

Wiskunde

3 HAVO

Katern 3 / Theorie

ConTeXt College





© 2025

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Ruimtemeetkunde 3

1.1 Lichamen 6

1.2 Aanzichten 9

1.3 Doorsneden 12

1.4 Oppervlakte en inhoud 15

2 Exponentiële verbanden 17

2.1 Groeifactoren 20

2.2 Exponentiële groei 23

2.3 Exponentiële functies 26

3 Statistiek en kansrekening 29

3.1 Statistisch onderzoek 32

3.2 Centrum en spreiding 36

3.3 Kansen 39

3.4 Wegen en bomen 42

Register 45

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

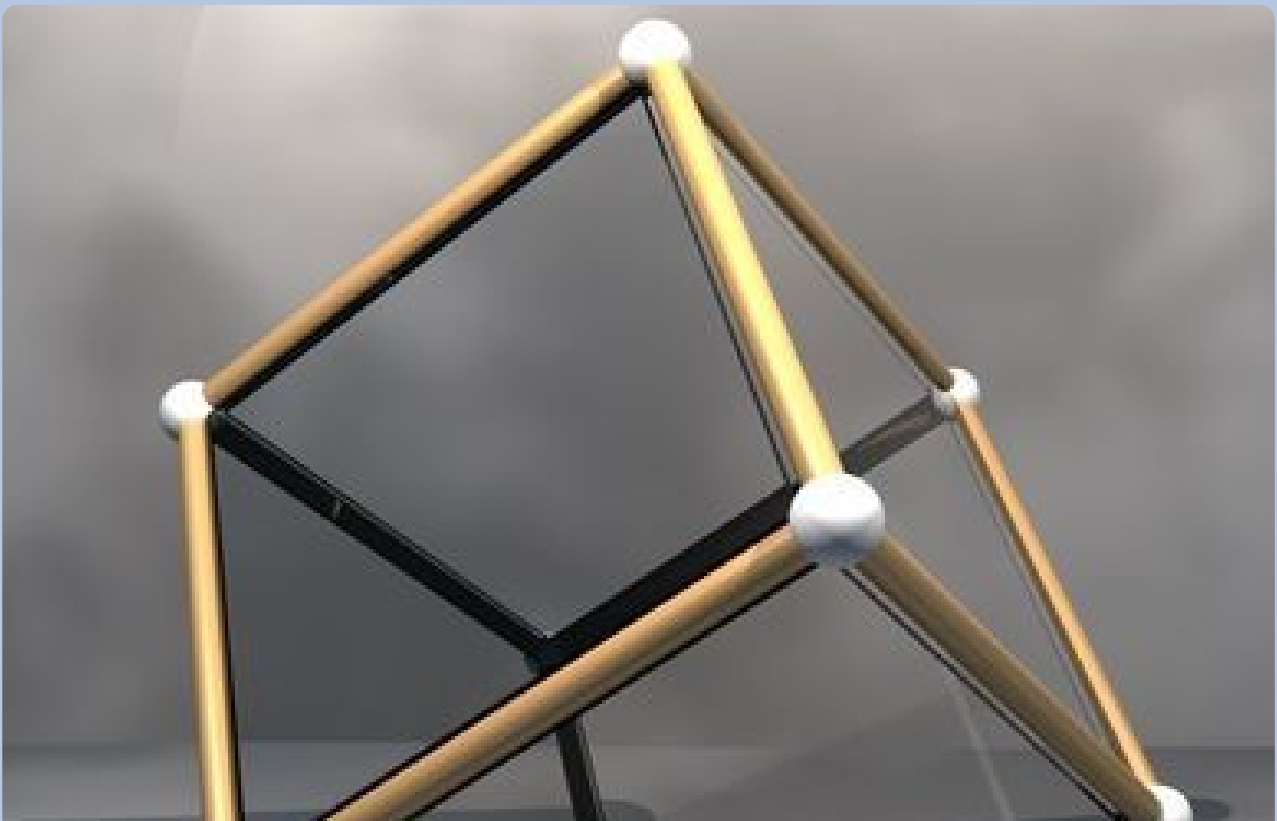
Begrippen

- ▶ lichaam — veelvlak — ribbe — hoekpunt — grondvlak — hoogte — diagonaalvlakken — zijvlaksdagonalen — lichaamsdiagonalen;
- ▶ parallelprojectie — drieaanzicht — vooraanzicht — bovenaanzicht — zijaanzicht;
- ▶ doorsnede — kruisende lijnen — inhoud;
- ▶ inhoud (volume) — lengtevergrotingsfactor — oppervlaktevergrotingsfactor — volumevergrotingsfactor.

Activiteiten

- ▶ werken met congruentie, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en goniometrie in ruimtelijke situaties;
- ▶ aanzichten en uitslagen van lichamen maken en die toepassen bij berekeningen, onder andere van de oppervlakte van een lichaam;
- ▶ herkennen wanneer er sprake is van een doorsnede van een lichaam en een plat vlak — een doorsnede op ware grootte tekenen — herkennen wanneer lijnen elkaar snijden of kruisen of evenwijdig zijn;
- ▶ inhoud en oppervlakte van diverse lichamen berekenen — werken met lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor.

Een doorkijkje



Domein

Meetkunde

Hoofdstuk

Ruimtemeetkunde

Inhoud

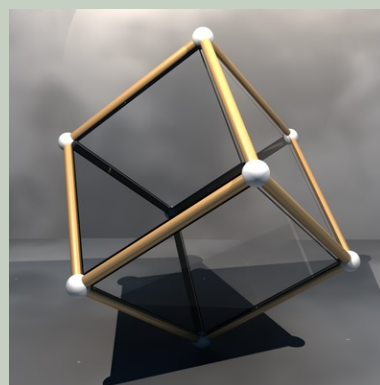
1.1	Lichamen	6
1.2	Aanzichten	9
1.3	Doorsneden	12
1.4	Oppervlakte en inhoud	15



1.1 Lichamen

Inleiding

Hier zie je een kubus gemaakt met behulp van **Blender**, een computerprogramma waarmee mooie 3D effecten kunnen worden bereikt. Je gaat nu de eerder geleerde meetkundige rekentechnieken toepassen in 3D.



Je leert in dit onderwerp

- de al bekende rekentechnieken (zoals de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie) toepassen in ruimtelijke situaties.

Voorkennis

- de basisbegrippen van ruimtemeetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek, zijvlak (grensvlak), (lichaams)diagonaal en de namen en de eigenschappen van de bekende ruimtelijke figuren;
- de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie.

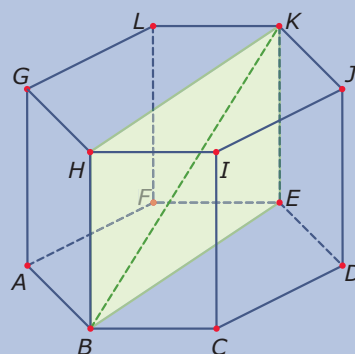
Opgave V1

Uitleg

Het probleem bij heb je waarschijnlijk wel meteen kunnen oplossen. Daarbij heb je dan gebruik gemaakt van kennis over ruimtelijke figuren. Je moet weten wat een balk is, waar de rechte hoeken in een balk zitten, en dergelijke meer.

Je noemt een ruimtelijke figuur vaak een lichaam. Zo'n lichaam heeft één of meer grensvlakken, die vaak plat, maar ook gebogen kunnen zijn. Gebogen grensvlakken heb je bij een bol, een kegel, een cilinder.

Lichamen die alleen uit platte grensvlakken bestaan heten veelvlakken. Deze hebben hoekpunten en ribben. Ook zijn er dan vaak diagonalen in twee soorten: zijvlaksdagonalen en lichaamsdiagonalen.





Het veelvlak $ABCDEF.GHIJKL$ bijvoorbeeld heet een regelmatig zeshoekig prisma. Dat komt omdat van dit lichaam:

- het grondvlak en het bovenzvlak congruente regelmatige zeshoeken zijn;
- alle opstaande zijvlakken rechthoeken zijn.

In feite is elke doorsnede van dit lichaam die evenwijdig is met het grondvlak een regelmatige zeshoek.

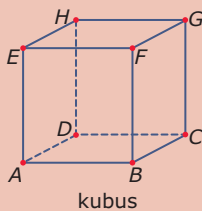
Verder zie je diagonaalvlak $BEKH$ met daarin lichaamsdiagonaal BK .

In de vind je een overzicht van de belangrijkste lichamen en hun eigenschappen.

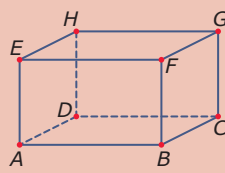
Opgave 1 **Opgave 2** **Opgave 3**

Theorie

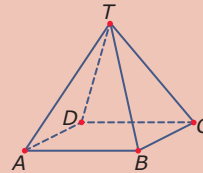
Een **lichaam** is een ruimtelijke figuur. Een lichaam heeft één of meer (eventueel gebogen) grensvlakken. Je ziet hier een overzicht van enkele veel voorkomende lichamen.



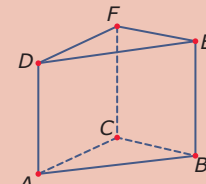
kubus



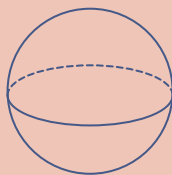
balk



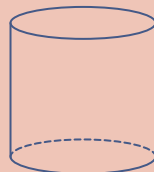
piramide



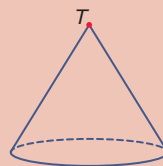
prisma



bol



cilinder



kegel

Een lichaam met alleen platte grensvlakken heet een **veelvlak**. Een veelvlak heeft **ribben** en **hoekpunten**. Piramides en prisma's hebben een **grondvlak** en een **hoogte**. Veel veelvlakken hebben ook **diagonaalvlakken**, die twee overstaande evenwijdige ribben verbinden. En verder zijn er vaak **zijvlaksdagonalen** en **lichaamsdiagonalen**.

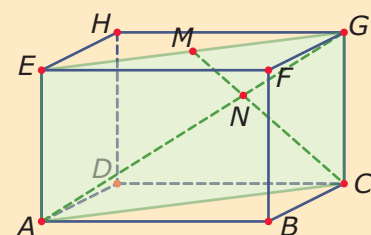
In lichamen kun je lengtes van lijnstukken en hoeken berekenen met behulp van:

- de stelling van Pythagoras in rechthoekige driehoeken;
- gelijkvormige driehoeken;
- goniometrie in rechthoekige driehoeken.

Voorbeeld 1

Hier zie je een balk $ABCD.EFGH$. In het diagonaalvlak $ACGE$ is de lichaamsdiagonaal AG getekend. Ook zie je daarin lijnstuk AM , waarbij M het midden van EG is. In deze figuur is $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm en $CG = 5$ cm.

Bereken de lengte van lijnstuk CN in twee decimalen nauwkeurig.





