

Wiskunde

3 HAVO

Katern 3 / Werkboek / Opgaven

ConTeXt College





© 2025

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

1	Ruimtemeetkunde	1
1.1	Lichamen	4
1.2	Aanzichten	16
1.3	Doorsneden	31
1.4	Oppervlakte en inhoud	44
1.5	Totaalbeeld	57
2	Exponentiële verbanden	63
2.1	Groeifactoren	66
2.2	Exponentiële groei	78
2.3	Exponentiële functies	92
2.4	Totaalbeeld	103
3	Statistiek en kansrekening	107
3.1	Statistisch onderzoek	110
3.2	Centrum en spreiding	127
3.3	Kansen	140
3.4	Wegen en bomen	152
3.5	Totaalbeeld	161

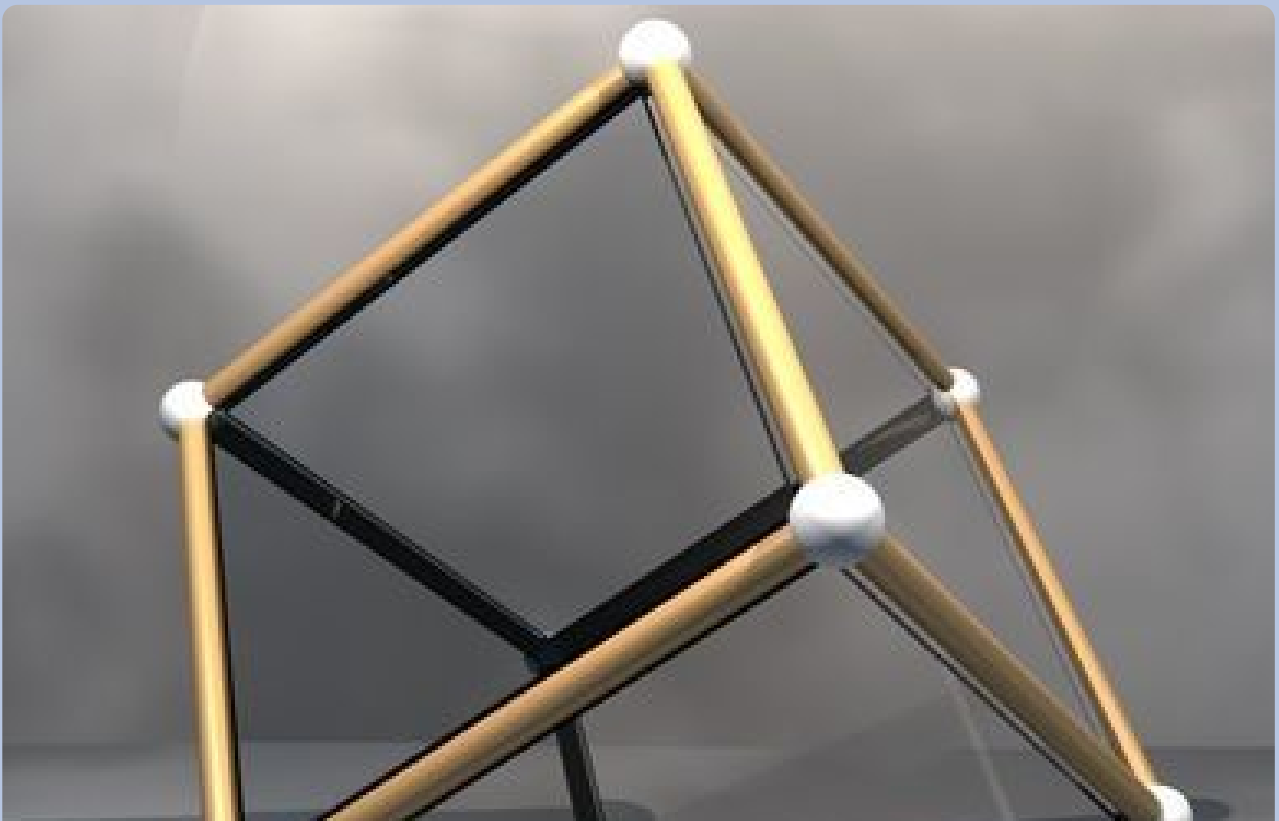
Begrippen

- ▶ lichaam — veelvlak — ribbe — hoekpunt — grondvlak — hoogte — diagonaalvlakken — zijvlaksdagonalen — lichaamsdiagonalen;
- ▶ parallelprojectie — drieaanzicht — vooraanzicht — bovenaanzicht — zijaanzicht;
- ▶ doorsnede — kruisende lijnen — inhoud;
- ▶ inhoud (volume) — lengtevergrotingsfactor — oppervlaktevergrotingsfactor — volumevergrotingsfactor.

Activiteiten

- ▶ werken met congruentie, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie in ruimtelijke situaties;
- ▶ aanzichten en uitslagen van lichamen maken en die toepassen bij berekeningen, onder andere van de oppervlakte van een lichaam;
- ▶ herkennen wanneer er sprake is van een doorsnede van een lichaam en een plat vlak — een doorsnede op ware grootte tekenen — herkennen wanneer lijnen elkaar snijden of kruisen of evenwijdig zijn;
- ▶ inhoud en oppervlakte van diverse lichamen berekenen — werken met lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor.

Een doorkijkje



Domein

Meetkunde

Hoofdstuk

Ruimteteekunde

Inhoud

1.1	Lichamen	4
1.2	Aanzichten	16
1.3	Doorsneden	31
1.4	Oppervlakte en inhoud	44
1.5	Totaalbeeld	57



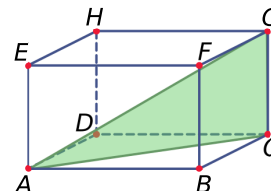
1.1 Lichamen

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 10$ cm, $BC = 4$ cm en $AE = 5$ cm.

Bereken $\angle GAC$.



Theorie

Opgave 1

Bekijk de [Uitleg](#). Je ziet er een voorbeeld van een prisma. Neem aan dat van het grondvlak alle zijden 4 cm zijn en dat de opstaande ribben allemaal 6 cm lang zijn.

- a** Hoeveel hoekpunten, hoeveel ribben en hoeveel grensvlakken heeft dit prisma?

- b** Hoeveel zijvlaksdagonalen heeft dit prisma? En hoeveel lichaamsdiagonalen?



- c** Teken het grondvlak van dit prisma op ware grootte. Leg uit, waarom diagonaal $BE = 8$ cm en diagonaal $BF = 2\sqrt{12}$ cm.

- d** Teken het diagonaalvlak $BEKH$ op ware grootte. Bereken de grootte van $\angle EBK$ in graden nauwkeurig.

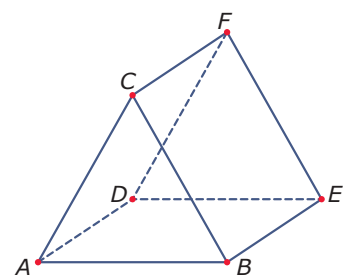
- e** Teken het diagonaalvlak $BFLH$ op ware grootte en bereken de grootte van $\angle FBL$ in graden nauwkeurig.

Opgave 2

Je ziet hier een ander prisma, de figuur staat ook op het [werkblad](#). Hier zijn het voorvlak en het achtervlak congruente gelijkzijdige driehoeken met zijden van 6 cm. Alle andere grensvlakken zijn vierkanten.

- a** Waarom heeft dit prisma geen lichaamsdiagonalen?

- b** Hoeveel zijvlaksdagonalen heeft dit prisma?





- c M is het midden van ribbe CF . Teken $\triangle ABM$ zowel in de figuur als op ware grootte.

- d Bereken de grootte van $\angle AMB$ in graden nauwkeurig.

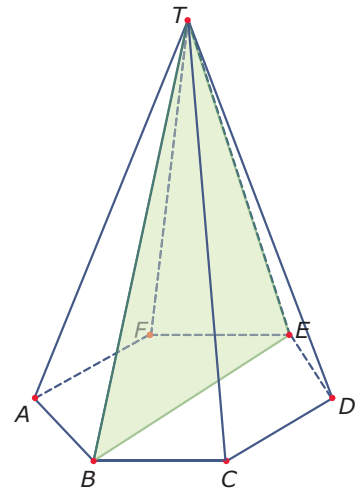
Opgave 3

Het lichaam hiernaast is een regelmatige zeszijdige piramide $ABCDEF.T$. Alle zijden van het grondvlak zijn 6 cm. Alle opstaande ribben zijn 24 cm.

- a Heeft deze piramide lichaamsdiagonalen? En zijvlaksdialagonalen? En diagonaalvlakken?

- b Bereken de grootte van $\angle BTE$ in graden nauwkeurig.

- c Bereken de grootte van $\angle BTF$ in graden nauwkeurig.



**Opgave 4**

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a** Leg uit waarom $AC = 10$ cm.

- b** Bereken nu zelf de lengtes van AG en CM .

- c** Welke twee gelijkvormige driehoeken vind je in diagonaalvlak $ACGE$? Leg uit waarom ze gelijkvormig zijn.

- d** Bereken de lengte van CN .

Opgave 5

Van een kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 4 cm is M het midden van ribbe GH .

- a** Bereken de lengte van elke lichaamsdiagonaal van deze kubus.



- b** Bereken de lengte van AM .

Opgave 6

Bekijk de verschillende lichamen nog eens, zie de [Theorie](#).

- a** Bestaat er een veelvlak dat geen enkele diagonaal heeft?

- b** Hoeveel hoekpunten, ribben en grensvlakken heeft een regelmatig achtzijdig prisma?

Volgens de formule van Euler geldt voor een veelvlak (zonder deuken) dat $G + H = R + 2$ als G het aantal grensvlakken, H het aantal hoekpunten en R het aantal ribben is.

- c** Voldoet een regelmatig achtzijdig prisma aan de formule van Euler?

- d** Welke lichamen hebben geen ribben?

Opgave 7

Bekijk in [Voorbeeld 2](#) hoe je met behulp van goniometrie een hoek in een ruimtelijke figuur berekent.

- a** Waarom is $\triangle NTM$ gelijkbenig?



- b** Waarom wordt er in het voorbeeld met tangens gewerkt? Is dat noodzakelijk?

- c** Bereken $\angle ATC$.

Opgave 8

Een kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribben van 4. P is een punt op ribbe GH en $PH = 1$ cm. S is het snijpunt van AP en BH .

- a** Bereken de lengte van AS .

- b** Bereken de grootte van $\angle ASB$ in graden nauwkeurig.

Opgave 9

Teken de uitslag van de cilinder beschreven in **Voorbeeld 3** op schaal 1 : 2.

**Opgave 10**

Teken een uitslag van een regelmatige vierzijdige piramide met een grondvlak van 4 bij 4 cm en een hoogte van 8 cm.

Verwerken**Opgave 11**

Gegeven is een kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 4,5 cm.

Bereken de grootte van de hoeken HBD en FCA .

Opgave 12

Piramide $ABCD.T$ heeft vier gelijke opstaande ribben van 10 cm. Het grondvlak is een rechthoek met $AB = 8$ cm en $BC = 6$ cm.

- a** Bereken de hoogte van deze piramide.



- b** Bereken de grootte van de hoeken ATC en BAT .

Opgave 13

Balk $ABCD.EFGH$ heeft ribben $AB = 4$, $AD = 3$ en $AE = 3$. Punt S is het snijpunt van alle lichaamsdiagonalen.

- a** Bereken $\angle ASB$ in graden nauwkeurig.

- b** Bereken $\angle ASC$ in graden nauwkeurig.

De punten P en Q liggen op ribbe AB . $AP = 1$ en $BQ = 1$. R is het snijpunt van PG en QH .

- c** Bereken $\angle PRQ$ in graden nauwkeurig.

**Opgave 14**

Droste chocolaatjes worden onder andere verpakt in kartonnen doosjes zoals je die hiernaast ziet. De bodem van deze doosjes is een regelmatige achthoek met zijden van ongeveer 7,8 cm. De hoogte van zo'n Droste-doosje is ongeveer 3,3 cm. Nadat je alle chocolaatjes op hebt haal je het plastic waar ze in hebben gelegen uit het doosje.



- a** Welke ruimtelijke figuur stelt het doosje bij benadering voor?

- b** Hoe groot zijn de hoeken van de achthoekige bodem van zo'n doosje?

- c** Hoe groot is het langste rechte staafje dat je nog op de bodem van dit doosje kunt leggen? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

- d** Hoe groot is het langste rechte staafje dat in dit doosje past?



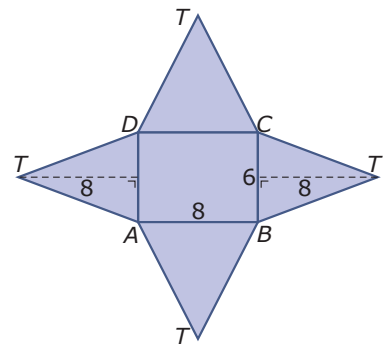
Opgave 15

Teken een uitslag van een cilinder waarvan hoogte en diameter 10 cm zijn.

Opgave 16

Je ziet hier de uitslag van een vierzijdige piramide $ABCD.T$ met een rechthoekig grondvlak.

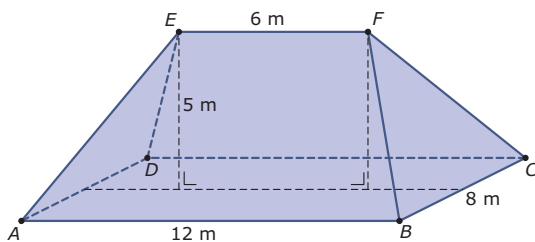
- a** Hoe lang zijn de ribben van deze piramide?



- b** Hoe hoog wordt deze piramide?

Toepassen

Hier zie je een vereenvoudigd model van het dak van een stolpboerderij. Het dak is zuiver symmetrisch, dus de ribben AE , DE , BF en CF zijn even lang en EF loopt evenwijdig met AB en CD . Dit is een **samengestelde ruimtelijke figuur**, die bestaat uit een prisma en twee piramides die je tot één piramide kunt samenvoegen.



De hoeken van de verschillende delen van zo'n dak kun je berekenen en ook allerlei lengtes die je nodig hebt om ze op schaal te tekenen zijn te berekenen.



Als je op weg naar huis om je heen kijkt onderweg, zul je daken in verschillende vormen tegenkomen. Bijna altijd valt er met de hulpmiddelen die je in dit onderdeel hebt gebruikt aan te rekenen. En dat is nuttig, al is het maar om te kunnen berekenen hoeveel m^2 aan dakbedekking ervoor nodig is.

**Opgave 17: Stulpboerderij**

Bekijk het sterk vereenvoudigde dak van een stulpboerderij in **Toepassen**. Gebruik de gegevens in de figuur.

- a** Laat zien hoe je de figuur kunt verdelen in een prisma en twee piramides die je kunt samenvoegen tot één vierzijdige piramide. Wordt dit een regelmatige vierzijdige piramide?

- b** Bereken de lengtes van de vier opstaande ribben van dit stolpdak.

- c** Bereken de drie hoeken van elk van de twee driehoekige dakdelen.

- d** Bereken de vier hoeken van elk van de twee trapeziumvormige dakdelen.

1.2 Aanzichten

Verkennen

Opgave V1

In de zie je drie aanzichten van een lichaam zonder deuken of gaten.

Om wat voor lichaam gaat het hier? Maak er een uitslag van en beschrijf de daarvoor noodzakelijke berekeningen.

Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet er een regelmatig zeszijdig prisma. Neem aan dat van het grondvlak alle zijden 4 cm zijn en dat de opstaande ribben allemaal 6 cm lang zijn. Op het **werkblad** bij deze opgave zie je de aanzichten van het prisma met enkele hoekpunten erbij aangegeven.

- a** Het vooraanzicht is 6 cm hoog. Hoe breed is de totale breedte van het vooraanzicht?

- b** Het zijaanzicht is ook 6 cm hoog. Hoe breed is de totale breedte van het zijaanzicht?



- c** In welk aanzicht is een opstaand grensvlak op ware grootte getekend?

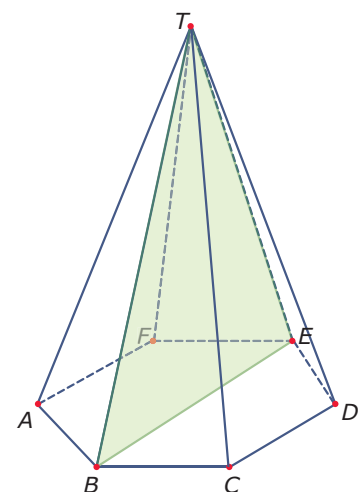
- d** Zet bij de aanzichten op het werkblad de letters op de juiste plek bij de hoekpunten.

- e** Teken in de aanzichten het diagonaalvlak $BEKH$.

Opgave 2

Het lichaam hiernaast is een regelmatige zeszijdige piramide $ABCDEF.T$. Alle zijden van het grondvlak zijn 4 cm. Alle opstaande ribben zijn 12 cm.

- a** Bereken de hoogte van deze piramide.





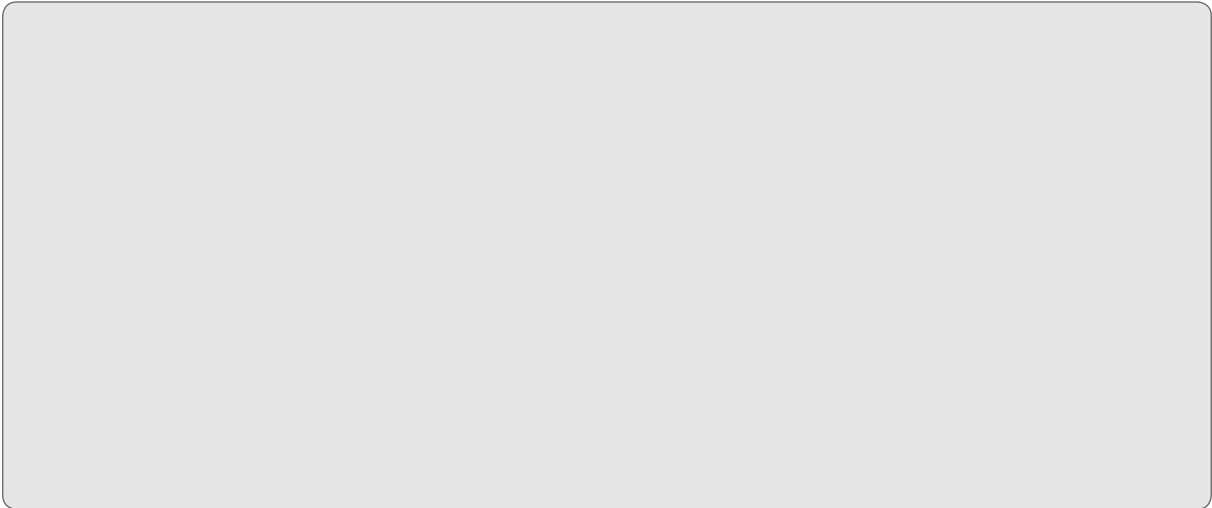
- b** Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van deze piramide op schaal 1 : 2.

- c** Zet de letters van de hoekpunten op de goede plaats in de aanzichten.

- d** Welke opstaande ribben worden op ware grootte weergegeven? En in welk aanzicht?



- e** Geef het getekende diagonaalvlak in de aanzichten weer.



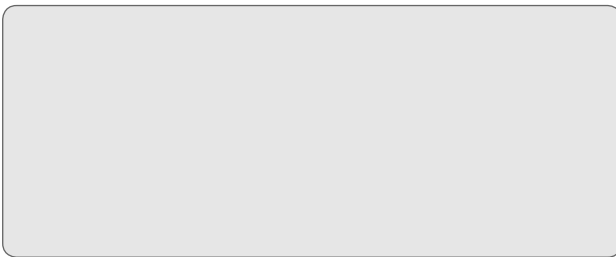
Opgave 3

Je ziet hier een drieaanzicht van een lichaam. De figuur staat ook op een **werkbblad**.

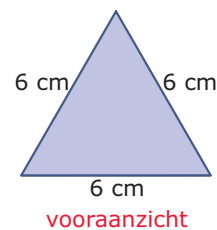
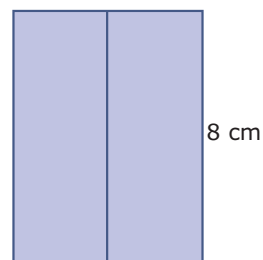
- a** Om wat voor lichaam gaat het hier?



- b** Bij het zijaanzicht ontbreekt een afmeting. Hoe groot moet de hoogte ervan zijn?



bovenaanzicht



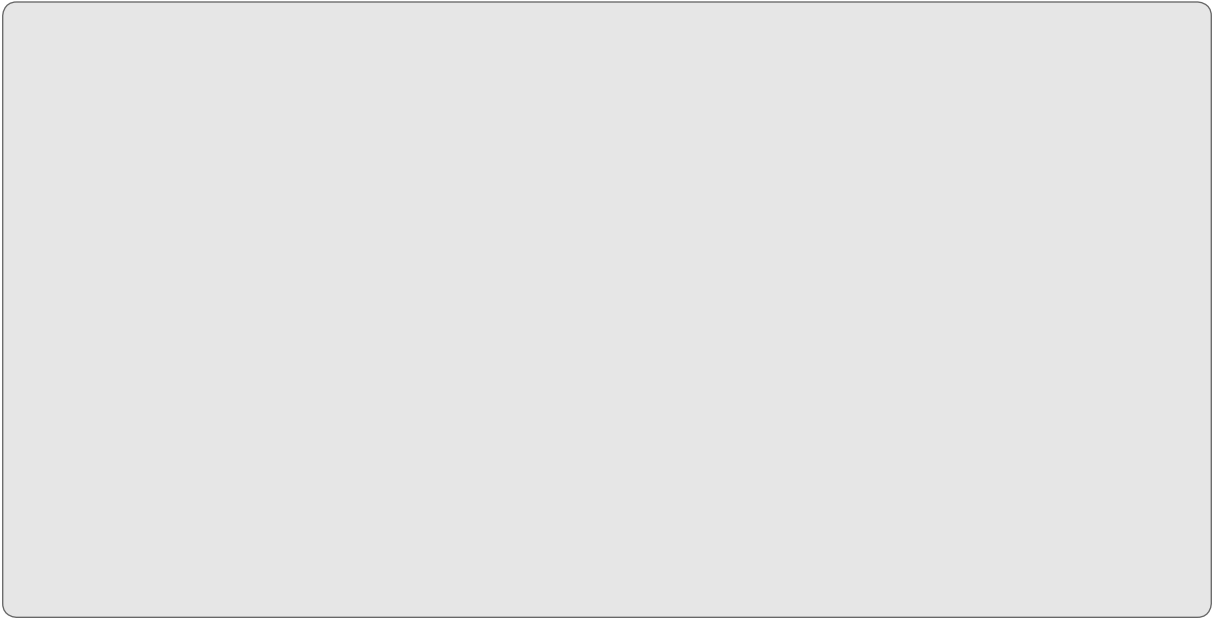
vooraanzicht



zijaanzicht



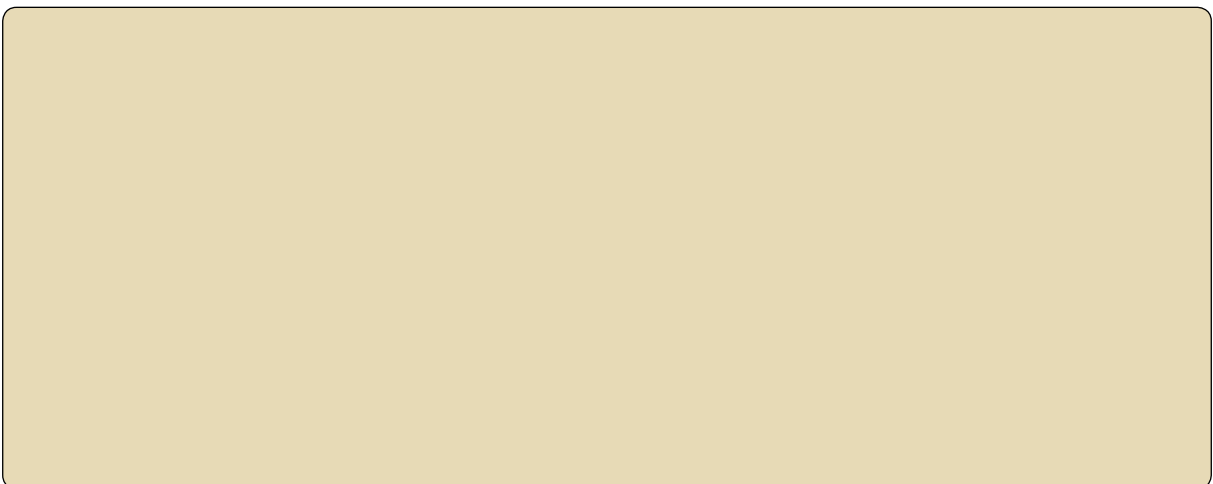
- c** De figuur krijgt de naam $ABE.DCF$. Zet in de aanzichten de letters bij de juiste hoekpunten.



