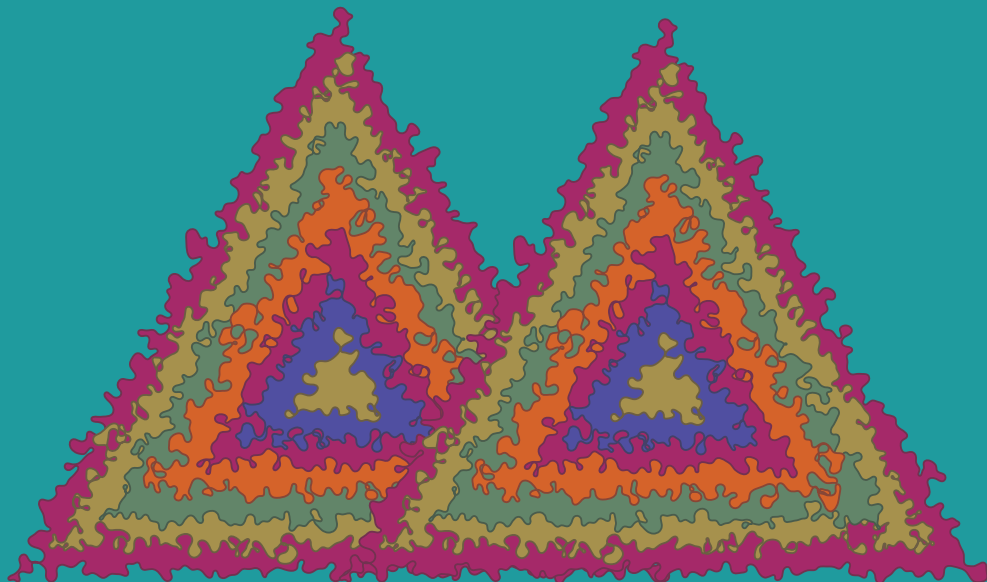


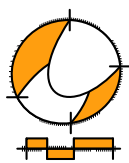
Wiskunde

3 HAVO

Katern 2 / Werkboek / Opgaven

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

1	Lineaire verbanden	1
1.1	Recht evenredig	4
1.2	Lineaire functies	13
1.3	Het hellingsgetal	22
1.4	Lineaire modellen	36
1.5	Totaalbeeld	46
2	Goniometrie	55
2.1	Vectoren	58
2.2	Sinus en cosinus	70
2.3	Hoeken berekenen	80
2.4	Helling en tangens	89
2.5	Rekenen in driehoeken	99
2.6	Totaalbeeld	109
3	Kwadratische verbanden	115
3.1	Kwadratische functies	118
3.2	Nulpunten en top	129
3.3	Kwadratische vergelijkingen	141
3.4	Handig oplossen	157
3.5	Totaalbeeld	172

Begrippen

- ▶ recht evenredig — evenredigheidsconstante — recht evenredig verband;
- ▶ lineaire functie — richtingscoëfficiënt;
- ▶ evenwijdige lijnen — vergelijking van een lijn;
- ▶ lineair model — snijpunten en nulpunten van lineaire functies.

Activiteiten

- ▶ een recht evenredig verband en de evenredigheidsconstante herkennen en er grafieken bij tekenen;
- ▶ een lineaire functie en de richtingscoëfficiënt herkennen en er grafieken bij tekenen;
- ▶ een formule opstellen bij een lijn door twee gegeven punten;
- ▶ snijpunten en nulpunten bij grafieken van lineaire functies berekenen en interpreteren.

Hoe hoger, des te kouder



Domein

Functies en grafieken

Hoofdstuk

Lineaire verbanden

Inhoud

1.1	Recht evenredig	4
1.2	Lineaire functies	13
1.3	Het hellingsgetal	22
1.4	Lineaire modellen	36
1.5	Totaalbeeld	46



1.1 Recht evenredig

Verkennen

Opgave V1

In Denemarken wordt als betaalmiddel de Deense Kroon (DKK) gebruikt. Een Deense Kroon is ongeveer € 0,13 waard.



- a** Je wilt iets kopen van € 29,00. In jouw portemonnee zitten 350 Deense Kronen. Heb je genoeg?

- b** Hoeveel Deense Kronen hou je over of kom je tekort?

- c** Als iets in Denemarken twee keer zo duur wordt, is dat omgerekend in euro dan ook zo?

- d** Schrijf een formule op die het verband aangeeft tussen de kosten in euro (E) en die in Deense Kronen (D).

Theorie

Opgave 1

Bekijk de [Uitleg](#).

- a** Hoe groot is de opbrengst als de winkelier 1250 LegoBasic doosjes heeft verkocht?



- b** Hoeveel LegoBasic doosjes heeft de winkelier verkocht als de dagopbrengst hiervan € 332,63 is?

- c** Laat met een voorbeeld zien dat R verdubbelt als a verdubbelt.

- d** Als a drie keer zo groot wordt, wat gebeurt er dan met R ? Laat dit zien met een berekening.

- e** Hier zijn R en a recht evenredig. Teken een bijpassende grafiek.

- f** Hoe kun je aan de grafiek zien dat het hier om een recht evenredig verband gaat?

Opgave 2

Een kopie maken met een kopieermachine kost € 0,125 per velletje.

- a** Hoeveel ben je kwijt als je in een jaar tijd 1750 kopieën maakt?

- b** Met welke formule kun je de kosten K in euro afhankelijk van het aantal kopieën a weergeven?

- c** Zijn deze twee variabelen recht evenredig met elkaar? Waarom?



- d** Maak een tabel en teken de grafiek bij deze formule.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

- a** Stel de juiste waarde van a in en maak de grafiek van $y_1 = 2x$.

- b** Waarom weet je zeker dat de grafiek van $y_1 = 2x$ door $(0,0)$ gaat?

- c** De formule $y_2 = 2x + 3$ beschrijft geen recht evenredig verband. Laat met een getallenvoorbeeld zien dat een verdubbeling van de waarde van x geen verdubbeling van de waarde van y oplevert bij deze formule.

- d** Teken de grafieken van $y_1 = 2x$ en $y_2 = 2x + 3$ in één figuur.

- e** Van welk soort verband is er sprake bij de grafiek van $y_2 = 2x + 3$?

**Opgave 4**

Welke van de volgende formules beschrijven een recht evenredig verband? Licht je antwoord toe en geef in dat geval de evenredigheidsconstante. (Lees eventueel eerst in de **Theorie** na wat je daaronder verstaat.)

- $y_1 = x$
- $y_2 = -0,5x$
- $y_3 = -x + 1$
- $y_4 = 1/x$
- $y_5 = x^2$
- $y_6 = 0$

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a** Welke twee variabelen zijn hier recht evenredig met elkaar? En waarom?

Je kunt de formule ook vinden door uit te gaan van $t = a \cdot s$ en dan a uit te rekenen door de gegeven waarden van t en s in te vullen.

- b** Laat zien dat je daarmee op dezelfde formule uit komt.

Leeuwarden en Sneek liggen 26,4 kilometer uit elkaar.

- c** Hoe lang doet de schaatser over deze tocht?

- d** Hoe lang duurt het voordat de schaatser de Elfstedentocht (200 km) heeft afgelegd als zijn gemiddelde snelheid gelijk is aan de constante snelheid tussen Leeuwarden en Sneek?

**Opgave 6**

Bekijk **Voorbeeld 2** nog eens. Je kunt ook een formule maken van de vorm $s = a \cdot t$.

- a** Waarom stelt nu de evenredigheidsconstante a de snelheid voor? In welke eenheden?

- b** Bereken nu opnieuw de waarde van a . Hoe ziet de formule er nu uit?

Je kunt de formule die je in deze opgave hebt gevonden ook afleiden uit die van de vorige opgave.

- c** Laat zien hoe dat gaat.

Verwerken**Opgave 7**

In Zwitserland wordt met de Zwitserse Frank (SFr) betaald. De omrekenkoers is op zeker moment: 1 SFr = 0,83 euro.

