek van de jaarlijkse kosten K in euro afhankelijk van het aantal weken x dat de zwarte container wordt geleegd.

b De grafiek is een rechte lijn, dus er hoort een formule bij van de vorm $K = a \cdot x + b$. Welke waarde heeft b.

c Hoe kun je de waarde van de richtingscoëfficiënt a bepalen?

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je het hellingsgetal berekent als je van een rechte lijn twee punten weet.

In een andere gemeente wordt hetzelfde systeem gehanteerd als in de gemeente Vijfhouten, alleen met andere bedragen. Daar betaalt de familie Arends in 2011 € 277,50 en daarvoor hebben ze de zwarte container 34 keer laten legen. Hun buren hebben nog twee opgroeiende kinderen en moesten hun zwarte container 42 keer laten legen. Zij betaalden dat jaar € 327,50.

a Hoeveel keer extra werd de zwarte container van de buren geleegd?

b Hoeveel moesten de buren meer betalen?

c Hoeveel kost in deze gemeente dus het legen van de zwarte container per keer?

Ook in deze gemeente geldt een formule van de vorm $K = ax + b$.

d Welke waarde heeft de richtingscoëfficiënt a?

e Door welke twee punten gaat de rechte lijn die bij deze formule hoort? Hoe kun je vanuit die twee punten in één keer de richtingscoëfficiënt berekenen?

f Je hebt nu gevonden dat de formule er uit ziet als $K = 6{,}25x + b$. Hoe vind je de waarde van b?

Opgave 2

De grafiek van een rechte lijn gaat door $A(3{,}5)$ en $B(7{,}11)$. De bijbehorende formule heeft de vorm $y = ax + b$.

a Hoeveel neemt de waarde van x toe tussen beide punten?

b Hoeveel neemt de waarde van y toe tussen beide punten?

c Hoeveel neemt de waarde van y toe als x met 1 wordt verhoogd?

Je hebt de waarde van de richtingscoëfficiënt a berekend.

d Hoe ziet de formule er nu uit?

e Bereken de waarde van b.

f Schrijf tenslotte de complete formule op die bij deze lijn past.

g Kun je je antwoord nog controleren?

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

a Stel zelf de vergelijking op van de lijn door de punten $A(0{,}1)$ en $B(1{,}4)$ zonder het antwoord bij het voorbeeld te bekijken.

b Stel een vergelijking op van de lijn door $A(0{,}5)$ en $B(1{,}3)$.

c Stel een vergelijking op van de lijn door $A(0{,}\text{-}2)$ en $B(1{,}0)$.

d Stel een vergelijking op van de lijn door $A(1{,}2)$ en $B(2{,}4)$.

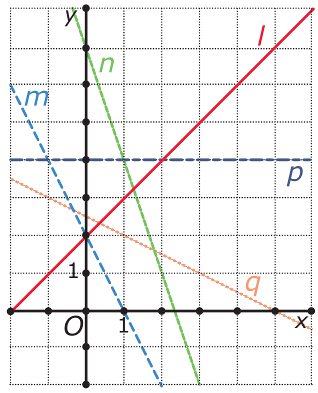
e Stel een vergelijking op van de lijn door $A(1{,}2)$ en $B(2{,}5)$.

f Stel een vergelijking op van de lijn door $A(3{,}6)$ en $B(4{,}1)$.

Opgave 4

Bekijk de rechte lijnen in de grafiek hiernaast. Elke rechte lijn is de grafiek van een lineaire functie.

Geef de bijbehorende formules.



Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2** en werk met de applet.

a Stel zelf de vergelijking op van de lijn door de punten $A(1,2)$ en $B(4,4)$ zonder het antwoord bij het voorbeeld te bekijken.

b Stel een vergelijking op van de lijn door $A(1,2)$ en $B(5,7)$.

c Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-2,6)$ en $B(1,0)$.

d Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-2,6)$ en $B(4,3)$.

e Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-3,-3)$ en $B(4,1)$.

f Stel een vergelijking op van de lijn door $A(2,0)$ en $B(0,3)$.

Opgave 6

Bij een lineaire functie hoort bij $x = -3$ de uitkomst -40 en bij $x = 2$ de uitkomst 10.

Stel de bijbehorende formule op.