Antwoord

Het lijnstuk waarvan je de lengte wilt berekenen ligt in diagonaalvlak $ACGE$ en dat is een rechthoek met zijden $AC = 10$ cm en $CG = 5$ cm.

Met behulp van de stelling van Pythagoras kun je de lengte van zowel AG als CM berekenen. En dan kun je met gelijkvormigheid werken. Zie je al welke driehoeken gelijkvormig zijn?

Je vindt $CN \approx 4,71$ cm.

[Opgave 4](#) [Opgave 5](#) [Opgave 6](#)

Voorbeeld 2

Je ziet hier de regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$. Alle zijden van het grondvlak zijn 6 cm. De hoogte is 8 cm. De punten M en N zijn de middens van de ribben waar ze op liggen.

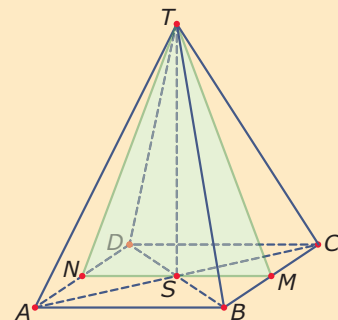
Bereken de grootte van $\angle NTM$.

Antwoord

$\triangle NTM$ is gelijkbenig, dus $\angle NTS$ is de helft van $\angle NTM$.

Nu is $NS = 3$ cm en $TS = 8$ cm, dus $\tan(\angle NTS) = \frac{3}{8} = 0,375$.

En dus is $\angle NTS \approx 20,6^\circ$ en $\angle NTM \approx 41^\circ$.



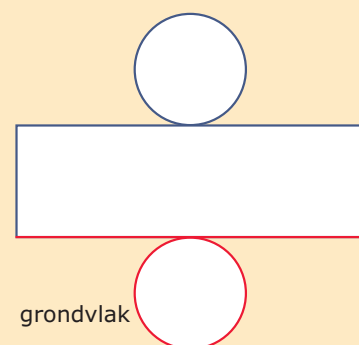
[Opgave 7](#) [Opgave 8](#)

Voorbeeld 3

Hoe ziet een uitslag van een cilinder met een straal van 4 cm en een hoogte van 8 cm er uit?

Antwoord

Als een rechthoek met een lengte die net zo groot is als de omtrek van de grondcirkel en een breedte van 8 cm. Daar zitten dan twee cirkels met een straal van 4 cm aan vast, eentje aan de bovenkant en eentje aan de onderkant.

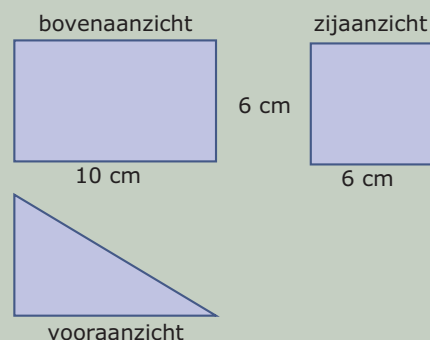


[Opgave 9](#) [Opgave 10](#)

1.2 Aanzichten

Inleiding

Hier zie je drie aanzichten van een lichaam, een ruimtelijke figuur. Eigenlijk is het niet zonder meer mogelijk om precies te weten wat voor figuur dit precies is, je ziet de figuur maar van drie kanten. Hoe de achterkant, de onderkant en de linker zijkant er uitzien, of daar gaten in de figuur zitten, weet je niet. Maar je kunt wel iets zeggen...



Je leert in dit onderwerp

- aanzichten tekenen van ruimtelijke figuren;
- vanuit een drieaanzicht de ruimtelijke figuur en zijn afmetingen herleiden.

Voorkennis

- de basisbegrippen van ruimtemeetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek, zijvlak (grensvlak), (lichaams)diagonaal en de namen en de eigenschappen van de bekende ruimtelijke figuren;
- de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie en dit toepassen in ruimtelijke situaties.

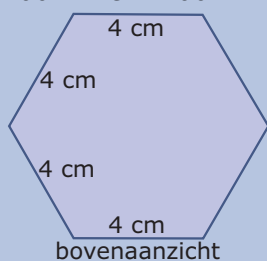
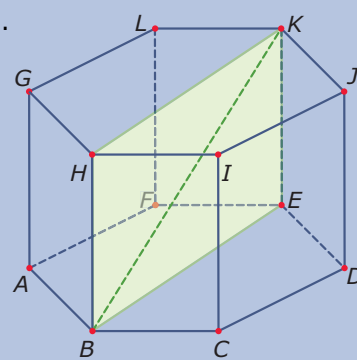
Opgave V1

Uitleg

Dit is het regelmatig zeszijdige prisma $ABCDEF.GHIJKL$.

In zo'n regelmatig lichaam zijn veel ribben en diagonalen gelijk aan elkaar. Toch blijkt daar in de figuur niet zoveel van. Als je zou gaan meten zijn AB , BC en CD zeker niet gelijk, dat komt door de tekening in parallelprojectie. In een parallelprojectie worden alleen even lange lijnstukken die evenwijdig lopen ook weer even lang.

Soms helpt het om dan aanzichten van een lichaam te gebruiken. Een drieaanzicht zoals dat hieronder laat het vooraanzicht, het zijaanzicht en het bovenaanzicht van het lichaam zien. Daarin zie je allerlei grensvlakken in de juiste vorm en op ware grootte.

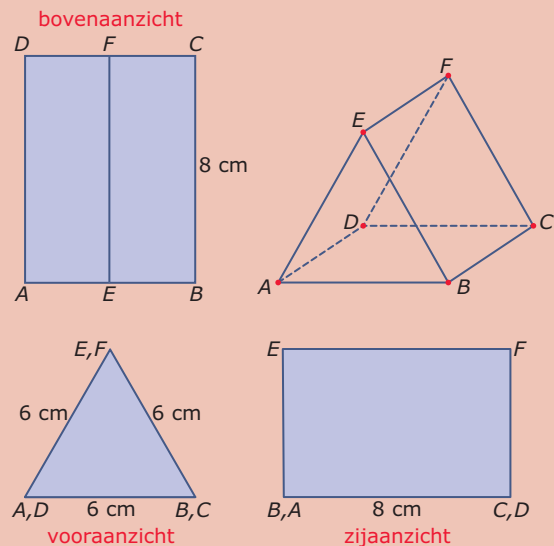


Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

**Theorie**

Je ziet hier een regelmatig driesijdig prisma $ABE.DCF$. Dit lichaam is getekend als **parallelprojectie**.

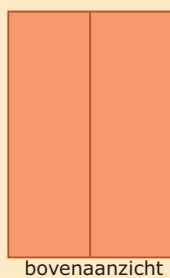
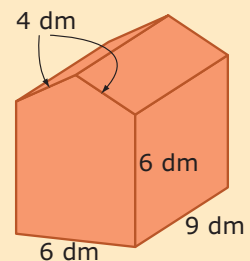
Maar er is ook een **drieaanzicht** van getekend. Dat is een combinatie van een **vooraanzicht**, een **bovenaanzicht** en een **zij-aanzicht**. In aanzichten zie je meestal veel afmetingen op ware grootte, je kunt er beter metingen in verrichten dan in een parallelprojectie. Wel is het soms lastig om op basis van aanzichten te herkennen om wat voor figuur het gaat.

**Voorbeeld 1**

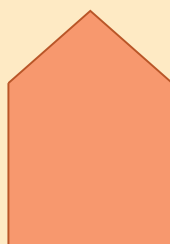
Deze kartonnen doos heeft de vorm van een vijfzijdig prisma. De voorkant en de achterkant zijn symmetrische vijfhoeken met twee rechte hoeken. De afmetingen vind je bij de figuur.

Teken een drieaanzicht van deze doos.

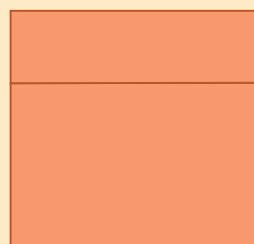
Antwoord



bovenaanzicht



vooraanzicht



zij-aanzicht

Opgave 4 **Opgave 5**



Voorbeeld 2

Van een aantal eenheidskubusjes kun je een balk stapelen. Het vooraanzicht van de balk bestaat uit 12 kubusjes, het rechter zijaanzicht van de balk uit 8 kubusjes.

Uit hoeveel kubusjes kan de balk bestaan?

Antwoord

Noem de lengte, breedte en hoogte van de balk l , b en h . Uit het gegeven aantal kubusjes in het vooraanzicht volgt $b \cdot h = 12$. Uit het gegeven aantal kubusjes in het zijaanzicht volgt $l \cdot h = 8$.

Het aantal mogelijkheden kun je nu in een tabel weergeven:

l	h	b	totale balk
1	8	X	X
2	4	3	24
3	X	X	X
4	2	6	48
8	1	12	96

Mogelijkheden zijn dus 24, 48 en 96 kubusjes.

[Opgave 6](#) [Opgave 7](#) [Opgave 8](#) [Opgave 9](#)

Voorbeeld 3

Je ziet hier het bovenaanzicht en het zijaanzicht van een veelvlak. Welk veelvlak betreft het en hoe groot is de totale oppervlakte van dat lichaam?

Antwoord

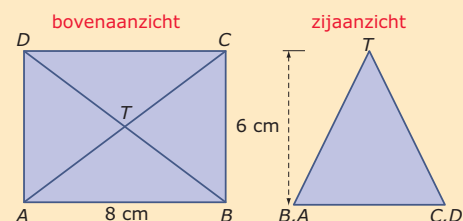
Dit betreft een vierzijdige piramide $ABCD.T$ met een rechthoekig grondvlak.

Voor de totale oppervlakte van dit lichaam moet je de oppervlakte van het grondvlak en van de vier opstaande grensvlakken bij elkaar optellen.

De grensvlakken ABT en CDT zijn twee congruente gelijkbenige driehoeken met een basis van 8 cm en een hoogte die je in het zijaanzicht op ware grootte ziet. Die hoogte is dus $\sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ cm. De oppervlakte van elk van deze twee grensvlakken is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$ cm².

De grensvlakken BCT en DAT zijn twee congruente gelijkbenige driehoeken met een basis van 6 cm en een hoogte die je in het vooraanzicht op ware grootte ziet. Die hoogte is dus $\sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$ cm. De oppervlakte van elk van deze twee grensvlakken is $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{13} = 6\sqrt{13}$ cm².

Nu kun je de totale oppervlakte wel berekenen...



[Opgave 10](#) [Opgave 11](#)

1.3 Doorsneden

Inleiding

Dit is een dwarsdoorsnede van een boom, je ziet de jaarringen. Zo'n doorsnede is altijd een plat vlak binnen de randen van de figuur, in dit geval de bast van de boom (op een bepaalde hoogte). Zo kun je ook vloeren in gebouwen als doorsneden opvatten en worden die met name in de architectuur vaak op schaal getekend om er berekeningen in te kunnen uitvoeren.



Je leert in dit onderwerp

- doorsneden herkennen in ruimtelijke figuren;
- wat je verstaat onder kruisende lijnen;
- doorsneden van ruimtelijke figuren op ware grootte tekenen en erin rekenen.