Opgave 4

In **Voorbeeld 1** wordt een drieaanzicht van een doos getekend.

- a** Teken dit drieaanzicht zelf op schaal 1 : 20.





De figuur is een prisma $ABCDE.FGHIJ$. Hierin is vijfhoek $ABCDE$ het voorvlak, met $AB = BC = 6$ dm en $AE = 4$ dm.

- b** Zet de letters in je drieaanzicht op de juiste plek.

- c** Bereken nu de hoogte van de voorkant van de doos, dus de hoogte van punt E boven lijn BC in mm nauwkeurig.

- d** Bereken de grootte van $\angle AED$ in graden nauwkeurig.

Opgave 5

Van een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ zijn alle ribben 4 cm.
Teken een drieaanzicht van deze piramide.

**Opgave 6**

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a** Waarom volgt uit de gegevens dat $b \cdot h = 12$ en $l \cdot h = 8$?

- b** Er worden drie oplossingen gegeven die correct zijn. Zijn er nog meer correcte oplossingen?

- c** Waarom is de combinatie 1, 12, 4 bijvoorbeeld niet correct?

Opgave 7

Het vooraanzicht van een balk bestaat uit 30 kubusjes en het linker zijaanzicht uit 21.
Uit hoeveel kubusjes bestaat de balk?

Opgave 8

Een balk bestaat in totaal uit 432 kubusjes. Het vooraanzicht bestaat uit 72 kubusjes.
Uit hoeveel kubusjes kan het zijaanzicht dan bestaan?

**Opgave 9**

Het bovenaanzicht van een balk bestaat uit 44 kubusjes en het vooraanzicht uit 66.
Uit hoeveel kubusjes bestaat de balk?

Opgave 10

In **Voorbeeld 3** zie je twee aanzichten van een lichaam.

- a** Hoe ziet het vooraanzicht van dit lichaam er uit? En waarom weet je dat zeker?

- b** Waarom is de hoogte van het vooraanzicht niet gelijk aan de hoogte van de driehoek ABT ?
Laat zien hoe je daarvan de hoogte berekend.

- c** Bereken de totale oppervlakte van dit lichaam, zowel exact als in mm^2 nauwkeurig.

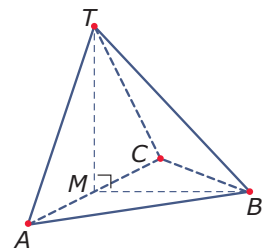
**Opgave 11**

Van een veelvlak is het bovenaanzicht een gelijkzijdige driehoek met zijden van 4 cm en het vooraanzicht een vierkant met zijden van 4 cm.

Welk veelvlak is dit? Bereken de totale oppervlakte van dit veelvlak.

Verwerken**Opgave 12**

Je ziet hier een piramide $ABC.T$ waarvan het grondvlak ABC een gelijkzijdige driehoek met zijden van 6 cm is. De top T ligt recht boven het midden M van ribbe AC . De ribben AT en CT zijn allebei 5 cm lang.



- a** Teken een vooraanzicht, een zijaanzicht en een bovenaanzicht van deze piramide.



- b** Bereken de lengte van ribbe BT .

- c** Bereken de grootte van $\angle MTB$ in graden nauwkeurig.

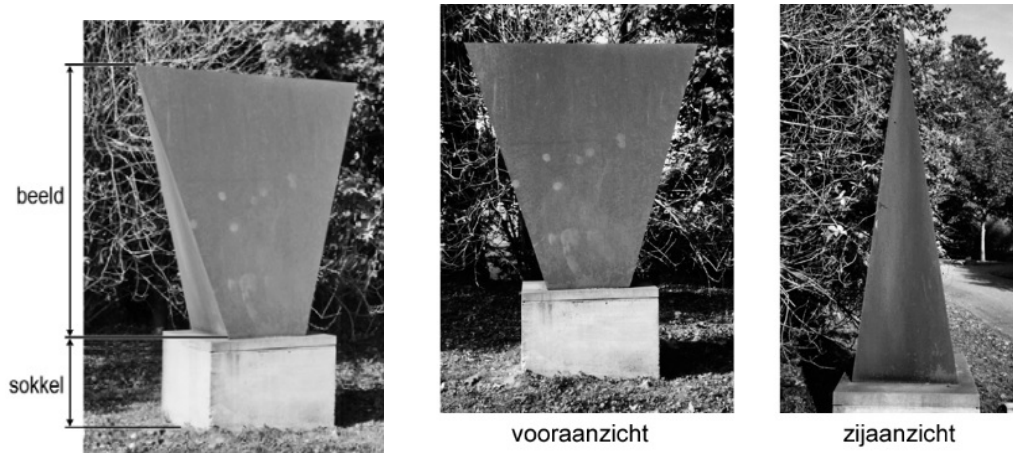
Opgave 13

Een veelvlak $ABC.DEF$ heeft als vooraanzicht een vierkant met zijden van 4 cm en als zijaanzicht een gelijkbenige driehoek waarvan de basis ook 4 cm is.

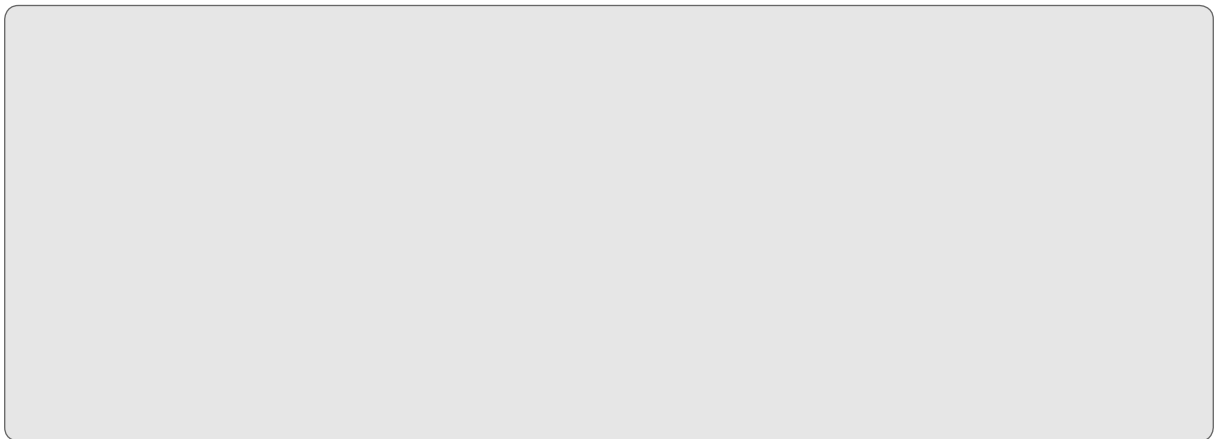
Teken het bovenaanzicht van dit veelvlak en bereken er de oppervlakte van.

**Opgave 14**

In het beeldenpark in Zwijndrecht staan verschillende beelden. Eén van die beelden is het beeld op de foto hieronder. De onderkant van het beeld dat op de sokkel staat, is een vierkant met zijden van 50 cm. Het beeld is 100 cm hoog en de lengte van de bovenkant is 100 cm lang. Het vooraanzicht en het zijaanzicht zijn symmetrisch.

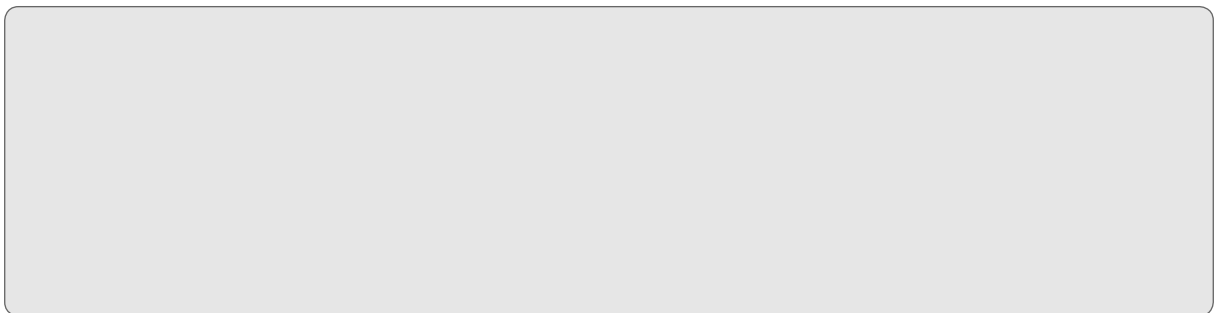


- a** Teken een bovenaanzicht van dit beeld op schaal 1 : 10.



Het grondvlak van dit beeld is een vierkant $ABCD$. De bovenkant is een ribbe EF . In het zijaanzicht zie je de punten A , B en E .

- b** Bereken de lengte van ribbe BE in mm nauwkeurig.





- c** Als het beeld in de verf zou worden gezet, hoeveel cm^2 verf is daar dan voor nodig?

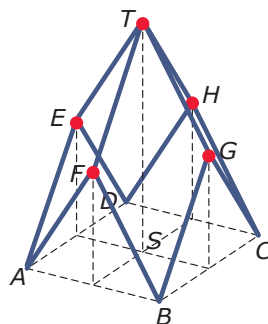
(bron: vmbo TL examen 2007 - II)

Opgave 15

Het vooraanzicht van een balk bestaat uit 40 kubusjes en het bovenaanzicht uit 24 kubusjes. Uit hoeveel blokjes kan dit lichaam minimaal bestaan? En maximaal?

Opgave 16

Op de foto hieronder zie je kinderen spelen op een speeltoestel. Het speeltoestel is een constructie van metalen buizen waarin een net is gespannen. Op de tekening ernaast zie je de metalen constructie die bestaat uit vier even grote ruiten. Elke zijde van zo'n ruit is 3 meter lang. Elk van die ruiten heeft bij het punt op de grond een hoek van 60° . Alle verticale stippellijnen staan loodrecht op vierkant $ABCD$.



- a** Teken een bovenaanzicht van de metalen constructie op schaal 1 : 10.



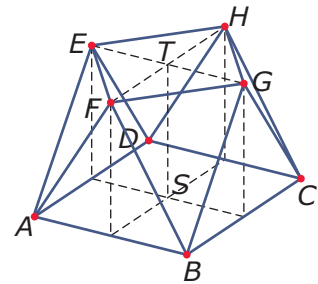
- b** Bereken hoe hoog punt T boven de grond zit, dus de lengte van TS in cm nauwkeurig.

(bron: vmbo TL examen 2011 - I)

Toepassen

Dit is een draadmodel van een achtkanter. Dat is een symmetrisch lichaam waarvan het grondvlak een vierkant $ABCD$ is met zijden van 8 cm en ook het bovenvlak $EFGH$ een vierkant is. Alle opstaande grensvlakken zijn gelijkbenige driehoeken met ribben van 6 cm.

Van deze achtkanter liggen alle hoekpunten van het bovenvlak recht boven de middens van de zijden van het grondvlak. Dat maakt alle aanzichten eenvoudig...



Opgave 17: Achtkanter (I)

Bekijk de achtkanter in [Toepassen](#). Gebruik de gegevens in de tekst.

- a** Bereken de zijden van het bovenvlak $EFGH$.

- b** Bereken de hoeken van $\triangle BGF$.



- c** Teken een drieaanzicht van deze achtkanter. Zet de letters van de hoekpunten op de juiste plaats in je figuur.

- d** Stel je voor dat deze achtkanter massief zou zijn. Hoe groot bedraagt dan zijn totale buitenoppervlakte?

Opgave 18: Achtkanter (II)

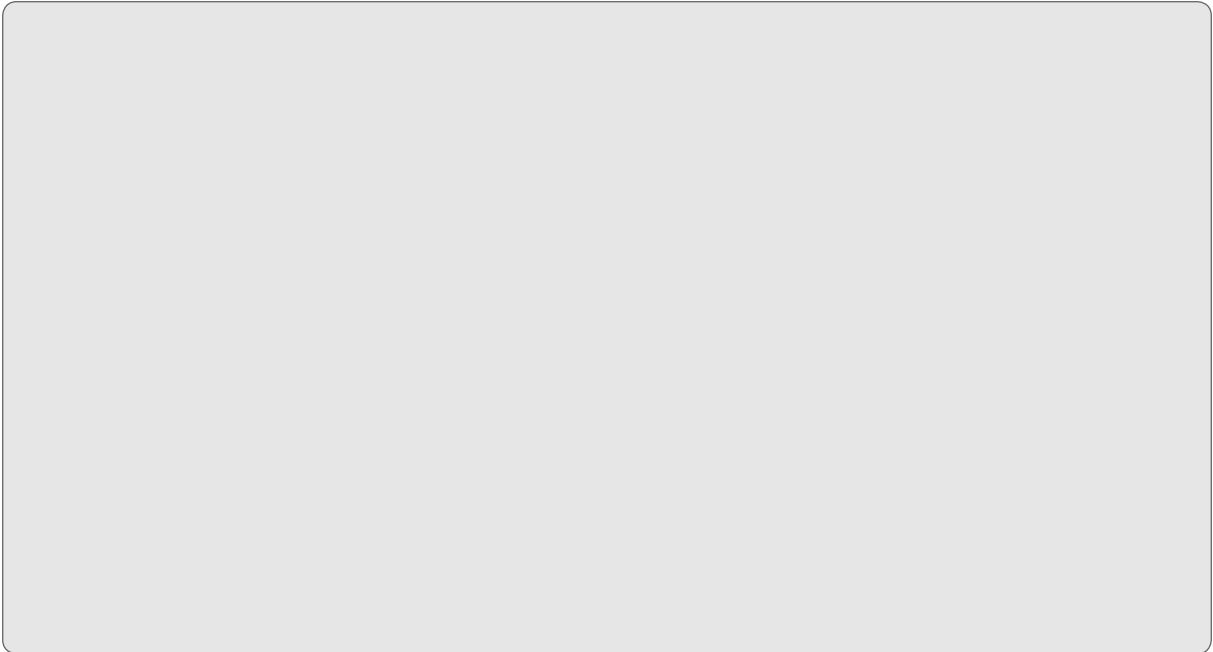
Van een andere achtkanter is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijden van 8 cm en het bovenzvlak $EFGH$ een vierkant met zijden van 4 cm.

De zijden van alle opstaande gelijkbenige driehoeken zijn ook nu 6 cm.

- a** Bereken van deze achtkanter de hoogte TS .



- b** Teken een drieaanzicht van deze achtkanter. Zet weer de letters van de hoekpunten op de juiste plaats in je figuur.



- c** Stel je voor dat deze achtkanter massief zou zijn. Hoe groot bedraagt dan zijn totale buitenoppervlakte?

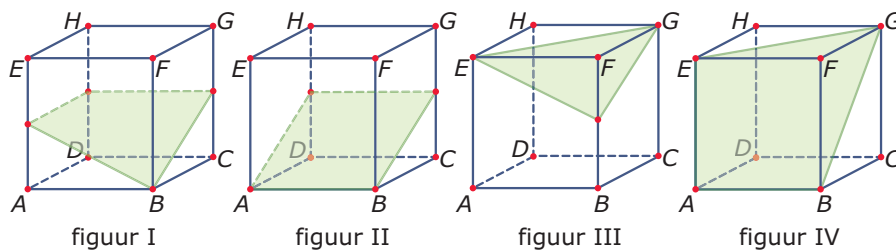


1.3 Doorsneden

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier en op het [werkblad](#) vier kubussen met ribben van 2 cm. Joop heeft geprobeerd om in elke kubus te laten zien hoe een bepaald plat vlak de kubus doorsnijdt.



- a** Welke tekeningen zijn dan fout? En waarom?

- b** Verbeter de foute figuren.

- c** Welke vorm heeft de doorsnede van figuur II in werkelijkheid? En welke afmetingen?



Theorie

Opgave 1

Bekijk de kubussen in de **Uitleg**. Je ziet dat in de bovenste kubus een vlak $APGQ$ is getekend.

- a** Teken het aanzicht van de bovenste kubus waarbij je kijkt in de richting van BD met het vlak $APGQ$ er in. Waaraan zie je dat $APGQ$ een plat vlak is?

- b** Kun je van de onderste kubus een aanzicht tekenen waarbij de punten A , P , G en H op één lijn liggen?

- c** Waarom zijn de zijden van $APGQ$ in twee overstaande vlakken van de kubus evenwijdig? En waarom zijn ze dus ook gelijk?

- d** Teken de doorsnede $APGQ$ op ware grootte.

- e** Bereken de lengte van diagonaal AG .

**Opgave 2**

In de **Uitleg** wordt gesproken over kruisende lijnen.

- a** Waarom zijn de lijnen AH en PG kruisend?

- b** Zijn de lijnen AP en HG kruisend, of snijdend? (Denk er om dat deze lijnen ook buiten de lijnstukken AP en HG doorlopen.)

- c** Zijn de lijnen AP en EF kruisend, of snijdend?

Opgave 3

In kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 6 cm is vierhoek $KCGL$ een doorsnede van een plat vlak met de kubus. Punt K is het midden van ribbe AB .

- a** Waarom is driehoek KCG geen complete doorsnede van een vlak met deze kubus?

- b** Waarom moet punt L het midden van ribbe EF zijn?

- c** Teken de doorsnede $KCGL$ op ware grootte.

**Opgave 4**

In **Voorbeeld 1** is een doorsnede van een plat vlak met een balk getekend. Je wilt die doorsnede op ware grootte tekenen.

- a** Waarom zijn de lijnen PQ en DG evenwijdig?

- b** Bereken de lengte van DG en die van DP .

- c** Reken nu de lengtes van PQ en QG na.

- d** Bereken de lengte van diagonaal PG .

- e** Teken trapezium $DPQG$ op ware grootte.

**Opgave 5**

Gegeven is balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm en $BF = 5$ cm. M is het midden van AE , N is het midden van CG en K ligt op BF met $BK = 1$ cm.

- a** Is $HMKN$ een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.

- b** Is KEG een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.

- c** Is KMN een doorsnede van een vlak met deze balk? Licht je antwoord toe.

Vierhoek $HMBN$ is een doorsnede van een vlak met de gegeven balk.

- d** Teken deze vierhoek op ware grootte. Schrijf alle noodzakelijke berekeningen op.

Opgave 6

Gegeven is balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm en $BF = 5$ cm. M is het midden van AE , N is het midden van CG .

Er worden nu steeds twee lijnen gegeven. Schrijf op of ze elkaar snijden, evenwijdig zijn of elkaar kruisen.

- a** MH en BN .



b MB en HC .

c AE en HG .

d MF en AB .

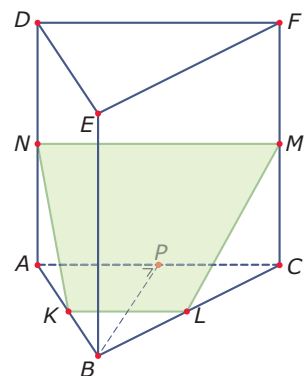
e MN en HB .

f CM en AF .

Opgave 7

Hier zie je een regelmatig driezijdig prisma $ABC.DEF$ waarvan alle ribben 8 cm lang zijn. De punten P , K , L , M en N zijn steeds de middens van de ribben waar ze op liggen.

a Waarom is vierhoek $KLMN$ de doorsnede van een vlak met dit prisma?





- b** Teken vierhoek $KLMN$ op ware grootte. Schrijf alle daarvoor noodzakelijke berekeningen op.

- c** Bereken (als je dat bij b nog niet hebt gedaan) alle hoeken van vierhoek $KLMN$ in graden nauwkeurig.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** zie je dat de doorsnede van een plat vlak met een kubus een zeshoek kan zijn.

- a** Waarom weet je zeker dat hier sprake is van een doorsnede van een kubus en een plat vlak?

- b** Hoe teken je deze zeshoek op ware grootte?



- c** Kan de doorsnede van een vlak en een kubus ook een vijfhoek zijn? Schets of beschrijf daarvan een voorbeeld.

- d** Geef ook voorbeelden waarbij de doorsnede van een vlak en een kubus een vierhoek of een driehoek is.

Opgave 9

In een kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 8 cm is een doorsnede $KLMH$ getekend. Hierin ligt punt K op ribbe AE zo, dat $AK : KE = 3 : 1$. Verder ligt punt M op ribbe CG zo, dat $CM : MG = 3 : 1$.

- a** Waarom moet punt L dan het midden zijn van ribbe BF ?

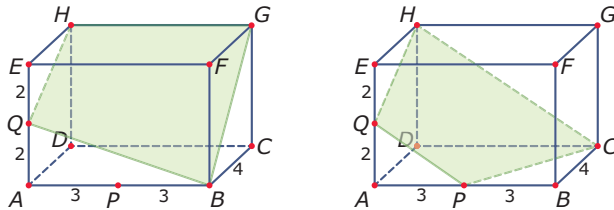
- b** Teken deze vierhoek op ware grootte. Schrijf de noodzakelijke berekeningen op.



Verwerken

Opgave 10

Je ziet hier in balk $ABCD.EFGH$ twee keer een figuur getekend die vier hoekpunten heeft.

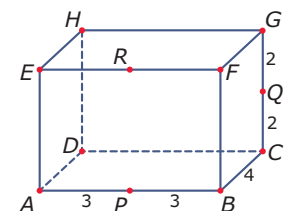


Leg uit bij welke van beide figuren er sprake is van de doorsnede van een plat vlak en de getekende balk. Licht je antwoord toe.