Opgave 7

Bij het **Practicum** kun je telkens twee nieuwe lijnen maken door de vier gegeven punten te verplaatsen. Je ziet dan van beide lijnen de formule. Je kunt jezelf of elkaar oefenen door die na te rekenen. Je kunt ook lijnen met een gegeven formule maken door de punten op de juiste plek te zetten.

a Oefen met een medeleerling.

b Als je punten A recht onder punt $B(4,4)$ zet, is de lijn door beide punten evenwijdig aan de y-as. Welke formule hoort er bij zo'n lijn? Kun je dat verklaren?

c Bij welke lijnen horen formules van de vorm $y = b$? Kun je dat verklaren?

Opgave 8

Lijn k gaat door het punt $(2{,}24)$ en is evenwijdig met de lijn l. Bij lijn l hoort de formule $y = -x$.

Welke formule hoort bij lijn k?

Opgave 9

Lijn k gaat door het punt $(-3{,}20)$ en is evenwijdig met de lijn l door de punten $(4{,}5)$ en $(12{,}15)$.

Welke formule hoort bij lijn k?

Verwerken

Opgave 10

De **Chinese munteenheid** is de yuan. Je weet wel dat er iets meer dan acht yuan in een euro gaan, maar de precieze koers schommelt nogal. Bovendien rekent een bank in China als je euro's inwisselt voor yuan waarschijnlijk nog bepaalde omrekenkosten. Op zekere dag betaal je in Beijing voor 100 yuan € 85,00 en later betaal je voor 50 yuan € 43,75. Ga er van uit dat de wisselkoers niet is veranderd intussen.

a Hoeveel euro kost elke yuan?

b Hoeveel bankkosten betaal je elke keer als je yuan koopt?

Het bedrag E in euro dat je betaalt voor Y yuan kun je met een lineaire formule berekenen. Ga uit van een constante wisselkoers.

c Stel die formule op.

d Hoeveel kosten je 250 yuan?

Opgave 11

Stel in de volgende gevallen een formule op bij de beschreven lijn.

a De lijn heeft een hellingsgetal van 4 en gaat door het punt $(0{,}6)$.

b De lijn gaat door de punten $A(0{,}31)$ en $B(2{,}15)$.

c De lijn gaat door de punten $A(6{,}2)$ en $B(12{,}-1)$.

d De lijn gaat door de punten $A(0{,}10)$ en $B(7{,}0)$.

Opgave 12

Gegeven is de formule $6x - 2y = 15$.

a Laat zien dat y een lineaire functie is van x.

Er is een andere lineaire functie waarvan de grafiek door het punt $(4{,}0)$ gaat en evenwijdig loopt met die van $6x - 2y = 15$.

b Stel van deze lineaire functie een formule op.

Opgave 13

Deze tabel laat zien hoe een kaars opbrandt. Op een aantal tijdstippen is de lengte van de kaars gemeten in halve cm nauwkeurig. Teken je hierbij een grafiek dan lijken de punten op een rechte lijn te liggen. Het lijkt er daarom op dat L een lineaire functie is van t. Maar hoe weet je dat zeker?

tijdstip t in uur	0	3	5	9
lengte L in cm	43	38,5	35,5	25,5

a Neem aan dat L een lineaire functie is van t en stel met behulp van de eerste twee gegevens uit de tabel een daarbij passende formule op.

b Ga na, dat ook de andere twee gegevens in de tabel aan de gevonden formule voldoen.

c Waarom kun je nu wel zeggen dat de gegevens in de tabel bij een lineaire functie horen, maar kun je nog steeds niet zeggen dat L een lineaire functie is van t?

Opgave 14

In een binnenvaartschip wordt grind gestort. Bij een lading van 200 ton is de diepgang $2{,}25$ m en bij een lading van 600 ton is de diepgang $3{,}75$ m. Bij een diepgang van $5{,}25$ m is het schip volgeladen.

De diepgang D van dit schip in m is een lineaire functie van het gewicht van de lading L in ton.

a Stel een daarbij passende formule op.

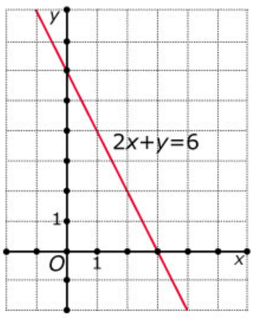
b Welke diepgang heeft het lege schip?

Het schip moet door een vaargeul met een diepte van 5 m. Voor de veiligheid moet er minstens 1 m water onder het schip overblijven.

c Hoeveel ton grind mag dit schip maximaal laden? Rond je antwoord af op gehele tonnen.