Voorkennis

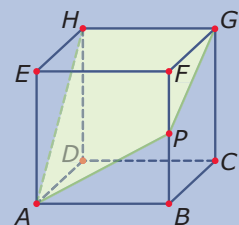
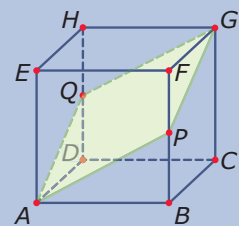
- de basisbegrippen van ruimtemeetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek, zijvlak (grensvlak), (lichaams)diagonaal en de namen en de eigenschappen van de bekende ruimtelijke figuren;
- de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie en dit toepassen in ruimtelijke situaties.

Opgave V1

Uitleg

Je ziet hiernaast de doorsnede $APGQ$ van een plat vlak met een kubus getekend. De kubus heeft ribben van 5 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.

Als je naar de kubus kijkt loodrecht op diagonaalvlak $ACGE$ (dus in richting BD), zie je A , B , P en Q op één lijn liggen. En daarom weet je zeker dat ze in één vlak liggen. Je kunt het ook zo zien: de snijlijnen in twee overstaande evenwijdige grensvlakken van de kubus (bijvoorbeeld AP en QC) zijn evenwijdig en dus is $APGQ$ een plat vlak. Bedenk dat lijnen die in één vlak liggen elkaar altijd snijden of evenwijdig lopen. Lijnen die elkaar niet snijden en niet evenwijdig lopen noem je 'kruisende lijnen'. In een vlak kunnen nooit kruisende lijnen liggen! En daarom kan de 'vierhoek' $APGH$ nooit een vierhoek in een plat vlak zijn: de lijnstukken AH en PG zijn niet evenwijdig en liggen dus op kruisende lijnen.



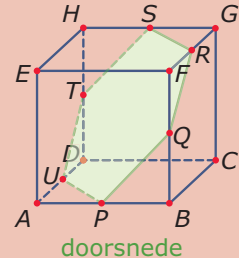


Als je $APGQ$ op ware grootte wilt zien moet je de kubus zo draaien dat je loodrecht op dat vlak kijkt. Je ziet dan dat $APGQ$ een ruit is met ribben van $\sqrt{5^2 + 2,5^2} = \sqrt{31,25}$ cm en een diagonaal PQ van $\sqrt{50}$ cm. Je tekent hem zelf op ware grootte door eerst PQ te tekenen en dan de zijden vanuit P en Q om te cirkelen.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

Een **doorsnede** van een ruimtelijke figuur met een plat vlak is de figuur die wordt gevormd door alle snijlijnen. Heeft die doorsnede de vorm van een driehoek, dan kun je ervan verzekerd zijn dat het inderdaad om een plat vlak gaat. Bij vierhoeken, vijfhoeken, etc., moet je nauwkeuriger kijken. Om te controleren dat zo'n figuur echt vlak is, kun je gebruiken dat in een plat vlak alleen evenwijdige of elkaar snijdende lijnen liggen. Lijnen die niet evenwijdig zijn en elkaar niet snijden heten **kruisende lijnen**. Lijnen die elkaar kruisen kunnen nooit in één vlak liggen.



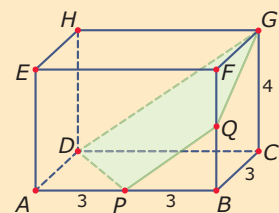
Om in een doorsnede berekeningen te kunnen uitvoeren teken je hem **op ware grootte**. Daarmee wordt bedoeld dat alle hoeken hun werkelijke vorm hebben en alle zijden hun werkelijke lengte (eventueel op schaal getekend). Bij het tekenen op ware grootte construeer je vaak driehoeken m.b.v. de passer. Teken hulpfiguren waarvan je de afmetingen al kent om onbekende lengten en hoeken te vinden.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is $AB = 6$, $BC = 3$, $CG = 4$. De punten P en Q zijn de middens van de ribben waarop ze liggen.

Waarom is vierhoek $DPQG$ een doorsnede van een plat vlak met de gegeven balk?

Teken doorsnede $DPQG$ op ware grootte.



Antwoord

Vierhoek $DPQG$ is een doorsnede van een plat vlak met de gegeven balk omdat de lijnen PQ en DG evenwijdig lopen.

De lengte van DG kun je halen uit rechthoekige $\triangle DCG$: $DG = \sqrt{52}$.

De lengte van DP kun je halen uit rechthoekige $\triangle DAP$: $DP = \sqrt{18}$.

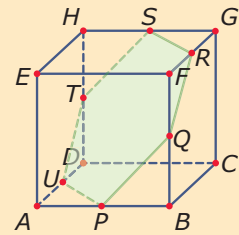
Omdat $BQ = 2$ kun je de lengtes van PQ en QG ook berekenen: $PQ = QG = \sqrt{13}$.

Om het trapezium $DPQG$ te kunnen tekenen, is het handig om eerst nog de lengte van een diagonaal te berekenen, bijvoorbeeld $PG = \sqrt{34}$. Nu kun je de figuur construeren door twee driehoeken te maken met passer en liniaal.

Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7

**Voorbeeld 2**

Je ziet hier een doorsnede van een plat vlak met een kubus $ABCD.EFGH$ met ribben van 8 cm. Alle hoekpunten van deze doorsnede zijn de middens van de ribben waar ze op liggen. Teken doorsnede $PQRSTU$ op ware grootte.



Antwoord

De doorsnede is een regelmatige zeshoek $PQRSTU$ met zijden $\sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ cm.

Hoe je een regelmatige zeshoek tekent heb je al eerder gezien.

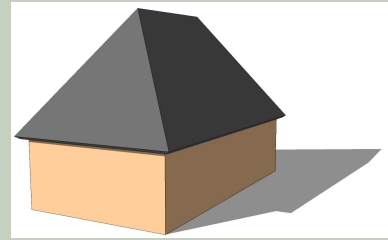
Opgave 8 **Opgave 9**

1.4 Oppervlakte en inhoud

Inleiding

Dit heet een schilddak, een dakvorm die je vaak op een stolpboerderij ziet.

Belangrijk bij de bouw ervan zijn de oppervlakte ervan (om te bepalen hoeveel dakbedekking er voor nodig is) en het volume er onder (om te bepalen hoeveel opslag/woonruimte er onder zit).



Je leert in dit onderwerp

- de oppervlakte van ruimtelijke figuren berekenen;
- de inhoud (het volume) van ruimtelijke figuren berekenen;
- werken met oppervlakte- en volumevergrotingsfactoren.

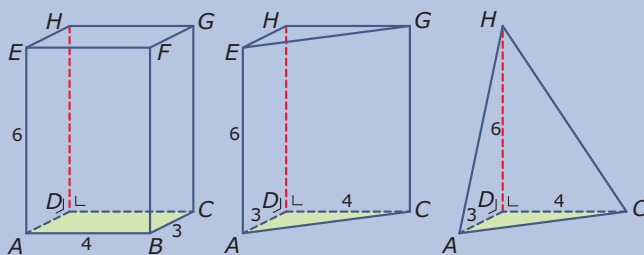
Voorkennis

- de basisbegrippen van ruimtemeetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek, zijvlak (grensvlak), (lichaams)diagonaal en de namen en de eigenschappen van de bekende ruimtelijke figuren;
- de stelling van Pythagoras, werken met verhoudingen en goniometrie en dit toepassen in ruimtelijke situaties;
- werken met aanzichten van een doorsneden in ruimtelijke figuren.

Opgave V1

Uitleg

Je ziet hier drie lichamen die alle drie dezelfde hoogte DH hebben. Het prisma en de piramide hebben ook nog hetzelfde grondvlak ACD en dat is precies de helft van het grondvlak van de balk.



De inhoud van de balk is duidelijk het grootst: $V(\text{balk}) = 4 \cdot 3 \cdot 6 = 12 \cdot 6 = 72$ eenheden (eenheidskubussen).

Het prisma is de helft van de balk, dus: $V(\text{prisma}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 = 6 \cdot 6 = 36$.

Merk op dat dit precies de oppervlakte van het grondvlak ($\triangle ACD$) maal de hoogte is. En dat wist je ook wel: het volume van een prisma is $V(\text{prisma}) = G \cdot h$ als G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

De piramide heeft hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte als het prisma. Je kunt laten zien, dat er in het prisma drie piramides passen waarvan het product van grondvlak en



hoogte hetzelfde is als dat van de getekende piramide. Elk van deze piramides heeft daarom dezelfde inhoud, namelijk $\frac{1}{3}$ deel van die van het prisma. Voor de getekende piramide geldt $V(\text{piramide}) = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Van alle drie de getekende lichamen is de totale oppervlakte gelijk aan de oppervlakte van hun uitslag. En wat gebeurt er met de oppervlakte en de inhoud van zo'n lichaam als alle ribben bijvoorbeeld 3 keer zo groot worden?

Opgave 1 **Opgave 2** **Opgave 3**

Theorie

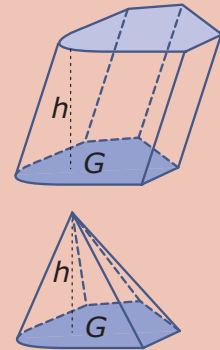
Onder de **inhoud** of het **volume** van een lichaam wordt het totaal aantal eenheidskubussen dat dit lichaam opvult verstaan. Voor verschillende soorten lichamen kun je die inhoud berekenen met behulp van een formule.

- De inhoud van een balk, een prisma, of een cilinder met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte is: $V = G \cdot h$.
- De inhoud van een piramide, of een kegel met G als oppervlakte van het grondvlak en h als hoogte is: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Onder de **oppervlakte** van een lichaam wordt de oppervlakte van de uitslag van dat lichaam verstaan.

Om zowel de inhoud als de oppervlakte van een lichaam te kunnen berekenen moet je de oppervlakteformules van allerlei vlakke figuren, zoals rechthoek, driehoek en cirkel kennen. Ook de formule voor de omtrek van een cirkel is van belang. Zorg dat je al deze formules goed kent!

Als je de afmetingen van een lichaam k keer zo groot maakt, dan wordt de oppervlakte k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot. k heet de **lengtevergrotingsfactor**, k^2 de **oppervlaktevergrotingsfactor** en k^3 de **volumevergrotingsfactor**.



Voorbeeld 1

Een cilinder heeft een diameter van 8 cm en een hoogte van 10 cm. Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze cilinder.

Antwoord

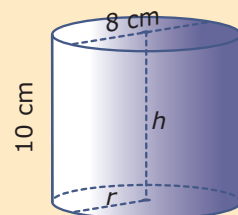
Voor de inhoud V gebruik je de formule $V = G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

Nu is $G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ en $h = 10$.

En dus is $V = 16\pi \cdot 10 = 160\pi \text{ cm}^3$.