- a** Je bent in Zwitserland op vakantie en je koopt een souvenir voor SFr.34,50. Hoeveel zou dit in euro moeten zijn?



- b** Met welke formule kun je omrekenen van SFr naar euro? Noem het aantal SFr z en het aantal euro e .



- c** Als een ander souvenir anderhalf keer zo duur is in SFr, hoeveel keer zo duur zou het dan in euro moeten zijn?

Voordat je op vakantie ging heb je waarschijnlijk Zwitserse Franks gekocht bij een bank in Nederland. Die bank rekent voor de aankoop van SFr nog € 5,00 aan kosten. Wel gebruiken ze dezelfde wisselkoers.

- d** Hoeveel kosten je SFr.250,00?

- e** Is bij een aankoop van SFr in de situatie beschreven bij d het aantal euro dat je betaalt recht evenredig met het aantal gekochte SFr? Licht je antwoord toe.

Opgave 8

De variabele y is recht evenredig met de variabele x . De bijbehorende evenredigheidsconstante is 5,8.

- a** Welke formule beschrijft het verloop van y afhankelijk van x ?

- b** Hoe ziet de grafiek van y afhankelijk van x er uit?

- c** Als x tien keer zo groot wordt, dan geldt dit ook voor y . Toon dit aan.

**Opgave 9**

Van een cirkel is de omtrek P recht evenredig met de diameter d . De bijbehorende evenredigheidsconstante is π genoemd.

- a** Welke formule geldt dus voor de omtrek van een cirkel?

- b** Is de omtrek van een cirkel ook recht evenredig met de straal r ? Welke formule geldt er voor P afhankelijk van r ?

- c** Is de oppervlakte A van een cirkel ook recht evenredig met de diameter? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

Alexandra rijdt op haar fiets van haar huis naar dat van haar oma, een afstand van 25 km. Ze rijdt in een rustig tempo van 12 km/uur.

- a** Waarom is Alexandra's afstand a_1 in km tot haar eigen huis recht evenredig met haar reistijd t in uur? Geef een bijpassende formule.

- b** Waarom is Alexandra's afstand a_2 in km tot haar oma's huis niet recht evenredig met haar reistijd t in uur? Geef ook nu een bijpassende formule.



- c** Bereken hoeveel minuten Alexandra over die 25 km doet.

Opgave 11

In welke van de volgende situaties is y recht evenredig met x ? Stel in dat geval een passende formule op.

- a** De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door de oorsprong en door (12,39).

- b** De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door de punten (4,12) en (12,39).

- c** De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door de punten (10,-6) en (15,-9).

- d** De bijbehorende formule heeft de vorm $x \cdot y = c$ en gaat door het punt (10; 0,5).

- e** De bijbehorende formule heeft de vorm $\frac{y}{x} = c$ en gaat door het punt (10; 0,5).



Toepassen

Naast de temperatuurschaal van Celsius (die wij meestal gebruiken) bestaan er nog andere **temperatuurschalen**, waaronder:

- De temperatuurschaal van Fahrenheit (die nog gebruikt wordt in de V.S.).
Je krijgt het aantal graden Fahrenheit door het aantal graden Celsius te delen door 10, de uitkomst te vermenigvuldigen met 18 en vervolgens nog 32 erbij te tellen.
- De temperatuurschaal van Réamur.
Je krijgt het aantal graden Réamur door het aantal graden Celsius te delen door 10 en dan te vermenigvuldigen met 8.

Opgave 12: Celsius, Fahrenheit, Réamur

Hierboven worden drie verschillende temperatuurschalen beschreven.

De temperatuur in graden Celsius noem je T_C , die in graden Fahrenheit T_F en die in graden Réamur T_R .

- a** Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_C naar T_F .

- b** Leid ook een omrekenformule af van T_F naar T_C .

- c** Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_C naar T_R .

- d** Leid uit de tekst een omrekenformule af van T_R naar T_C .

- e** Welke van deze drie temperatuurschalen zijn recht evenredig?

1.2 Lineaire functies

Verkennen

Opgave V1

In het deel van de atmosfeer waarin het menselijk leven plaats vindt daalt de luchttemperatuur elke km dat je hoger komt gemiddeld met ongeveer $6,5\text{ }^{\circ}\text{C}$. Onder bepaalde weersomstandigheden kan met de formule $T = 25 - 0,0065h$ de temperatuur T in graden celsius op een hoogte van h meter worden berekend. Dat is handig voor bijvoorbeeld bergbeklimmers, dan weten ze welke temperaturen ze tijdens de klim kunnen verwachten.

- a** Hoe ziet de grafiek van T afhankelijk van h er uit?

- b** Is er sprake van een recht evenredig verband tussen T en h ? Waarom?

- c** Bereken de temperatuur op 7500 meter hoogte.

- d** Op welke hoogte komt de temperatuur voor het eerst onder het vriespunt?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de [Uitleg](#).

- a** Leg uit hoe je bij de formule $y = \frac{1}{3}x + 1$ snel een grafiek kunt tekenen.



- b** Teken snel een grafiek bij de formule $y = -0,25x + 4$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?

- c** Teken snel een grafiek bij de formule $y = 4x - 6$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?

- d** Teken snel een grafiek bij de formule $y = 5 - x$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?

- e** Hoe kun je aan de richtingscoëfficiënt zien of de grafiek daalt of stijgt?

- f** Hoe ziet de grafiek er uit als de richtingscoëfficiënt 0 is? Geef een voorbeeld van een formule waarin dit zo is.

Opgave 2

Je hebt de formule $y = -\frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$.

- a** Teken snel (dus zonder tabel te maken) een grafiek bij deze formule. Zoek eerst twee roosterpunten.



Gegeven is de formule $y = 0,75x + 1,5$

- b** Teken een grafiek bij deze formule door twee roosterpunten.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

- a** Stel de juiste waarde van a en b in en maak de grafiek van $y = 2x + 1$.

- b** Waarom weet je zeker dat de grafiek van $y = 2x + 1$ door $(0,1)$ gaat?

- c** Het punt $(100,201)$ ligt op deze lijn. Ga dat na en bereken met behulp van de richtingscoëfficiënt van de lijn het punt dat hoort bij $x = 101$.

Opgave 4

Teken de grafieken van de volgende lineaire functies. Controleer je antwoorden met behulp van de applet.

- $y_1 = x - 3$
- $y_2 = -0,5x$
- $y_3 = -x + 1$
- $y_4 = 5 - 2x$
- $y_5 = 3$

**Opgave 5**

Gegeven zijn de lineaire functies $y = ax + 6$.

Voor welke waarde van a gaat de grafiek door het punt $(3,5)$?

Opgave 6

De functies $y = ax + 1$ hebben als grafiek een rechte lijn.

Voor welke waarden van a loopt de grafiek van zo'n functie evenwijdig met de lijn $y = 6 - 0,5x$?

Verwerken**Opgave 7**

Vier lineaire functies zijn gegeven door $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -2x + 1$, $y_3 = 2x + 5$ en $y_4 = -0,5x + 5$.

- a** Teken de vier bijbehorende rechte lijnen in één assenstelsel.

- b** Bij welke van deze lineaire functies hoort een rechte lijn die evenwijdig loopt met die van $y_1 = 2x + 1$? Hoe kun je dat aan de formule zien?



- c** Wat valt op aan de twee lijnen die horen bij y_3 en y_4 ?

Opgave 8

In mijnen geldt als vuistregel dat de temperatuur $0,025\text{ }^{\circ}\text{C}$ stijgt voor elke meter die je in de mijn afdaalt. Op een bepaald moment is de buitentemperatuur bij de ingang van een mijnschacht $20\text{ }^{\circ}\text{C}$.



- a** Welke temperatuur verwacht je dan op een diepte van 300 meter?

- b** Stel bij de buitentemperatuur van $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ een formule op voor T (de temperatuur in de mijn in $^{\circ}\text{C}$) afhankelijk van d (de diepte in meters).

- c** Een mijnwerker meet op dat moment een temperatuur van $34,3\text{ }^{\circ}\text{C}$. Hoe diep zit hij?