Opgave 11

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met daarin de punten P , Q en R die alle drie het midden van een ribbe van de balk vormen.

Schrijf van de volgende lijnen op of ze elkaar snijden, elkaar kruisen, of evenwijdig zijn. Licht je antwoord toe.



- a** PQ en BF .

- b** PQ en RG .

- c** PR en GH .



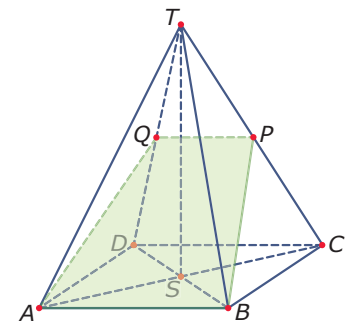
d RG en PC .

e PC en AD .

Opgave 12

Van de regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ is punt P het midden van ribbe CT en punt Q het midden van ribbe DT . Verder is gegeven dat $AB = BC = 8$ cm en $AT = 12$ cm.

a Bereken de lengte van lijnstuk BP .



Vierhoek $ABPQ$ is de doorsnede van de piramide met een vlak.

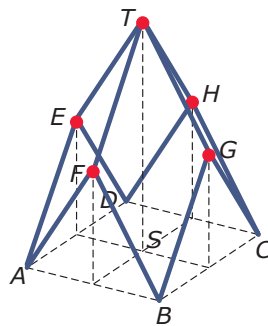
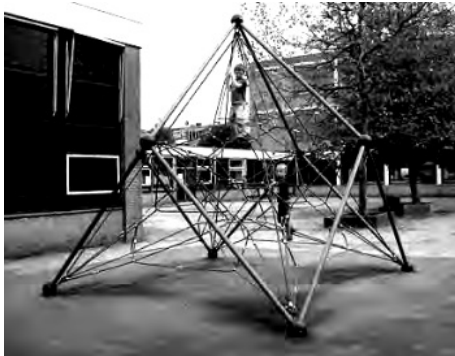
b Teken deze doorsnede op ware grootte.



- c Bereken de hoeken van vierhoek $ABPQ$ in graden nauwkeurig.

Opgave 13

Op de foto hieronder zie je kinderen spelen op een speeltoestel. Het speeltoestel is een constructie van metalen buizen waarin een net is gespannen. Op de tekening ernaast zie je de metalen constructie die bestaat uit vier even grote ruiten. Elke zijde van zo'n ruit is 3 meter lang. Elk van die ruiten heeft bij het punt op de grond een hoek van 60° . Alle verticale stippellijnen staan loodrecht op vierkant $ABCD$. De vier ruiten vormen samen met de vier opstaande driehoeken en het vierkante grondvlak een lichaam.



- a Bereken de hoeken van dwarsdoorsnede ACT van dit lichaam in graden nauwkeurig.

Neem aan dat M het midden van AD en N dat van BC is.

- b Teken de dwarsdoorsnede $MNGTE$ van dit lichaam op ware grootte.

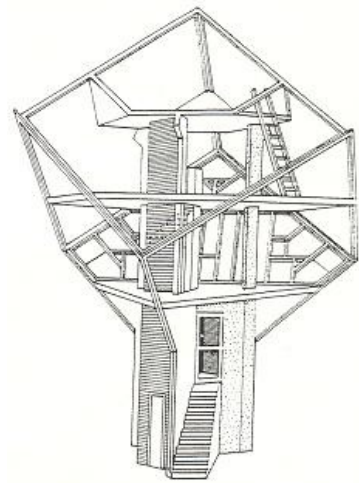
(bron: vmbo TL examen 2011 - I)



Toepassen

De **kubuswoning** ontworpen door architect Piet Blom is beroemd. In Helmond en in Rotterdam zijn van deze kubuswoningen gebouwd. Hiernaast zie je een opengewerkt model. Het betreft in grote lijnen een kubus die op zijn punt staat, er zitten dus twee hoekpunten die zijn verbonden met een lichaamsdiagonaal recht boven elkaar. Deze kubus staat op een brede paal waarin zich de toegang bevindt.

In de kubuswoning zitten drie vloeren, de onderste vloer is driehoekig, de middelste zeshoekig en de bovenste eigenlijk weer driehoekig, maar daar zijn opstaande driehoekige wanden gemaakt die evenwijdig lopen met vlakken van de kubus.



Opgave 14: Kubus op zijn punt

Bekijk het opengewerkte model van een kubuswoning in **Toepassen**. Je gaat dit model zelf tekenen met behulp van het **werkblad**.

- a** Maak de kubus op zijn punt (die lijkt op het hierboven getekende model) af.

Neem aan dat de middelste vloer de middens van de ribben met elkaar verbindt.

- b** Teken die vloer in jouw kubus.



Neem aan dat de bovenste vloer halverwege de middelste vloer en de top van de kubus zit. Er zijn drie opstaande driehoekige zijwanden op gemaakt.

- c** Teken deze vloer in je kubus inclusief de opstaande zijwanden.

Opgave 15: Rekenen aan de kubuswoning

Je hebt in de voorgaande opgave zelf een eenvoudige kubuswoning getekend. Ga er weer van uit dat de middelste verdiepingsvloer de middens van de ribben verbindt en dat de bovenste verdiepingsvloer halverwege de middelste verdiepingsvloer en de top van de kubus zit. Neem aan dat de hoogte tussen de bovenste twee verdiepingsvloeren 2,50 m is.

- a** Hoe hoog zit dan de top van de kubus boven de onderste punt ervan?

- b** Hoe groot zijn dan alle ribben van de kubus?

- c** De hoek tussen de lijnstukken AH en AG is de hoek die alle grensvlakken van de kubus met de verticale lijn AG maken. Bereken deze hoek in tienden van graden nauwkeurig.

1.4 Oppervlakte en inhoud

Verkennen

Opgave V1

In deze tabel zie je een aantal bekende formules voor het berekenen van een omtrek, een oppervlakte, of een inhoud. Ernaast staan de betekenissen van die formules, maar die staan niet in de juiste volgorde.

formule		betekenis	
1	$0,5 \times \text{basis} \times \text{hoogte}$	a	omtrek cirkel
2	$\text{lengte} \times \text{breedte} \times \text{hoogte}$	b	oppervlakte rechthoek
3	$\text{grondvlak} \times \text{hoogte}$	c	oppervlakte driehoek
4	$2\pi \times \text{straal}$	d	oppervlakte parallellogram
5	$\text{lengte} \times \text{breedte}$	e	oppervlakte cirkel
6	$\frac{1}{3} \times \text{grondvlak} \times \text{hoogte}$	f	inhoud balk
7	$\text{basis} \times \text{hoogte}$	g	inhoud prisma
8	$\pi \times \text{straal}^2$	h	inhoud piramide

Geef bij elke formule de juiste omschrijving.



Theorie

Opgave 1

Bekijk de drie lichamen in de **Uitleg**. De inhoud, het volume, van een lichaam is het aantal eenheidskubusjes dat er in past. Bij een balk en een prisma bepaal je dan eerst het aantal eenheidskubussen op het grondvlak en dan vermenigvuldig je met het aantal lagen, de hoogte, van de balk, het prisma. Zo krijg je de formule $V = G \cdot h$, waarin V het volume, G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

- a** Laat zien, dat de formule $V = G \cdot h$ zowel bij de balk als bij het prisma tot de juiste inhoud leidt.

De oppervlakte van een lichaam is de oppervlakte van de uitslag van dat lichaam.

- b** Bereken de oppervlakte van de balk.

- c** Bereken de oppervlakte van het prisma.

- d** Neem nu eens aan dat de afmetingen van deze figuren 3 keer zo groot worden. Hoeveel keer zo groot wordt dan hun inhoud? En hun oppervlakte? Licht je antwoord toe.

**Opgave 2**

Bekijk de drie lichamen in de **Uitleg**. Vergelijk de getekende piramide met het getekende prisma.

- a** Ga na, dat het prisma kan worden verdeeld in de piramides $ACD.H$, $CGH.E$ en $AHE.C$.

- b** Ga ook na, dat voor elk van deze piramides geldt dat $G \cdot h = 36$ waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

- c** Leg uit dat de inhoud van piramide $ACD.H$ daarom $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ moet zijn. Bereken deze inhoud.

Opgave 3

Er zijn ook lichamen met gebogen grensvlakken. Een cilinder en een kegel bijvoorbeeld hebben ook een grondvlak met oppervlakte G en een hoogte h .

- a** Waarom zal de formule voor de inhoud van een cilinder $V(\text{cilinder}) = G \cdot h$ zijn?

- b** Bereken de inhoud van een cilinder met een diameter van 4 cm en een hoogte van 5 cm.



- c** Waarom zal de formule voor de inhoud van een kegel $V(\text{kegel}) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ zijn?

- d** Bereken de inhoud van een kegel met een diameter van 4 cm en een hoogte van 5 cm.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** worden de inhoud en de oppervlakte van een cilinder met gegeven diameter en straal berekend. Neem nu een cilinder met diameter en hoogte precies 2 keer zo groot.

- a** Laat zien dat de inhoud van deze cilinder $2^3 = 8$ keer zo groot is als die van de cilinder in het voorbeeld.

- b** Leg uit hoe de oppervlakte van de cilinder in het voorbeeld wordt berekend.

- c** Laat zien dat de oppervlakte van de cilinder in deze opgave $2^2 = 4$ keer zo groot is als die van de cilinder in het voorbeeld.

**Opgave 5**

Een cilindervormig groentenblik heeft een straal van 6 cm en een hoogte van 16 cm. Het blik is gemaakt van metaal met een dikte van 1 mm. De straal en de hoogte zijn gemeten aan de binnenkant van het blik. Je wilt de hoeveelheid metaal die voor dit blik nodig is berekenen als er een plastic deksel op zit.

Je kunt dit op twee manieren doen: de oppervlakte van het blik berekenen en die met de dikte vermenigvuldigen, of van de inhoud van een blik met een straal van 6,1 cm en een hoogte van 16,1 cm de inhoud van een blik met straal 6 cm en hoogte 16 cm aftrekken.

Voer beide berekeningen uit en geef je antwoord in mm^3 nauwkeurig. Waardoor ontstaat het verschil tussen beide antwoorden?

Opgave 6

Van een cilinder is het vooraanzicht een rechthoek met een oppervlakte van 75 cm^2 . Het bovenaanzicht is een cirkel met een oppervlakte van 60 cm^2 .

Bereken de hoogte van de cilinder in mm nauwkeurig.

Opgave 7

Van een cilindervormig literblik zijn hoogte en diameter gelijk.

Bereken de hoogte van de cilinder in mm nauwkeurig.

**Opgave 8**

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je de inhoud en de oppervlakte van een prisma kunt berekenen.

- a** Leg uit hoe de oppervlakte van de vijfhoek die als 'grondvlak' dient, kan worden berekend.

- b** Reken nu de gevonden inhoud van de doos zelf na.

- c** Bereken de totale oppervlakte van de doos.

Opgave 9

Van een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ is $AB = 4$ cm en $AT = 6$ cm.

Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze piramide.

**Opgave 10**

Van een regelmatige vierzijdige piramide zijn alle ribben even lang. De oppervlakte van deze piramide is 1000 cm^2 .

Hoe lang zijn de ribben van deze piramide in mm nauwkeurig?

Opgave 11

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je de inhoud van een kegel kunt berekenen.

- a** Bereken de inhoud van een kegel waarvan de straal 5 cm en de hoogte 10 cm is.

- b** Hoeveel bedraagt de inhoud van een kegel waarvan de afmetingen half zo groot zijn als die bij a?

- c** In welke kegel kan meer: een kegel waarvan de straal van het grondvlak 5 en de hoogte 10 is, of een kegel waarvan de straal 10 en de hoogte 5 is? Verklaar je antwoord.

- d** In welke kegel kan meer: een kegel waarvan de straal van het grondvlak a en de hoogte b is, of een kegel waarvan de straal b en de hoogte a is? Verklaar je antwoord.

**Opgave 12**

In een betonblok in de vorm van een kubus met ribben van 50 cm wordt een kegelvormig gat geboord. Dit kegelvormige gat heeft een diameter van 15 cm en een diepte van 40 cm. Uit hoeveel cm^3 beton bestaat dit betonblok met gat?

Verwerken**Opgave 13**

Verfblikken zijn er in allerlei maten. In deze opgave wordt uitgegaan van een wiskundig model van een verfblik: een cilinder met een cirkel als bodem en een cirkel als deksel. Houd geen rekening met de dikte van het blik.

Een verfblik heeft een hoogte van 14 cm en een straal van 8 cm.

- a** Bereken hoeveel cm^3 de inhoud van het verfblik is. Rond je antwoord af op een geheel getal.

- b** Teken op schaal 1 : 4 de uitslag van dit verfblik. Schrijf op hoe je de maten van je tekening gevonden hebt.

- c** Als je de straal van een blik verdubbelt en de hoogte halveert, blijft de inhoud van het blik dan hetzelfde? Laat zien hoe je het antwoord hebt gevonden.

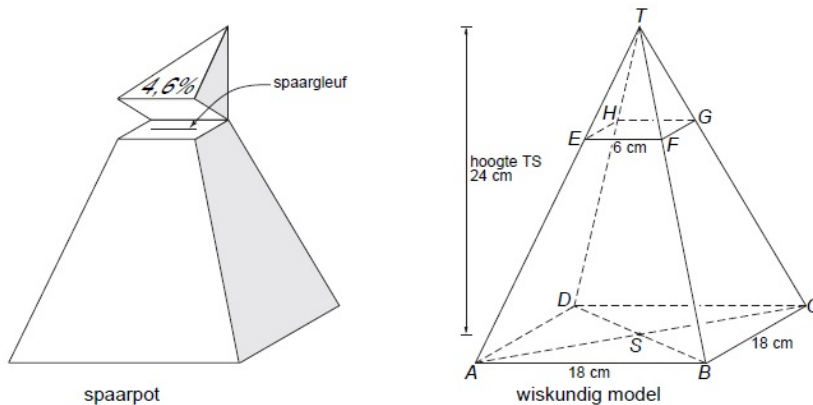


Er zijn blikken nodig met een inhoud van 2500 cm^3 . De blikken worden zo gemaakt dat er zo weinig mogelijk metaal voor nodig is. De hoeveelheid metaal die nodig is voor een blik, is zo klein mogelijk als de hoogte van het blik 2 keer zo groot is als de straal.

- d** Bereken hoeveel cm de straal en de hoogte van dit blik zijn. Geef je antwoorden in één decimaal.

Opgave 14

Een spaarpot heeft de vorm van een regelmatige piramide met een vierkant grondvlak. In de linkerfiguur hieronder zie je een tekening van de spaarpot. Daarnaast staat een wiskundig model met de maten van de spaarpot.



De spaarpot heeft een deksel. Dat is piramide $T.EFGH$. Het scharnier, waarom de deksel omgeklapt kan worden, is lijnstuk HG .

- a** De bank die deze spaarpot cadeau geeft beweert dat de inhoud van de deksel 4,6% van de inhoud van de hele piramide is. Laat met een berekening zien dat dit niet waar is.

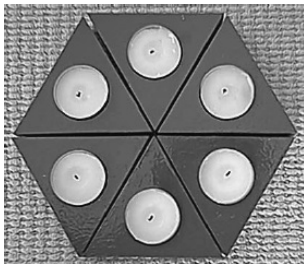
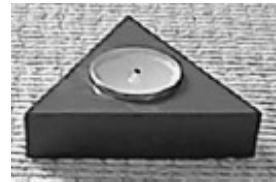


- b** De spaarpot wordt cadeau gegeven in de vorm van een bouwplaat. Hoeveel oppervlakte aan karton is er nodig voor deze spaarpot? Houd geen rekening met de opening om geld in te doen en geef je antwoord in cm^2 nauwkeurig.

(bron: examen vmbo-t 2005 - II)

Opgave 15

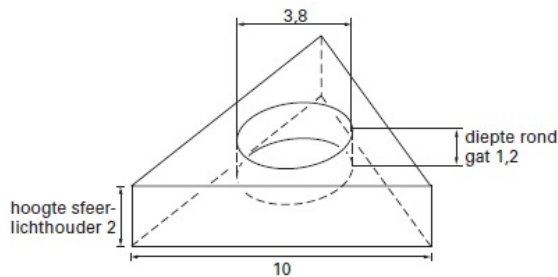
Op de foto hiernaast zie je een houder waarin een sfeerlichtje zit. Deze sfeerlichthouder heeft de vorm van een prisma met een gelijkzijdige driehoek als grondvlak. Op de foto hieronder zie je het bovenaanzicht van een figuur gemaakt van zes van deze sfeerlichthouders.



- a** Geef de kleinste hoek in graden waarover dit bovenaanzicht draaisymmetrisch is.



Hieronder zie je een tekening van de sfeerlichthouder. De sfeerlichthouder is massief en gemaakt van kunststof. De zijden van het driehoekige grondvlak zijn 10 cm. De hoogte van de sfeerlichthouder is 2 cm. Precies in het midden van de sfeerlichthouder zit een rond gat voor het sfeerlichtje. De diameter van dit gat is 3,8 cm en de diepte is 1,2 cm.



- b** Bereken in hele cm^3 hoeveel kunststof er nodig is om deze sfeerlichthouder te maken.

(bron: examen vmbo-t 2003 - I)

Opgave 16

Droste chocolaatjes worden onder andere verpakt in kartonnen doosjes zoals je die hiernaast ziet. De bodem van deze doosjes is een regelmatige achthoek met zijden van ongeveer 7,8 cm. De hoogte van zo'n Droste-doosje is ongeveer 3,3 cm. Nadat je alle chocolaatjes op hebt haal je het plastic waar ze in hebben gelegen uit het doosje.



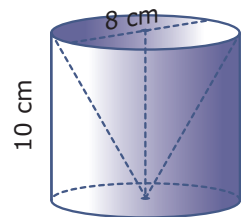
- a** Bereken de inhoud van het doosje in cm^3 nauwkeurig.



- b** Een model van dit Drostedoosje is een regelmatig achthoekig prisma met opstaande ribben van 3,3 cm en andere ribben van 7,8 cm. Bereken de oppervlakte van zo'n prisma in cm^2 nauwkeurig.

Opgave 17

Je ziet hier een cilindervormige plastic bak waar een kegel uit is weggesneden.

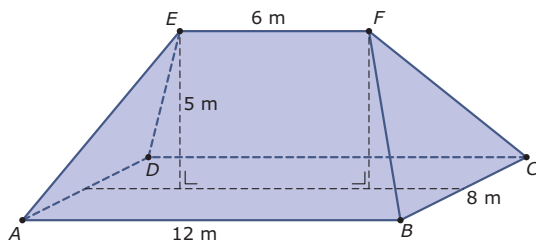


- a** Bereken de hoeveelheid plastic die hiervoor nodig is.

- b** Bereken de hoeveelheid plastic die nodig is voor eenzelfde bak waarvan alle afmetingen 1,5 keer zo groot zijn.

Toepassen

Hier zie je een vereenvoudigd model van het dak van een stolpboerderij. Het dak is zuiver symmetrisch, dus de ribben AE , DE , BF en CF zijn even lang en EF loopt evenwijdig met AB en CD . Dit is een **samengestelde ruimtelijke figuur**, die bestaat uit een prisma en twee piramides die je tot één piramide kunt samenvoegen.



De hoeken van de verschillende delen van zo'n dak kun je berekenen en ook allerlei lengtes die je nodig hebt om ze op schaal te tekenen zijn te berekenen.

Als je op weg naar huis om je heen kijkt onderweg, zul je daken in verschillende vormen tegenkomen. Bijna altijd valt er met de hulpmiddelen die je in dit onderdeel hebt gebruikt



aan te rekenen. En dat is nuttig, al is het maar om te kunnen berekenen hoeveel m^2 aan dakbedekking ervoor nodig is.

Opgave 18: Stolpboerderij: volume onder het dak

Bekijk het sterk vereenvoudigde dak van een stolpboerderij in **Toepassen**. Gebruik de gegevens in de figuur.

Bereken het volume onder dit dak en boven de zoldervloer.

Opgave 19: Stolpboerderij: dakoppervlak

Gebruik de gegevens in de figuur van het dak van de stolpboerderij hierboven.

Bereken de oppervlakte van het dak.

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je gezien hoe je alle meetkundige basistechnieken zoals het werken met congruente en gelijkvormige figuren, de stelling van Pythagoras en goniometrie kunt toepassen in ruimtelijke situaties, in 3D-situaties. De belangrijkste termen uit de ruimtemeetkunde worden herhaald. Dit onderwerp is vooral van belang voor leerlingen die in de bovenbouw met wiskunde B verder gaan.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Ruimtemeetkunde** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3 en 4 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- ▶ lichaam — veelvlak — ribbe — hoekpunt — grondvlak — hoogte — diagonaalvlakken — zijvlaksdagonalen — lichaamsdiagonalen;
- ▶ parallelprojectie — drieaanzicht — vooraanzicht — bovenaanzicht — zijaanzicht;
- ▶ doorsnede — kruisende lijnen — inhoud;
- ▶ inhoud (volume) — lengtevergrotingsfactor — oppervlaktevergrotingsfactor — volumevergrotingsfactor.

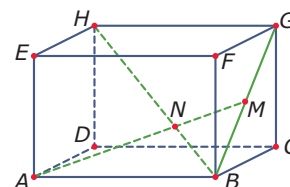
Activiteiten

- ▶ werken met congruentie, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie in ruimtelijke situaties;
- ▶ aanzichten en uitslagen van lichamen maken en die toepassen bij berekeningen, onder andere van de oppervlakte van een lichaam;
- ▶ herkennen wanneer er sprake is van een doorsnede van een lichaam en een plat vlak — een doorsnede op ware grootte tekenen — herkennen wanneer lijnen elkaar snijden of kruisen of evenwijdig zijn;
- ▶ inhoud en oppervlakte van diverse lichamen berekenen — werken met lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor.

Opgave 1

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm en $CG = 8$ cm. Punt M is het midden van lijnstuk BG en punt N is het snijpunt van AM en HB .

Bereken de lengte van lijnstuk AN en de grootte van $\angle ANB$ in graden nauwkeurig.



**Opgave 2**

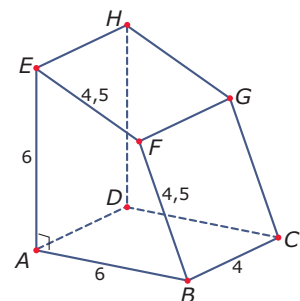
Van een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ is het grondvlak een vierkant met zijden van 5 cm en is de hoogte 10 cm.

Bereken de hoeken van de opstaande zijvlakken.

Opgave 3

Hier zie je een vierzijdig prisma met een rechte hoek bij hoekpunt A . Alle lengtes zijn gegeven in cm.

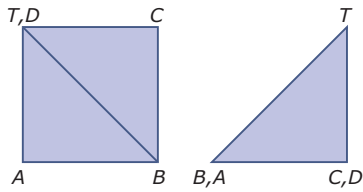
Teken een drieaanzicht van dit prisma.





Opgave 4

In de figuur hieronder zie je het bovenaanzicht en het zijaanzicht van een veelvlak.