Voor de oppervlakte A moet je weten hoe de uitslag van een cilinder er uit ziet. Die bestaat uit twee cirkels en een rechthoek. De rechthoek heeft breedte 10 cm en als lengte de omtrek van de grondcirkel $\pi \cdot 8 = 8\pi \text{ cm}$.

Dus krijg je $A = 8\pi \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 = 112\pi \text{ cm}^2$.



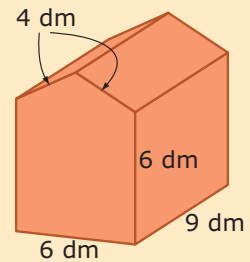
Opgave 4 **Opgave 5** **Opgave 6** **Opgave 7**



Voorbeeld 2

Deze kartonnen doos heeft de vorm van een vijfzijdig prisma. De voorkant en de achterkant zijn symmetrische vijfhoeken met twee rechte hoeken. De afmetingen vind je bij de figuur.

Bereken de inhoud en de oppervlakte van deze doos.



Antwoord

Voor de inhoud V van deze doos gebruik je de formule $V = G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is. Hier is het 'grondvlak' het voorvlak van het prisma, de hoogte is 9 dm.

Ga na, dat $G = 6 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{7} = 36 + 3\sqrt{7}$. Nu kun je met de formule berekenen dat de inhoud van de doos ongeveer 395 dm^3 is.

De oppervlakte van de doos is de oppervlakte van de uitslag van deze doos. Die uitslag bestaat uit twee gelijke vijfhoeken (waarvan je de oppervlakte al hebt berekend) en vijf rechthoeken. De totale oppervlakte is de som van de oppervlaktes van deze vijfhoeken en de vijf rechthoeken.

[Opgave 8](#) [Opgave 9](#) [Opgave 10](#)

Voorbeeld 3

Bij zandwinning ontstaan grote hopen van verschillende soorten zand. Die hopen zand hebben allemaal dezelfde kegelvorm.

Hoeveel m^3 zand bevat zo'n kegelvormige hoop met een diameter van 4 m en een hoogte van 1,50 m? En hoeveel m^3 zand bevat een hoop zand waarvan de afmetingen 2 keer zo groot zijn?

Antwoord

Voor de inhoud V van een kegel gebruik je de formule $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is. Hier is het grondvlak een cirkel met een straal van 2 m en de hoogte is 1,50 m.

De inhoud is dus $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 1.5 = 2\pi \text{ m}^3$.

Van de hoop zand waarvan alle afmetingen twee keer zo groot zijn is de lengtevergrotingsfactor 2 en dus de volumevergrotingsfactor $2^3 = 8$. De inhoud van die zandhoop is daarom $2\pi \cdot 8 = 16\pi \text{ m}^3$.



[Opgave 11](#) [Opgave 12](#)

Begrippen

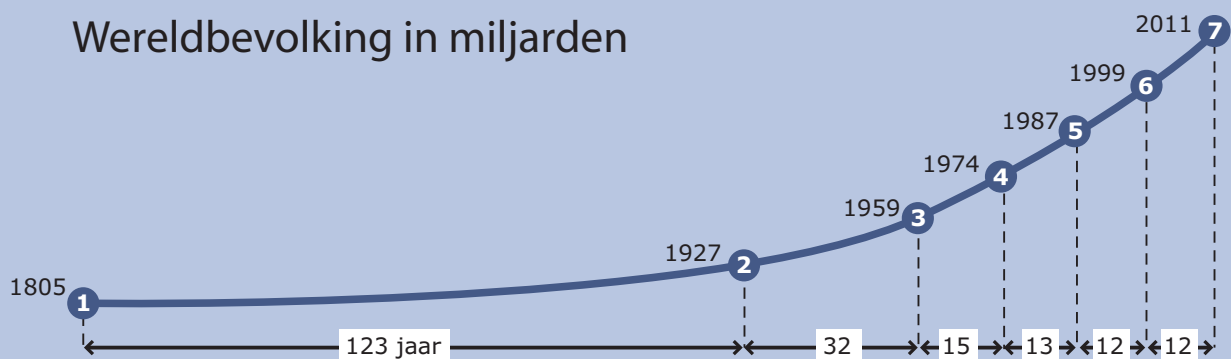
- ▶ groeifactor — groeipercentage — vervalpercentage — halveringstijd — verdubbelingstijd;
- ▶ lineaire groei — exponentiële groei;
- ▶ exponentiële functie — asymptoot.

Activiteiten

- ▶ werken met de begrippen groeifactor, groei(verval)percentage, halveringstijd en verdubbelingstijd;
- ▶ lineaire groei vergelijken met exponentiële groei, bijbehorende formules opstellen;
- ▶ werken met meer algemene exponentiële functies en formules daarvan opstellen.

Bevolkingsgroei

Wereldbevolking in miljarden



Domein

Functies en grafieken

Hoofdstuk

Exponentiële verbanden

Inhoud

- 2.1 Groeifactoren 20
- 2.2 Exponentiële groei 23
- 2.3 Exponentiële functies 26

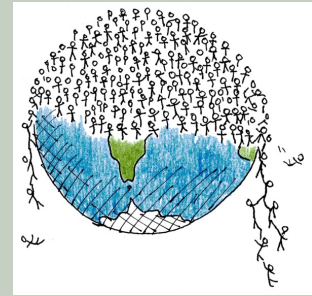
2

2.1 Groeifactoren

Inleiding

Soms groeien hoeveelheden steeds sneller.

Dat was tot nu toe het geval met de wereldbevolking. In 1800 waren er ongeveer 1 miljard mensen, maar in 2011 ging het aantal over de 7 miljard heen. Dat bereik je al met een groeipercentage van 1% per jaar.



Je leert in dit onderwerp

- opnieuw werken met de begrippen groeifactor, groeipercentage, vervalpercentage, verdubbelingstijd en halveringstijd.

Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- het begrip exponentiële groei/verval met de bijbehorende groeifactor en groei/vervalpercentage.

Opgave VI

Uitleg

Een scholengemeenschap heeft in een groeigemeente in het jaar 2012 in totaal 800 leerlingen. Het aantal leerlingen van de scholengemeenschap neemt elk jaar met 12% toe. Naar verwachting zal deze groei zich nog enkele jaren voortzetten. De school heeft plaats voor maximaal 1250 leerlingen. Om uit te rekenen wanneer de school noodlokalen moet laten plaatsen kun je per jaar het aantal leerlingen uitrekenen.

Dit kan als volgt:

In 2012 is het leerlingenaantal 800.

In 2013 is het leerlingenaantal $800 \cdot 1,12 = 896$.

In 2014 is het leerlingenaantal $800 \cdot 1,12 \cdot 1,12 = 800 \cdot 1,12^2 \approx 1004$.

In 2015 is het leerlingenaantal $800 \cdot 1,12 \cdot 1,12 \cdot 1,12 = 800 \cdot 1,12^3 \approx 1124$.

In 2016 is het leerlingenaantal $800 \cdot 1,12 \cdot 1,12 \cdot 1,12 \cdot 1,12 = 800 \cdot 1,12^4 \approx 1259$.

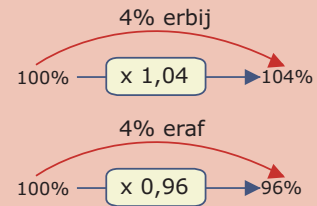
In 2015 moeten er dus extra noodlokalen komen om in 2016 voldoende plaatsen te hebben. Het getal 1,12 waar je steeds mee vermenigvuldigt, noem je de **groeifactor per jaar**.

Opgave 1 Opgave 2



Theorie

Soms wordt een hoeveelheid per tijdseenheid (dus bijvoorbeeld steeds per seconde) met een vaste **groefactor** g vermenigvuldigd. Als $g > 1$ dan is er sprake van een toename en als $0 < g < 1$ dan is er sprake van een afname. Als $g = 1$ dan is er geen sprake van een toename of afname maar blijft de hoeveelheid steeds constant.



- Bij een groefactor van 1,04 hoort een **groeipercentage** van 4%.
- Bij een groefactor van 0,96 hoort een **groeipercentage** van -4% of een **vervalpercentage** van 4%.

Bij een groefactor per uur van 1,04 hoort een groefactor per dag van $1,04^{24} \approx 2,56$.

De **verdubbelingstijd** is de tijdsduur die hoort bij een groefactor van 2. De **halveringstijd** is de tijdsduur die hoort bij een groefactor van 0,5.

Voorbeeld 1

Hier zie je enkele voorbeelden van het omrekenen van een groeipercentage naar een groefactor.

- Bij een groei van 15% per jaar neemt 100 elk jaar toe tot 115. Er is een groefactor van $115/100 = 1,15$ per jaar.
- Bij een afname van 17% per maand neemt 100 elke maand af tot 83. Er is een groefactor van $83/100 = 0,83$ per maand.

Hier zie je enkele voorbeelden van het omrekenen van een groefactor naar een groeipercentage.

- Bij een groefactor van 1,20 per jaar neemt 100 elk jaar toe tot $100 \cdot 1,20 = 120$. Er komt dus jaarlijks $120 - 100 = 20\%$ bij.
- Bij een groefactor van 0,76 per dag neemt 100 elke dag af tot $100 \cdot 0,76 = 76$. Er gaat dus jaarlijks $100 - 76 = 24\%$ af.

[Opgave 3](#) [Opgave 4](#) [Opgave 5](#)

**Voorbeeld 2**

Alcohol is een stof die door het lichaam slechts langzaam wordt afgebroken. De snelheid hiervan hangt onder andere af van het lichaamsgewicht. Voor de twintigjarige Jelte geldt dat het promillage alcohol in het bloed per half uur met 9% afneemt. Op een feestje heeft hij wat alcohol genuttigd en moest om 01:00 uur in de nacht blazen. Hij had toen een promillage in zijn bloed van 0,6. Als het promillage lager is dan 0,5 mag hij weer rijden. Hoe lang moet Jelte wachten?



Antwoord

De groeifactor is 0,91 per half uur.

Om 01:30 uur had hij een promillage van: $0,6 \cdot 0,91 = 0,546$.

Om 02:00 uur had hij een promillage van: $0,6 \cdot 0,91^2 \approx 0,497$.

Om iets voor twee uur mag Jelte weer verder rijden.

Opgave 6 **Opgave 7**

Voorbeeld 3

In een vijver groeit een **witte waterlelie**. De **verdubbelingstijd** van de oppervlakte van de waterlelie op de vijver is 24 uur. Na 20 dagen is de hele vijver bedekt. Na hoeveel dagen was de helft van de vijver bedekt door de waterlelie? En wanneer werd 10% van de vijver door de waterlelie bedekt?



Antwoord

De groeifactor per 24 uur is 2.

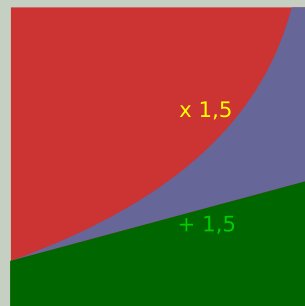
Aangezien de bedekte oppervlakte steeds verdubbelt is dus de vorige dag (dag 19) de helft van de vijver bedekt. Op dag 18 dus 25% en op dag 17 12,5% gevolgd door 6,25% op dag 16. De 10% wordt dus bereikt in de loop van dag 16.