Toepassen

Een belangrijke toepassing van formules bij lijnen is de vlakke meetkunde. Je vat dan een lijn niet zozeer op als de grafiek van een lineaire functie, maar als meetkundig object. En je spreekt niet van een formule bij een lijn, maar van de **vergelijking van een lijn**. In dat geval moet je ook een gelijke schaalverdeling op beide coördinaatassen hebben!



Oxy-assenstelsel

In de meetkunde kun je de vorm $y = ax + b$ wel gebruiken voor de vergelijking van een lijn in een Oxy-assenstelsel, maar op die manier kun je geen lijnen evenwijdig aan de y-as beschrijven. Daarom wordt vaak de vorm $ax + by = c$ gebruikt. Denk er om dat in deze laatste vergelijking a niet de richtingscoëfficiënt van de lijn is!

Wat je in deze paragraaf hebt geleerd is het opstellen van een vergelijking van een lijn door twee gegeven punten. Daarmee kun je bijvoorbeeld nagaan of drie punten op een rechte lijn liggen, of lijnen evenwijdig zijn, of lijnen loodrecht op elkaar staan.

Opgave 15: Drie punten op één lijn

Hierboven kun je lezen wat de vergelijking van een lijn is.

Je wilt onderzoeken of de drie punten $O(0,0)$, $A(30,12)$ en $B(50,19)$ op één lijn liggen.

a Stel een vergelijking op van de lijn door O en A.

b Onderzoek nu of B op deze lijn ligt.

c Onderzoek of de punten A, B en $C(90,33)$ op één lijn liggen.

Opgave 16: Lijnen door punten op de assen

Als van een lijn het snijpunt met de x-as en het snijpunt met de y-as bekend zijn, kun je snel een vergelijking opstellen.

Neem de lijn door $A(3,0)$ en $B(0,2)$.

a Stel een vergelijking op van de lijn door A en B.

b Laat zien dat deze vergelijking te schrijven is als $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

Neem nu aan dat de lijn door $A(a,0)$ en $B(0,b)$ met zowel a als b ongelijk aan 0.

c Laat zien dat de vergelijking van deze lijn te schrijven is als $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

d Van welke lijnen kun je niet een formule zoals die in c opstellen?

Opgave 17: Evenwijdige en loodrechte lijnen

Je weet dat lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt evenwijdig zijn. Dat betekent dat je kunt nagaan of een figuur een parallellogram is door hem in een assenstelsel te plaatsen en na te gaan of er bij de lijnen door de hoekpunten sprake is van gelijke richtingscoëfficiënten.

Neem bijvoorbeeld vierhoek $ABCD$ met $A(10,20)$, $B(16,23)$, $C(12,30)$ en $D(18,53)$.

a Laat met behulp van richtingscoëfficiënten zien dat de zijden AB en CD evenwijdig zijn.

b Om aan te tonen dat deze vierhoek een parallellogram is, moet je nu laten zien dat ook het andere paar zijden evenwijdig is. Laat zien hoe je dat doet.

Stel je nu eens voor dat je in een Oxy-assenstelsel een lijn hebt met richtingscoëfficiënt 3 die door $A(0,2)$ gaat.

c Welke vergelijking heeft deze lijn? Waarom gaat hij ook door het punt $B(1,5)$?

d Pas een draaiing toe met centrum O en draaihoek $90°$. Teken de beeldpunten van A en B en teken de lijn door die beeldpunten.

e Welke richtingscoëfficiënt heeft de lijn door beide beeldpunten?

Stel je voor dat je in een Oxy-assenstelsel een lijn hebt met richtingscoëfficiënt p die door $A(0,q)$ gaat.

f Welke vergelijking heeft deze lijn? Waarom gaat hij ook door het punt $B(1,p+q)$?

g Pas een draaiing toe met centrum O en draaihoek $90°$. Welke richtingscoëfficiënt heeft de nieuwe lijn?

Je hebt nu laten zien dat als een lijn l als richtingscoëfficiënt p heeft, de lijn die loodrecht staat op l als richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{p}$ heeft.

h Neem de lijn l met vergelijking $x + 2y = 6$. Stel een vergelijking op van de lijn door $(1,5)$ en loodrecht op l.

i Je kunt het opstellen van een vergelijking van een lijn loodrecht op een andere lijn oefenen met de applet in het **Practicum**. Doe dit samen met een medeleerling; geef elkaar opgaven op.