Op een ander tijdstip meet een mijnwerker die op 684 meter diepte zit een temperatuur $37,8\text{ }^{\circ}\text{C}$.

- d** Wat is op dat tijdstip de buitentemperatuur?

**Opgave 9**

Een kaars met een lengte van 40 cm brandt elk uur nadat hij is aangestoken 0,125 cm op. De lengte L (in cm) van deze kaars hangt af van de brandtijd t (in uur).

- a** Welke formule geldt voor L afhankelijk van t ? Waarom is hier sprake van een lineaire functie?

- b** Welke vergelijking hoort er bij de vraag: “Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?”?

- c** Los deze vergelijking op en geef antwoord op de bij b gestelde vraag.

Opgave 10

Door de formule $y = 2x + b$ is een hele serie lineaire functies gegeven.

- a** Als $b = 5$ krijg je één van die functies. Teken de bijbehorende grafiek.

- b** Voor welke waarde van b gaat de grafiek door het punt $(7,12)$?

- c** Voor welke waarde van b is $(12,0)$ het snijpunt van de grafiek met de x -as?



Opgave 11

Door de formule $y = ax + 10$ is een hele serie lineaire functies gegeven.

- a** Door welk punt gaan alle grafieken van deze functies?

- b** Voor welke waarde van a gaat de grafiek door het punt $(7,12)$?

- c** Voor welke waarde van a is zo'n functie evenwijdig met de lijn die hoort bij de formule $x + 2y = 4$?

Toepassen

Ieder huishouden verbruikt energie. Meestal betreft dat gas en elektra. De prijs daarvoor hangt natuurlijk af van de leverancier en bestaat uit twee gedeelten: een prijs voor het verbruik en een vaste leveringsprijs, die het vastrecht wordt genoemd. In huis heb je meters die het verbruik registreren. Hiernaast zie je een elektriciteitsmeter.



Bij een bepaalde energieleverancier betaal je bijvoorbeeld:

- voor het verbruik van gas:
een vastrecht van € 45,00 per jaar en daar boven op € 0,38 per verbruikte m^3
- voor het verbruik van elektriciteit:
een vastrecht van € 52,00 per jaar en daar boven op € 0,07 per verbruikte kWh (kilo-Wattuur)

**Opgave 12: Energieverbruik**

Hierboven vind je enkele gegevens over de kosten voor het energieverbruik van huishoudens.

- a** Een gemiddeld vierpersoons huishouden verbruikt ongeveer 1950 m^3 gas per jaar. Hoeveel moeten ze daarvoor bij deze leverancier betalen?

- b** Een gemiddeld vierpersoons huishouden verbruikt ongeveer 4800 kWh elektriciteit per jaar. Hoeveel moeten ze daarvoor bij deze leverancier betalen?

- c** Leid uit de tekst een formule af voor de kosten K_g per jaar afhankelijk van het aantal verbruikte m^3 gas g . Leid ook een formule af voor de kosten K_e per jaar afhankelijk van het aantal verbruikte kWh elektriciteit e .

Jordi woont op een studentenkamer en verbruikt jaarlijks ongeveer 430 m^3 gas en 1100 kWh elektriciteit. Zijn vriendin Amira heeft een eigen appartement en verbruikt jaarlijks ongeveer 680 m^3 gas en 1600 kWh elektriciteit. Jordi trekt bij Amira in. Hun gezamenlijk verbruik is nu ongeveer 760 m^3 gas en 1840 kWh elektriciteit. Ze zijn allebei bij deze energieleverancier.

- d** Zijn ze nu goedkoper uit?

Opgave 13: Waterverbruik

Bij een bepaalde waterleidingmaatschappij betaal je € 1,20 per kubieke meter water. Daarnaast betaal je ook een bedrag voor vaste lasten zoals administratie en onderhoud van de leidingen. Die vaste lasten bedragen bij deze maatschappij € 40,00 per jaar.

- a** Je verbruikt per jaar $a \text{ m}^3$ water. Waarom zijn de kosten voor het waterverbruik exclusief de vaste lasten recht evenredig met a ?



- b** Welke formule geldt voor de totale jaarlijkse kosten voor het waterverbruik K inclusief de vaste lasten?

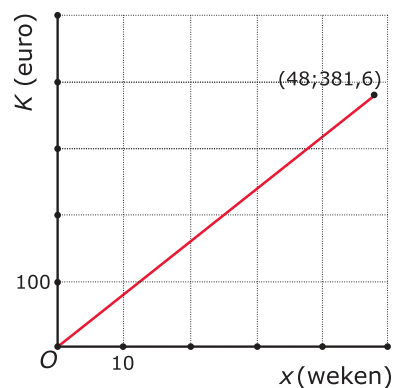
- c** Iemand moet over 2010 voor het waterverbruik € 810,40 betalen. Hoeveel m^3 water heeft hij dat jaar verbruikt.

1.3 Het hellingsgetal

Verkennen

Opgave V1

In de gemeente Overdal wordt maximaal 48 weken per jaar het huisvuil opgehaald. In elke zwarte vuilcontainer zit een chip die er voor zorgt dat elke leging geregistreerd wordt. De gemeente stuurt dan op het eind van het jaar een rekening. Als je iedere week de zwarte container laat legen moet je na een jaar € 381,60 betalen. Hiernaast zie je een grafiek waarin de kosten zijn uitgezet tegen het aantal weken.



- a** Bij de grafiek hoort een formule van de vorm $K = a \cdot x$ waarin a een constante is. Waarom is dat?

- b** Bereken de waarde van de evenredigheidsconstante a die bij deze grafiek past.

Opgave V2

In de gemeente Vijfhouten worden de kosten voor het ophalen van de zwarte vuilcontainers anders berekend. Elk gezin betaalt per jaar € 103,20 plus een vast bedrag voor elke geleege zwarte container. Als je iedere week de container laat legen moet je na een jaar, net als in Overdal, € 381,60 betalen.

- a** Teken de grafiek van de jaarlijkse kosten K in euro afhankelijk van het aantal weken x dat de zwarte container wordt geleege.



- b** De grafiek is een rechte lijn, dus er hoort een formule bij van de vorm $K = a \cdot x + b$. Welke waarde heeft b .

- c** Hoe kun je de waarde van de richtingscoëfficiënt a bepalen?

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je het hellingsgetal berekent als je van een rechte lijn twee punten weet.

In een andere gemeente wordt hetzelfde systeem gehanteerd als in de gemeente Vijfhuizen, alleen met andere bedragen. Daar betaalt de familie Arends in 2011 € 277,50 en daarvoor hebben ze de zwarte container 34 keer laten legen. Hun burens hebben nog twee opgroeiende kinderen en moesten hun zwarte container 42 keer laten legen. Zij betaalden dat jaar € 327,50.

- a** Hoeveel keer extra werd de zwarte container van de burens gelegeerd?

- b** Hoeveel moesten de burens meer betalen?

- c** Hoeveel kost in deze gemeente dus het legen van de zwarte container per keer?

Ook in deze gemeente geldt een formule van de vorm $K = ax + b$.

- d** Welke waarde heeft de richtingscoëfficiënt a ?



- e** Door welke twee punten gaat de rechte lijn die bij deze formule hoort? Hoe kun je vanuit die twee punten in één keer de richtingscoëfficiënt berekenen?

- f** Je hebt nu gevonden dat de formule er uit ziet als $K = 6,25x + b$. Hoe vind je de waarde van b ?

Opgave 2

De grafiek van een rechte lijn gaat door $A(3,5)$ en $B(7,11)$. De bijbehorende formule heeft de vorm $y = ax + b$.

- a** Hoeveel neemt de waarde van x toe tussen beide punten?

- b** Hoeveel neemt de waarde van y toe tussen beide punten?

- c** Hoeveel neemt de waarde van y toe als x met 1 wordt verhoogd?

Je hebt de waarde van de richtingscoëfficiënt a berekend.

- d** Hoe ziet de formule er nu uit?

- e** Bereken de waarde van b .