Opgave 8 **Opgave 9**

2.2 Exponentiële groei

Inleiding

Het maakt veel verschil of iets elke tijdseenheid bij een bepaalde hoeveelheid 1,5 wordt opgeteld of dat die hoeveelheid met 1,5 wordt vermenigvuldigd. Lineaire groei is zeer gelijkmatig. Exponentiële groei wordt steeds extremer, het is min of meer explosieve groei.



Je leert in dit onderwerp

- exponentiële groei en lineaire groei vergelijken met behulp van bijpassende formules en grafieken;
- een formule opstellen bij exponentiële groei als twee punten van de grafiek bekend zijn.

Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- het begrip exponentiële groei/verval met de bijbehorende groeifactor en groei/vervalpercentage.

Opgave V1

Uitleg

Er zijn landen waarin de voetbalsport nog maar weinig beoefenaren kent, maar waarin die sport wel in opkomst is.

Stel dat in zo'n land A vanaf 1995 het aantal leden van voetbalclubs jaarlijks met 15000 is toegenomen. Op 1 januari 2010 waren er 200000 leden. Neem aan dat deze groei ongewijzigd doorgaat.

Het aantal leden op 1 januari 2015 is dan $200000 + 15000 \cdot 5 = 275000$.

In dit geval is er sprake van lineaire groei, er komt jaarlijks een vast aantal leden bij.

In een andere opkomende voetbalnatie B neemt het aantal leden van voetbalclubs jaarlijks met 5% toe. Op 1 januari 2010 waren er 200000 leden. Neem aan dat deze groei ongewijzigd doorgaat.

Op 1 januari 2015 heeft dit land dan $200000 \cdot 1,05^5 \approx 255256$, dus ongeveer 255000 leden.

Nu spreek je van exponentiële groei met een beginhoeveelheid van 200000 en een groeifactor van 1,05 per jaar.

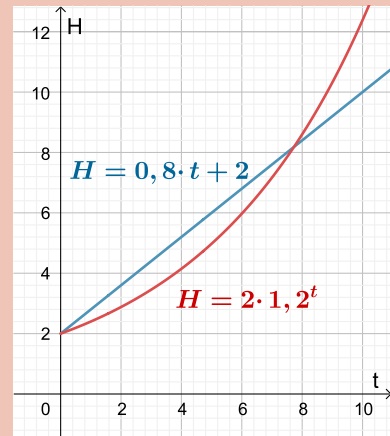
Je kunt voor beide manieren van groei formules en grafieken opstellen. Je noemt dan A het aantal leden in land A, B het aantal leden in land B en t de tijd in jaren na 2010.

Opgave 1 Opgave 2

**Theorie**

Je ziet hier grafieken van twee belangrijke manieren van groei:

- **Lineaire groei** met beginhoeveelheid b en een vaste toename per eenheid van a .
Bijbehorende formule: $H = a \cdot t + b$.
Bijbehorende grafiek: een rechte lijn door $(0, b)$ met hellingsgetal a .
- **Exponentiële groei** met beginhoeveelheid b en een vaste groeifactor per eenheid van g .
Bijbehorende formule: $H = b \cdot g^t$.
Bijbehorende grafiek: een steeds sterker stijgende curve door $(0, b)$ als $g > 1$ en een steeds minder sterk dalende curve door $(0, b)$ als $0 < g < 1$.



Bij lineaire groei met een vaste toename van 0 spreek je van een **constante functie**. En dat is ook het geval bij exponentiële groei met groeifactor 1.

Als bij exponentiële groei twee punten van de grafiek bekend zijn, kun je de groeifactor berekenen door de uitkomsten te delen. Als het bijbehorende tijdsverschil t is, dan is de groeifactor de t -de machtswortel daarvan. Daarmee kun je de bijbehorende formule opstellen.

Voorbeeld 1

Na jaren van terugloop is de populatie zeehonden in het Nederlandse deel van het Waddengebied gelukkig weer gestegen. Sinds juni 2008 is het aantal zeehonden in dit gebied maandelijks met 2,6% toegenomen. Ga ervan uit dat er op 1 juli 2008 1534 zeehonden waren.

Neem aan dat de groei van het aantal zeehonden in dit gebied een tijdlang zo doorgaat en stel een bijpassende formule op. Bereken het aantal zeehonden op 1 januari 2013.

Antwoord

Omdat er per maand een vast percentage zeehonden bij komt, is er sprake van exponentiële groei. De groeifactor per maand is 1,026. Neem $t = 0$ op 1 juli 2008, dan is de beginhoeveelheid 1534.

Is het aantal zeehonden Z en de tijd in maanden t dan is een juiste formule $Z = 1534 \cdot 1,026^t$.

Voor het aantal zeehonden op 1 januari 2013 geldt nu $t = 54$. Vul je dit in de formule in, dan vind je $Z \approx 6135$.

[Opgave 3](#) [Opgave 4](#) [Opgave 5](#)



Voorbeeld 2

In deze tabel wordt de groei van het aantal inwoners (afgerond op honderdtallen) van twee steden A en B weergegeven. Bij stad A is bij benadering sprake van lineaire groei en bij stad B heb je meer te maken met exponentiële groei. In welk jaar gaat het aantal inwoners van B dat van A overschrijden als de groei zo door gaat?

jaartal	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
aantal inwoners A	79600	81100	82600	84200	85600	87100	88500	90100	91600
aantal inwoners B	72100	73900	75800	77600	79600	81600	83600	85700	87800

Antwoord

In stad A is de groei ongeveer lineair, er komen jaarlijks ongeveer 1500 mensen bij. Er geldt $A = 79600 + 1500t$ waarin A het aantal inwoners van A en t de tijd in jaren na 2000 is.

In stad B is de groei ongeveer exponentieel met groeifactor 1,025. Er geldt $B = 72100 \cdot 1,025^t$ waarin B het aantal inwoners van A en t de tijd in jaren na 2000 is.

Met behulp van deze formules kun je de tabellen voortzetten. Je merkt dan dat vanaf 2013 stad B meer inwoners heeft dan stad A.

Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 3

Van een hoeveelheid N is het volgende gegeven:

Op $t = 3$ is $N = 1200$ en op $t = 11$ is $N = 800$.

Stel een formule op voor N als functie van t er sprake is exponentiële groei.

Antwoord

Bij exponentiële groei is er sprake van een groeifactor g per tijdseenheid. Per 8 tijdseenheden vermenigvuldig je met $800/1200 = \frac{2}{3}$. Je moet daarvoor acht keer met de groeifactor g vermenigvuldigen, dus $g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g = g^8 = \frac{2}{3}$.

Je vindt $g = \sqrt[8]{\frac{2}{3}} \approx 0,95$.

Merk daarbij op dat het gebruikelijk is om de groeifactor (tenzij anders wordt vermeld) in twee decimalen, dus in procenten, nauwkeurig te bepalen.

De gevraagde formule is nu $N = b \cdot 0,95^t$.

Om de juiste waarde voor de beginhoeveelheid b te vinden gebruik je bijvoorbeeld $t = 3$ en $N = 1200$. Je vindt dan $b \approx 1400$.

De formule wordt $N \approx 1400 \cdot 0,95^t$.

Opgave 8 Opgave 9

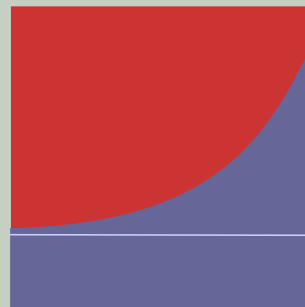
2.3 Exponentiële functies

Inleiding

Bij exponentiële groei horen exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x$. De waarden van deze functies variëren van heel dicht bij 0 tot oneindig groot. Om 0 te naderen moet je als $g > 1$ dan wel negatieve x -waarden toelaten.

De grafieken van deze exponentiële functies komen aan één kant steeds dichterbij de x -as, de horizontale asymptoot.

In dit onderdeel bekijk je exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x + c$.



Je leert in dit onderwerp

- de belangrijkste karakteristieken van exponentiële functies herkennen;
- de formule van een exponentiële functie opstellen vanuit twee gegeven punten.

Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- het begrip exponentiële groei/verval met de bijbehorende groeifactor en groei/vervalpercentage;
- exponentiële groei en lineaire groei vergelijken met behulp van bijpassende formules en grafieken.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

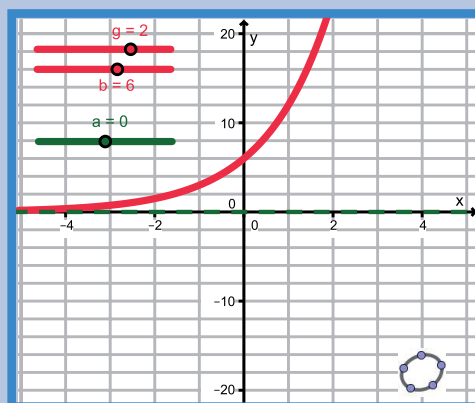
Applet

Tot nu toe heb je exponentiële functies beschreven met formules van de vorm $y = b \cdot g^x$. Hierin kun je de beginhoeveelheid b en de groeifactor g variëren en zien wat er met de grafiek gebeurt. Maar je kunt ook de grafiek met a omhoog schuiven. Dan krijg je een exponentiële functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$.

Neem je $b = 6$ en $g = 2$. Kies ook $a = 0$. Bekijk de grafiek en je ziet dat de uitkomsten steeds dichterbij $y = 0$ naderen.

Neem je $a = 4$ dan zie je de grafiek van $y_4 = 6 \cdot 2^x + 4$. Deze grafiek heeft dezelfde vorm, maar nu naderen de uitkomsten steeds dichterbij $y = 4$.

En zo kun je a variëren. De uitkomsten van $y = b \cdot g^x + a$ zullen steeds naderen naar de horizontale lijn $y = a$. Deze lijn heet daarom de **horizontale asymptoot** van de functie. Het woord 'asymptoot' is afgeleid uit het Grieks en betekent zoiets als 'niet samenvallend'. De grafiek valt nooit samen met een asymptoot.



Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3



Theorie

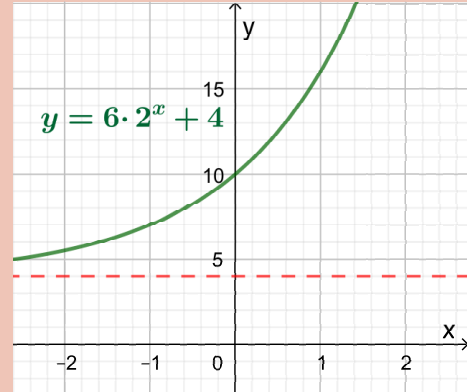
Applet

Elke functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$ heet een **exponentiële functie**. Er zijn twee soorten exponentiële functies:

- exponentiële functies met een stijgende grafiek als $g > 1$;
- exponentiële functies met een dalende grafiek als $0 < g < 1$.