Wat voor veelvlak betreft het hier? Maak er een schets van.

Opgave 5

Bekijk de balk van nog eens.

Leg uit waarom de lijnen EG en AM elkaar kruisen.

Opgave 6

Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm en $CG = 8$ cm. Punt M is het midden van ribbe AB en punt N is het midden van ribbe GH .

Leg uit waarom $EMCN$ een doorsnede van een vlak met deze balk is en teken deze vierhoek op ware grootte.

**Opgave 7**

Van welk lichaam is het volume het grootst: een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle zijden 4 cm lang zijn, of een kegel waarvan het grondvlak een diameter van 4 cm heeft en de hoogte ook 4 cm is?

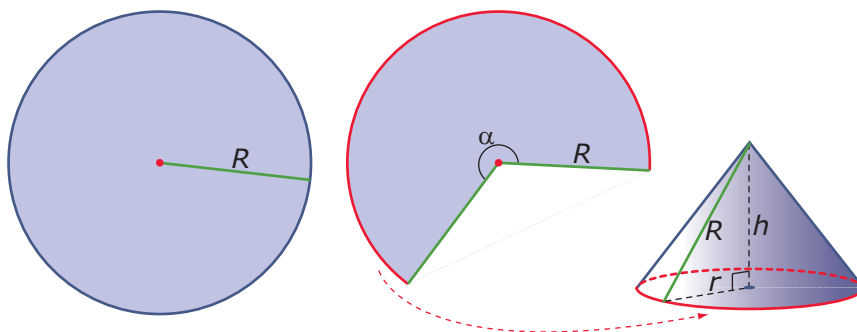
Opgave 8

Van een cilinder is de oppervlakte 628 cm^2 . Verder is de hoogte twee keer zo groot als de diameter.

Hoe hoog is deze cilinder? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Toepassen

De **oppervlakte van een kegel** is een verhaal op zich. Je maakt een kegelvormig hoedje door uit een cirkelvormig stuk papier een sector weg te knippen en dan het geheel weer aan elkaar vast te lijmen. (Een plakrandje is handig.)



De oorspronkelijke cirkel heeft een straal van R cm. De omtrek van de grondcirkel van de kegel is het $\frac{\alpha}{360}$ deel van deze cirkel. Die omtrek is daarom $\frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R$. En dus is $r = \frac{\alpha}{360} \cdot R$.

**Opgave 9: De oppervlakte van een kegel**

Neem een blaadje papier, je moet er een cirkel met een straal van 5 cm uit kunnen halen. Pak ook een passer en een schaar. Je gaat een kegel maken en de oppervlakte ervan berekenen.

- a** Knip uit het stuk papier een cirkel met een straal van 5 cm. Knip uit die cirkel een sector met een sectorhoek van 90° . Maak een kegel van het resterende deel van de cirkel.

- b** Hoe groot is de omtrek van de grondcirkel van je kegel? Hoe groot is dus de straal van de kegel? En waar zit nu de straal van de oorspronkelijke cirkel?

Het gebogen grensvlak van de kegel heet de kegelmantel.

- c** Hoe groot is de oppervlakte van de kegelmantel?

- d** Als je van een cirkelsector met een straal van 5 cm en een sectorhoek van 120° een kegel maakt, hoe groot is dan de oppervlakte van de kegelmantel? En hoe hoog wordt deze kegel? En welke straal heeft deze kegel?



- e** Beredeneer dat een kegelmantel met een straal van r die is gemaakt uit een cirkel met een straal van R een oppervlakte heeft van $\pi r R$.

- f** Bereken de oppervlakte van een kegel met een straal van 4 cm en een hoogte van 5 cm.

Opgave 10: Een bekertje

Een bekertje zoals dat hiernaast kun je opvatten als een kegel waar de punt (die op zichzelf ook een kegel is) is afgesneden. Neem aan dat het bekertje een bovendiameter van 10 cm heeft en een onderdiameter van 8 cm. En neem ook aan dat de hoogte van het bekertje 12 cm is.

- a** Hoeveel cm^3 bedraagt dan de inhoud van dit bekertje?





b Hoeveel cm^2 aan materiaal is er voor dit bekertje nodig?

Begrippen

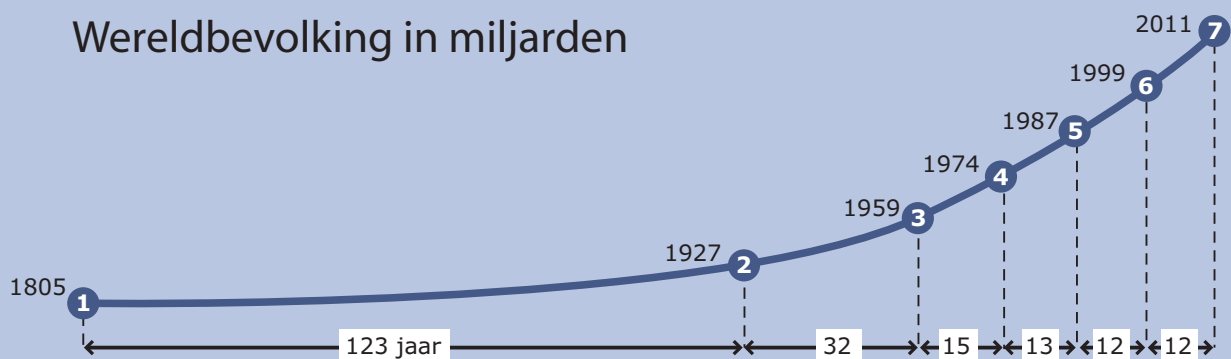
- ▶ groeifactor — groeipercentage — vervalpercentage — halveringstijd — verdubbelingstijd;
- ▶ lineaire groei — exponentiële groei;
- ▶ exponentiële functie — asymptoot.

Activiteiten

- ▶ werken met de begrippen groeifactor, groei(verval)percentage, halveringstijd en verdubbelingstijd;
- ▶ lineaire groei vergelijken met exponentiële groei, bijbehorende formules opstellen;
- ▶ werken met meer algemene exponentiële functies en formules daarvan opstellen.

Bevolkingsgroei

Wereldbevolking in miljarden



Domein

Functies en grafieken

Hoofdstuk

Exponentiële verbanden

Inhoud

2.1	Groefactoren	66
2.2	Exponentiële groei	78
2.3	Exponentiële functies	92
2.4	Totaalbeeld	103

2

2.1 Groeifactoren

Verkennen

Opgave V1

Autobanden zijn meestal een beetje poreus (luchtdoorlatend). Dit betekent dat een opgepompte band steeds een beetje zachter wordt. De **bandenspanning** van een band is na het oppompen ongeveer gelijk aan 2,103 bar. Deze bandenspanning neemt elke dag met ongeveer 13,3% af.



- a** Bereken de bandenspanning na 1 dag en na 2 dagen.

- b** Hoe kun je de antwoorden bij a vinden door vermenigvuldigen? En waarmee dan?

- c** Na hoeveel dagen is de bandenspanning gehalveerd?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

- a** Hoe kom je aan het getal 1,12?



- b** Stel dat het aantal leerlingen van de scholengemeenschap in 2012 in totaal 696 was. Wanneer moeten de noodlokalen dan komen?

- c** Stel dat de groeifactor per jaar 1,08 is. Hoeveel procent neemt het aantal leerlingen per jaar dan toe?

- d** Als van een school het aantal leerlingen jaarlijks niet toeneemt, maar met een vast percentage afneemt, wat weet je dan van de groeifactor per jaar?

Opgave 2

Medicijnen worden door het lichaam opgenomen en vervolgens afgebroken. Dit gaat meestal ook met een vast percentage. Van paracetamol wordt elk uur 15% afgebroken. Stel dat Piet hoofdpijn heeft en een tablet met 500 mg paracetamol inneemt. Het medicijn is uitgewerkt als de hoeveelheid paracetamol in het lichaam onder de 100 mg komt.

- a** Hoeveel procent van de paracetamol is na 1 uur nog over?

- b** Hoeveel milligram paracetamol is dat?

- c** Welke groeifactor per uur hoort er bij de afbraak van de paracetamol door het lichaam?

- d** Na hoeveel uur is deze stof uitgewerkt? (Geef je antwoord in gehele uren.)

**Opgave 3**

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je kunt omrekenen van een procentuele toename of afname naar een groeifactor.

- a** Bij het omrekenen wordt steeds van 100 uit gegaan. Is het ook mogelijk om van een ander getal uit te gaan? Licht je antwoord toe.

- b** Een hoeveelheid neemt elk uur met 35% toe. Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

- c** Een hoeveelheid neemt elk uur met 35% af. Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

- d** Een hoeveelheid neemt elke minuut met 0,1% toe. Hoeveel bedraagt de groeifactor per minuut?

- e** Een hoeveelheid neemt elke minuut met 0,1% af. Hoeveel bedraagt de groeifactor per minuut?

- f** Een hoeveelheid neemt elke maand met 150% toe. Hoeveel bedraagt de groeifactor per maand?

- g** Een hoeveelheid neemt elke maand met 150% af. Hoeveel bedraagt de groeifactor per maand?

**Opgave 4**

Een groeipercentage kan zowel positief als negatief zijn.

- a** Waar in **Voorbeeld 1** is sprake van een negatief groeipercentage?

- b** Waarom kan een groeifactor nooit negatief zijn?

- c** Welk groeipercentage hoort bij een groeifactor van 1,5 per uur?

- d** Welk groeipercentage hoort bij een groeifactor van 0,15 per uur?

- e** Welk groeipercentage hoort bij een groeifactor van 1 per jaar?

- f** Welk groeipercentage hoort bij een groeifactor van 2 per jaar?

Opgave 5

Geef bij de volgende groeifactoren per week aan met welk percentage de hoeveelheid toe- of afneemt elke week.

- a** 1,105



b 0,998

c 4

d 0,1

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Waarom is de groeifactor per half uur 0,91?

b Hoeveel zou in dit geval de groeifactor per uur zijn? Hoe kun je dit afleiden uit het voorbeeld?

c Hoeveel zou de groeifactor per kwartier bedragen? Waarom?

Opgave 7

Bij een zwaarder persoon wordt de alcohol langzamer afgebroken. Stel dat iemand's alcoholpromillage elk half uur met 5% afneemt. Hij mag rijden als dit promillage onder de 0,5 zit.

Hoe lang duurt voordat deze persoon mag rijden nadat hij op zeker moment een alcoholpromillage van 1,0 heeft? (Dat promillage heeft iemand van 70 kg twee uur nadat hij zeven biertjes in een uur heeft gedronken.)

**Opgave 8**

Bekijk in **Voorbeeld 3** de groei van de oppervlakte die door de witte waterlelie wordt bedekt.

- a** Waarom is de groeifactor per etmaal gelijk aan 2?

- b** Het is in dit voorbeeld niet nodig om de grootte van de vijver of de waterlelie precies te weten. Waarom niet?

- c** Stel dat de vijver een oppervlakte heeft van 150 m^2 . Hoe groot was de door de waterplant bedekte oppervlakte dan op dag 19?

- d** En hoe groot was de bedekte oppervlakte dan op dag 10?

- e** En hoe groot was de bedekte oppervlakte dan op dag 1, als de plant begint te groeien?

Als g de groeifactor per uur is, dan geldt $g^{24} = 2$.

- f** Bereken de groeifactor per uur in twee decimalen nauwkeurig.

**Opgave 9**

Een bepaalde stof wordt in water afgebroken. De halveringstijd van de hoeveelheid H (in mg/L) van die stof bedraagt 8 uur.

- a** Hoeveel bedraagt de groeifactor van H per dag?

- b** Hoeveel bedraagt de groeifactor van H per uur?

Verwerken**Opgave 10**

Bepaal bij de volgende groeifactoren per uur het toe- of afnamepercentage per uur.

- a** 1,21

- b** 1,924

- c** 0,99

- d** 2,5



e 100

Opgave 11

Zet de onderstaande toe- of afnamepercentages om naar groeifactoren.

a Een afname van 14% per uur.

b Een toename van 34,76% per dag.

c Een toename van 104% per jaar.

d Een afname van 100% per uur.

Opgave 12

Banden zijn meestal een beetje poreus (luchtdoorlatend). Dit betekent dat een opgepompte band steeds een beetje zachter wordt. De bandenspanning van een band is na het oppompen ongeveer gelijk aan 2,103 bar. Deze bandenspanning neemt elke dag met ongeveer 1,3% af.

a Welke groeifactor per dag heeft de bandenspanning?



- b** Welke groeifactor per week heeft de bandenspanning?

- c** Je kunt niet meer rijden als de bandenspanning minder is dan 1 bar. Hoeveel dagen duurt dit nadat je de band hebt opgepompt?

Opgave 13

Het aantal WhatsApp-berichten W nam in de beginjaren flink toe. Zie onderstaande tabel (aantallen berichten W in miljoenen):

jaartal	2005	2006	2007	2008
W	4,9	9,8	19,6	39,2



- a** Met welke groeifactor per jaar neemt W in die periode toe? Hoe groot was toen de verdubbelingstijd van het aantal WhatsApp-berichten per jaar?

- b** Met hoeveel procent nam het aantal WhatsApp-berichten per jaar toe?

- c** Hoeveel van deze berichten verwacht je dan in 2012?



- d** En hoeveel van deze berichten verwacht je in 2022 als de groei zo door gaat? Is dat realistisch?

Opgave 14

Elke ochtend om 9:00 uur krijgt een patiënt door middel van een injectie 2 mL van een pijnstillend medicijn toegediend. Door afbraak in het lichaam van de patiënt neemt de hoeveelheid geneesmiddel elke 12 uur af met 32%.

- a** Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elke 12 uur af?

- b** Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elke 6 uur af? Welk afnamepercentage per zes uur hoort daar bij?

- c** Met welke groeifactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elk uur af? Welk afnamepercentage per uur hoort daar bij?

- d** Hoeveel mL van het pijnstillend middel bevindt zich na één dag vlak voor de volgende injectie in het lichaam van de man? En hoeveel mL direct na de injectie?

- e** Bereken de hoeveelheid pijnstiller na 30 uur. En ook na 60 uur.



- f** Schets een grafiek van de hoeveelheid geneesmiddel gedurende de eerste 60 uur.

Toepassen

Je hebt al gezien dat exponentiële groei veel voorkomt in de praktijk. Vooral natuurbeschermers en landschapsbeheerders hebben regelmatig te maken met de problemen die dit kan veroorzaken. Maar ook veel toekomst voorspellende scenario's en historici maken gebruik van exponentiële groei.



De **Club van Rome** is een voorbeeld van een groep wetenschappers en milieuactivisten die al zo'n 50 jaar geleden probeerde met behulp van groeimodellen te voorspellen hoe de wereld zich in de toekomst zou gaan ontwikkelen. Beroemd is hun rapport 'Grenzen aan de groei' uit 1972.

Opgave 15: Vossen en konijnen

In een uiterwaard langs de IJssel heeft Rijkswaterstaat in 2005 vossen uitgezet om het aantal konijnen dat er leeft te doen verminderen. De konijnen vormden namelijk een plaag in dit gebied. Biologen hebben sinds 2005 jaarlijks het aantal konijnen geteld. Dit is weergegeven in de volgende tabel:

jaartal	2005	2006	2007	2008	2009
aantal konijnen	1450	1261	1097	954	830

- a** Met hoeveel procent per jaar neemt het aantal konijnen sinds 2005 af? Is dat percentage elk jaar ongeveer evenveel?

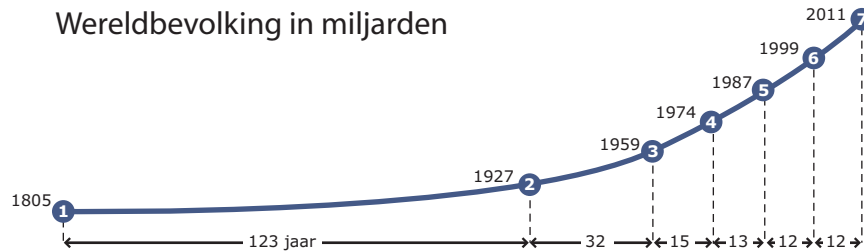
Het aantal konijnen mag echter niet onder de 175 komen, want dan loopt hun voortbestaan gevaar en hebben ook de vossen niet meer voldoende voedsel.

- b** Vanaf welk jaar moet Rijkswaterstaat beginnen met het vangen van vossen om te voorkomen dat dit gebeurt?



Opgave 16: De wereldbevolking

Een dergelijke grafiek stond eind 2011 in De Volkskrant. Men dacht op dat moment dat het aantal mensen op Aarde de 7 miljard was overschreden. De grafiek doet sterk denken aan exponentiële groei. Toch is dat niet helemaal juist.



- a** Laat zien dat de wereldbevolking tussen 1805 en 1927 met ongeveer 0,56% per jaar toenam.

Tussen 1927 en 1959 groeide de wereldbevolking sneller.

- b** Met hoeveel procent per jaar ongeveer?

- c** Laat zien dat de wereldbevolking tussen 1959 en 1974 het snelst groeide en dat de groei daarna weer wat afnam.

- d** Als de groei de komende jaren op dezelfde wijze zal doorgaan, wat betekent dit dan voor de wereldbevolking op den duur?

2.2 Exponentiële groei

Verkennen

Opgave V1

Kuala Lumpur is de hoofdstad van Maleisië en had in januari 2005 ongeveer 9,5 miljoen inwoners. Dit aantal groeit exponentieel met een groeifactor van 1,045 per jaar.

- a In welk jaar zal het aantal inwoners van Kuala Lumpur zijn verdubbeld?



Noem het aantal inwoners in miljoenen A en laat t de tijd in jaren na 2005 zijn.

- b Welke formule kun je dan opstellen voor de groei van de bevolking van Kuala Lumpur?

- c Hoe ziet de bijbehorende grafiek er uit?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de groei van het aantal leden van voetbalclubs.

- a Welke formule kun je opstellen voor A afhankelijk van t ?



- b** Bereken het aantal leden van voetbalclubs in A in 2020 als de lineaire groei zo door blijft gaan.

- c** Stel een formule op voor A afhankelijk van t .

- d** Bereken het aantal leden van voetbalclubs in B in 2020 als de exponentiële groei zo door blijft gaan.

Opgave 2

Bekijk opnieuw de groei van het aantal leden van voetbalclubs. Gebruik de formules bij de vorige opgave. Ga er van uit dat in beide landen de groei zo doorgaat.

- a** Teken de grafieken van A en B in één figuur. Laat zien dat beide grafieken twee punten gemeenschappelijk hebben.

- b** In welk jaar zijn er in land B meer leden van voetbalclubs dan in land A?

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe de populatie zeehonden in het Nederlandse deel van de Waddenzee groeit.

- a** Bereken het aantal zeehonden op 1 januari 2009.



- b** Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar? En het groeipercentage?

- c** Stel een formule op voor het aantal zeehonden Z afhankelijk van de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ op 1 januari 2009.

- d** Bereken ook met de formule die je in c hebt gevonden het aantal zeehonden op 1 januari 2013. Verklaar het kleine verschil.

Opgave 4

In de **Theorie** zie je een applet waarin grafieken van lineaire groei en exponentiële groei met dezelfde beginhoeveelheid worden vergeleken.

- a** Stel de functies $H_1 = 4 \cdot 1,10^t$ en $H_2 = 0,6t + 4$ in met behulp van de schuifbalkjes. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van deze functies?

- b** Het éne snijpunt is uiteraard (0,4). Bereken met behulp van inklemmen het tweede snijpunt in één decimaal nauwkeurig.

- c** Als je de groeifactor van H_1 verandert, hebben de grafieken soms nog maar één snijpunt. Moet je de groeifactor daartoe groter of kleiner maken?

- d** Stel de functies $H_1 = 4 \cdot 0,80^t$ en $H_2 = -0,5t + 4$ in met behulp van de schuifbalkjes. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van deze functies?



- e** Het éne snijpunt is uiteraard $(0,4)$. Bereken met behulp van inklemmen het tweede snijpunt in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 5

De afdeling bevolking van de gemeente Amsteldijk verwacht dat er eind van dit jaar zo'n 40.000 mensen in deze gemeente zullen wonen. Het gemeentebestuur hoopt dat het inwoneraantal nog verder zal uitbreiden omdat dit de mogelijkheid biedt om enkele voorzieningen te verbeteren. Wethouder Simonsz zegt: "We streven er naar om elk jaar 1500 inwoners meer te hebben." De burgemeester mw. Jansma hoopt echter elk jaar 3% meer inwoners te kunnen inschrijven dan het jaar ervoor.

- a** Maak nu grafieken voor de bevolkingsgrootte voor de komende acht jaar. Eén die past bij de uitspraak van dhr. Simonsz en één die past bij de uitspraak van mw. Jansma.

- b** Geef een passende formule voor het aantal inwoners N afhankelijk van de tijd t in jaren die past bij de uitspraak van wethouder Simonsz. Ga er van uit dat op $t = 0$ het aantal inwoners 40.000 is.

- c** Geef een passende formule voor het aantal inwoners N afhankelijk van de tijd t in jaren die past bij de uitspraak van burgemeester Jansma. Ga er van uit dat op $t = 0$ het aantal inwoners 40.000 is.

- d** Welk van beide formules levert op den duur de meeste inwoners op voor de gemeente Amsteldijk? Licht je antwoord toe.



- e** Volgens welke formule is het aantal inwoners van Amsteldijk voor het eerst verdubbeld?

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a** Hoe ga je na dat er voor stad A (ongeveer) sprake is van lineaire groei? Ga dit ook echt na.

- b** Hoe leid je voor stad A de formule af uit de tabel?

- c** Hoe ga je na dat er voor stad B (ongeveer) sprake is van exponentiële groei? Ga dit ook echt na.

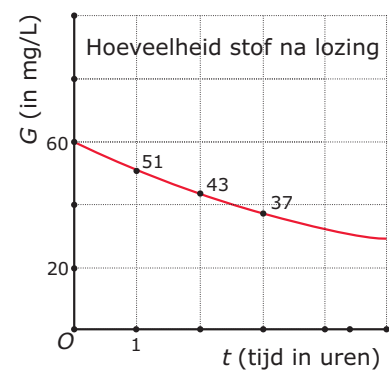
- d** Hoe leid je voor stad B de formule af uit de tabel?



- e** Laat zien in welk jaar het aantal inwoners van B dat van A gaat overschrijden als de groei zo door gaat.

Opgave 7

Hier zie je een grafiek die laat zien hoe een hoeveelheid gif G (in mg/L) in het water wordt afgebroken. De eerste drie metingen staan in de figuur. Er lijkt sprake te zijn van exponentieel verval.



- a** Leg uit waarom er sprake lijkt te zijn van exponentieel verval.

- b** Leid een formule af voor G afhankelijk van t .

- c** Na hoeveel uur is er minder dan 1% van deze giftige stof over?

Opgave 8

Bekijk hoe in **Voorbeeld 3** een formule voor exponentiële groei van een hoeveelheid N wordt gevonden op basis van de waarden van N op twee verschillende tijdstippen.

- a** Benader zelf met je rekenmachine de groeifactor per tijdseenheid.

- b** Voer ook zelf de berekening van de beginhoeveelheid uit.