- f** Schrijf tenslotte de complete formule op die bij deze lijn past.

- g** Kun je je antwoord nog controleren?

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

- a** Stel zelf de vergelijking op van de lijn door de punten $A(0,1)$ en $B(1,4)$ zonder het antwoord bij het voorbeeld te bekijken.

- b** Stel een vergelijking op van de lijn door $A(0,5)$ en $B(1,3)$.

- c** Stel een vergelijking op van de lijn door $A(0, -2)$ en $B(1,0)$.

- d** Stel een vergelijking op van de lijn door $A(1,2)$ en $B(2,4)$.



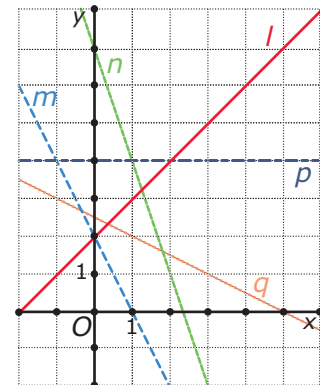
- e Stel een vergelijking op van de lijn door $A(1,2)$ en $B(2,5)$.

- f Stel een vergelijking op van de lijn door $A(3,6)$ en $B(4,1)$.

Opgave 4

Bekijk de rechte lijnen in de grafiek hiernaast. Elke rechte lijn is de grafiek van een lineaire functie.

Geef de bijbehorende formules.



Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2** en werk met de applet.

- a Stel zelf de vergelijking op van de lijn door de punten $A(1,2)$ en $B(4,4)$ zonder het antwoord bij het voorbeeld te bekijken.



- b** Stel een vergelijking op van de lijn door $A(1,2)$ en $B(5,7)$.

- c** Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-2,6)$ en $B(1,0)$.

- d** Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-2,6)$ en $B(4,3)$.

- e** Stel een vergelijking op van de lijn door $A(-3, -3)$ en $B(4,1)$.

- f** Stel een vergelijking op van de lijn door $A(2,0)$ en $B(0,3)$.

Opgave 6

Bij een lineaire functie hoort bij $x = -3$ de uitkomst -40 en bij $x = 2$ de uitkomst 10 .
Stel de bijbehorende formule op.

**Opgave 7**

In het **Practicum** kun je telkens twee nieuwe lijnen maken door de vier gegeven punten te verplaatsen. Je ziet dan van beide lijnen de formule. Je kunt jezelf of elkaar oefenen door die na te rekenen. Je kunt ook lijnen met een gegeven formule maken door de punten op de juiste plek te zetten.

- a** Oefen met een medeleerling.

- b** Als je punten A recht onder punt $B(4,4)$ zet, is de lijn door beide punten evenwijdig aan de y -as. Welke formule hoort er bij zo'n lijn? Kun je dat verklaren?

- c** Bij welke lijnen horen formules van de vorm $y = b$? Kun je dat verklaren?

Opgave 8

Lijn k gaat door het punt $(2,24)$ en is evenwijdig met de lijn l . Bij lijn l hoort de formule $y = -x$.

Welke formule hoort bij lijn k ?

**Opgave 9**

Lijn k gaat door het punt $(-3,20)$ en is evenwijdig met de lijn l door de punten $(4,5)$ en $(12,15)$.

Welke formule hoort bij lijn k ?

Verwerken**Opgave 10**

De **Chinese munteenheid** is de yuan. Je weet wel dat er iets meer dan acht yuan in een euro gaan, maar de precieze koers schommelt nogal. Bovendien rekent een bank in China als je euro's inwisselt voor yuan waarschijnlijk nog bepaalde omrekenkosten. Op zekere dag betaal je in Beijing voor 100 yuan € 85,00 en later betaal je voor 50 yuan € 43,75. Ga er van uit dat de wisselkoers niet is veranderd intussen.

- a** Hoeveel euro kost elke yuan?

- b** Hoeveel bankkosten betaal je elke keer als je yuan koopt?

Het bedrag E in euro dat je betaalt voor Y yuan kun je met een lineaire formule berekenen. Ga uit van een constante wisselkoers.

- c** Stel die formule op.



- d** Hoeveel kosten je 250,00 yuan?

Opgave 11

Stel in de volgende gevallen een formule op bij de beschreven lijn.

- a** De lijn heeft een hellingsgetal van 4 en gaat door het punt $(0,6)$.

- b** De lijn gaat door de punten $A(0,31)$ en $B(2,15)$.

- c** De lijn gaat door de punten $A(6,2)$ en $B(12,-1)$.

- d** De lijn gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(7,0)$.

- e** De lijn gaat door het punt $A(0,10)$ en is evenwijdig met de lijn $y = 0,25x - 5$.

**Opgave 12**

Deze tabel laat zien hoe een kaars opbrandt. Op een aantal tijdstippen is de lengte van de kaars gemeten in halve cm nauwkeurig. Teken je hierbij een grafiek dan lijken de punten op een rechte lijn te liggen. Het lijkt er daarom op dat L een lineaire functie is van t . Maar hoe weet je dat zeker?

tijdstip t in uur	0	3	5	9
lengte L in cm	43	38,5	35,5	25,5

- a** Neem aan dat L een lineaire functie is van t en stel met behulp van de eerste twee gegevens uit de tabel een daarbij passende formule op.

- b** Ga na, dat ook de andere twee gegevens in de tabel aan de gevonden formule voldoen.

- c** Waarom kun je nu wel zeggen dat de gegevens in de tabel bij een lineaire functie horen, maar kun je nog steeds niet zeggen dat L een lineaire functie is van t ?

Opgave 13

In een binnenvaartschip wordt grind gestort. Bij een lading van 200 ton is de diepgang 2,25 m en bij een lading van 600 ton is de diepgang 3,75 m. Bij een diepgang van 5,25 m is het schip volgeladen.

De diepgang D van dit schip in m is een lineaire functie van het gewicht van de lading L in ton.

- a** Stel een daarbij passende formule op.



- b** Welke diepgang heeft het lege schip?

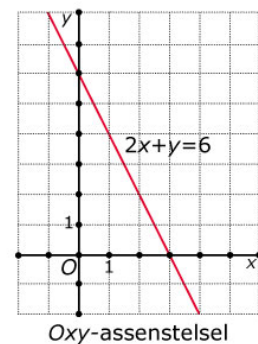
Het schip moet door een vaargeul met een diepte van 5 m. Voor de veiligheid moet er minstens 1 m water onder het schip overblijven.

- c** Hoeveel ton grind mag dit schip maximaal laden? Rond je antwoord af op gehele tonnen.

Toepassen

Een belangrijke toepassing van formules bij lijnen is de vlakke meetkunde. Je vat dan een lijn niet zozeer op als de grafiek van een lineaire functie, maar als meetkundig object. En je spreekt niet van een formule bij een lijn, maar van de **vergelijking van een lijn**. In dat geval moet je ook een gelijke schaalverdeling op beide coördinaatassen hebben!

Wat je in dit onderdeel hebt geleerd is het opstellen van een vergelijking van een lijn door twee gegeven punten. Daarmee kun je bijvoorbeeld nagaan of drie punten op een rechte lijn liggen, of lijnen evenwijdig zijn, of lijnen loodrecht op elkaar staan. Dit kom je later bij wiskunde B tegen.



Opgave 14: Drie punten op één lijn

Hierboven kun je lezen wat de vergelijking van een lijn is.

Je wilt onderzoeken of de drie punten $O(0,0)$, $A(30,12)$ en $B(50,19)$ op één lijn liggen.

- a** Stel een vergelijking op van de lijn door O en A .

- b** Onderzoek nu of B op deze lijn ligt.



- c** Onderzoek of de punten A , B en $C(90,33)$ op één lijn liggen.

Opgave 15: Lijnen door punten op de assen

Als van een lijn het snijpunt met de x -as en het snijpunt met de y -as bekend zijn, kun je snel een vergelijking opstellen.

Neem de lijn door $A(3,0)$ en $B(0,2)$.

- a** Stel een vergelijking op van de lijn door A en B .