Bij al deze functies is er sprake van een **asymptoot**. In dit geval is de asymptoot de lijn $y = a$, een lijn waar de grafiek wel steeds dichterbij komt te lopen, maar waar hij nooit mee samenvalt.

Hoe je een formule opstelt van de exponentiële functie vanuit twee gegeven punten op de grafiek, zie je in **Voorbeeld 2**.



Voorbeeld 1

De formule van een exponentiële functie is $y = 10 \cdot 1,5^x - 20$.

Teken een bijpassende grafiek en los op: $y \leq 20$ in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Deze functie heeft dezelfde grafiek als die van $y = 10 \cdot 1,5^x$ behalve dat hij 20 eenheden naar beneden is geschoven.

De grafiek van $y = 10 \cdot 1,5^x$ heeft een beginhoeveelheid van 10. Als x met 1 toeneemt, dan wordt de uitkomst met 1,5 vermenigvuldigd. Als x met 1 afneemt, dan wordt de uitkomst door 1,5 gedeeld.

Hiermee maak je snel een tabel bij $y = 10 \cdot 1,5^x$. Als je dan van alle uitkomsten 20 aftrekt, heb je een tabel bij de gegeven functie.

Om de ongelijkheid op te lossen, bepaal je eerst de waarde van x waarvoor $10 \cdot 1,5^x - 20 = 20$. Dat kan meteen met inklemmen, maar het rekenwerk wordt iets eenvoudiger als je de vergelijking eerst herleidt tot $1,5^x = 4$. Je vindt $x \approx 3,419$.

De oplossing is daarom $x \leq 3,41$.

Opgave 4 **Opgave 5**

**Voorbeeld 2**

Van een exponentiële functie $y = b \cdot g^x + a$ is gegeven dat de grafiek door de punten $A(0,12)$ en $B(3,7)$ gaat en de lijn $y = 2$ de asymptoot is. Stel een passend functievoorschrift op.

Antwoord

Omdat de asymptoot $y = 2$ is, geldt in de gegeven formule $a = 2$.

De formule komt er nu zo uit te zien: $y = b \cdot g^x + 2$.

$A(0,12)$ invullen geeft: $b \cdot g^0 + 2 = 12$ en dus $b = 10$.

$B(3,7)$ invullen geeft: $10 \cdot g^3 + 2 = 7$ en dus $g^3 = 0,5$ zodat $g = \sqrt[3]{0,5} \approx 0,79$.

De gevraagde formule wordt $y = 10 \cdot 0,79^x + 2$.

[Opgave 6](#) [Opgave 7](#)



Begrippen

- ▶ statistisch onderzoek — populatie en steekproef — representatieve steekproef — absolute en relatieve frequenties — klassenindelingen — diagrammen;
- ▶ centrummaten — gemiddelde — modus — mediaan — spreidingsmaten — spreidingsbreedte — kwartielafstand) — boxplot — kwartielafstand — eerste kwartiel — tweede kwartiel;
- ▶ kans — relatieve frequentie;
- ▶ wegendigram — boomdiagram.

Activiteiten

- ▶ omschrijven wat statistisch onderzoek is — herkennen wat een representatieve steekproef uit een populatie is — absolute en relatieve frequenties kunnen bepalen — frequentieverdelingen (met klassenindeling) en bijpassende diagrammen maken;
- ▶ het uitrekenen en aflezen van centrummaten (gemiddelde, modus, mediaan) en spreidingsmaten (spreidingsbreedte, kwartielafstand) — gegevens samenvatten in een boxplot;
- ▶ kansen bepalen door relatieve frequenties te bepalen of te beredeneren;
- ▶ kansen berekenen door overzichten van de mogelijkheden (in b.v. wegendigrammen en boomdiagrammen) te tekenen.

Kansloos?!



Domein

Informatie verwerken

Hoofdstuk

Statistiek en kansrekening

Inhoud

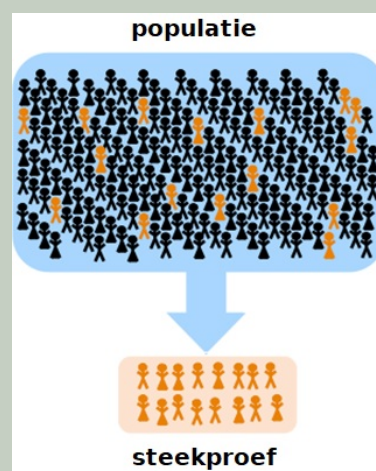
3.1	Statistisch onderzoek	32
3.2	Centrum en spreiding	36
3.3	Kansen	39
3.4	Wegen en bomen	42

3

3.1 Statistisch onderzoek

Inleiding

Als je bijvoorbeeld wilt weten hoeveel procent van de Nederlandse scholieren actief is op sportgebied, dan ga je natuurlijk niet elke Nederlandse scholier opbellen. Je trekt een steekproef uit deze grote groep. Maar dan neem je niet alleen de leerlingen van je eigen school, want het is maar zeer de vraag of alle Nederlandse scholieren zich gedragen als die in jouw eigen directe omgeving. Misschien zit je wel op een heel bijzondere school en in ieder geval in een bepaald gebied in Nederland...



Je leert in dit onderwerp

- wat representatieve steekproef is;
- data verzamelen en die weergeven in frequentietabellen ook met behulp van MS-Excel;
- opnieuw werken met de begrippen absolute en relatieve frequentie en klassenindeling.

Voorkennis

- werken met statistische gegevens, (frequentie)tabellen en diagrammen;
- werken met MS-Excel voor het maken van tabellen en diagrammen.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg 1

Bij statistisch onderzoek is het de bedoeling dat je een deel van een groep onderzoekt en na het analyseren van de gegevens een uitspraak kunt doen over de hele groep. Dat kan een groep mensen zijn, maar ook een groep rookworsten, gloeilampen, spinnen, auto's, konijnen,... en de spaghetti in een restaurant.



De groep die daadwerkelijk onderzocht wordt, heet de 'steekproef'. De groep waarover je iets wilt zeggen heet de 'populatie'. Een steekproef is 'representatief' als deze eerlijk is verdeeld over de verschillende soorten in de populatie en je kunt verwachten dat uitkomsten uit de steekproef ook gelden voor de hele populatie. Bij een representatieve steekproef kun je de uitkomsten van de steekproef gebruiken om de uitkomsten van de populatie te voorspellen.

Eén van de grootste problemen bij statistisch onderzoek is het vinden van een goede (dus representatieve) steekproef...



Uitleg 2

Hier zie je een overzicht van de bezoekers van de webpagina van de Nationale Vacature Bank voor jongeren van 14 jaar. Deze pagina bevat informatie voor jongeren van 14 jaar over bijbaantjes. Je ziet de bezoekersaantallen van twee opeenvolgende maanden.

In de tabel zie je de absolute frequenties. Zo was het aantal 14-jarigen in de eerste maand 128 en in de tweede maand was dat 131. Maar je mag daaruit niet zomaar concluderen dat het aantal 14-jarigen is toegenomen, want ook het totaal aantal bezoekers van deze pagina is groter geworden.

leeftijd	aantal mnd.1	aantal mnd.2
12	32	40
13	56	96
14	128	131
15	67	84
16	43	40
totaal	326	391

Om eerlijk te kunnen vergelijken werk je liever met relatieve frequenties, bijvoorbeeld in procenten:

- In de eerste maand was het percentage 14-jarigen $\frac{128}{326} \cdot 100 \approx 39$.
- In de tweede maand was het percentage 14-jarigen ongeveer 34.

Nu zie je dat het deel 14-jarigen eerder minder is geworden, van 39% naar 34%.

Merk nog op dat in deze tabel sprake is van een klassenindeling. Elk leeftijd is een klasse van personen die zich in een bepaald levensjaar bevinden, bijvoorbeeld de klasse 14 stelt iedereen voor die ouder is dan 13, maar jonger dan 15.

Om verschillende klassen goed te kunnen vergelijken, maak je klassen meestal even groot.

[Opgave 1](#) [Opgave 2](#) [Opgave 3](#) [Opgave 4](#)

Theorie

Wanneer je van een grote groep, een **populatie**, bepaalde gegevens of eigenschappen in kaart wilt brengen, is het bijna altijd onmogelijk om elk individu van de populatie te bevragen, meten, etc. Je neemt dan een **steekproef**.

Zo'n steekproef moet **representatief** zijn voor de populatie, hij moet een juiste doorsnede van de populatie vormen.

De resultaten van je onderzoek vormen vaak een behoorlijk grote verzameling **data**.

Deze data worden overzichtelijk weergegeven in **frequentietabellen**.

Hier zie je zo'n tabel met wiskundecijfers van een klas. Er staan **absolute frequenties**. Om deze data te kunnen vergelijken met die van een andere klas, gebruik je liever **relatieve frequenties**. Je deelt dan elke absolute frequentie door het totaal aantal individuen in de groep. Soms maak je daar procenten van.

In de tabel is sprake van een **klassenindeling**.

Bij bijvoorbeeld het cijfer 5 hoort de klasse $4,5- < 5,5$, alle cijfers vanaf 4,5 tot aan 5,5.

wiskunde	
RE	freq
1	0
2	0
3	0
4	1
5	4
6	9
7	8
8	6
9	3
10	0

**Voorbeeld 1**

Vlak voor de Tweede Kamer verkiezingen, wordt het stemgedrag onderzocht, op basis daarvan wordt de uitslag van de verkiezingen voorspeld. De onderzochte groep moet natuurlijk representatief zijn voor de hele stemgerechtigde bevolking. Waar moet je dan aan denken? Wat is de populatie en wat de steekproef in dit geval?

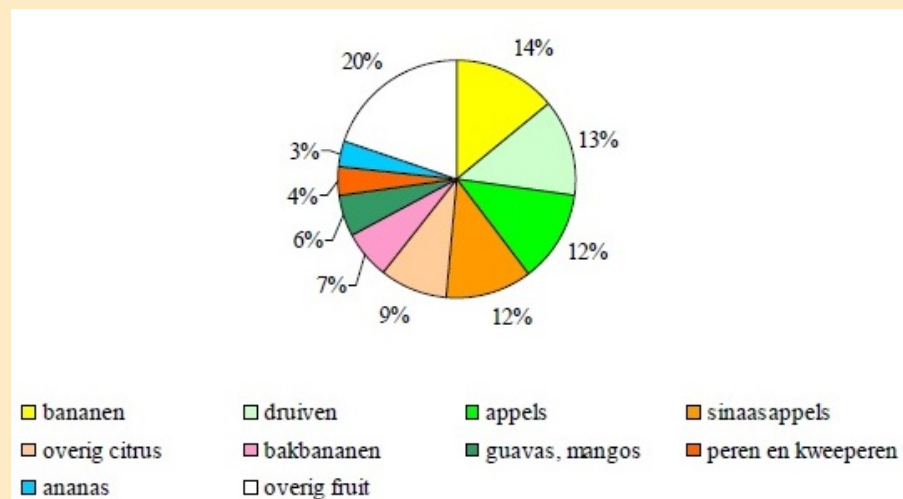
Antwoord

Dit betekent dat er mensen uit alle delen van het land, uit alle inkomensgroepen, van 18 jaar of ouder en zowel uit de stad als uit dorpen worden gevraagd op welke partij ze willen stemmen. De populatie in dit onderzoek bestaat uit alle mensen in Nederland met stemrecht. De steekproef bestaat uit de mensen die meedoen aan het onderzoek.