- c** Je kunt de beginhoeveelheid ook berekenen door op $t = 11$ is $N = 800$ te gebruiken. Laat zien dat je ongeveer op hetzelfde uitkomt.

Opgave 9

Bij de gegevens in **Voorbeeld 3** past ook een lineaire formule voor N als functie van t .

- a** Stel zo'n bijpassende formule op.

Je hebt nu twee rekenmodellen bij dezelfde gegevens: een lineaire functie en een exponentiële functie. Maar ze verschillen nogal.

- b** Bereken bij beide rekenmodellen de waarde van N als $t = 20$.

- c** Bij de lineaire functie is de hoeveelheid N op zeker moment op. Op welk moment is dat? En hoe zit het dan met het exponentiële rekenmodel?

- d** Is bij de exponentiële functie de hoeveelheid N ook op zeker moment op? Licht je antwoord toe.



Verwerken

Opgave 10

Een hoeveelheid H heeft op $t = 0$ de waarde 160. Stel in de volgende gevallen een formule op voor H afhankelijk van t (in dagen) en bereken de waarde van H op $t = 10$ in gehele nauwkeurigheid.

- a** H neemt dagelijks toe met 15%.

- b** H neemt dagelijks toe met 15.

- c** H neemt dagelijks af met 15%.

- d** H neemt dagelijks af met 15.

- e** H neemt wekelijks toe met 15%.

- f** H neemt wekelijks af met 15%.

**Opgave 11**

Van een middelgrote stad geeft deze tabel de aantallen inwoners afgerond op honderdtallen. Op de afdeling huisvesting wil men de groei voor de komende jaren voorspellen.

Eén van de medewerkers zegt: “Je zou kunnen veronderstellen dat er jaarlijks zo'n 2300 inwoners bijkomen.”

jaartal	bevolking
2008	154000
2009	156300
2010	158700
2011	161000

- a** Van welke soort groei gaat deze medewerker uit? Laat zien dat dit wel ongeveer zou kunnen kloppen binnen de afgesproken afronding.

- b** Neem aan dat t de tijd in jaren na 2008 is. Welke formule voor het aantal inwoners I volgt uit de aanname van lineaire groei?

Een andere medewerker merkt op: “Er zou ook sprake kunnen zijn van exponentiële groei met 1,5% per jaar.”

- c** Laat zien hoe zij aan dit groeipercentage is gekomen.

- d** Welke formule kun je opstellen voor I als functie van t uitgaande van deze exponentiële groei?

- e** Er zijn nu twee formules gevonden waarmee je de bevolking van deze stad in volgende jaren zou kunnen voorspellen. Wat is het grote verschil tussen beide?



- f** Voorspel met beide formules het aantal inwoners van deze stad in 2020.

Opgave 12

Als je gaat duiken in de diepzee dan zul je merken dat hoe dieper je komt, hoe blauwer alles eruit ziet. Dit komt doordat het rode licht minder ver in water doordringt dan blauw licht. Dit blauwe licht kan dan dieper doordringen. Per meter diepte wordt 32,7% van het blauwe licht tegengehouden door het water.



Tot welke diepte dringt dan nog maar 1% van het blauwe licht door?

Opgave 13

Hieronder worden telkens twee punten gegeven van een grafiek van y als functie van x . Geef bij elk geval zowel een formule van een passende lineaire functie als van een passende exponentiële functie.

- a** De grafiek gaat door $(0,3)$ en $(1,4)$.



b De grafiek gaat door $(0,3)$ en $(1,2)$.

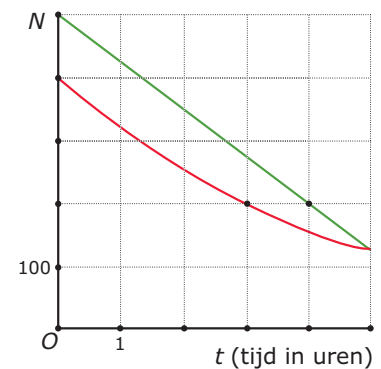
c De grafiek gaat door $(2,150)$ en $(12,389)$.

d De grafiek gaat door $(2,389)$ en $(12,150)$.

Opgave 14

Hiernaast zie de grafieken van een lineair en exponentieel verband.

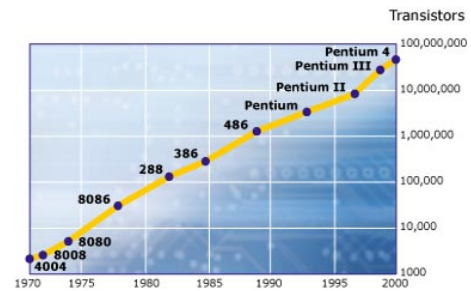
Geef bij beide grafieken een passende formule.





Toepassen

Als er iets is dat steeds sneller lijkt te groeien dan is dat wel het computergebruik en het internetverkeer. Het plaatje hiernaast laat daar iets van zien uit de beginjaren van het computertijdperk waarin we nu leven. Het komt uit een Amerikaans tijdschrift en symboliseert de 'wet van Moore'. Daarbij moet je weten dat de zogenaamde 'processor' (een minuscule printplaatje, een chip) de hele rekenkracht van de computer vertegenwoordigde. Daarbij speelde het aantal transistoren dat men op zo'n processor kwijt kon een grote rol: hoe meer processoren, hoe groter de rekenkracht. In 1970 voorspelde Gordon Moore (één van de oprichters van chipsfabrikant Intel) dat het aantal transistoren dat men op zo'n processor kwijt kon elke 2 jaar zou verdubbelen. En hij kreeg gelijk...



Na 2000 werden er meerdere processoren gebruikt die samen de rekencapaciteit nog verder konden verhogen. Pas in de huidige tijd wordt er gewerkt aan andere technologieën voor computers en zal de wet van Moore wellicht ooit in het museum terechtkomen.

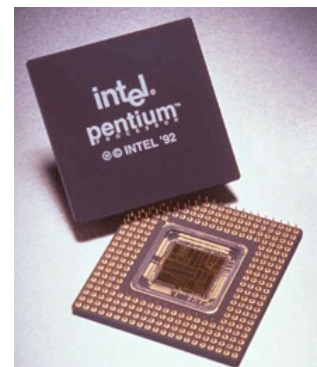
Maar niet alleen de rekenkracht van de computer groeide exponentieel, ook het aantal gebruikers van internet, van Google, van Facebook, ..., groeide enorm. En het lijkt erop dat de grenzen van die groei in zicht komen...

Opgave 15: De wet van Moore

Bekijk de figuur in [Toepassen](#).

In 1972 introduceerde Intel de 8008 processor met 2300 transistoren. Ga uit van de wet van Moore dat elke 2 jaar het aantal transistoren op een processor verdubbelt.

- a** In 1992 introduceerde Intel de Pentium-processor. Lag men met die processor nog op Moore's schema?



- b** In 2000 kwam de Pentium 4. Paste die in de wet van Moore?



Zeker tot 2012 is de rekenkracht van een computer ongeveer elke twee jaar verdubbeld. Stel je voor dat R die rekenkracht voorstelt afhankelijk van t het aantal jaren na 1972. Op $t = 0$ is $R = 2300$.

- c** Stel een formule op voor R als functie van t .

- d** Bereken hiermee de rekenkracht die een computer uit 2012 volgens de wet van Moore zou hebben.

- e** Onderzoek in welk jaar die rekenkracht boven de 1 biljoen, dus boven $1 \cdot 10^{12}$ uit gaat komen volgens de wet van Moore.

Opgave 16: Facebook

Uit [Wikipedia, december 2012](#):

“In april 2009 had Facebook meer dan 200 miljoen actieve gebruikers, vijf maanden later waren dat er 50 miljoen meer. In juli 2010 bediende Facebook een half miljard gebruikers, circa zeven procent van het aantal aardbewoners. Anno 2012 heeft Facebook ongeveer 955 miljoen gebruikers.”

- a** Gebruik de gegevens over het aantal Facebookgebruikers van april 2009, juli 2010 en december 2012 om te onderzoeken of het aantal Facebookgebruikers exponentieel is gegroeid in die jaren.



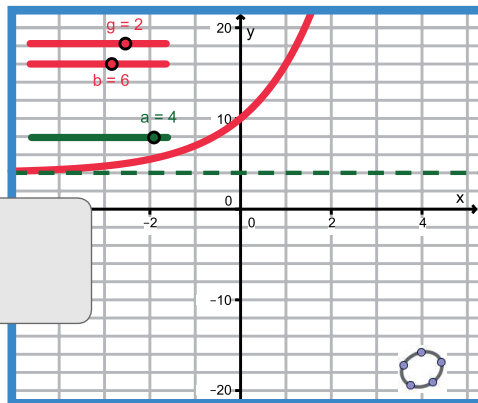
- b** Ook zonder berekening is wel duidelijk dat de groei van de eerste maanden niet in dit tempo door kon blijven gaan. Waarom?

2.3 Exponentiële functies

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de grafiek van $y = 2^x$, ook voor negatieve waarden van x .



- a** Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 toeneemt?

- b** Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 afneemt?

- c** Hoeveel is 2^0 ? Kun je dat verklaren?

- d** Hoeveel is 2^{-1} ?

- e** Krijg je ooit een uitkomst 0?

Opgave V2

Tot nu toe heb je bij exponentiële functies weinig met mintekens te maken gehad. Toch kun je heel goed een grafiek maken van $y = -2^x$, ook voor negatieve waarden van x .

- a** Hoe ziet die grafiek er uit?



Maar bekijk nu $y = (-2)^x$

b Vul de volgende tabel in:

x	0	1	2	3	4
y					

c Kun je nu bij deze functie een zinvolle grafiek tekenen? Licht je antwoord toe.

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de grafiek van een exponentiële functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$ ook voor negatieve waarden van x .

Eerst bekijk je de grafiek met $b = 6$, $g = 2$ en $a = 0$.

a Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 toeneemt? En als x met 1 afneemt?

b De beginhoeveelheid, de uitkomst bij $x = 0$, is 6. Vul nu de tabel in door middel van verdubbelen en halveren.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									



Je kunt nu vanuit de tabel zelf de grafiek tekenen bij de gegeven exponentiële functie. Maar de uitkomsten voor bijvoorbeeld $x = 0,5$ kun je (waarschijnlijk) niet zonder rekenmachine uitrekenen. Maar als je die uitkomst weet, dan kun je wel door verdubbelen en halveren de uitkomsten bij $x = 1,5$, $x = 2,5$, $x = -0,5$, enzovoorts, uitrekenen.

- c** Welke uitkomst (in drie decimalen nauwkeurig) geeft je rekenmachine voor $x = 0,5$? En welke uitkomsten volgen hieruit voor $x = 1,5$, $x = 2,5$, $x = -0,5$ en $x = -1,5$?

- d** Kies nu bijvoorbeeld $x = 0,3$ en bekijk de uitkomst die je rekenmachine geeft. Leid andere uitkomsten af door verdubbelen en halveren. En zo kun je ook te werk gaan met andere niet gehele waarden voor x .

- e** Welke horizontale lijn is de asymptoot van deze grafiek?

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je de grafiek van een exponentiële functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$ ook voor negatieve waarden van x . Werk met de applet.

Nu bekijk je de grafieken van functies van de vorm $y_a = 6 \cdot 2^x + a$ en ga je de waarden van a veranderen. Je vergelijkt de grafieken met die van $y_0 = 6 \cdot 2^x$.

- a** Neem $a = 3$. Wat is er aan de hand met alle uitkomsten van y_3 en vergelijking met die van y_0 ?

- b** Welke asymptoot heeft de grafiek van y_3 ?



- c** Beantwoord dezelfde twee vragen als bij a en b voor andere waarden van a . Kies ook enkele negatieve waarden voor a .

- d** Voor welke a gaat de grafiek van y_a door de oorsprong?

Opgave 3

Gegeven is de exponentiële functie $y = 6 \cdot 0,5^x$.

- a** Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 toeneemt? En als x met 1 afneemt?

- b** De beginhoeveelheid, de uitkomst bij $x = 0$, is 6. Vul nu de tabel in door middel van verdubbelen en halveren.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

- c** Welke uitkomst (in drie decimalen nauwkeurig) geeft je rekenmachine voor $x = 0,5$? En welke uitkomsten volgen hieruit voor $x = 1,5$, $x = 2,5$, $x = -0,5$ en $x = -1,5$?



- d** Kies nu bijvoorbeeld $x = 0,3$ en bekijk de uitkomst die je rekenmachine geeft. Leid andere uitkomsten af door verdubbelen en halveren. En zo kun je ook te werk gaan met andere niet gehele waarden voor x .

- e** Welke horizontale lijn is de asymptoot van deze grafiek?

- f** Welke horizontale lijn is de asymptoot van de grafiek van $y = 6 \cdot 0,5^x - 5$?

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** zie je hoe de grafiek van een exponentiële functie kunt tekenen door gebruik te maken van de eigenschappen van zo'n grafiek.

- a** Je begint met een tabel bij $y = 10 \cdot 1,5^x$ te maken vanuit de beginhoeveelheid. Vul deze tabel in:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

- b** Alle uitkomsten bij de gegeven functie krijg je door in de tabel bij a van alle uitkomsten 20 af te trekken. Doe dat en teken de gevraagde grafiek.



- c** Nu ga je de ongelijkheid oplossen. Teken eerst de lijn $y = 20$ in je grafiek en geef het snijpunt van deze lijn met de grafiek aan.

- d** Laat zien hoe je aan het uiteindelijke antwoord van de ongelijkheid kunt komen. Licht vooral ook de afronding toe.

Opgave 5

De formule van een exponentiële functie is $y = 20 \cdot 0,8^x + 5$.

Teken een bijpassende grafiek en los op: $y \leq 10$ in twee decimalen nauwkeurig.

**Opgave 6**

Van een exponentiële functie $y = b \cdot g^x + a$ is gegeven dat de grafiek door de punten $A(0,40)$ en $B(4,25)$ gaat en de lijn $y = 10$ de asymptoot is.

Stel een passend functievoorschrift op.

Opgave 7

Van een exponentiële functie $y = b \cdot g^x + a$ is gegeven dat de grafiek door de oorsprong en het punt $A(4,6)$ gaat en de lijn $y = -3$ de asymptoot is.

Stel een passend functievoorschrift op.

Verwerken**Opgave 8**

Gegeven is de exponentiële functie met formule $y = 60 \cdot 0,75^x + 12$.

- a** Maak eerst een tabel zoals deze van $y = 60 \cdot 0,75^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



- b** Hoe maak je nu vanuit de tabel bij a de grafiek van de gegeven functie?

- c** Welke asymptoot heeft de grafiek?

- d** Voor welke waarden van x geldt $60 \cdot 0,75^x + 12 \leq 15$? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 9

De lucht in een autoband wordt vaak opgepompt tot een druk van 2,2 bar. De luchtdruk van de buitenlucht is ongeveer 1,0 bar. De band verliest langzaam zijn druk tot die druk gelijk is aan die van de buitenlucht. En dus is die druk P (in bar) afhankelijk van de tijd t (in dagen) na het oppompen.

Neem aan dat voor een bepaalde band geldt $P = 2,2 \cdot 0,96^t + 1$.

- a** Welke asymptoot heeft de grafiek van P als functie van t ? En welke betekenis heeft die asymptoot voor de druk in de band?

- b** Waarom hebben negatieve waarden van t hier geen betekenis?

- c** Een autoband is te zacht als de druk lager is dan 1,6 bar. Hoeveel dagen na het oppompen is dat het geval?

**Opgave 10**

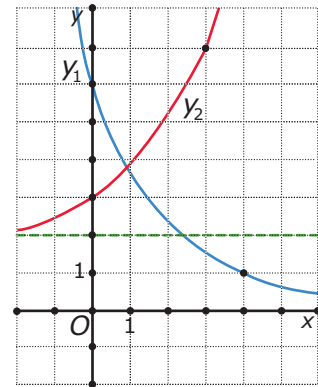
Van een exponentiële functie zijn de volgende gegevens bekend. De grafiek benadert voor grote waarden van x de lijn $y = 5$. De punten $A(0,10)$ en $B(2,8)$ liggen op de grafiek.

Stel een bijpassende formule op.

Opgave 11

Je ziet hier twee grafieken van exponentiële functies. De x -as is asymptoot van y_1 , de lijn $y = 2$ is de asymptoot van y_2 .

Stel bijpassende formules op.



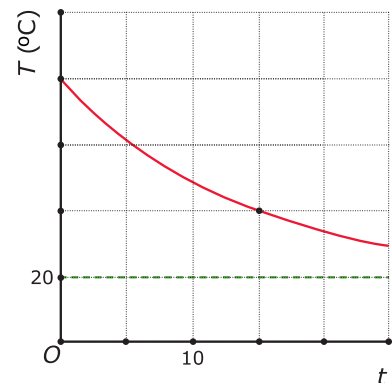


Toepassen

Deze grafiek geeft het afkoelen weer van een kop thee. Daarvoor geldt volgens de warmtewet van Newton dat het temperatuurverschil met de omgeving elke tijdseenheid met een vast percentage afneemt.

De temperatuurmeting begint op $t = 0$ als de thee een temperatuur van 80°C heeft, een temperatuurverschil van 60°C met de omgeving. Dat de omgevingstemperatuur 20°C is, wordt door de asymptoot van de grafiek aangegeven.

Je ziet in de grafiek dat het temperatuurverschil met de omgeving $T - 20$ na 15 minuten $\frac{1}{3}$ deel van het temperatuurverschil op $t = 0$ is. Hiermee kun je de groeifactor van het temperatuurverschil uitrekenen en een formule opstellen voor $T - 20$ en dus ook voor T als functie van t in minuten.



Opgave 12: Afkoelende thee

Bekijk de grafiek van het afkoelen van een kop hete thee hierboven.

Voor het temperatuurverschil met de omgeving geldt volgens de tekst $T - 20 = b \cdot g^t$.

- a** Licht dit toe.

- b** Bereken g in twee decimalen nauwkeurig.

- c** Stel een formule op voor T als functie van t .

- d** Na hoeveel minuten is de temperatuur van de thee lager van 25°C ?

**Opgave 13: Opwarmende melk**

Melk komt met een temperatuur van $6\text{ }^{\circ}\text{C}$ uit de koelkast en warmt langzaam op naar kamertemperatuur ($20\text{ }^{\circ}\text{C}$). Ook in dit geval geldt de warmtewet van Newton, dus bij de opwarming neemt het temperatuurverschil met omgeving exponentieel af.

Iemand meet dat de melk 10 minuten nadat ze uit de koelkast is gehaald een temperatuur van $13\text{ }^{\circ}\text{C}$ heeft.

Maak een schets van een mogelijke grafiek van de opwarming van de melk. Stel ook een bijpassende formule op.

2.4 Totaalbeeld

Samenvatten

Met exponentiële verbanden heb je al leren werken. In dit onderwerp is die kennis herhaald en uitgebreid. Het begrip exponentiële functie is ingevoerd en je hebt geleerd hoe je een formule moet maken bij een exponentiële functie. Vooral het werken met groeifactoren en het omrekenen van een groeifactor bijvoorbeeld per jaar naar een groeifactor per maand (en omgekeerd) zijn behandeld. Daarbij heb je hogere machtswortels nodig. Ook het werken met exponentiële vergelijkingen is aan de orde geweest, daarbij moet je (voorlopig) nog werken met inklemmen en tabellen.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Exponentiële verbanden** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2 en 3 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- ▶ groeifactor — groepercentage — vervalpercentage — halveringstijd — verdubbelingstijd;
- ▶ lineaire groei — exponentiële groei;
- ▶ exponentiële functie — asymptoot.

Activiteiten

- ▶ werken met de begrippen groeifactor, groei(verval)percentage, halveringstijd en verdubbelingstijd;
- ▶ lineaire groei vergelijken met exponentiële groei, bijbehorende formules opstellen;
- ▶ werken met meer algemene exponentiële functies en formules daarvan opstellen.

Opgave 1

Een hoeveelheid groeit met 5% per uur.

- a** Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?

- b** Hoeveel bedraagt de groeifactor per dag? En het groepercentage per dag?



- c** Hoeveel bedraagt de groeifactor per kwartier in vier decimalen nauwkeurig? En het groei-percentage per kwartier?

- d** Hoeveel bedraagt de verdubbelingstijd van deze hoeveelheid?

Opgave 2

Een hoeveelheid neemt af met 16% per jaar.

- a** Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?

- b** Hoeveel bedraagt de groeifactor per maand in drie decimalen nauwkeurig? En het groei-percentage per maand?

- c** Hoeveel bedraagt de halveringstijd van deze hoeveelheid?

**Opgave 3**

In een natuurgebied is het aantal wilde zwijnen aan het toenemen. In de tabel zie je het aantal wilde zwijnen in dit gebied in de loop van een aantal jaren, afgerond op tientallen. Bij Staatsbosbeheer wil men het verloop van het aantal dieren voorspellen. Als er meer dan 500 wilde zwijnen zijn, dan moeten er maatregelen worden getroffen. Noem het aantal wilde zwijnen Z , afhankelijk van de tijd t in jaren na 2008.

jaartal	2008	2009	2010	2011
aantal zwijnen	310	330	350	370

- a** Als je uitgaat van lineaire groei, welke formule kun je dan opstellen voor Z afhankelijk van t ?

- b** Als je uitgaat van exponentiële groei, hoeveel bedraagt dan het groeipercentage per jaar ongeveer? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

- c** Welke formule geldt voor Z afhankelijk van t als je van exponentiële groei uitgaat?

- d** Bereken voor beide soorten groei in welk jaar het aantal wilde zwijnen voor het eerst de 500 zal overschrijden.

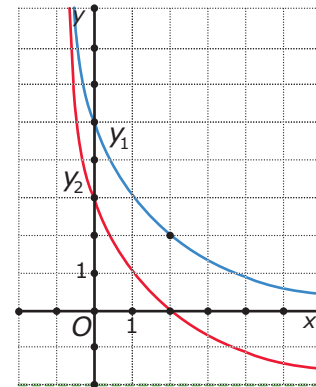
Opgave 4

De grafiek van een exponentiële functie van de vorm $y = b \cdot g^x$ gaat door de punten $A(2,20)$ en $B(6,10)$.

Bereken b in gehelen nauwkeurig en g in twee decimalen nauwkeurig.

**Opgave 5**

Je ziet hier de grafieken van twee exponentiële functies. y_1 heeft de x -as als asymptoot en y_2 de lijn $y = -2$. Stel bij beide functies een passende formule op.

**Toepassen**

Bij de rente die je van de bank krijgt op een spaartegoed speelt exponentiële groei een rol. Door het bijschrijven van rente verandert namelijk je spaartegoed en daar krijg je ook weer rente over. Er is sprake van 'rente op rente'. Je geld stoppen in een spaarvarken is dus geen goed idee...

Stel je zet op de eerste dag van deze maand € 1000,- op een spaarrekening waarop je 3% rente per jaar krijgt. Dan maakt het wel wat verschil of de bank de rente maandelijks bijschrijft of jaarlijks, of pas als je de spaarrekening weer opheft en leeghaalt. Je kunt dat zelf narekenen...

**Opgave 6: Rente op rente**

Gebruik de gegevens uit de tekst in **Toepassen**.