- b** Laat zien dat deze vergelijking te schrijven is als $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

Neem nu aan dat de lijn door $A(a,0)$ en $B(0,b)$ met zowel a als b ongelijk aan 0.

- c** Laat zien dat de vergelijking van deze lijn te schrijven is als $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

- d** Van welke lijnen kun je niet een formule zoals die in c opstellen?

**Opgave 16: Evenwijdige en loodrechte lijnen**

Je weet dat lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt evenwijdig zijn. Dat betekent dat je kunt nagaan of een figuur een parallellogram is door hem in een assenstelsel te plaatsen en na te gaan of er bij de lijnen door de hoekpunten sprake is van gelijke richtingscoëfficiënten.

Neem bijvoorbeeld vierhoek $ABCD$ met $A(10,20)$, $B(16,23)$, $C(12,30)$ en $D(18,53)$.

- a** Laat met behulp van richtingscoëfficiënten zien dat de zijden AB en CD evenwijdig zijn.

- b** Om aan te tonen dat deze vierhoek een parallellogram is, moet je nu laten zien dat ook het andere paar zijden evenwijdig is. Laat zien hoe je dat doet.

Stel je nu eens voor dat je in een Oxy -assenstelsel een lijn hebt met richtingscoëfficiënt 3 die door $A(0,2)$ gaat.

- c** Welke vergelijking heeft deze lijn? Waarom gaat hij ook door het punt $B(1,5)$?

- d** Pas een draaiing toe met centrum O en draaihoek 90° . Teken de beeldpunten van A en B en teken de lijn door die beeldpunten.

- e** Welke richtingscoëfficiënt heeft de lijn door beide beeldpunten?

Stel je voor dat je in een Oxy -assenstelsel een lijn hebt met richtingscoëfficiënt p die door $A(0,q)$ gaat.

- f** Welke vergelijking heeft deze lijn? Waarom gaat hij ook door het punt $B(1,p+q)$?



- g** Pas een draaiing toe met centrum O en draaihoek 90° . Welke richtingscoëfficiënt heeft de nieuwe lijn?

Je hebt nu laten zien dat als een lijn l als richtingscoëfficiënt p heeft, de lijn die loodrecht staat op l als richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{p}$ heeft.

- h** Neem de lijn l met vergelijking $x + 2y = 6$. Stel een vergelijking op van de lijn door $(1,5)$ en loodrecht op l .

- i** Je kunt het opstellen van een vergelijking van een lijn loodrecht op een andere lijn oefenen met de applet in het **Practicum**. Doe dit samen met een medeleerling; geef elkaar opgaven op.

Practicum

Applet

Met deze applet kun je nieuwe lijnen maken door de punten te verplaatsen. Je kunt dan zelf de bij deze lijnen passende formules maken en deze vergelijken met de formules die de applet geeft.

1.4 Lineaire modellen

Verkennen

Opgave V1

In 2006 zijn Bob en Jeroen samen 22 jaar oud. In 2010 is Jeroen twee keer zo oud als Bob. Hoe oud zijn Bob en Jeroen in 2006?

Opgave V2

In 2006 zijn Bob en Jeroen samen 22 jaar oud. In 2010 is Jeroen twee keer zo oud als Bob. Je wilt hun leeftijden in 2006 weten. Hier zie je hoe je dit kunt aanpakken met behulp van lineaire verbanden.

- a** Laat x de leeftijd van Bob in 2006 zijn en y die van Jeroen in 2006. Welke formule kun je dan maken?

- b** Bedenk welke leeftijden Bob en Jeroen in 2010 hebben. Maak ook een formule voor de situatie in 2010.

- c** Beide formules kun je herleiden tot een vorm waarin y een functie van x is. Laat dat zien en teken vervolgens de bijbehorende grafieken in één assenstelsel.

- d** Hoe kun je nu hun leeftijden in 2006 bepalen?



- e** Vergelijk jouw oplossing bij de voorgaande opgave (als je die hebt gevonden) met de aanpak in deze opgave. Beschrijf voor- en nadelen van beide manieren van werken.

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je het snijpunt berekent van de grafieken bij twee lineaire formules.

- a** Bereken zelf het snijpunt van $x + y = 22$ en $y + 4 = 2(x + 4)$.

- b** Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules $x + y = 12$ en $y - x = 13$.

- c** Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules $y = 6x - 1$ en $y = 3x + 3$.

- d** Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules $y = 2x$ en $y = 3$.

- e** Bereken het snijpunt van de lijn bij de formule $2x + 5y = 10$ en de x -as.

**Opgave 2**

Je wilt het volgende probleem oplossen.

Boer Brandwijk koopt kippen en geiten. 50 dieren kosten hem € 1000. Een kip kost € 1 en een geit kost € 51. Hoeveel kippen en hoeveel geiten koopt hij?

- a** Probeer het probleem op te lossen.

Je kunt dit probleem oplossen door een lineair model op te stellen. Noem het aantal kippen x en het aantal geiten y .

- b** Welke twee lineaire formules kun je opstellen?

- c** Los het probleem verder op.

Je hoeft bij het oplossen van dit probleem niet per sé twee variabelen in te voeren. Eigenlijk is één variabele wel genoeg. En misschien heb je bij a het probleem wel zonder variabelen in te voeren opgelost, zoveel mogelijkheden zijn er nu ook weer niet...

- d** Noem het aantal kippen dat boer Brandwijk koopt x en probeer het probleem met één vergelijking op te lossen.

**Opgave 3**

In de **Theorie** kun je nalezen hoe je het snijpunt van de grafieken van twee lineaire formules berekent. Ook wordt besproken wat het nulpunt van een lineaire functie is en hoe je dit berekent.

- a** Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe het snijpunt van twee lineaire functies wordt berekend. Voer zelf de complete berekening uit en ga na, dat je hetzelfde krijgt.

- b** Bereken het snijpunt van de lijn l door $(0,5)$ en $(6,2)$ en de lijn k met bijbehorende formule $2x - 5y = 10$.

- c** Bereken het snijpunt van de lijn l door $(0,0)$ en $(2,1)$ en de lijn m door $(0,4)$ en $(4,0)$.

Opgave 4

Twee kaarsen branden gelijkmatig op, hun lengte L in cm is een lineaire functie van de brandtijd t in uren. Op $t = 0$ heeft kaars I een lengte van 35 cm en kaars II een lengte van 42 cm. 8 uur later zijn beide kaarsen nog 20 cm lang.

Hoeveel tijdsverschil zit er tussen de tijdstippen waarop deze kaarsen zijn opgebrand? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

**Opgave 5**

In **Voorbeeld 2** zie je hoe iemand een lineair model opstelt bij de vraag wat voordeliger is, rijden op benzine of elektrisch rijden.

- a** Laat zien hoe je uit zijn aannames de formule voor de maandelijkse kosten van de benzine-auto kunt afleiden.

- b** Doe hetzelfde voor de jaarlijkse kosten van de elektrische auto.

- c** Bereken bij welk aantal jaarlijks gereden km de kosten voor de benzineauto even hoog zijn als voor de elektrische auto. Laat zien dat het antwoord overeenkomt met dat in het voorbeeld.

Opgave 6

Als een ondernemer een nieuw product op de markt brengt, dan maakt hij kosten. Die kosten kun je vaak grofweg in twee categorieën verdelen:

- vaste kosten voor het ontwikkelen van het product en het opzetten van een productielijn en een magazijn;
- variabele kosten die afhangen van het aantal van die producten dat hij maakt, bijvoorbeeld materiaalkosten, loonkosten, en dergelijke.

Stel je voor dat een bedrijf een nieuwe lamp op de markt wil brengen. De vaste kosten zijn becijferd op € 350.000. De kosten per geproduceerde lamp bedragen € 6,50. Het bedrijf gaat deze lampen verkopen voor € 11,50 per stuk.

- a** Noem het aantal verkochte lampen q . Welke formule kun je dan opstellen voor de totale kosten TK ?



- b** Welke formule kun je opstellen voor de totale opbrengst TO ?