[Opgave 5](#) [Opgave 6](#)

Voorbeeld 2

Er wordt enorm veel fruit verbouwd over de hele wereld. Wereldwijd is de productie van bananen ongeveer 72 miljard kg per jaar. Maar is dit nou veel of weinig? Hoeveel bedraagt de totale productie van al deze fruitsoorten samen? In de grafiek hieronder is te zien hoe de productie van fruit procentueel is opgebouwd.



Antwoord

Uit het diagram lees je af dat de productie van bananen 14% van de totale fruitproductie bedraagt. Als de productie van bananen ongeveer 72 miljard kg is, dan betekent dit dat de totale productie van fruit ongeveer $\frac{72}{14} \cdot 100 \approx 514$ miljard kg bedraagt.

[Opgave 7](#) [Opgave 8](#)

**Voorbeeld 3**

Op de [website van het Centraal Bureau voor de Statistiek](#) (CBS) staan heel veel gegevens over Nederland, samengevat in cijfers. Het is misschien even wennen om door de enorme brei met cijfers heen te kijken, maar op de pagina 'Bevolking, kerncijfers' staat de bevolkingsopbouw naar percentage in verschillende jaren. Op basis hiervan kon je in juni 2023 de volgende tabel maken

leeftijd	1960	1980	2000	2020
jonger dan 20	37,9	31,5	24,4	21,7
20 - 39	27,1	31,5	30,0	25,2
40 - 64	26,0	25,6	32,0	33,7
65 - 80	7,6	9,3	10,4	14,8
ouder dan 80	1,4	2,2	3,2	4,8

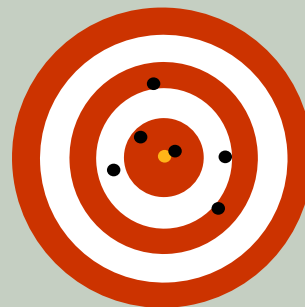
De klassen zijn niet even groot gemaakt, ze zijn gemaakt op basis van logische groepen. Je ziet dat het percentage kinderen sterk gedaald is in 40 jaar tijd. Het percentage mensen in de leeftijd dat ze kunnen deelnemen aan het arbeidsproces is iets gestegen, maar ook het percentage mensen van boven de 65 is gestegen. Je hoort dan ook vaak dat het erg duur wordt voor de mensen die nu werken om de AOW van de mensen die ouder dan 67 jaar zijn te betalen.

[Opgave 9](#) [Opgave 10](#) [Opgave 11](#)

3.2 Centrum en spreiding

Inleiding

Om een verzameling gegevens, een dataset, zo simpel mogelijk weer te geven, gebruik je getallen die het centrum en de mate van spreiding van een frequentieverdeling weergeven. Je kent ze al: modus, mediaan en gemiddelde zijn centrummaten. Spreidingsbreedte of variatiebreedte en kwartielfstand zijn bekende spreidingsmaten.



Je leert in dit onderwerp

- opnieuw data samenvatten met behulp van modus, mediaan en gemiddelde als centrummaten en met behulp van de variatiebreedte en de kwartielfstand als spreidingsmaten;
- opnieuw boxplots gebruiken om dezelfde soort gegevens van verschillende groepen te vergelijken (ook met MS-Excel).

Voorkennis

- werken met statistische gegevens, (frequentie)tabellen en diagrammen;
- werken met MS-Excel voor het maken van tabellen en diagrammen.

Opgave V1

Uitleg

Thijmen en Sven vergelijken de resultaten die ze het afgelopen jaar voor wiskunde hebben gehaald:

Sven	6,4	6,3	6,5	6,4	6,4	6,4	6,5	6,5	6,3
Thijmen	8,9	3,5	6,3	9,3	3,5	5,8	7,2	4,7	8,5

Hun gemiddelden zijn hetzelfde. Kennelijk is het gemiddelde is niet voldoende om een goed beeld te krijgen van hun resultaten. Het gemiddelde is een centrummaat en zegt iets over het midden (het centrum) van een groep gegevens. Er zijn nog twee centrummaten, je kent ze al:

- de modus is de waarneming die het vaakst voorkomt;
- de mediaan is de middelste waarneming als je ze allemaal op volgorde zet.

Misschien zou je aan deze centrummaten iets kunnen zien, maar centrummaten alleen zeggen vaak niet zo veel. Je hebt een getal nodig dat iets zegt over de spreiding in de cijfers. Immers het grootste verschil is dat Sven veel constanter is en dat de cijfers van Thijmen een grote spreiding laten zien. Er zijn twee spreidingsmaten: de spreidingsbreedte en de kwartielfstand.

Ook die ken je al, bekijk anders de.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3



Theorie

Je ziet hier een frequentietabel van de rapportcijfers voor wiskunde in klas 3G. Bij een **frequentieverdeling** van een aantal waarden (hier de cijfers) gebruik je de volgende **centrummaten**:

- het **gemiddelde**, dat is de som van alle waarden (rekening houdend met de frequenties) gedeeld door het totaal aantal waarden;
- de **modus**, dat is de waarde met de hoogste frequentie;
- de **mediaan**, dat is de middelste waarde.

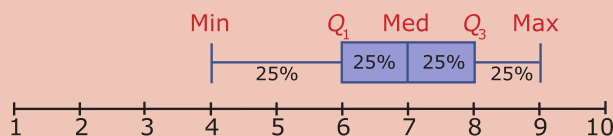
wiskunde	
RE	freq
1	0
2	0
3	0
4	1
5	4
6	9
7	8
8	6
9	3
10	0

Bij een **klassenindeling** gebruik je in plaats van de afzonderlijke waarden de **klassenmiddens**. Je kunt dan het gemiddelde en de mediaan alleen nog maar schatten. In plaats van de modus spreek je dan van de 'modale klasse'.

Omdat een centrummaat alleen weinig zegt, gebruik je daarnaast de volgende **spreidingsmaten**.

- de **variatiebreedte** of **spreidingsbreedte** is de grootste waarde min de kleinste waarde;
- de **kwartielfstand** is het derde kwartiel min het eerste kwartiel, waarin:
 - het **eerste kwartiel** de mediaan van de eerste helft van de waarden is,
 - het **derde kwartiel** de mediaan van de tweede helft van de waarden is.

De kleinste waarde en de grootste waarde, de mediaan en de twee kwartielen kun je overzichtelijk weergeven in een **boxplot**. Bij deze frequentietabel is de mediaan 7, het eerste kwartiel $Q_1 = 6$ en het derde kwartiel $Q_3 = 8$.



Voorbeeld 1

In **dit Excel-bestand** vind je de rapportcijfers van klas 3G, onder andere die voor wiskunde.

Maak zelf een frequentietabel van deze cijfers zoals je die hiernaast ziet. Bepaal het modale cijfer, het gemiddelde rapportcijfer zowel van de waarden op één decimaal nauwkeurig als van de afgeronde cijfers. Maak een boxplot van de cijfers voor wiskunde.

Antwoord

Bij kun je nog even oefenen met het werken met Excel. Onder andere het bepalen van centrummaten en spreidingsmaten en het tekenen van boxplots.

Bij het berekenen van centrummaten en het maken van de boxplot moet je je goed bewust zijn van de waarden waar je mee rekent. Als je werkt met de afgeronde cijfers - dus eigenlijk met een klassenindeling en klassenmiddens - dan krijg je alleen schattingen van de werkelijke centrummaten en spreidingsmaten. In de praktijk is dat vaak wel goed genoeg. Bijvoorbeeld is het gemiddelde in beide gevallen 6,7 als je op één decimaal afrondt.

wiskunde	
RE	freq
1	0
2	0
3	0
4	1
5	4
6	9
7	8
8	6
9	3
10	0

Opgave 4 **Opgave 5**

**Voorbeeld 2**

Op de [website van het Centraal Bureau voor de Statistiek](#) (CBS) staan kun je gegevens vinden over de inkomens in Nederland. Voor 2011 staan daar de volgende gegevens op:

Inkomen per jaar (in euro)	Aantal personen (x 1000)
5000– < 10000	2490
10000– < 20000	2769
20000– < 30000	1963
30000– < 40000	1578
40000– < 50000	1304
50000– < 200000	2614

Maak een schatting van het gemiddelde inkomen, bepaal het modale inkomen en maak een schatting van de mediaan.

Antwoord

Om het gemiddelde inkomen te schatten, maak je eerst een tabel van de klassenmiddens. Vervolgens vermenigvuldig je die met de frequenties (het aantal personen).

Klassenmiddens (in euro)	Aantal personen (x 1000)	Totaal per klasse
7500	2490	18675000
15000	2769	41535000
25000	1963	49075000
35000	1578	55230000
45000	1304	58680000
125000	2614	326750000
Totaal	12718	549945000

Dus het gemiddelde inkomen is $549945000/12718 = 43241,47$ euro.

De modale klasse is de klasse die het meest voorkomt, dat is die met een inkomen van 10000– < 20000. Het midden van deze klasse is het modale inkomen.

Er zijn in het totaal 12718 (x 1000) gegevens, de middelste is 6359, deze bevindt zich in de klasse 20000– < 30000. Neem aan dat alle waarden gelijkmatig over de klassen zijn verdeeld. In de eerste twee klassen zitten al $2490 + 2769 = 5259$ (x 1000) waarden. Je moet dus de 1100e waarde van die klasse schatten:

$$20000 + 10000 \times \frac{1100}{1963} \approx 25604 \text{ euro.}$$

Opgave 6 **Opgave 7**

3.3 Kansen

Inleiding

Als je met twee dobbelstenen gooit en je telt steeds het totaal aantal ogen dat boven komt, dan zul je merken dat bepaalde aantallen vaker voorkomen dan andere. Je kunt een frequentietabel maken en dit nagaan. Je moet dan wel flink wat keren gooien...



Je leert in dit onderwerp

- kennismaken met het begrip kans als relatieve frequentie;
- kansen berekenen in situaties die zich daartoe lenen.

Voorkennis

- werken met statistische gegevens, (frequentie)tabellen en diagrammen;
- rekenen met breuken.

Opgave V1

Uitleg

Je hebt een frequentietabel van de 31 rapportcijfers voor wiskunde in klas 3G. En je komt zo maar een leerling uit deze klas tegen die je verder niet kent. Je kunt dan zeggen dat er een kans van 6 op 31 is dat hij het rapportcijfer 8 heeft. Vaak geef je die kans liever aan met een breuk: de kans op een cijfer 8 is dan $\frac{6}{31} \approx 0,19$ en dat is ongeveer 19%.