Practicum: Formule opstellen van een lijn door twee punten

Applet

Met deze applet kun je nieuwe lijnen maken door de punten te verplaatsen. Je kunt dan zelf de bij deze lijnen passende formules maken en deze vergelijken met de formules die de applet geeft.

4.4 Lineaire modellen

Verkennen

Opgave V1

In 2006 zijn Bob en Jeroen samen 22 jaar oud. In 2010 is Jeroen twee keer zo oud als Bob.

Hoe oud zijn Bob en Jeroen in 2006?

Opgave V2

In 2006 zijn Bob en Jeroen samen 22 jaar oud. In 2010 is Jeroen twee keer zo oud als Bob. Je wilt hun leeftijden in 2006 weten. Hier zie je hoe je dit kunt aanpakken met behulp van lineaire verbanden.

a Laat x de leeftijd van Bob in 2006 zijn en y die van Jeroen in 2006. Welke formule kun je dan maken?

b Bedenk welke leeftijden Bob en Jeroen in 2010 hebben. Maak ook een formule voor de situatie in 2010.

c Beide formules kun je herleiden tot een vorm waarin y een functie van x is. Laat dat zien en teken vervolgens de bijbehorende grafieken in één assenstelsel.

d Hoe kun je nu hun leeftijden in 2006 bepalen?

e Vergelijk jouw oplossing bij de voorgaande opgave (als je die hebt gevonden) met de aanpak in deze opgave. Beschrijf voor- en nadelen van beide manieren van werken.

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je het snijpunt berekent van de grafieken bij twee lineaire formules.

a Bereken zelf het snijpunt van $x + y = 22$ en $y + 4 = 2(x + 4)$.

b Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules $x + y = 12$ en $y - x = 13$.

c Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules $y = 6x - 1$ en $y = 3x + 3$.

d Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules $y = 2x$ en $y = 3$.

e Bereken het snijpunt van de lijn bij de formule $2x + 5y = 10$ en de x-as.

Opgave 2

Je wilt het volgende probleem oplossen.

Boer Brandwijk koopt kippen en geiten. 50 dieren kosten hem € 1000. Een kip kost € 1 en een geit kost € 51. Hoeveel kippen en hoeveel geiten koopt hij?

a Probeer het probleem op te lossen.

Je kunt dit probleem oplossen door een lineair model op te stellen. Noem het aantal kippen x en het aantal geiten y.

b Welke twee lineaire formules kun je opstellen?

c Los het probleem verder op.

Je hoeft bij het oplossen van dit probleem niet per sé twee variabelen in te voeren. Eigenlijk is één variabele wel genoeg. En misschien heb je bij a het probleem wel zonder variabelen in te voeren opgelost, zoveel mogelijkheden zijn er nu ook weer niet...

d Noem het aantal kippen dat boer Brandwijk koopt x en probeer het probleem met één vergelijking op te lossen.

Opgave 3

In de **Theorie** kun je nalezen hoe je het snijpunt van de grafieken van twee lineaire formules berekent. Ook wordt besproken wat het nulpunt van een lineaire functie is en hoe je dit berekent.

a Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe het snijpunt van twee lineaire functies wordt berekend. Voer zelf de complete berekening uit en ga na, dat je hetzelfde krijgt.

b Bereken het snijpunt van de lijn l door $(0,5)$ en $(6,2)$ en de lijn k met bijbehorende formule $2x - 5y = 10$.

c Bereken het snijpunt van de lijn l door $(0,0)$ en $(2,1)$ en de lijn m door $(0,4)$ en $(4,0)$.

d Bereken het nulpunt van de lijn l door $(0,4)$ en $(2,1)$.

Opgave 4

Twee kaarsen branden gelijkmatig op, hun lengte L in cm is een lineaire functie van de brandtijd t in uren. Op $t = 0$ heeft kaars I een lengte van 35 cm en kaars II een lengte van 42 cm. 8 uur later zijn beide kaarsen nog 20 cm lang.

Hoeveel tijdsverschil zit er tussen de tijdstippen waarop deze kaarsen zijn opgebrand? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe iemand een lineair model opstelt bij de vraag wat voordeliger is, rijden op benzine of elektrisch rijden.

a Laat zien hoe je uit zijn aannames de formule voor de maandelijkse kosten van de benzine-auto kunt afleiden.

b Doe hetzelfde voor de jaarlijkse kosten van de elektrische auto.

c Bereken bij welk aantal jaarlijks gereden km de kosten voor de benzineauto even hoog zijn als voor de elektrische auto. Laat zien dat het antwoord overeenkomt met dat in het voorbeeld.