- c** Bij beide formules horen rechte lijnen. Het snijpunt van deze twee lijnen noemen economen wel het 'break-even point'. Bereken dit punt. Waarom heeft het die naam?

Opgave 7

Voor een muziekuitvoering zijn 300 kaartjes verkocht. Kinderen betalen € 2,00 en volwassenen € 3,00. De totale inkomsten zijn in totaal € 787,00.

- a** Noem het aantal kinderen k en het aantal volwassenen v . Welke twee lineaire formules kun je dan afleiden?

- b** Schrijf deze formules zo, dat k een functie is van v .

- c** Bij beide lineaire functies horen rechte lijnen. Bereken het snijpunt van deze twee lijnen.

- d** Hoeveel kaartjes van elke soort zijn er verkocht?



Verwerken

Opgave 8

Gegeven zijn de lineaire functies $y_1 = \frac{1}{4}x$ en $y_2 = 2x + 5$.

- a** Teken de grafieken van beide functies in één figuur en geef daarin het snijpunt en alle nulpunten aan.

- b** Bereken het exacte snijpunt van beide grafieken.

Opgave 9

De lijn k gaat door $(5,0)$ en $(1,1)$. De lijn l gaat door $(0,5)$ en $(3,0)$.

- a** Stel bij deze lijnen passende lineaire formules op.

- b** Bereken het exacte snijpunt van beide lijnen.

**Opgave 10**

Een bedrijf brengt een nieuwe keukenmachine op de markt. Deze keukenmachine gaat € 124,50 kosten. Om het apparaat te kunnen produceren heeft het bedrijf kosten gemaakt. Het ontwikkelen van het apparaat en het inrichten van een productielijn hebben € 310.000,00 gekost. Verder kost elk apparaat het bedrijf aan materiaal en loonkosten € 82,00.

- a** Stel een formule op voor de totale kosten TK voor de productie van x van die keukenmachines.

- b** Stel ook een formule op voor de totale opbrengst TO van de verkoop van x van die keukenmachines.

- c** Hoeveel keukenmachines moet het bedrijf minstens verkopen om winst te kunnen maken?

Opgave 11

Een vrachtauto weegt volgeladen met $6,5 \text{ m}^3$ zand 14,5 ton. Nadat de chauffeur $2,5 \text{ m}^3$ zand heeft bezorgd, weegt de vrachtauto met zand nog 10,75 ton.

Hoeveel weegt de lege vrachtauto?

**Opgave 12**

De kantinebaas van een school koopt 500 pakken koeken. Hij neemt twee soorten: gevulde koeken van € 3,00 per pak en spritsen van € 2,00 per pak. Hij weet niet meer hoeveel pakken van elke soort hij heeft besteld, maar in zijn boekhouding kan hij zien dat de totale kosten € 1180,00 waren.

- a** Noem het aantal pakken spritsen x en het aantal pakken gevulde koeken y . Welke twee formules kun je dan afleiden?

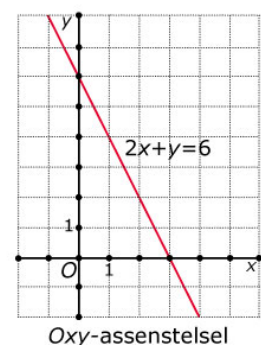
- b** Schrijf beide formules in de vorm $y = \dots$

- c** Bereken nu met behulp van de twee gevonden formules hoeveel pakken van elke soort de kantinebaas heeft ingekocht.

Toepassen

Een belangrijke toepassing van formules bij lijnen is de vlakke meetkunde. Je vat dan een lijn niet zozeer op als de grafiek van een lineaire functie, maar als meetkundig object. En je spreekt niet van een formule bij een lijn, maar van de **vergelijking van een lijn**. In dat geval moet je ook een gelijke schaalverdeling op beide coördinaatassen hebben!

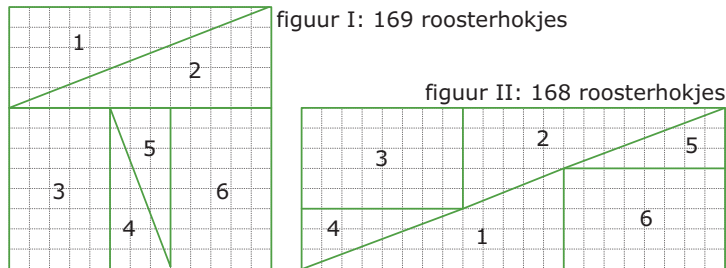
Wat je in dit onderdeel hebt geleerd is het berekenen van snijpunten van lijnen. En je kunt al vergelijkingen van lijnen opstellen. Daarmee kun je bijvoorbeeld nagaan of lijnen door hetzelfde punt gaan, of punten op dezelfde lijn liggen, of lijnen evenwijdig zijn of loodrecht op elkaar staan.





Opgave 13: Ontbrekend roosterhokje

Hier zie je een klassieke puzzel waarbij kennis van lijnen en hun hellingsgetallen handig kan zijn. Bekijk de figuren I en II. Ze lijken de zijn samengesteld uit dezelfde vier rechthoekige driehoeken en twee rechthoeken. Toch is de oppervlakte van de figuur I gelijk aan 169 en die van figuur II gelijk aan 168. Hoe kan dat?



- a** Controleer eerst dat de beide gegeven oppervlaktes inderdaad kloppen.

- b** En, weet je waar de fout zit?

Opgave 14: Door één punt?

Onderzoek of deze drie lijnen door één punt gaan:

- Lijn k door $(0,0)$ en $(5,3)$.
- Lijn l door $(0,6)$ en $(11,12)$.
- Lijn m door $(-7,-6)$ en $(6,2)$.

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Met lineaire verbanden heb je al leren werken. In dit onderwerp is die kennis herhaald en uitgebreid. Het begrip lineaire functie is ingevoerd en je hebt geleerd hoe je een formule moet maken bij een lineaire functie als twee punten van de grafiek zijn gegeven. Ook het werken met (lineaire) vergelijkingen om snijpunten en nulpunten te berekenen is voorbij gekomen.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Lineaire verbanden** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3 en 4 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- ▶ recht evenredig — evenredigheidsconstante — recht evenredig verband;
- ▶ lineaire functie — richtingscoëfficiënt;
- ▶ evenwijdige lijnen — vergelijking van een lijn;
- ▶ lineair model — snijpunten en nulpunten van lineaire functies.

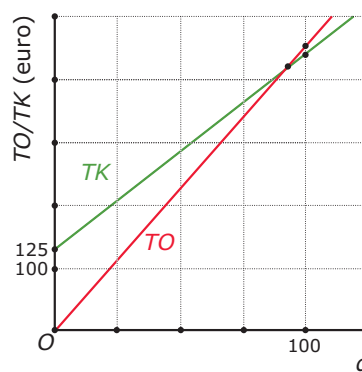
Activiteiten

- ▶ een recht evenredig verband en de evenredigheidsconstante herkennen en er grafieken bij tekenen;
- ▶ een lineaire functie en de richtingscoëfficiënt herkennen en er grafieken bij tekenen;
- ▶ een formule opstellen bij een lijn door twee gegeven punten;
- ▶ snijpunten en nulpunten bij grafieken van lineaire functies berekenen en interpreteren.

Opgave 1

Je ziet hier grafieken van de totale opbrengst TO en van de totale kosten TK (voor inkoop, opslag en administratie) bij de verkoop van q usb-sticks. De grafiek van TO gaat door het punt $(100, 450)$ en de grafiek van TK gaat door het punt $(100, 440)$.

- a** Welke van de twee variabelen TO of TK is recht evenredig met het aantal verkochte usb-sticks? Waarom?





- b** Hoeveel bedraagt de evenredigheidsconstante? Welke formule past bij het recht evenredige verband?

- c** Als twee variabelen recht evenredig zijn, dan betekent een verdubbeling van een waarde van de éne ook een verdubbeling van de waarde van de andere. Laat met een getallenvoorbeeld zien dat dit hier ook opgaat.