- a** Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar van je spaartegoed? En hoeveel bedraagt de groeifactor per maand?

- b** Als de bank maandelijks rente bijschrijft en het rentepercentage per maand op één decimaal nauwkeurig afrondt, hoeveel bedraagt je spaartegoed dan na een jaar? En hoeveel zou het moeten bedragen?



- c** En als de bank het rentepercentage op twee decimalen nauwkeurig berekent en maandelijks rente bijschrijft. Wie wordt er nu blij, jij of de bank?

- d** Doe de berekening uit c nog eens, maar neem nu aan dat de bank niet afrondt, maar gewoon de decimalen na de tweede weglaat bij het berekenen van het rentepercentage. (Dat heet 'afkappen'.)

Opgave 7: Tussentijdse stortingen

Gebruik weer de gegevens uit de tekst in **Toepassen**.

Nu stort je zelf maandelijks nog € 25,00 op je spaarrekening, te beginnen op de eerste dag van de volgende maand.

Bereken je spaartegoed na een jaar sparen. Ga uit van een maandrente van 0,24%.

Begrippen

- ▶ statistisch onderzoek — populatie en steekproef — representatieve steekproef — absolute en relatieve frequenties — klassenindelingen — diagrammen;
- ▶ centrummaten — gemiddelde — modus — mediaan — spreidingsmaten — spreidingsbreedte — kwartielafstand) — boxplot — kwartielafstand — eerste kwartiel — tweede kwartiel;
- ▶ kans — relatieve frequentie;
- ▶ wegendigram — boomdiagram.

Activiteiten

- ▶ omschrijven wat statistisch onderzoek is — herkennen wat een representatieve steekproef uit een populatie is — absolute en relatieve frequenties kunnen bepalen — frequentieverdelingen (met klassenindeling) en bijpassende diagrammen maken;
- ▶ het uitrekenen en aflezen van centrummaten (gemiddelde, modus, mediaan) en spreidingsmaten (spreidingsbreedte, kwartielafstand) — gegevens samenvatten in een boxplot;
- ▶ kansen bepalen door relatieve frequenties te bepalen of te beredeneren;
- ▶ kansen berekenen door overzichten van de mogelijkheden (in b.v. wegendigrammen en boomdiagrammen) te tekenen.

Kansloos?!



Domein

Informatie verwerken

Hoofdstuk

Statistiek en kansrekening

Inhoud

- 3.1 Statistisch onderzoek 110
- 3.2 Centrum en spreiding 127
- 3.3 Kansen 140
- 3.4 Wegen en bomen 152
- 3.5 Totaalbeeld 161

3

3.1 Statistisch onderzoek

Verkennen

Opgave V1

Bekijk dit tekstje uit een folder van een theater.

Uit onderzoek is gebleken dat veel theaterbezoekers het niet prettig vinden als zij in de pauze lang moeten wachten op een drankje. We heffen daarom een vaste servicetoeslag op de toegangsprijs zodat u op de avond van de voorstelling niet hoeft te betalen voor een drankje in de pauze en voor de bewaakte garderobe. Deze 'portemonneeloze pauze' bedraagt € 2,50, is verwerkt in de entreprijs en staat vermeld op uw kaartje. Wanneer u kaarten boekt voor voorstellingen die plaats vinden vanaf 1 september 2012 bedragen de kosten voor de 'portemonneeloze pauze' € 3,00.

a Wie heeft dit onderzoek uitgevoerd denk je?

b Is deze maatregel gunstig voor alle bezoekers?

c Zou er verschil zijn in de uitkomsten van een dergelijk onderzoek tussen verschillende theaters?

**Opgave V2**

Bij de **Rijksoverheid** vind je een aparte pagina voor jongeren van 13 of 14 jaar.

Deze pagina bevat informatie voor jongeren van die leeftijd over bijbaantjes.

In een bepaalde maand is deze site door ruim 300 jongeren geraadpleegd. Daarbij is onderzocht wat de leeftijd was van de jongeren die deze site bezochten. De gegevens staan in de tabel.

leeftijd	aantal
12	32
13	56
14	128
15	67
16	43

- a** Hoeveel jongeren hebben volgens dit tabelletje de site geraadpleegd?

- b** Hoeveel procent van de jongeren die de site raadpleegden was daadwerkelijk 14 jaar?

- c** Maak een extra kolom naast de kolom 'aantal' en noteer daar de relatieve frequenties. Wanneer zijn relatieve frequenties handiger dan absolute frequenties?

- d** Waarom is in deze tabel sprake van een klassenindeling? Om welke klassen gaat het dan?



Theorie

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** wat een representatieve steekproef is.

De eigenaar van een theater denkt dat veel theaterbezoekers het niet prettig vinden als zij in de pauze lang moeten wachten op een drankje.

- a** Waarom kun je zoiets alleen zeggen als je gedegen statistisch onderzoek pleegt?

- b** Wat is de populatie als hij een statistisch onderzoek wil houden?

- c** Hoe zou je een representatieve steekproef kunnen opstellen?

Opgave 2

Probeer een geschikte vragenlijst te maken voor een statistisch onderzoek zoals je dat bij de vorige opgave zou moeten uitvoeren.

**Opgave 3**

In **Uitleg 2** zie je nog eens het verschil tussen absolute en relatieve frequenties.

- a** Reken zelf na, dat de relatieve frequentie van het aantal 14-jarigen in de tweede maand ongeveer 34% is.

- b** Vergelijk het deel 13-jarigen in beide maanden. Welke conclusie trek je?

Opgave 4

In **Uitleg 2** wordt gesproken over een klassenindeling. Je had de bezoekers ook in drie klassen kunnen verdelen: de klasse jongeren die nog geen 14 jaar zijn, de klasse 14-jarigen en de klasse jongeren die ouder zijn dan 14 jaar.

Wat is het nadeel van deze klassenindeling?

Opgave 5

Je wilt onderzoek doen naar het aantal uren huiswerk voor wiskunde op een school met 1600 leerlingen.

- a** Wat is de populatie van dit onderzoek?

- b** Hoeveel leerlingen zou je moeten vragen om een goed beeld te krijgen?



Het is niet voldoende om de leerlingen uit één klas te vragen naar het aantal uren huiswerk per week.

c Waarom niet?

Het doel is om een representatieve steekproef te ondervragen.

d Hoeveel leerlingen en uit welke klassen zou jij vragen? Hoe kies je deze leerlingen?

Opgave 6

Het volgende stukje tekst stond in mei 2010 in de krant. Een onderzoeker wil nu weten hoe het met de konijnen op Texel gesteld is. Hij kan onmogelijk alle konijnen vangen, maar wil toch een beeld hebben van het aantal zieke konijnen op Texel.

Het is een treurig gezicht: in de omgeving van de Texelse vuurtoren liggen heel veel dode konijnen. Er heerst myxomatose, een ernstige konijnenziekte. Al enkele honderden dieren zijn eraan doodgegaan. En dat terwijl het net weer een beetje beter ging met de konijnen op Texel.

a Wat is de populatie van dit onderzoek?

b Beschrijf hoe jij een steekproef zou kiezen en het onderzoek zou uitvoeren.

**Opgave 7**

Bekijk het diagram in **Voorbeeld 2**.

- a** Maak bij het cirkeldiagram een frequentietabel met absolute en relatieve frequenties.

In de grafiek zijn meloenen niet opgenomen, deze behoren officieel namelijk tot de groenten. De jaarlijkse productie van meloenen is ongeveer 100 miljard kg.

- b** Maak een nieuwe frequentietabel met daarin opgenomen de meloenen.

**Opgave 8**

In het bestand **Top 2000 in 2012** zie je hoe de Top 2000 er in 2012 uitzag, uit welk jaar een nummer kwam en in welk uur het gedraaid werd.

- a** Open dit bestand en sla het op je eigen computer op. Je kunt het bewerken met MS-Excel, bekijk eventueel het **Practicum**. Zoek uit hoeveel nummers er uit jouw geboortjaar in de Top2000 van 2012 staan en bereken hoeveel procent dat van het totaal aantal nummers is.

Wanneer je voor elk jaar apart wilt bekijken hoeveel nummers uit dat jaar in de Top2000 staan, dan wordt dat een onoverzichtelijke brij. Daarom wordt vaak gekeken naar decennia.

- b** Maak een tabel zoals deze en vul hem in.

decennium	frequentie
1930 - 1939	
1940 - 1949	
1950 - 1959	
1960 - 1969	
1970 - 1979	
1980 - 1989	
1990 - 1999	
2000 - 2009	
2010 - 2019	

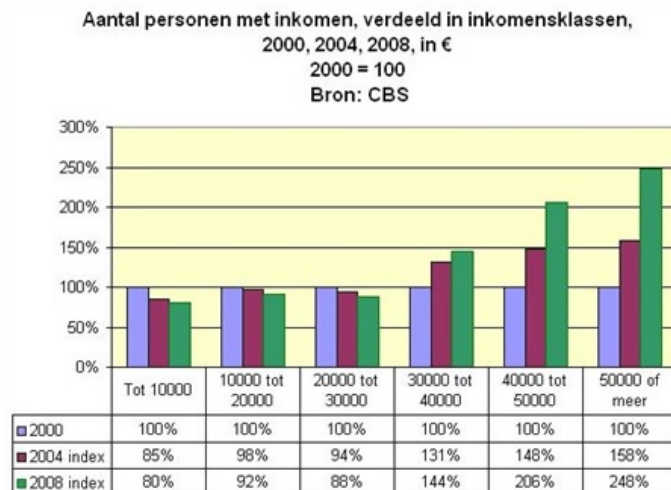


Meer dan de helft van de nummers uit de Top2000 kwam uit de jaren 1970 – 1990. Een dj heeft dit opgemerkt en vertelt op de radio dat er in deze twintig jaar daarom de beste muziek gemaakt is.

- c** Ben je het met hem eens? Geef commentaar op deze opmerking.

Opgave 9

Deze grafiek geeft de verdeling van de jaarinkomens in Nederland volgens het CBS in de jaren 2000, 2004 en 2008.



- a** Welke zes inkomensklassen zijn er?

- b** Wat is het grootste verschil tussen de lage inkomens klassen en de hoge inkomens klassen als je kijkt naar de jaren 2004 en 2008?

**Opgave 10**

In het schooljaar worden in de twee klassen van meneer De Wit de volgende cijfers voor wiskunde gehaald:

5,1	6,5	7,4	7,3	4,1	5,3	7,9	6,4
4,3	6,1	3,8	5,8	8,0	7,6	4,1	6,3
5,3	5,2	5,8	5,6	5,1	6,3	4,8	5,4
5,8	6,1	5,0	4,5	6,3	4,5	5,7	5,7
5,1	6,0	4,8	4,6	5,7	6,3	6,4	7,6
4,8	5,5	4,7	5,7	5,6	4,6	7,9	7,0

- a** Maak een geschikte klassenindeling met vijf klassen voor deze cijfers en verwerk de cijfers in een frequentietabel.

- b** Vind je dat de leerlingen van deze docent goede cijfers hebben gehaald dit jaar?



Opgave 11

Open [deze tabel in Excel](#) met daarin de lengtes van 20 meisjes en 18 jongens uit 4 Havo. Je ziet een klassenindeling voor de meisjes.

Maak met behulp van Excel daarbij een frequentietabel van de lengtes van de jongens.

Oefen eventueel eerst het werken met Excel via en het [Practicum](#).

Maak een bijpassend histogram, dat is een staafdiagram waarvan alle staven even breed zijn en er geen tussenruimte tussen de staven is. Maak ook een histogram voor de meisjes.

Verwerken

Opgave 12

Een onderzoeksbureau is geïnteresseerd in de gezondheid van mannen boven de 30 jaar. Ze doen onderzoek door een vragenlijst via internet voor te leggen aan bezoekers van de website www.volkskrant.nl. De volgende vragen maken deel uit van het onderzoek:

- Wat is uw leeftijd?
- Hoeveel uur sport u per week?
- Vindt u zichzelf gezond?
- Rookt u?
- Hoeveel dagen bent u de afgelopen 12 maanden week ziek thuis gebleven?

a Wat is de populatie van dit onderzoek?



- b** Is dit een representatieve steekproef? Leg uit.

- c** Wat vind je van de gestelde vragen? Kun je de vragenlijst verbeteren en uitbreiden?

Opgave 13

Volgens onderzoek van GFK in opdracht van Productschap Tuinbouw is de appel het meest gekochte verse fruit in Nederland met 24,2 kilo per huishouden per jaar. Daarna volgen sinaasappels met 19,4 kilo en bananen met 14,6 kilo. Mandarijn staat op de vierde plaats met 9,7 kilo en peer staat in dit onderzoek op de vijfde plaats met 6,1 kilo per huishouden per jaar. Totaal is dit 82% van de fruitconsumptie in Nederland.

- a** Maak een frequentietabel met absolute en relatieve frequenties van de fruitconsumptie per huishouden per jaar in Nederland.



- b** Maak een bijpassend cirkeldiagram.

Opgave 14

Op [de website van het KNMI](#) staan heel veel data over het weer. Een van de zaken die je kunt nakijken is hoe vaak windsnelheden voorkomen.

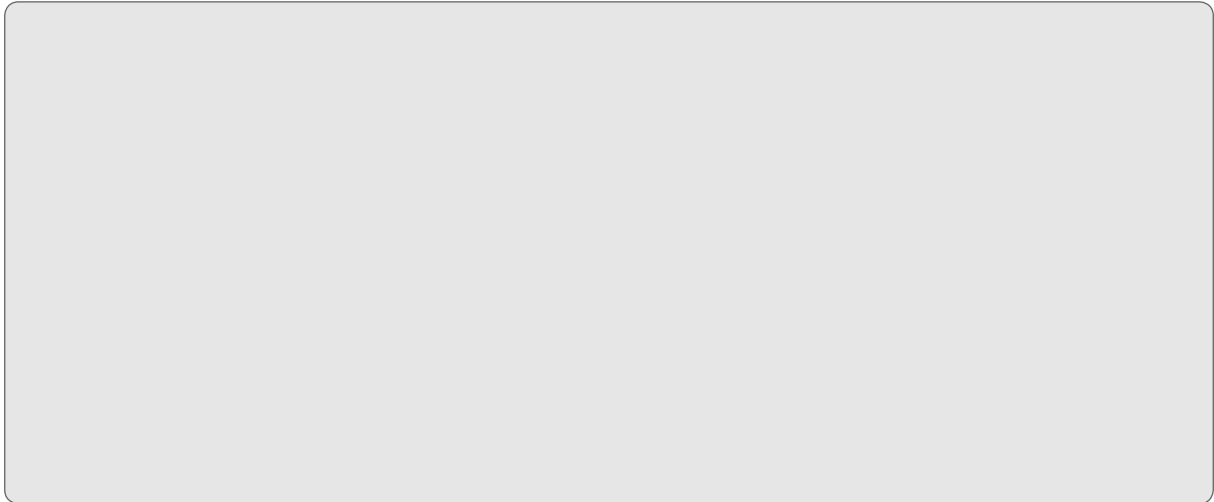
Deze tabel gaat over alle uren tussen 1981 en 2000.

260		De Bilt			Uurwaarden van de gemiddelde windsnelheid in klassen van 1 m/s										
		1981 - 2000			Distributief in aantallen										
Klasse		Periode													
Van	Tot	Jan	Feb	Mrt	Apr	Mei	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec	Alle maanden	
0.0	0.4	52	46	84	39	63	63	86	178	165	97	56	59	988	
0.5	1.4	1395	1163	1480	1700	1836	1773	2112	2831	2774	2125	1707	1547	22443	
1.5	2.4	2257	2140	2396	2736	3089	3223	3645	3848	3507	3151	2981	2640	35613	
2.5	3.4	2500	2703	2917	3076	3507	3645	3670	3426	3241	3158	2863	2787	37493	
3.5	4.4	2439	2305	2587	2704	2912	3007	2850	2501	2224	2603	2431	2381	30944	
4.5	5.4	2085	1944	1910	1947	1906	1719	1662	1250	1381	1695	1898	2009	21406	
5.5	6.4	1561	1242	1376	1174	905	678	615	550	696	958	1259	1453	12467	
6.5	7.4	1133	874	1026	636	442	211	176	232	288	578	711	938	7245	
7.5	8.4	699	580	528	269	164	61	50	49	95	318	338	531	3682	
8.5	9.4	405	346	283	80	39	16	13	14	23	101	88	265	1673	
9.5	10.4	211	131	174	30	10	4	1	1	6	62	35	150	815	
10.5	11.4	70	43	74	2	2	-	-	-	-	20	15	71	297	
11.5	12.4	47	32	31	3	3	-	-	-	-	11	9	35	171	
12.5	13.4	13	7	11	-	2	-	-	-	-	3	2	10	48	
13.5	14.4	7	4	3	3	-	-	-	-	-	-	1	2	20	
14.5	15.4	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	2	5	
15.5	16.4	1	-	-	1	-	-	-	-	-	-	2	-	4	
16.5	17.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	3	
17.5	18.4	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	
18.5	19.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	

- a** Hoeveel uren zijn dat (je hoeft geen rekening te houden met schrikkeljaren)?



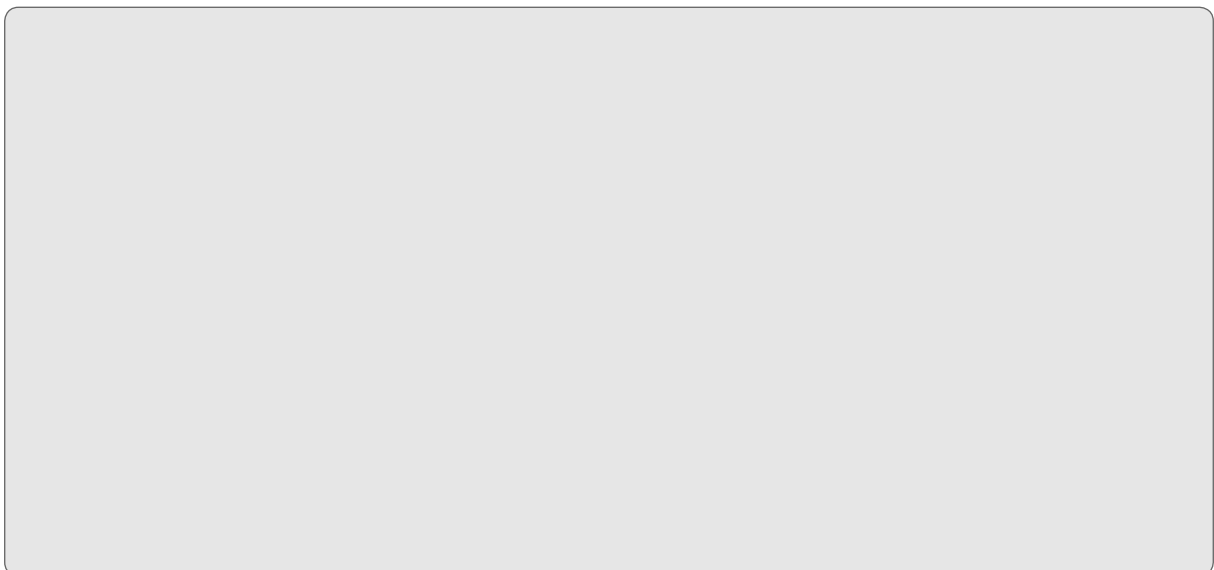
- b** Maak een staafdiagram van de kolom 'Alle maanden'.



In Den Helder waait het meer en harder dan in De Bilt, dat komt omdat Den Helder aan zee ligt. In deze tabel zijn de klassen ingedeeld volgens de windkracht (Beaufort).

235		Den Helder (De Kooy)			Uurwaarden van de gemiddelde windsnelheid naar Beaufort-klassen in m/s										
		1981 - 2000			Distributief in aantallen										
Klasse		Periode													
Van	Tot	Jan	Feb	Mrt	Apr	Mei	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec	Alle maanden	
0.0	0.2	18	10	14	15	20	19	11	35	13	29	19	26	229	
0.3	1.5	766	691	815	833	827	909	962	1314	1179	936	1025	960	11217	
1.6	3.3	1825	1738	1965	2368	2412	2513	2794	3040	2857	2513	2078	2218	28321	
3.4	5.4	2889	2719	3592	4089	4843	4616	5027	4571	4101	3698	3573	3069	46787	
5.5	7.9	3296	3329	3843	4098	4277	4194	4112	3787	3447	3615	3648	3509	45155	
8.0	10.7	2965	2826	2795	2208	2012	1775	1671	1603	1940	2433	2360	2723	27311	
10.8	13.8	2170	1636	1414	710	448	361	292	452	718	1209	1323	1822	12555	
13.9	17.1	772	511	398	72	39	13	11	78	131	392	347	462	3226	
17.2	20.7	154	90	41	6	2	-	-	-	14	51	27	87	472	
20.8	24.4	24	9	3	1	-	-	-	-	-	3	-	4	44	
24.5	28.4	1	1	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	3	
28.5	32.6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	

- c** Zoek de benaming van de gebruikte klassen op en verwerk deze in een nieuwe tabel met daarin de gegevens van de kolom 'Alle maanden'.





- d** Maak een staafdiagram van de relatieve frequenties van de windkrachten uit de tabel van opgave c.

Opgave 15

Open het [Excel-bestand Sportprestaties](#). Je vindt er gegevens van 74 leerlingen in de leeftijdscategorie 11 - 12 jaar.

- a** Vergelijk de prestaties bij het verspringen van de meisjes en de jongens door bijpassende staafdiagrammen in Excel te maken. Probeer een conclusie te trekken.



- b** Is er verschil in de prestaties bij het verspringen tussen jongens en meisjes? Leg uit hoe je die conclusie trekt.

Toepassen

Je hebt al eerder gewerkt met MS-Excel. Misschien goed om dit nog even te herhalen. Je werkt via het **Practicum** met het bestand 'Gegevens154Leerlingen'.

Opgave 16: Cijfer voor wiskunde

Excel kan je helpen bij het maken van frequentietabellen en diagrammen. Bekijk het **Practicum**.

Denk er wel om dat je op een pc het bijbehorende Excel-bestand eerst moet downloaden. Er wordt van uit gegaan dat je wel eens eerder met Excel hebt gewerkt en al weet hoe je met cellen werkt, met formules in cellen werkt, absoluut en relatief kopiëren begrijpt, etc.

- a** Maak zelf een frequentietabel van de gehele eindcijfers voor wiskunde van deze groep leerlingen in 4 vwo.



- b** Maak van deze eindcijfers een staafdiagram.

Zouden de leerlingen die wiskunde B hebben gekozen betere cijfers in klas 3 hebben gehaald dan de leerlingen die geen wiskunde B hebben gekozen?

- c** Om die vraag te kunnen beantwoorden moet je door sorteren eerst de leerlingen die wiskunde A hebben gekozen scheiden van de leerlingen die wiskunde B hebben gekozen. Daarna maak je van beide groepen een frequentietabel en een staafdiagram van de gehele eindcijfers in 3 vwo.

- d** Kun je concluderen dat de wiskunde B leerlingen inderdaad betere cijfers voor wiskunde hebben gehaald in 3 vwo?

**Opgave 17: Lengtes vergelijken**

Werk met hetzelfde Excel-bestand als in de voorgaande opgave. Zet de gegevens over de lengtes van de meisjes en de jongens op een afzonderlijk werkblad.