Opgave 6

Als een ondernemer een nieuw product op de markt brengt, dan maakt hij kosten. Die kosten kun je vaak grofweg in twee categorieën verdelen:

- vaste kosten voor het ontwikkelen van het product en het opzetten van een productielijn en een magazijn;
- variabele kosten die afhangen van het aantal van die producten dat hij maakt, bijvoorbeeld materiaalkosten, loonkosten, en dergelijke.

Stel je voor dat een bedrijf een nieuwe lamp op de markt wil brengen. De vaste kosten zijn becijferd op € 350.000. De kosten per geproduceerde lamp bedragen € 6,50. Het bedrijf gaat deze lampen verkopen voor € 11,50 per stuk.

a Noem het aantal verkochte lampen q. Welke formule kun je dan opstellen voor de totale kosten TK?

b Welke formule kun je opstellen voor de totale opbrengst TO?

c Bij beide formules horen rechte lijnen. Het snijpunt van deze twee lijnen noemen economen wel het 'break-even point'. Bereken dit punt. Waarom heeft het die naam?

Opgave 7

Voor een muziekuitvoering zijn 300 kaartjes verkocht. Kinderen betalen € 2,00 en volwassenen € 3,00. De totale inkomsten zijn in totaal € 787,00.

a Noem het aantal kinderen k en het aantal volwassenen v. Welke twee lineaire formules kun je dan afleiden?

b Schrijf deze formules zo, dat k een functie is van v.

c Bij beide lineaire functies horen rechte lijnen. Bereken het snijpunt van deze twee lijnen.

d Hoeveel kaartjes van elke soort zijn er verkocht?

Verwerken

Opgave 8

Gegeven zijn de lineaire functies $y_1 = \frac{1}{4}x$ en $y_2 = 2x + 5$.

a Teken de grafieken van beide functies in één figuur en geef daarin het snijpunt en alle nulpunten aan.

b Bereken het exacte snijpunt van beide grafieken.

Opgave 9

De lijn k gaat door $(5{,}0)$ en $(1{,}1)$. De lijn l gaat door $(0{,}5)$ en $(3{,}0)$.

a Stel bij deze lijnen passende lineaire formules op.

b Bereken het exacte snijpunt van beide lijnen.

Opgave 10

Een bedrijf brengt een nieuwe keukenmachine op de markt. Deze keukenmachine gaat € 124,50 kosten. Om het apparaat te kunnen produceren heeft het bedrijf kosten gemaakt. Het ontwikkelen van het apparaat en het inrichten van een productielijn hebben € 310.000,00 gekost. Verder kost elk apparaat het bedrijf aan materiaal en loonkosten € 82,00.

a Stel een formule op voor de totale kosten TK voor de productie van x van die keukenmachines.

b Stel ook een formule op voor de totale opbrengst TO van de verkoop van x van die keukenmachines.

c Hoeveel keukenmachines moet het bedrijf minstens verkopen om winst te kunnen maken?

Opgave 11

Een vrachtauto weegt volgeladen met $6{,}5$ m^3 zand $14{,}5$ ton. Nadat de chauffeur $2{,}5$ m^3 zand heeft bezorgd, weegt de vrachtauto met zand nog $10{,}75$ ton.

Hoeveel weegt de lege vrachtauto?

Opgave 12

De kantinebaas van een school koopt 500 pakken koeken. Hij neemt twee soorten: gevulde koeken van € 3,00 per pak en spritsen van € 2,00 per pak. Hij weet niet meer hoeveel pakken van elke soort hij heeft besteld, maar in zijn boekhouding kan hij zien dat de totale kosten € 1180,00 waren.

a Noem het aantal pakken spritsen x en het aantal pakken gevulde koeken y. Welke twee formules kun je dan afleiden?

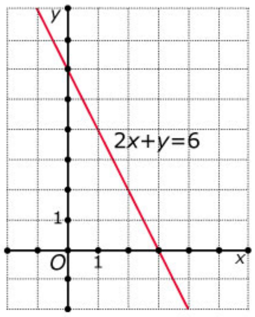
b Bereken nu met de gevonden formules hoeveel pakken van elke soort de kantinebaas heeft ingekocht.