Opgave 2

Bekijk de grafieken van de totale opbrengst TO en van de totale kosten TK (voor inkoop, opslag en administratie) bij de verkoop van q usb-sticks uit **Opgave 1** nog eens. De grafiek van TO gaat door het punt $(100, 450)$ en de grafiek van TK gaat door het punt $(100, 440)$.

- a** Voor de totale kosten geldt $TK = 3,15q + 125$. Ga na, dat deze formule past bij de gegevens.

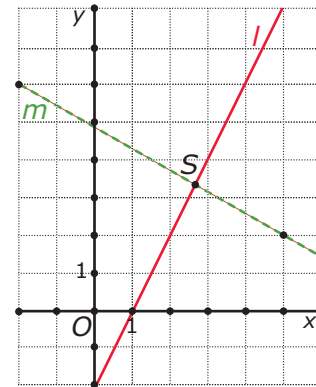
- b** Welk getal is de richtingscoëfficiënt van de getekende grafiek?

- c** Welke betekenis heeft de richtingscoëfficiënt voor de lineaire grafiek? En welke betekenis heeft dit getal hier voor de beschreven situatie?

**Opgave 3**

Je ziet hier twee rechte lijnen. Lijn l is de grafiek van de lineaire functie $y = 2x - 2$.

- a** Van lijn m zijn twee roosterpunten gegeven. Van welke lineaire functie is deze lijn de grafiek?



- b** Stel een formule op voor de lijn die evenwijdig loopt met l en door het punt $(5, 2)$ gaat.

Opgave 4

Je ziet in de figuur bij **Opgave 3** twee rechte lijnen. Lijn l is de grafiek van de lineaire functie $y = 2x - 2$. En van lijn m heb je zelf een bijpassende formule opgesteld.

- a** Bereken de exacte coördinaten van het snijpunt van beide lijnen.

- b** Bereken het exacte nulpunt van de grafiek m .



Opgave 5

In De GroenWinkel staat een klant met een probleem. Hij wil graag een heg zetten met afwisselend laurieren en coniferen. De heg moet beginnen en eindigen met een laurier. Laurieren kosten € 4,50 en coniferen € 5,50. Het budget dat hij tot zijn beschikking heeft bedraagt € 200. Hoeveel exemplaren kan hij maximaal kopen van elke soort?

- a** Noem het aantal laurieren l en het aantal coniferen c . Welke twee formules kun je bij dit probleem opstellen?

- b** Bereken de waarden voor l en c die aan beide vergelijkingen voldoen.

- c** Hoeveel planten van elke soort zal de klant kopen?

Toepassen

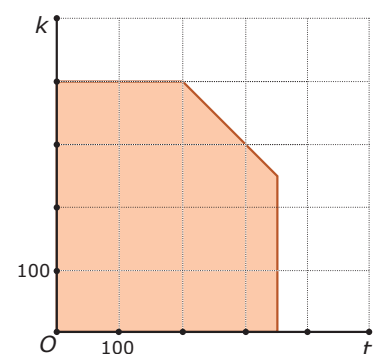
Een belangrijke toepassing van lineaire verbanden is **lineair programmeren**. Om duidelijk te maken wat je je hierbij moet voorstellen een voorbeeld.

Stel je voor dat in een eenvoudige strandtent alleen koffie en thee als warme drankjes worden geserveerd. Elke dag neemt de eigenaar een voorraad koffie mee die geschikt is voor 400 bekers koffie en een voorraad theebuiltjes genoeg voor 350 bekers thee. Zowel de koffie als de thee wordt in dezelfde bekers opgediend, er zijn 600 van die bekers per dag beschikbaar.

Verder kost een beker koffie € 2,50 en een beker thee € 2,00.

Als je het aantal bekers koffie k noemt en het aantal bekers thee t dan betekenen de getallen over de aantallen bekers dat je alleen te maken hebt met de roosterpunten in het gekleurde gebied in de figuur hiernaast.

Bij welke aantallen verkochte bekers koffie en thee heeft de eigenaar van deze strandtent de meeste inkomsten?



**Opgave 6: Koffie en thee**

Lees hierboven de gegevens over de koffie- en theeverkoop in een eenvoudige strandtent. Bekijk welke variabelen er zijn ingevoerd. Je gaat nu eerst na hoe het gekleurde gebied ontstaat.

- a** Uit welk deel van de tekst volgt $k \leq 400$? Welke punten in het assenstelsel voldoen hier aan?

- b** Waarom gelden ook de ongelijkheden $t \leq 350$ en $k + t \leq 600$?

- c** Leg uit dat het gekleurde gebied aan die drie voorwaarden voldoet.

- d** Neem een willekeurig punt in het gekleurde gebied en laat zien dat het aan die drie voorwaarden voldoet.



Neem aan dat er op een bepaalde dag voor € 500,- aan koffie en thee is verkocht.

- e** Welke lineaire formule hoort daar bij? Teken zelf het gebied en teken daarin de grafiek bij deze formule.

- f** Teken ook de lijnen die horen bij een totale verkoop aan koffie en thee van € 750,- en van € 900,-.

- g** Kan de totale opbrengst aan koffie en thee op één dag nog hoger worden onder deze voorwaarden? Hoe hoog maximaal?

**Opgave 7: Toneelvoorstelling (1)**

In een zaal waar maximaal 1500 zitplaatsen zijn wordt een stuk opgevoerd door de plaatselijke toneelvereniging. Er zijn kaartjes voor kinderen en voor volwassenen, kinderen betalen € 2,50 en volwassenen € 6,00. Er zijn 1000 kaarten voor volwassenen en 1000 kinderkaarten gedrukt.

Noem het aantal kinderen dat de voorstelling bezoekt k en het aantal volwassenen v .

- a** Waaruit volgt dat $k \leq 1000$ en $v \leq 1000$? Teken het bijbehorende gebied in het assenstelsel.

- b** Welke ongelijkheid geldt er verder nog voor k en v ?

- c** Geef het gebied aan dat aan alle drie de voorwaarden voldoet.

- d** Neem een willekeurig punt in het gekleurde gebied en laat zien dat het aan die drie voorwaarden voldoet.



Neem aan dat er € 3600,- aan inkomsten zijn van de kaartverkoop.

- e** Welke lineaire formule hoort daar bij? Teken in je figuur de grafiek bij deze formule.

- f** Teken ook de lijn die hoort bij € 3600,- aan inkomsten van de kaartverkoop.

- g** Hoeveel inkomsten zijn er maximaal mogelijk?

Opgave 8: Toneelvoorstelling (2)

Bekijk de voorgaande opgave nog eens. Om de maximale opbrengst van de kaartverkoop te berekenen is een lineair model opstellen wat overdreven. Maar het wordt wat anders als bijvoorbeeld wordt besloten dat bij deze toneelvoorstelling (die vooral voor kinderen is bedoeld) minstens anderhalf keer zoveel kinderen als volwassenen moeten zijn.

- a** Waarom kon je in de vorige opgave wel meteen zien wat de maximale opbrengst zou zijn?

- b** Welke ongelijkheid geldt er vanwege deze extra voorwaarde?



- c** Geef het gebied aan dat aan alle vier de voorwaarden (dus ook aan deze extra voorwaarde) voldoet.

- d** Hoeveel bedraagt met deze extra voorwaarde de maximale opbrengst?