- a** Waarom maak je klassenindelingen als je de lengtes van de meisjes en de jongens wilt vergelijken? En waarom gebruik je dan relatieve frequenties?

- b** Maak een klassenindeling en de bijbehorende frequentietabellen en histogrammen zowel voor de jongens als de meisjes.

- c** Probeer een conclusie te trekken uit beide diagrammen.

Practicum: Werken met Excel

Excel kan zelf frequentietabellen voor je maken. Je hoeft dan niet met de hand te tellen.

In het Excelbestand **Gegevens154Leerlingen.xls** vind je enkele gegevens van 154 leerlingen die in 2008 in 4 vwo zaten.

Je kunt daarbij een frequentieverdeling voor bijvoorbeeld 'cijfwis', het cijfer voor wiskunde van deze leerlingen, maken.

Dat gaat als volgt:

- Maak eerst een kolom met cijfers van (bijvoorbeeld) 3, 4, 5, t/m 10 in de cellen O20 t/m O27. Geef die het opschrift 'cijfwis'.
- Dan zijn de cellen P20 t/m P27 bestemd voor de frequenties. Selecteer die allemaal.
- Klik nu in de formulebalk en zet daar in: `=INTERVAL(H2:H155;O20:O27)` en doe [ctrl][shift][enter].

Als het goed is krijg je nu de juiste frequenties. Excel telt dus in de cellen H2 t/m H155 (de cijfers voor wiskunde) hoeveel er steeds voorkomen van de waarden in de cellen O20 t/m O27, de verschillende cijfers die voorkomen.

Maar misschien wil je de leerlingen die wiskunde A hebben vergelijken met de wiskunde B leerlingen? Dan laat je Excel eerst sorteren op de kolom 'wisgroep'. Dat doe je door die kolom te selecteren en 'Sorteren en filteren' te kiezen. Sorteert van laag naar hoog en klik op OK als Excel je vraagt of de selectie moet worden uitgebreid (want de andere kolommen moeten ook worden meegenomen bij het sorteren). Nu heb je de wiskunde A en de wiskunde B leerlingen als groepen bij elkaar staan en kun je de verdeling van hun cijfers vergelijken.

3.2 Centrum en spreiding

Verkennen

Opgave V1

Thijmen en Sven vergelijken de resultaten die ze het afgelopen jaar voor wiskunde hebben gehaald:

Sven	6,4	6,3	6,5	6,4	6,4	6,4	6,5	6,5	6,3
Thijmen	8,9	3,5	6,3	9,3	3,5	5,8	7,2	4,7	8,5

- a** Bereken het gemiddelde van deze resultaten voor zowel Sven als Thijmen.

- b** Wie van de beide jongens heeft de grootste spreiding in zijn resultaten dit jaar? Geef uitleg.

- c** Wie van de beide jongens heeft volgens jou beter gepresteerd dit jaar? Geef uitleg.

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de gegevens van Sven en Thijmen nog eens.

- a** Bepaal van elk van hen het modale cijfer.



- b** Bepaal van elk van hen de mediaan van de cijfers.

- c** Waarom kun je nu nog steeds weinig zeggen als je hun resultaten wilt vergelijken?

Opgave 2

Je gaat nu de spreiding van de gegevens van Sven en Thijmen in de **Uitleg** bekijken.

- a** Bepaal van elk van hen de spreidingsbreedte.

- b** Bepaal van elk van hen de kwartielafstand van de cijfers.

- c** Waarom kun je nu wel wat meer zeggen als je hun resultaten vergelijkt?

**Opgave 3**

Je kunt de resultaten van Sven en Thijmen in de **Uitleg** ook indelen in klassen.

- a** Maak een klassenindeling waarvan de klassenmiddens de gehele cijfers 3, 4, ..., 9 zijn.

- b** Schat met behulp van deze klassenindeling het gemiddelde cijfer. Waarom wijkt dit af van het werkelijke gemiddelde?

- c** Bepaal hun modale gehele cijfers. Wat valt je op?

- d** Bepaal van beide frequentieverdelingen de spreidingsbreedte.

**Opgave 4**

Werk met de gegevens in **Voorbeeld 1**.

- a** Maak een frequentietabel van de gehele rapportcijfers. Waarom heeft het geen zin om een frequentietabel van de rapportcijfers op één decimaal nauwkeurig te maken?

- b** Bereken het gemiddelde van de gehele rapportcijfers en dat van de rapportcijfers op twee decimalen nauwkeurig.

- c** Waarom is de modus van de gehele cijfers een zinvol getal en de modus van de cijfers op één decimaal niet? Wat is het modale cijfer?

- d** Maak een boxplot van de gehele cijfers. Vergelijk dit met het boxplot van de cijfers op één decimaal dat Excel voor je maakt.

**Opgave 5**

Bekijk de tabel in **Voorbeeld 1**.

- a** Waarom is er bij de rapportcijfers sprake van een klassenindeling? Over welke klassen gaat het dan?

De werkelijke cijfers zijn afgerond op één decimaal nauwkeurig. Ook dat zijn eigenlijk klassenmiddens.

- b** Van welke klassen?

Opgave 6

Bekijk de inkomenstabel in **Voorbeeld 2**.

- a** Waarom ontbreekt in de tabel een rij voor mensen die meer dan € 200.000 per jaar verdienen?

- b** Waarom is het twijfelachtig of de inkomens gelijkmatig over de klassen zijn verdeeld?

- c** Bereken ook de kwartielafstand uitgaande van een gelijkmatige verdeling en teken een bijpassend boxplot.



- d** Kun je op grond van het boxplot uitleggen waarom dit een scheve verdeling wordt genoemd?

Opgave 7

De vogelbescherming vraagt ieder jaar mensen met een tuin om te tellen hoeveel vogels er van verschillende soorten in hun tuin zijn. In 2010 was de top 10 als volgt samengesteld:

1	huismus	160119
2	koolmees	105838
3	merel	100705
4	vink	76790
5	pimpelmees	63547
6	spreeuw	61426
7	kauw	45924
8	Turkse tortel	44043
9	houtduif	37870
10	roodborst	34658

- a** Hoe vaak komt een vogel uit de top 10 gemiddeld in de tuinen voor?

- b** Waarom heeft het geen zin om een mediaan of een modus te bepalen?



Verwerken

Opgave 8

Het ministerie van OC en W waar onderwijs onder valt houdt jaarlijks bij hoeveel vroegtijdige schoolverlaters er zijn. Een vroegtijdige schoolverlater stopt met zijn/haar opleiding voordat het diploma is behaald. Voor het schooljaar 2011-2012 waren dat de volgende aantallen.

leeftijd	≤ 13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
aantal	253	385	503	1663	3645	10883	7783	5239	3533	2358

Neem voor iedereen in de categorie ≤ 13 aan, dat de leeftijd 13 jaar is.

- a** Hoeveel bedraagt de gemiddelde leeftijd van een vroegtijdige schoolverlater?

- b** Hoeveel is de modale leeftijd van een vroegtijdige schoolverlater?

- c** Bepaal de mediaan.

- d** Wat vind je van deze resultaten?

**Opgave 9**

Het ministerie van OC en W waar onderwijs onder valt houdt jaarlijks bij hoeveel vroegtijdige schoolverlaters er zijn. Een vroegtijdige schoolverlater stopt met zijn/haar opleiding voordat het diploma is behaald. Hier zie je de resultaten van twee schooljaren.

Neem voor iedereen in de categorie ≤ 13 aan, dat de leeftijd 13 jaar is.

- a** Bereken de spreidingsbreedte en de kwartielafstand bij de gegevens over vroegtijdige schoolverlaters over de schooljaren 2005-2006 en 2011-2012.

leeftijd	2005 - 2006	2011 - 2012
≤ 13	467	253
14	1095	385
15	1450	503
16	4181	1663
17	10759	3645
18	11465	10883
19	8796	7783
20	6358	5239
21	4632	3533
22	3476	2358
totaal	52679	35245

- b** Trek een conclusie over de verschillen en/of overeenkomsten tussen de beide jaren.

**Opgave 10**

Open het **Excel-bestand Sportprestaties**. Je vindt er gegevens van 74 leerlingen in de leeftijdscategorie 11-12 jaar.

Je wilt de prestaties bij het verspringen van de meisjes en de jongens vergelijken.

- a** Maak een klassenindeling met een klassenbreedte van 20 cm voor de afstanden van de jongens en de meisjes afzonderlijk. Bereken de relatieve frequenties en maak een staafdiagram.

- b** Schat vanuit de frequentietabel de modale afstand en het gemiddelde van zowel de jongens als de meisjes.



- c** Teken boxplots voor de jongens en de meisjes afzonderlijk vanuit de ruwe data. Trek een conclusie.

Toepassen

Je hebt al eerder gewerkt met MS-Excel. Misschien goed om dit weer even te herhalen. Je werkt via het **Practicum** met het bestand 'Gegevens154Leerlingen'.

Vervolgens kun je MS-Excel ook goed inzetten bij eigen onderzoekjes. En dat is de beste manier om te leren omgaan met statistiek.

Opgave 11: Cijfer voor wiskunde

Excel kan je helpen bij het berekenen van centrummaten en spreidingsmaten. Bekijk het **Practicum**.

Denk er wel om dat je op een pc het bijbehorende Excel-bestand eerst moet downloaden.

- a** Bereken de centrummaten en de spreidingsmaten van de gehele eindcijfers voor wiskunde van deze groep leerlingen in 4 vwo.

- b** Maak van deze eindcijfers een boxplot.



Zouden de leerlingen die wiskunde B hebben gekozen betere cijfers in klas 3 hebben gehaald dan de leerlingen die geen wiskunde B hebben gekozen?

- c** Om die vraag te kunnen beantwoorden moet je door sorteren eerst de leerlingen die wiskunde A hebben gekozen scheiden van de leerlingen die wiskunde B hebben gekozen. Bereken van beide groepen de centrummaten en de spreidingsmaten van de gehele eindcijfers in 3 vwo. Maak ook twee boxplots.

- d** Kun je concluderen dat de wiskunde B leerlingen inderdaad betere cijfers voor wiskunde hebben gehaald in 3 vwo?

Opgave 12: Lengtes vergelijken

Werk met hetzelfde Excel-bestand als in de voorgaande opgave. Zet de gegevens over de lengtes van de meisjes en de jongens op een afzonderlijk werkblad.

- a** Maak een klassenindeling en bereken de bijbehorende centrummaten en spreidingsmaten zowel voor de jongens als de meisjes.

- b** Probeer een conclusie te trekken uit beide series gegevens.



Opgave 13: Een eigen onderzoek

Bedenk samen met enkele medeleerlingen een onderzoek dat je onder jongeren zou kunnen uitvoeren door middel van een goede representatieve steekproef.

a Omschrijf en leg uit

- wat je wilt onderzoeken;
- welke vragen je wilt stellen, of welke gegevens je wilt verzamelen of welke metingen je wilt verrichten;
- of je denkt dat je steekproef representatief is voor alle jongeren van Nederland;
- of je denkt dat je steekproef representatief is voor alle 3 havo leerlingen van Nederland;
- of je denkt dat je steekproef representatief is voor leerlingen op jouw school.

b Voer je onderzoek uit en verwerk de gegevens met behulp van MS-Excel.

c Probeer conclusies te trekken en die te motiveren met behulp van diagrammen, centrummaten en spreidingsmaten.

Practicum: Werken met Excel

Excel kan centrummaten en spreidingsmaten voor je berekenen. Je hebt daarvoor geen frequentietabellen nodig, die zijn alleen erg handig bij het maken van diagrammen.

In het Excelbestand [Gegevens154Leerlingen.xls](#) vind je enkele gegevens van 154 leerlingen die in 2008 in 4 vwo zaten.

Je kunt daarbij van bijvoorbeeld 'cijfwis', het cijfer voor wiskunde van deze leerlingen, het minimum, het eerste kwartiel, de mediaan, het derde kwartiel en het maximum laten berekenen.

Wil je die ook nog in een boxplot weergeven, dan ga je (in Excel2010) zo te werk:

- Maak eerst een kolom met onder elkaar Q1, minimum, mediaan, maximum en Q3 in die volgorde. Geef de kolom ernaast het opschrift 'cijfwis'.
- In de cellen van die kolom maak je de formules =KWARTIEL(H2:H155;1), =MIN(H2:H155), =MEDIAAN(H2:H155), =MAX(H2:H155) en =KWARTIEL(H2:H155;3).
- Nu selecteer je beide kolommen en het opschrift en via Invoegen kies je een lijndiagram met markeringen.
- Je krijgt nu een lijndiagram. Klik met de rechtermuisknop op de figuur en kies 'Gegevens selecteren'. Klik daar op 'Schakelen tussen rij en kolom'. Je krijgt dan de vijf waarden boven elkaar.



- Bij 'Hulpmiddelen voor grafieken' kun je bij 'Indeling' kiezen voor 'Omhoog/omlaag balken weergeven' en 'Hoog/laag lijnen'. Je krijgt dan je boxplot, dat je nog even zo mooi moet maken als je zelf wilt. (Rechtermuisknop op elke markering en opmaak kiezen.)

Misschien wil je de jongens en de meisjes vergelijken? Dan laat je Excel eerst sorteren op de kolom 'geslacht'. Dat doe je door die kolom te selecteren en 'Sorteren en filteren' te kiezen. Sorteert van laag naar hoog en klik op OK als Excel je vraagt of de selectie moet worden uitgebreid (want de andere kolommen moeten ook worden meegenomen bij het sorteren). Nu heb je de jongens en de meisjes als groepen bij elkaar staan en kun je hun centrummaten en spreidingsmaten vergelijken en twee boxplots in één figuur maken.

3.3 Kansen

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een frequentietabel van de rapportcijfers voor het vak 'wiskunde' in klas 3G. Je hebt geen idee wie welk cijfer heeft gehaald. Je komt iemand uit die klas tegen.

wiskunde	
RE	freq
1	0
2	0
3	0
4	1
5	4
6	9
7	8
8	6
9	3
10	0

- a** Hoe groot is de kans dat zij een 8 voor wiskunde heeft op haar rapport?

- b** Hoe groot is de kans dat zij een 10 voor wiskunde heeft op haar rapport?

- c** Hoe groot is de kans dat zij een onvoldoende heeft?

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je een frequentietabel van de rapportcijfers voor wiskunde van klas 3G. Daaruit kun je kansen afleiden.

- a** Hoe groot is de kans dat een willekeurige leerling uit 3G voor wiskunde het rapportcijfer 6 heeft?

- b** Hoe groot is de kans dat een willekeurige leerling uit 3G voor wiskunde een voldoende op het rapport heeft?



- c** Je weet dat Jan Buma en Roslyn Snijders uit 3G een 7 voor wiskunde staan op hun rapport. Je komt Christien Willemse uit 3G tegen en je hebt geen idee hoe goed ze is in wiskunde. Wat is de kans dat ze een voldoende op haar rapport heeft? Geef je antwoord in procenten.

Opgave 2

In de **Uitleg** wordt ook gesproken over de kansen bij het gooien met een dobbelsteen. Er wordt gesteld dat elk vlakje een relatieve frequentie van $\frac{1}{6}$ heeft. Is dat wel zo?

- a** Pak een dobbelsteen en gooi er 60 keer mee, je kunt ook het **Practicum** gebruiken. Maak een frequentietabel zoals deze.

aantal ogen	1	2	3	4	5	6
aantal keer						



- b** Krijg je inderdaad allemaal gelijke relatieve frequenties van $\frac{1}{6}$?

- c** Waarom ligt het toch voor de hand om te veronderstellen dat als je maar vaak genoeg gooit alle relatieve frequenties $\frac{1}{6}$ worden?

- d** Hoe groot is de kans dat je met een dobbelsteen 5 ogen gooit als je naar jouw frequentietabel kijkt? En hoe groot zou je zeggen dat die kans 'in werkelijkheid' is?



- e** Hoe groot is de kans dat je met een dobbelsteen meer dan 4 ogen gooit als je naar jouw frequentietabel kijkt? En hoe groot zou je zeggen dat die kans 'in werkelijkheid' is?

Opgave 3

Werk met de gegevens in **Voorbeeld 1**.

- a** Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt 14 jaar oud is?

- b** Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt hoogstens 14 jaar oud is?

- c** Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt minstens 14 jaar oud is?

- d** Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt 17 jaar oud is?

- e** Hoe groot is de kans dat een jongere die deze site bezoekt ouder dan 11 is?

**Opgave 4**

In het Excel-bestand **Top 2000 in 2012** zie je hoe de Top 2000 er in 2012 uitzag, uit welk jaar een nummer kwam en in welk uur het gedraaid werd. Veel artiesten of groepen hebben meerdere nummers in de Top 2000 van 2012.

Je kiest een willekeurig nummer uit de Top 2000.

- a** Hoe groot is de kans dat het een nummer van The Beatles is?

- b** Hoe groot is de kans dat dit een nummer uit de jaren 1980 tot en met 1989 is?

Je kiest een willekeurig nummer uit de jaren 1980 tot en met 1989.

- c** Hoe groot is de kans dat het een nummer van Queen is?

Opgave 5

In alle derde klassen van een school is gevraagd wie er linkshandig is en wie rechtshandig. Hiernaast zie je de resultaten.

	linkshandig	rechtshandig
jongen	15	116
meisje	13	134

- a** Hoe groot is de kans dat een willekeurige derdeklaser van deze school linkshandig is?

- b** Hoe groot is de kans dat een willekeurig meisje uit de derde klas linkshandig is? Is die kans groter of kleiner dan die voor een willekeurige jongen uit de derde klas?



- c** Hoe groot is de kans dat een willekeurige linkshandige uit de derde klas een jongen is?

Opgave 6

Bekijk in het **Voorbeeld 2** hoe je kansen bepaalt bij het gooien met twee dobbelstenen.

- a** Ga eerst zelf even experimenteren met behulp van twee dobbelstenen of het **Practicum**. Werp 360 keer met twee dobbelstenen en maak een tabel zoals deze.

aantal ogen	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
frequentie											
relatieve frequentie											

- b** Maak net zo'n tabel met frequenties en relatieve frequenties, maar nu gebaseerd op de kruistabel in het voorbeeld. Vergelijk beide tabellen. Zijn er grote verschillen?

- c** Hoe groot is de kans dat je met twee dobbelstenen 10 ogen gooit?

- d** Hoe groot is de kans dat je met twee dobbelstenen hoogstens 10 ogen gooit?

- e** Hoe groot is de kans dat je met twee dobbelstenen minstens 10 ogen gooit?



Opgave 7

Een volledig kaartspel bestaat uit 52 kaarten, 13 kaarten van elke 'kleur': ruiten, harten, schoppen en klaveren. Van elke kleur zijn er de kaarten 2, 3, ..., 9, 10, boer, vrouw, heer en aas.

Het kaartspel wordt goed geschud en er wordt gedeeld.

- a** Hoe groot is de kans dat de eerste kaart een aas is?

- b** Hoe groot is de kans dat de eerste kaart een hartenenaas is?



De eerste kaart is een ruitennegen.

- c** Hoe groot is de kans dat de tweede kaart een aas is?

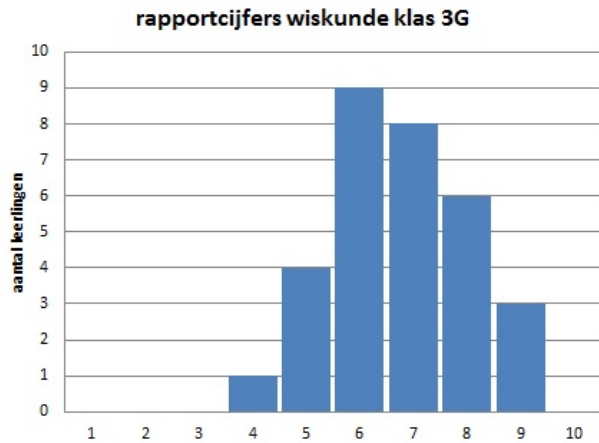
- d** Hoe groot is de kans dat de tweede kaart een ruitenkaart is?



Verwerken

Opgave 8

Dit staafdiagram geeft de rapportcijfers wiskunde van klas 3G weer. Je komt een leerling uit die klas tegen en je hebt geen idee hoe goed hij in wiskunde is.



- a** Hoe groot is de kans dat hij een onvoldoende heeft?

- b** Hoe groot is de kans dat hij een 8 of hoger heeft?

Een leerling uit 3G vertelt dat zij een voldoende heeft.

- c** Hoe groot is de kans dat zij een 8 of hoger heeft?



Opgave 9

Uit onderzoek is gebleken dat wel 8% van de mannen lijdt aan een vorm van kleurenblindheid. Bij vrouwen is dat percentage veel lager. In de tabel zie je de percentages.

	mannen	vrouwen
kleurenblind	8%	0,5%
niet kleurenblind	92%	99,5%

- a** Je komt een mannelijke medeleerling tegen (waarvan je niet weet of hij kleurenblind is). Hoe groot is de kans dat hij kleurenblind is?

- b** Anne is kleurenblind. Hoe groot is de kans dat Anne een man is? (Ga er van uit dat er evenveel mannen als vrouwen zijn.)

- c** Hoeveel procent van de mensen is kleurenblind? (Ga er van uit dat er evenveel mannen als vrouwen zijn.)

Opgave 10

Met deze viervlaksdobbelsteen is zojuist een 1 gegooid, want bij elke ribbe van het ondervlak hoort een 1.

- a** Hoe groot is bij een viervlaksdobbelsteen de kans daarop?





Je gooit nu met twee van die dobbelstenen en telt bij elkaar wat je gooit.

- b** Hoe groot is de kans dat je 6 gooit?

- c** Hoe groot is de kans dat je minstens 6 gooit?

- d** Hoe groot is de kans dat je hoogstens 6 gooit?

Opgave 11

Hier zie je hoe in één van de eerste series afleveringen van 'Ik hou van Holland' door Jeroen van Koningsbrugge aan het rad wordt gedraaid om te bepalen hoeveel punten hij voor het goede antwoord krijgt.

- a** Hoe groot is de kans dat hij 50 punten krijgt?





- b** Het team van Jeroen staat 12 punten achter op het andere team. Hoe groot is de kans dat ze die achterstand in één keer inlopen?

- c** Gerekend over een heel seizoen wordt er een flink aantal keren aan dit rad gedraaid. Hoeveel punten zullen er gemiddeld worden gedraaid?

Toepassen

In de meeste gevallen kun je kansen alleen bepalen met behulp van statistiek. Neem bijvoorbeeld de kans dat een mens een bepaalde leeftijd haalt, dat een meteoriet op Aarde stort, dat er een jongetje of een meisje wordt geboren, dat jouw favoriete nummer in de Top 2000 terechtkomt, enz.

Stel je bijvoorbeeld voor dat je wilt weten hoe groot de kans is dat een punaise na opgooien met de punt omhoog komt te liggen. Er is maar één manier om de kans daarop te berekenen: heel vaak proberen en bijhouden wat er gebeurt.



Opgave 12: Punaises

Als je de kans wilt weten dat een punaise na opgooien met de punt omhoog komt te liggen, moet je experimenteren.