Opgave 13

Een straalvliegtuig vertrekt om 11:00 uur uit Lissabon richting Amsterdam en vliegt met een gemiddelde snelheid van 800 km/h. Een propellorvliegtuig vertrekt om 12:15 uur uit Amsterdam richting Lissabon met een gemiddelde snelheid van 300 km/h. De afstand tussen Amsterdam en Lissabon is in vliegkilometers ongeveer 1850 km. (Neem aan dat beide plaatsen in dezelfde tijdzone zitten en dat beide routes ongeveer hetzelfde zijn.)

Bereken op welk tijdstip beide vliegtuigen elkaar passeren. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Toepassen



Oxy-assenstelsel

Een belangrijke toepassing van formules bij lijnen is de vlakke meetkunde. Je vat dan een lijn niet zozeer op als de grafiek van een lineaire functie, maar als meetkundig object. En je spreekt niet van een formule bij een lijn, maar van de **vergelijking van een lijn**. In dat geval moet je ook een gelijke schaalverdeling op beide coördinaatassen hebben!

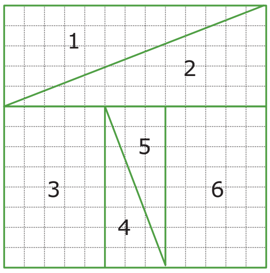
In de meetkunde kun je de vorm $y = ax + b$ wel gebruiken voor de vergelijking van een lijn in een Oxy-assenstelsel, maar op die manier kun je geen lijnen evenwijdig aan de y-as beschrijven. Daarom wordt vaak de vorm $ax + by = c$ gebruikt. Denk er om dat in deze laatste vergelijking a niet de richtingscoëfficiënt van de lijn is!

Wat je in dit onderdeel hebt geleerd is het berekenen van snijpunten van lijnen. En je kunt al vergelijkingen van lijnen opstellen. Daarmee kun je bijvoorbeeld nagaan of lijnen door hetzelfde punt gaan, of punten op dezelfde lijn liggen, of lijnen evenwijdig zijn of loodrecht op elkaar staan.

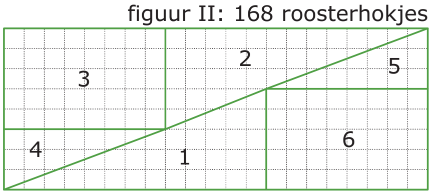
Opgave 14: Ontbrekend roosterhokje

Hierboven zie je nog eens hoe je lijnen in het platte vlak kunt beschrijven met vergelijkingen.

Hier zie je een klassieke puzzel waarbij kennis van lijnen en hun hellingsgetallen handig kan zijn. Bekijk de figuren I en II. Ze lijken de zijn samengesteld uit dezelfde vier rechthoekige driehoeken en twee rechthoeken. Toch is de oppervlakte van de figuur I gelijk aan 169 en die van figuur II gelijk aan 168. Hoe kan dat?



figuur I: 169 roosterhokjes

figuur II: 168 roosterhokjes


a Controleer eerst dat de beide gegeven oppervlaktes inderdaad kloppen.

b En, weet je waar de fout zit?

Opgave 15: Door één punt?

Onderzoek of deze drie lijnen door één punt gaan:

- Lijn k door (0,0) en (5,3).
- Lijn l door (0,6) en (11,12).
- Lijn m door (-7,-6) en (6,2).

4.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Met lineaire verbanden heb je al leren werken. In dit onderwerp is die kennis herhaald en uitgebreid. Het begrip lineaire functie is ingevoerd en je hebt geleerd hoe je een formule moet maken bij een lineaire functie als twee punten van de grafiek zijn gegeven. Ook het werken met (lineaire) vergelijkingen om snijpunten en nulpunten te berekenen is voorbij gekomen.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **'Lineaire verbanden'** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3 en 4 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

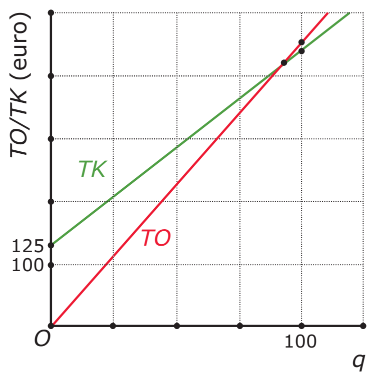
- recht evenredig verband — evenredigheidsconstante — hellingsgetal — richtingscoëfficiënt;
- lineaire functie — parameter;
- vergelijking van een lijn door twee gegeven punten — evenwijdige lijnen;
- snijpunten en nulpunten bij grafieken van lineaire functies.