Je kunt een kans opvatten als een relatieve frequentie: hoe vaak komt een bepaalde situatie in verhouding tot alle mogelijke situaties voor? Dus hier: hoe vaak komt het cijfer 8 voor in verhouding tot de 31 rapportcijfers die er in totaal zijn? Je leest kansen dus af uit een frequentietabel.

Bij het werpen met een dobbelsteen kun je ook een frequentietabel maken. Bij een normale dobbelsteen zoals deze zijn er zes mogelijkheden: 1 oog, 2 ogen, ..., 6 ogen. Maar als de dobbelsteen eerlijk is, dan hoeft je niet echt een tabel te maken. Je kunt dan de relatieve frequenties wel voorspellen, allemaal $\frac{1}{6} = 0,166...$ en dat is ongeveer 17%. De kans op het gooien van bijvoorbeeld 5 ogen is $\frac{1}{6}$.

wiskunde			
RE	freq	rel.freq	%
1	0	0,00	0,0
2	0	0,00	0,0
3	0	0,00	0,0
4	1	0,03	3,2
5	4	0,13	12,9
6	9	0,29	29,0
7	8	0,26	25,8
8	6	0,19	19,4
9	3	0,10	9,7
10	0	0,00	0,0
	31	1	100



Opgave 1 Opgave 2



Theorie

Onder de **kans** op een bepaalde situatie versta je de **relatieve frequentie** van die situatie. Dat betekent de verhouding van het aantal keren dat die situatie zich voordoet ten opzichte van het totaal aantal mogelijkheden. Deze relatieve frequenties haal je uit frequentietabellen.

Het zijn altijd getallen tussen 0 en 1.

Een kans van 0 betekent dat de situatie zich niet voordoet, een kans van 1 is een zekere situatie, alle relatieve frequenties samen.

Kansen worden ook wel als percentage gegeven.

In sommige gevallen zoals het werpen met een dobbelsteen, of een geldstuk, of het trekken van een kaart uit een kaartspel, kun je die relatieve frequenties voorspellen. Je doet dan aannames zoals 'alle ogen van de dobbelsteen hebben een even grote waarschijnlijkheid om boven te komen', of 'alle kaarten hebben dezelfde waarschijnlijkheid om gekozen te worden', enz.

Daarom wordt het werken met kansen vaak toegepast in kansspelen...

Voorbeeld 1

Bij de **Rijksoverheid** vind je een aparte pagina voor jongeren van 13 of 14 jaar.

Deze pagina bevat informatie over bijbaantjes.

Er is onderzocht wat de leeftijd is van de jongeren die deze pagina bezoeken. De gegevens staan in de tabel.

Hoe groot is de kans dat een jongere die deze pagina bezoekt geen 14 jaar is?

leeftijd	percentage
12	10
13	18
14	39
15	20
16	13

Antwoord

De getallen in de tabel zijn al relatieve frequenties. Ze zijn gegeven in procenten.

De relatieve frequentie van de niet 14-jarigen is $10 + 18 + 20 + 13 = 61\%$.

De gevraagde kans kun je ook geven als 61 op de 100 of als 0,61.

[Opgave 3](#) [Opgave 4](#) [Opgave 5](#)



Voorbeeld 2

Je gooit met twee dobbelstenen en kijkt naar het aantal ogen op beide samen boven komt. Hoe groot is de kans op 7 ogen?

Antwoord

Met twee dobbelstenen gooi je samen 2 ogen, 3 ogen, ..., 11 ogen, of 12 ogen. Maar nu is het lastig om de frequentietabel te voorspellen. 2 ogen kun je maar op één manier gooien, elke dobbelsteen 1 oog. Maar 7 ogen kun je op veel manieren gooien: 1 en 6, 2 en 5, enz.

Daarom maak je eerst een overzicht van alle mogelijke totale ogenaantallen bij twee dobbelstenen. Deze kruistabel is daarvoor heel geschikt. Daarmee kun je voorspellen dat van de 36 keer gooien gemiddeld 1 keer 2 ogen zal voorkomen. En ook dat er van de 36 keer gooien gemiddeld 6 keer 7 ogen boven zal liggen. De kans op 7 ogen schat je dus op 6 op de 36, ofwel $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.



		eerste dobbelsteen					
		1	2	3	4	5	6
tweede dobbelsteen	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

[Opgave 6](#) [Opgave 7](#)

3.4 Wegen en bomen

Inleiding

Je ziet hier een weg en bomen.

Dit onderdeel gaat over wegen en bomen. Maar dan wel met een andere betekenis dan hier. Je moet meer denken aan wegendiagrammen en boomdiagrammen.



Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen met behulp van een wegendiagram of een boomdiagram.

Voorkennis

- werken met statistische gegevens, (frequentie)tabellen en diagrammen;
- rekenen met breuken;
- het begrip kans gebruiken en kansen bepalen.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

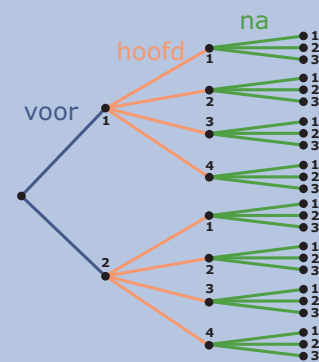
Soms kun je kansen bepalen door de relatieve frequenties te berekenen. Dan is het handig om een overzicht te hebben van alle mogelijkheden.

Stel je voor dat in een restaurant het basismenu bestaat uit een voorgerecht, een hoofdgerecht en een toetje. Je hebt keuze uit 2 voorgerechten, 4 hoofdgerechten en 3 toetjes. Je wilt een voorgerecht, een hoofdgerecht en een toetje en je mag er maar één van elk kiezen. Als je alles even lekker vindt, zijn alle mogelijke keuzes even waarschijnlijk. Deze diagrammen brengen alle mogelijkheden in beeld, het zijn er $2 \times 4 \times 3 = 24$.

Het 'wegendiagram' is overzichtelijk, maar laat niet alle mogelijke menu's afzonderlijk zien. Het 'boomdiagram' laat wel alle mogelijkheden zien.



wegendiagram



boomdiagram

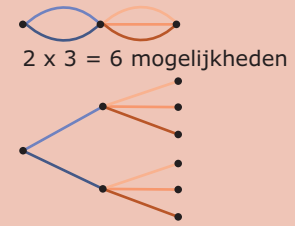
Opgave 1 Opgave 2



Theorie

Bij het berekenen van kansen kun je heel vaak goed gebruik maken van

1. een **wegendiagram**, overzichtelijk maar laat niet alle mogelijkheden afzonderlijk zien;
2. een **boomdiagram**, laat alle mogelijkheden zien.



Dergelijke diagrammen kunnen al snel erg veel paden bevatten. Je hoeft ze echter niet altijd te tekenen. Ze 'in je hoofd tekenen' is vaak voldoende (al is het verstandig om het ook op papier te zetten als je iemand anders wilt laten zien hoe je aan je antwoorden bent gekomen).

Voorbeeld 1

Je PIN (Persoonlijk Identificatie Nummer) bestaat uit 4 cijfers. Je bent je PINcode vergeten. Je weet alleen nog dat alle cijfers verschillend waren.

Hoe groot is de kans dat een willekeurige code van vier verschillende cijfers de juiste is?

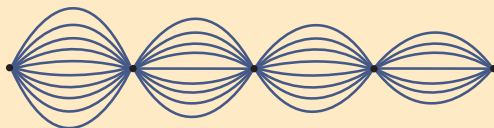


Antwoord

Er is maar één PINcode de juiste.

Een overzicht van alle mogelijkheden afzonderlijk is niet nodig, je moet alleen weten hoeveel er in totaal zijn. Het wegendiagram laat dat zien.

Het zijn er $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.



De gevraagde kans is $\frac{1}{5040} \approx 0,0002$.

Heel klein dus...

[Opgave 3](#) [Opgave 4](#) [Opgave 5](#)

**Voorbeeld 2**

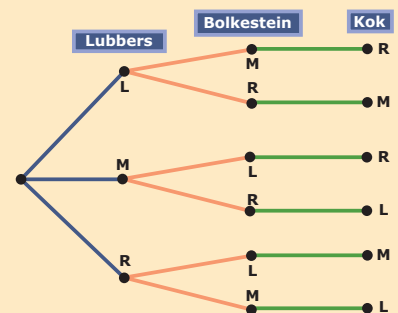
Je ziet hier foto's van drie bekende politici uit het eind van de vorige eeuw. Je hebt kaartjes met hun namen: Lubbers, Bolkestein en Kok. Stel je voor dat je geen idee hebt welke naam bij welk foto hoort, hoe groot is dan de kans dat je precies één kaartje bij de goede foto plaatst?

Antwoord

Noem de foto's van links naar rechts L, M, R. Nu helpt een boomdiagram om alle mogelijkheden in beeld te krijgen.

Stel dat Lubbers = L, Bolkestein = R en Kok = M. Je ziet dan in het boomdiagram dat er in totaal 6 mogelijkheden zijn waarbij er 3 zijn met precies één kaartje goed. De gevraagde kans is dus $\frac{3}{6} = 0,5$.

Snap je waarom de kans op twee goede 0 is?



[Opgave 6](#) [Opgave 7](#) [Opgave 8](#)

Register

a

absolute frequenties 33
asymptoot 27

b

boomdiagram 43
bovenaanzicht 10
boxplot 37

c

centrummaten 37
constante functie 24

d

derde kwartiel 37
diagonaalvlakken 7
doorsnede 13
drieaanzicht 10

e

eerste kwartiel 37
exponentiële functie 27
exponentiële groei 24

f

frequentietabellen 33
frequentieverdeling 37

g

gemiddelde 37
groefactor 21
groefactor per jaar 20
groeipercentage 21
grondvlak 7

h

halveringstijd 21
hoekpunten 7
hoogte 7
horizontale asymptoot 26

i

inhoud 16

k

kans 40
klassenindeling 33, 37
klassenmiddens 37
kruisende lijnen 13

kwartielafstand 37

l

lengtevergrotingsfactor 16
lichaam 7
lichaamsdiagonalen 7
lineaire groei 24

m

mediaan 37
modus 37

o

op ware grootte 13
oppervlakte 16
oppervlaktevergrotingsfactor 16

p

parallelprojectie 10
populatie 33

r

relatieve frequentie 40
relatieve frequenties 33
representatief 33
ribben 7

s

spreidingsbreedte 37
spreidingsmaten 37
statistische gegevens 33
steekproef 33

v

variatiebreedte 37
veelvlak 7
verdubbelingstijd 21, 22
vervalpercentage 21
volume 16
volumevergrotingsfactor 16
vooraanzicht 10

w

wegendiagram 43

z

zijaanzicht 10
zijvlaksdagonalen 7

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 3

- 7. Ruimte meetkunde**
- 8. Exponentiële verbanden**
- 9. Statistiek en kansrekening**



www.math4all.nl