- a** Gooi 100 keer met een punaise. Houd bij hoe vaak de punt bovenkomt en hoe vaak niet.

- b** Hoe groot is volgens jou de kans dat een punaise met zijn punt bovenkomt? Vergelijk je resultaat met die van de andere leerlingen.



- c** Als je de resultaten van meerdere leerlingen vergelijkt, kun je dan een uitspraak doen over de kans dat een punaise met zijn punt bovenkomt.

Opgave 13: Kansen bij voetbal

Bekijk de volgende situaties. Geef aan of je de beschreven kans kunt beredeneren of alleen door experimenteren en statistieken kunt bepalen.

- a** De kans dat een bepaalde voetballer met de volgende strafschop een doelpunt scoort.

- b** Bij de toss aan het begin van een voetbalwedstrijd wordt een geldstuk opgeworpen; het gaat om kop of munt. Hoe groot is de kans dat jouw ploeg mag aftrappen?

- c** Bij de voetbaltoto moet je van 13 wedstrijden voorspellen of de thuisclub wint, verliest of dat er wordt gelijk gespeeld? Hoe groot is de kans dat je alles goed hebt als je deze voetbaltoto puur op de gok invult?

- d** Hoe groot is de kans dat Go Ahead Eagles van Ajax wint?

Opgave 14: Kansspel?

Een spel heet een **kansspel** als de uitkomsten ervan zuiver door het toeval worden bepaald. Hieronder worden een paar spellen beschreven. Leg uit of er sprake is van een kansspel of niet.

- a** Je gooit met drie geldstukken en kijkt hoeveel keer kop bovenkomt.



- b** Bij het spelletje 'Boter, kaas en eieren' moet je om beurten een kruis (speler 1) of een rondje (speler 2) in een schema van 3 bij 3 plaatsen. Wie het eerst drie gelijke tekens op een rij (horizontaal, verticaal, of diagonaal) heeft, wint het spel?

- c** Het delen van kaarten uit een goed geschud volledig kaartspel.

- d** Het meespelen met de toto, waarbij je van een serie van 13 voetbalwedstrijden moet kiezen uit: de thuisclub wint, verliest of er wordt gelijk gespeeld.

Practicum

Applet

3.4 Wegen en bomen

Verkennen

Opgave V1

De menukaart bij een uitgebreid diner geeft de keuze uit 2 voorgerechten, 4 hoofdgerechten en 3 nagerechten.

- a** Hoeveel verschillende menu's van één voorgerecht, één hoofdgerecht en één nagerecht zijn er mogelijk?

- b** Er zijn mensen die geen voorgerecht en/of geen nagerecht willen, maar iedereen neemt een hoofdgerecht. Hoeveel menu's zijn er nu mogelijk?

Opgave V2

Je gooit met drie dobbelstenen. Je kijkt welke drie ogenaantallen er boven komen te liggen. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er?

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je een overzicht van keuzemogelijkheden kunt maken.

- a** Waarom moet je bij het berekenen van alle mogelijke menu's de keuzemogelijkheden voor het voorgerecht, het hoofdgerecht en het nagerecht met elkaar vermenigvuldigen?



- b** Hoe ziet het wegendiagram er uit als je één van de hoofdgerechten absoluut niet lekker vindt? Hoeveel mogelijkheden zijn er dan nog?

- c** Je neemt alleen een voorgerecht en een hoofdgerecht en koffie na. Hoe ziet nu het bijpassende boomdiagram er uit? En hoeveel mogelijke menu's zijn er?

Opgave 2

Je gooit met drie dobbelstenen. Je kijkt welke drie ogenaantallen er boven komen te liggen.

- a** Teken in een wegendiagram alle mogelijkheden. Laat zien dat het er 216 zijn.

- b** Hoe groot is de kans dat je drie zessen gooit?

- c** In hoeveel gevallen gooi je twee zessen en een vijf? Hoe groot is dus de kans daar op?

- d** Hoe groot is de kans dat je met drie dobbelstenen in totaal 17 ogen gooit?

- e** Hoe groot is de kans dat je met drie dobbelstenen in totaal 16 ogen gooit?

**Opgave 3**

Bekijk je kans op het vinden van de juiste PINcode in **Voorbeeld 1**.

- a** Hoe zie je aan het wegendiagram dat het gaat om vier verschillende cijfers?

- b** Hoe ziet het wegendiagram er uit als de cijfers niet verschillend hoeven te zijn? Hoeveel mogelijke PINcodes zijn er dus?

- c** Je weet alleen dat in je PINcode de cijfers 2, 3, 4 en 5 voorkomen. Hoe groot is de kans dat je de juiste PINcode intoetst?

- d** Je weet alleen dat in je PINcode de cijfers 2, 2, 4 en 5 voorkomen. Hoe groot is de kans dat je de juiste PINcode intoetst?

Opgave 4

Een voorbeeld van een bepaalde generatie Nederlandse nummerborden is 09-PXR-3.

Het gaat hier dus om nummerborden met eerst twee cijfers, dan drie letters en dan één cijfer. Alle cijfers zijn mogelijk, voor de letters mag niet alles. Ga er in deze opgave van uit dat alleen alle medeklinkers zijn toegestaan.

- a** Hoeveel van die nummerborden zijn er dan mogelijk?

- b** Jan weet alleen nog dat de letters van zijn nummerbord TRJ (in die volgorde) zijn en dat het van de generatie is die hierboven wordt beschreven. Hoe groot is de kans dat hij zijn nummerbord goed gokt?



- c** Sabrina weet alleen nog dat de letters van haar nummerbord N, X en P zijn (maar niet per sé in die volgorde) en dat het van de generatie is die hierboven wordt beschreven. Hoe groot is de kans dat zij haar nummerbord goed gokt?

Opgave 5

Sahin gooit met drie geldstukken. Hij let op wat er bovenkomt, kop of munt.

- a** Hoe groot is de kans op drie keer kop?

- b** Hoe groot is de kans op twee keer kop?

Opgave 6

Bekijk [Voorbeeld 2](#).

- a** Waarom is de kans op twee goede kaartjes 0?

- b** Hoe groot is de kans dat je alle kaartjes fout hangt?

- c** Hoe groot is de kans dat je alle kaartjes goed hangt?



- d** Ga na, dat het geen verschil zou maken voor je kansen als je had gedacht dat Kok = L, Bolkestein = M en Lubbers = R.

Opgave 7

Op een toernooi spelen vijf ploegen A, B, C, D, E een hele competitie tegen elkaar.

- a** Laat met een boomdiagram alle mogelijke wedstrijden zien. Hoeveel zijn het er?

- b** Je gaat de competitie indelen door willekeurig uit deze mogelijke wedstrijden te kiezen. Hoe groot is de kans dat de eerste wedstrijd A tegen C is, waarbij A 'thuis' speelt?

- c** Hoe groot is de kans dat de eerste wedstrijd tussen de ploegen A en C is?

Opgave 8

Op een toernooi spelen vijf ploegen A, B, C, D, E een halve competitie tegen elkaar.

- a** Laat met een boomdiagram alle mogelijke wedstrijden zien. Hoeveel zijn het er?

- b** Je gaat de competitie indelen door willekeurig uit deze mogelijke wedstrijden te kiezen. Hoe groot is de kans dat de eerste wedstrijd A tegen C is?



Verwerken

Opgave 9

Je ziet hier een cijferslot dat kan worden geopend door drie goede cijfers te kiezen. De mogelijke cijfers zijn 0 t/m 9.

- a** Laat met een wegendiagram zien hoeveel cijfercombinaties er in totaal mogelijk zijn. Hoeveel zijn het er?



Je kiest met de ogen dicht een cijfercombinatie.

- b** Hoe groot is de kans dat deze cijfercombinatie allemaal verschillende cijfers heeft?

- c** Hoe groot is de kans dat deze cijfercombinatie drie gelijke cijfers heeft?

Opgave 10

In de Eredivisie van de Nederlandse voetbalcompetitie spelen 18 clubs een hele competitie.

- a** Hoeveel wedstrijden moeten er worden gespeeld?

- b** Hoeveel wedstrijden kunnen er per competitieronde maximaal worden gespeeld?



- c** Hoe groot is de kans dat in de eerste competitieronde Ajax en Feijenoord tegen elkaar spelen?

Opgave 11

Iemand gaat naar een feestje en vraagt zich af wat hij aan zal trekken. Hij kan kiezen uit 3 paar schoenen, 6 paar sokken, 4 broeken en 5 T-shirts.

- a** Laat met een wegendiagram zien hoeveel combinaties er mogelijk zijn.

- b** Hoeveel kans heeft elke combinatie om gekozen te worden als dit volstrekt willekeurig gaat?

- c** Maar één bepaald paar schoenen is geschikt voor de gelegenheid en er zijn ook maar 2 broeken geschikt. Hoe groot is de kans dat hij die aanheeft als hij de kleren willekeurig pakt?

Opgave 12

Je gooit met vier geldstukken en let op het aantal keren kop en het aantal keren munt dat bovenkomt.

- a** Laat met een boomdiagram alle mogelijke uitkomsten zien. Hoeveel zijn het er?

- b** Hoe groot is de kans op drie keer munt?



- c Hoe groot is de kans op twee keer munt?

Opgave 13

Iemand pakt willekeurig twee kaarten uit een volledig kaartspel van 52 kaarten, 13 van elke soort (harten, schoppen, klaveren, ruiten).

- a Een boomdiagram dat alle mogelijke uitkomsten laat zien is niet goed te tekenen. Hoeveel uitkomsten zijn er mogelijk?

- b Hoe groot is de kans op twee schoppenkaarten?

- c Hoe groot is de kans op een schoppenkaart en een hartenkaart?

Toepassen

In casino's kun je terecht om tegen betaling mee te mogen doen aan allerlei spelletjes. Sommige daarvan zijn zuivere kansspelen, waarbij alleen het toeval een rol speelt. Bij andere spellen is ook je eigen vaardigheid van belang.

Kennelijk is er geld te verdienen aan het organiseren van dergelijke spelen, hoewel soms op onvoorspelbare momenten veel geld moet worden uitgekeerd aan bezoekers die hebben gewonnen. Hoe kan dat?

Het volgende spel maakt dat duidelijk.

Bij het spel 'Heads up!' wordt met vier precies gelijke muntstukken geworpen. Het aantal keren dat kop boven komt wordt geteld. Je mag met een spelletje meedoen als je een euro





betaalt. Gooi je dan vier keer kop dan krijg je 10 euro terug (je winst is dan dus 9 euro). Gooi je drie keer kop dan krijg je 2 euro terug (je winst is dan 1 euro). In de andere gevallen ben je je euro kwijt.

Je kunt nu zelf wel berekenen of het casino op dit spel winst maakt.

Opgave 14: Heads up!

Bekijk het spel 'Heads up!' in [Toepassen](#).

- a** Hoe groot is de kans dat dat je vier keer kop gooit?

- b** Hoe groot is de kans dat je drie keer kop gooit?

- c** Hoeveel zal voor de speler de gemiddelde winst per spel zijn als er veel spelletjes worden gespeeld?

- d** Hoeveel winst verwacht het casino te maken op 1000 spelletjes waarbij telkens 1 euro wordt ingezet?

3.5 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je je bezig gehouden met statistische gegevens en situaties waarin het toeval een rol speelt. Je hebt je vaardigheden op het gebied van het samenvatten van data met behulp van centrummaten en spreidingsmaten herhaald. En je hebt een eerste indruk gekregen van statistisch onderzoek, ook met grotere verzamelingen gegevens. Werken met een computerprogramma is daarbij onontbeerlijk.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **'Statistiek'** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3 en 4 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- ▶ statistisch onderzoek — populatie en steekproef — representatieve steekproef — absolute en relatieve frequenties — klassenindelingen — diagrammen;
- ▶ centrummaten — gemiddelde — modus — mediaan — spreidingsmaten — spreidingsbreedte — kwartielfstand) — boxplot — kwartielfstand — eerste kwartiel — tweede kwartiel;
- ▶ kans — relatieve frequentie;
- ▶ wegendiagram — boomdiagram.

Activiteiten

- ▶ omschrijven wat statistisch onderzoek is — herkennen wat een representatieve steekproef uit een populatie is — absolute en relatieve frequenties kunnen bepalen — frequentieverdelingen (met klassenindeling) en bijpassende diagrammen maken;
- ▶ het uitrekenen en aflezen van centrummaten (gemiddelde, modus, mediaan) en spreidingsmaten (spreidingsbreedte, kwartielfstand) — gegevens samenvatten in een boxplot;
- ▶ kansen bepalen door relatieve frequenties te bepalen of te beredeneren;
- ▶ kansen berekenen door overzichten van de mogelijkheden (in b.v. wegendiagrammen en boomdiagrammen) te tekenen.

Opgave 1

Je doet met een groepje leerlingen een statistisch onderzoek. Jullie willen weten hoeveel procent van de Nederlanders regelmatig twittert. Waarom zijn de volgende steekproeven niet representatief?

- a** Jullie vragen uit elke klas van jullie eigen school vier willekeurige leerlingen of ze wel of niet minstens één keer per week twitteren.



- b** Jullie gaan in een winkelcentrum staan en vragen daar de bezoekers die voorbijkomen of ze wel of niet minstens één keer per week twitteren.

Het bedenken van een manier om een goede steekproef te maken is nog niet zo eenvoudig. Beschrijf een aantal voorwaarden waaraan een representatieve steekproef in dit geval moet voldoen.

- c** Je moet diverse leeftijdscategorieën in de juiste verhouding hebben. Je moet zowel mensen die handig zijn met de pc in de steekproef hebben als mensen die weinig met een pc van doen hebben. Je moet hoger opgeleiden en lager opgeleiden in de juiste verhouding hebben. En zo zijn er nog wel meer voorwaarden te bedenken.

Opgave 2

Open het **Excel-bestand Sportprestaties**. Je vindt er gegevens van 74 leerlingen in de leeftijdscategorie 11-12 jaar.

De kolom 'Sprint (sec)' geeft de tijden die deze leerlingen hebben gelopen over een sprint van 60 m.

- a** Maak een frequentietabel van deze tijden voor de jongens en de meisjes afzonderlijk. Maak eerst een klassenindeling met als eerste klasse $8- < 8,5$.

- b** Teken bijbehorende staafdiagrammen van de relatieve frequenties. Waarom neem je relatieve frequenties? Kun je een conclusie trekken?



- c** Sla je resultaten op.

Opgave 3

Open het in de vorige opgave opgeslagen Excel-bestand Sportprestaties. Je hebt van de jongens en de meisjes afzonderlijk frequentietabellen gemaakt. Veel verschil tussen beide bijpassende staafdiagrammen is er niet.

Je kunt nog bekijken wat de centrummaten en de spreidingsmaten opleveren. Die bepaal je het liefst van de ruwe data, niet uit de frequentietabellen.

- a** Bepaal het gemiddelde en de mediaan van zowel de sprintgegevens van de meisjes als die van de jongens.

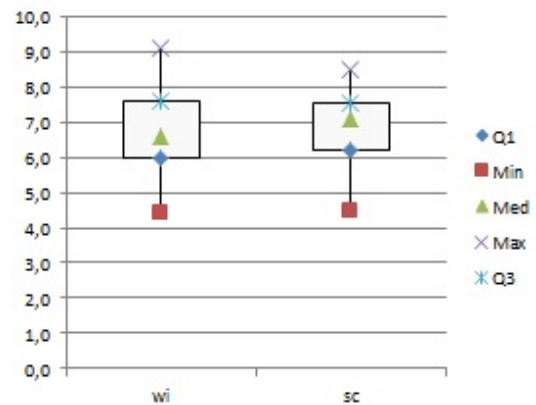
- b** Bereken de spreidingsbreedtes en de kwartielen. Bereken de kwartielafstanden.

- c** Teken bijpassende boxplots in één figuur. Zijn er nu conclusies te trekken?

**Opgave 4**

Je ziet hier boxplots van de jaarresultaten van klas 3G voor wiskunde en science.

- a** Waaraan zie je dat het hier om de niet afgeronde jaarcijfers gaat?



- b** Voor welk vak werd het hoogste cijfer gehaald? Welk cijfer was dat?

- c** Wat kun je zeggen over deze resultaten als je beide vakken vergelijkt?

- d** 50% van de cijfers voor science ligt tussen de 7,1 en de 8,5. Is dat percentage bij wiskunde groter of kleiner?

Opgave 5

In deze frequentietabel zie je de resultaten van tellingen van het aantal eieren dat dagelijks in een hok vol kippen werd geraapt.

aantal eieren	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
frequentie	1	2	3	6	12	15	27	35	23	12

Op grond van deze tabel kun je de kans schatten dat je op een bepaalde dag 40 eieren in dit kippenhok kunt rapen.

- a** Hoeveel dagen werd er geteld om de tabel te kunnen maken? Hoeveel eieren werden op die dagen in totaal geraapt?



- b** Hoe groot is de kans dat op een willekeurige dag 40 eieren worden geraapt?

- c** Hoe groot is de kans dat op een willekeurige dag minstens 40 eieren worden geraapt?

Opgave 6

Voor het slot van een kluis wordt een vijfcijferige code gebruikt. Alle cijfers 0, 1, t/m 9 zijn toegestaan.



- a** Hoeveel verschillende codes kun je zo maken? Gebruik een wegendiagram om dit duidelijk te maken.

- b** Hoeveel verschillende codes zijn er waarvan alle cijfers verschillend zijn?

Je bent de code die je hebt ingesteld vergeten. Je weet alleen de eerste twee cijfers nog.

- c** Hoe groot is de kans dat je de goede code kiest?

Opeens bedenk je dat de cijfers van je code allemaal verschillend zijn.

- d** Hoe groot is nu de kans dat je de goede code kiest?

**Opgave 7**

Je gooit met twee dobbelstenen.

Hoe groot is de kans dat er samen meer dan 8 ogen boven komen te liggen?

Toepassen

Op de meeste scholen kies je in het derde leerjaar in havo en vwo voor een profiel. Bij die **profielkeuze** moet je ook een keuze maken voor het soort wiskundeprogramma dat je daarna gaat volgen. Voor de meeste leerlingen betekent dit een keuze tussen het wiskunde A programma en het wiskunde B programma.

Er wordt wel gezegd dat je om wiskunde B te kunnen kiezen 'goed' moet zijn in wiskunde, 'beter' dan wanneer je wiskunde A zou kiezen. Dan zou je kunnen veronderstellen dat leerlingen die wiskunde B kiezen op het moment van hun keuze hogere cijfers zouden moeten hebben dan leerlingen die wiskunde A kiezen.

Ook wordt wel gezegd dat jongens vooral voor de N-profielen en met name het NT-profiel kiezen en dat meisjes meer voor de M-profielen kiezen.

Mooie onderwerpen voor statistisch onderzoek...

Opgave 8: Statistiek rond profielkeuze

Bekijk de onderzoeksmogelijkheden die bij **Toepassen** worden aangedragen. Misschien kun je nog wel andere onderzoeksvragen bedenken rond het thema 'profielkeuze'. Zet samen met één of meer medeleerlingen een statistisch onderzoek op.

- a** Je kunt waarschijnlijk alleen op jouw eigen school onderzoek doen rond dit thema. Licht toe of de leerlingen van jouw school kunnen dienen als geschikte steekproef voor alle leerlingen in 3 havo/vwo.

- b** Formuleer een nauwkeurige onderzoeksvraag en mogelijke deelvragen.



- c** Verzamel de gegevens die nodig zijn in verband met jullie onderzoeksvraag en vat die gegevens samen in diagrammen en centrum- en spreidingsmaten.

- d** Probeer conclusies te trekken. Onderbouw die conclusies vanuit je diagrammen, centrummaten en spreidingsmaten.

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

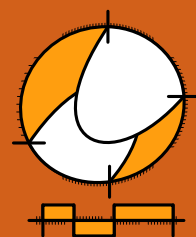
Stichting Math4All

Inhoud Katern 3

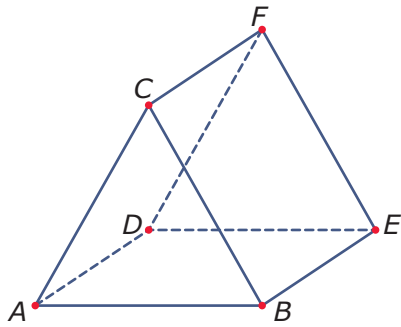
- 7. Ruimte meetkunde**
- 8. Exponentiële verbanden**
- 9. Statistiek en kansrekening**



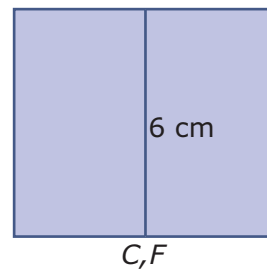
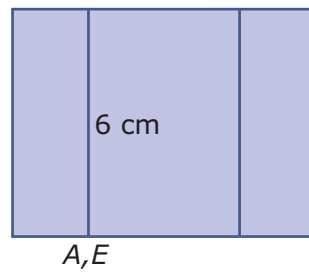
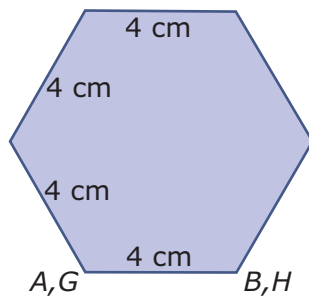
www.math4all.nl



Werkblad bij Opgave 2 op pagina 5

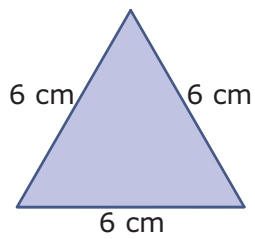
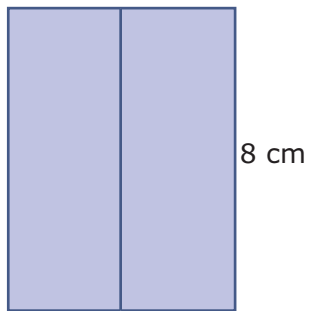


Werkblad bij Opgave 1 op pagina 16



Werkblad bij Opgave 3 op pagina 19

bovenaanzicht

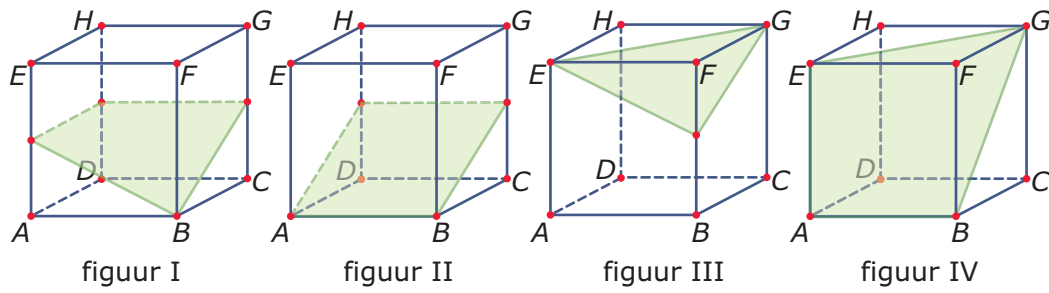


vooraanzicht



zijaanzicht

Werkblad bij Opgave 1 op pagina 31



Werkblad bij Opgave 14 op pagina 42