Activiteiten

- een recht evenredig verband en de evenredigheidsconstante herkennen en er grafieken bij tekenen;
- een lineaire functie en de richtingscoëfficiënt herkennen en er grafieken bij tekenen;
- een formule opstellen bij een lijn door twee gegeven punten;
- snijpunten en nulpunten bij grafieken van lineaire functies berekenen en interpreteren.

Opgave 1

Je ziet hier grafieken van de totale opbrengst TO en van de totale kosten TK (voor inkoop, opslag en administratie) bij de verkoop van q usb-sticks. De grafiek van TO gaat door het punt $(100{,}450)$ en de grafiek van TK gaat door het punt $(100{,}440)$.



a Welke van de twee variabelen TO of TK is recht evenredig met het aantal verkochte usb-sticks? Waarom?

b Hoeveel bedraagt de evenredigheidsconstante? Welke formule past bij het recht evenredige verband?

c Als twee variabelen recht evenredig zijn, dan betekent een verdubbeling van een waarde van de éne ook een verdubbeling van de waarde van de andere. Laat met een getallenvoorbeeld zien dat dit hier ook opgaat.

Opgave 2

Bekijk de grafieken van de totale opbrengst TO en van de totale kosten TK (voor inkoop, opslag en administratie) bij de verkoop van q usb-sticks uit **Opgave 1** nog eens. De grafiek van TO gaat door het punt $(100,450)$ en de grafiek van TK gaat door het punt $(100,440)$.

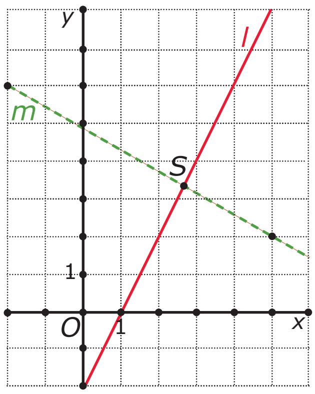
a Voor de totale kosten geldt $TK = 3{,}15q + 125$. Ga na, dat deze formule past bij de gegevens.

b Welk getal is de richtingscoëfficiënt van de getekende grafiek?

c Welke betekenis heeft de richtingscoëfficiënt voor de lineaire grafiek? En welke betekenis heeft dit getal hier voor de beschreven situatie?

Opgave 3

Je ziet hier twee rechte lijnen. Lijn l is de grafiek van de lineaire functie $y = 2x - 2$.



a Van lijn m zijn twee roosterpunten gegeven. Van welke lineaire functie is deze lijn de grafiek?

b Stel een formule op voor de lijn die evenwijdig loopt met l en door het punt $(5,2)$ gaat.

Opgave 4

Je ziet in de figuur bij **Opgave 3** twee rechte lijnen. Lijn l is de grafiek van de lineaire functie $y = 2x - 2$. En van lijn m heb je zelf een bijpassende formule opgesteld.

a Bereken de exacte coördinaten van het snijpunt van beide lijnen.

b Bereken het exacte nulpunt van de grafiek m.

Opgave 5

In De GroenWinkel staat een klant met een probleem. Hij wil graag een heg zetten met afwisselend laurieren en coniferen. De heg moet beginnen en eindigen met een laurier. Laurieren kosten € 4,50 en coniferen € 5,50. Het budget dat hij tot zijn beschikking heeft bedraagt € 200. Hoeveel exemplaren kan hij maximaal kopen van elke soort?

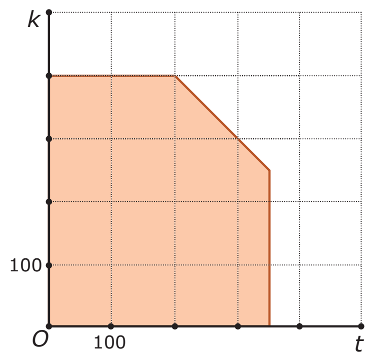
a Noem het aantal laurieren l en het aantal coniferen c. Welke twee formules kun je bij dit probleem opstellen?

b Bereken de waarden voor l en c die aan beide vergelijkingen voldoen.

c Hoeveel planten van elke soort zal de klant kopen?

Toepassen

Een belangrijke toepassing van lineaire verbanden is **lineair programmeren**. Om duidelijk te maken wat je je hierbij moet voorstellen een voorbeeld.



Stel je voor dat in een eenvoudige strandtent alleen koffie en thee als warme drankjes worden geserveerd. Elke dag neemt de eigenaar een voorraad koffie mee die geschikt is voor 400 bekers koffie en een voorraad theebuiltjes genoeg voor 350 bekers thee. Zowel de koffie als de thee wordt in dezelfde bekers opgediend, er zijn 600 van die bekers per dag beschikbaar.
Verder kost een beker koffie € 2,50 en een beker thee € 2,00.

Als je het aantal bekers koffie k noemt en het aantal bekers thee t dan betekenen de getallen over de aantallen bekers dat je alleen te maken hebt met de roosterpunten in het gekleurde gebied in de figuur hiernaast.
Bij welke aantallen verkochte bekers koffie en thee heeft de eigenaar van deze strandtent de meeste inkomsten?

Opgave 6: Koffie en thee

Lees in de gegevens over de koffie- en theeverkoop in een eenvoudige strandtent.

Bekijk welke variabelen er zijn ingevoerd. Je gaat nu eerst na hoe het gekleurde gebied ontstaat.

a Uit welk deel van de tekst volgt $k \leq 400$? Welke punten in het assenstelsel voldoen hier aan?

b Waarom gelden ook de ongelijkheden $t \leq 350$ en $k + t \leq 600$?

c Leg uit dat het gekleurde gebied aan die drie voorwaarden voldoet.

d Neem een willekeurig punt in het gekleurde gebied en laat zien dat het aan die drie voorwaarden voldoet.

Neem aan dat er op een bepaalde dag voor € 500,- aan koffie en thee is verkocht.

e Welke lineaire formule hoort daar bij? Teken zelf het gebied en teken daarin de grafiek bij deze formule.

f Teken ook de lijnen die horen bij een totale verkoop aan koffie en thee van € 750,- en van € 900,-.

g Kan de totale opbrengst aan koffie en thee op één dag nog hoger worden onder deze voorwaarden? Hoe hoog maximaal?

Opgave 7: Toneelvoorstelling (1)

In een zaal waar maximaal 1500 zitplaatsen zijn wordt een stuk opgevoerd door de plaatselijke toneelvereniging. Er zijn kaartjes voor kinderen en voor volwassenen, kinderen betalen € 2,50 en volwassenen € 6,00. Er zijn 1000 kaarten voor volwassenen en 1000 kinderkaarten gedrukt.

Noem het aantal kinderen dat de voorstelling bezoekt k en het aantal volwassenen v.

a Waaruit volgt dat $k \leq 1000$ en $v \leq 1000$? Teken het bijbehorende gebied in het assenstelsel.

b Welke ongelijkheid geldt er verder nog voor k en v?

c Geef het gebied aan dat aan alle drie de voorwaarden voldoet.

d Neem een willekeurig punt in het gekleurde gebied en laat zien dat het aan die drie voorwaarden voldoet.

Neem aan dat er € 3600,- aan inkomsten zijn van de kaartverkoop.

e Welke lineaire formule hoort daar bij? Teken in je figuur de grafiek bij deze formule.

f Teken ook de lijn die hoort bij € 6000,- aan inkomsten van de kaartverkoop.

g Hoeveel inkomsten zijn er maximaal mogelijk?

Opgave 8: Toneelvoorstelling (2)

Bekijk de voorgaande opgave nog eens. Om de maximale opbrengst van de kaartverkoop te berekenen is een lineair model opstellen wat overdreven. Maar het wordt wat anders als bijvoorbeeld wordt besloten dat bij deze toneelvoorstelling (die vooral voor kinderen is bedoeld) minstens anderhalf keer zoveel kinderen dan volwassenen moeten zijn.

a Waarom kon je in de vorige opgave wel meteen zien wat de maximale opbrengst zou zijn?

b Welke ongelijkheid geldt er vanwege deze extra voorwaarde?

c Geef het gebied aan dat aan alle vier de voorwaarden (dus ook aan deze extra voorwaarde) voldoet.

d Hoeveel bedraagt met deze extra voorwaarde de maximale opbrengst?

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

Math4all
www.math4all.nl

Werkblad bij Opgave 4 op pagina 7.