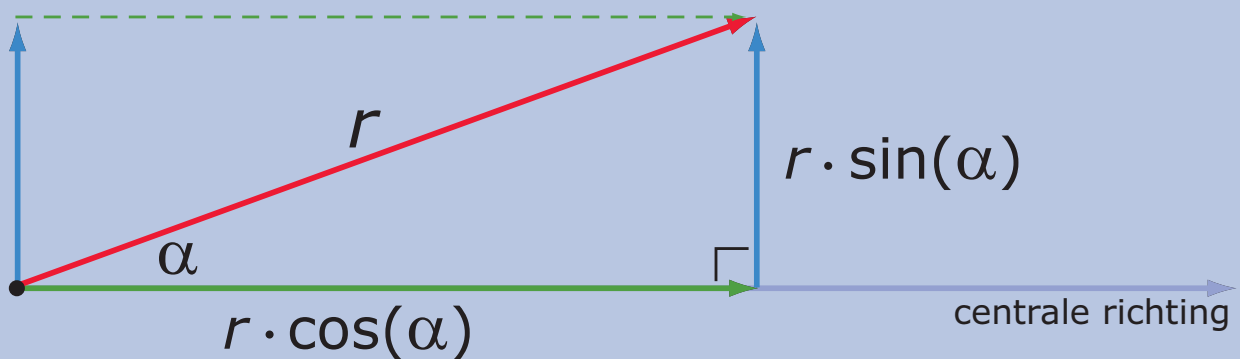
Begrippen

- ▶ vector — richtingshoek, draaihoek — componenten van een vector;
- ▶ sinus — cosinus — eenheidsvector — richtingshoek;
- ▶ hoeken berekenen met sinus en cosinus;
- ▶ tangens — hellingshoek;
- ▶ goniometrische verhoudingen — formules voor sinus, cosinus en tangens.

Activiteiten

- ▶ een vector ontbinden in een zijwaartse en een centrale component;
- ▶ sinus en cosinus gebruiken om componenten van vectoren te berekenen;
- ▶ hoeken berekenen met behulp van sinus en cosinus;
- ▶ berekeningen met helling, tangens en hellingshoeken uitvoeren;
- ▶ zijden en hoeken berekenen in rechthoekige driehoeken en dit toepassen meetkundige situaties.

Vectoren ontleden



Domein

Meetkunde

Hoofdstuk

Goniometrie

Inhoud

2.1	Vectoren	58
2.2	Sinus en cosinus	70
2.3	Hoeken berekenen	80
2.4	Helling en tangens	89
2.5	Rekenen in driehoeken	99
2.6	Totaalbeeld	109

2

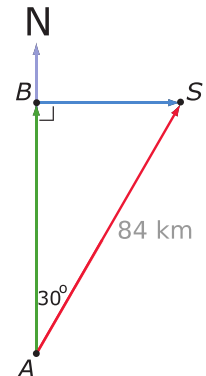
2.1 Vectoren

Verkennen

Opgave V1

Een schip vaart op een koers van 30° met het noorden en heeft een snelheid van 16,8 km/uur en is gestart in punt A . Na 5 uur is het aangekomen in punt S . Zie de figuur hiernaast.

Hoeveel kilometer noordelijker en oostelijker van punt A is het schip na vijf uur? Kun je dit met een berekening oplossen?



Opgave V2

Een vliegtuig stijgt op onder een hoek van 20° .

Hoe hoog vliegt dit vliegtuig als het 1000 meter heeft afgelegd?

Theorie

Opgave 1

Bekijk [Uitleg 1](#).

Door het maken van nette tekeningen op schaal kun je in de volgende gevallen de twee componenten van vector $\overrightarrow{AS}$ vinden. Bepaal ze in gehele km nauwkeurig.

- a** Het schip heeft 3,75 uur gevaren met een koershoek van 45° .



- b** Het schip heeft 3,75 uur gevaren met een koershoek van 90° .

- c** Het schip heeft 3,75 uur gevaren met een koershoek van 110° .

- d** Het schip heeft 3,75 uur gevaren met een koershoek van 150° .

Opgave 2

Bekijk **Uitleg 1**. Je kunt ook koershoeken maken die groter zijn dan 180° . Neem bijvoorbeeld een koershoek van 190° en een vaartijd van 3,75 uur.

- a** Bepaal de componenten van de vector $\overrightarrow{AS}$.

- b** Bij welke hoeken zijn de componenten in zuidelijke richting en in westelijke richting?

- c** Met welke componenten heb je te maken bij een koershoek van meer dan 270° , maar minder dan 360° ?

**Opgave 3**

Bekijk in **Uitleg 2** de fietser die met de wind rekening moet houden.

- a** Waarom zijn voor de fietser vooral de meewindcomponent of de tegenwindcomponent van de windvector van belang? Welk effect heeft de zijwindcomponent?

- b** Hoeveel bedraagt de meewindcomponent bij een windvector van 20 km/h die een hoek van 30° met de fietsrichting maakt?

- c** Hoeveel bedraagt de meewindcomponent bij een windvector van 20 km/h die een hoek van 80° met de fietsrichting maakt?

- d** Hoeveel bedraagt de meewindcomponent bij een windvector van 20 km/h die een hoek van 110° met de fietsrichting maakt?

- e** Bij welke hoeken is de meewindcomponent een negatief getal (omdat er eigenlijk sprake is van tegenwind)?

- f** Kan de zijwindcomponent ook negatief zijn? Welke hoeken horen daar dan bij?

**Opgave 4**

Bekijk **Uitleg 2**. De windvector kan wel groter of kleiner zijn dan 20 km/h.

- a** Hoeveel bedraagt de meewindcomponent bij een windvector van 20 km/h die een hoek van 30° met de fietsrichting maakt? En hoe bereken je daarmee de meewindcomponent bij dezelfde hoek, maar met een windvector van 50 km/h?

- b** Hoeveel bedraagt de meewindcomponent bij een windvector van 50 km/h die een hoek van 110° met de fietsrichting maakt?

- c** Hoeveel bedragen de meewindcomponent en de zijwindcomponent bij een windvector van 150 km/h die een hoek van 195° met de fietsrichting maakt?

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet waarmee je de componenten van een eenheidsvector bepaalt.

- a** Teken de situatie van het opstijgen van het vliegtuig op schaal. Geef de centrale component en de zijwaartse component van de vlucht duidelijk in je figuur aan.



- b** Ga door meten in je figuur na, dat de hoogte van het vliegtuig inderdaad ongeveer 342 m is. (Teken daarvoor de vluchtvector op schaal!)

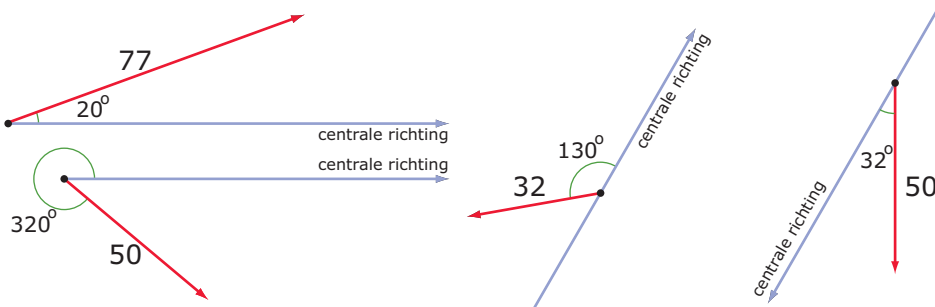
- c** Hoe hoog vliegt het toestel na 2000 m?

- d** Hoe ver is het vliegtuig na 2000 m hemelsbreed van het startpunt van de vlucht verwijderd?

Opgave 6

Werk met de applet waarmee je de componenten van een eenheidsvector bepaalt in **Voorbeeld 1**.

Hieronder en op het **werkblad** zie je vier vectoren getekend.

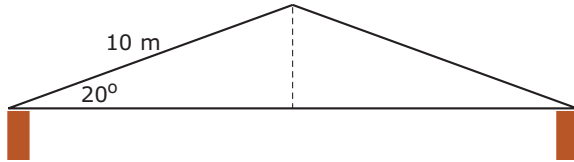


Teken de twee componenten waarin je de vectoren kunt ontbinden en bereken ze met behulp van de applet.

**Opgave 7**

Werk met de applet waarmee je de componenten van een eenheidsvector bepaalt in **Voorbeeld 1**.

Hier zie je het vooraanzicht van het symmetrische dak van een loods.



Hoe breed is deze loods?

Opgave 8

Een ladder van 5 m lengte staat tegen een verticale muur. De hoek tussen de ladder en de muur is 25° .

Hoe ver staat de voet van de ladder van de muur af?

**Opgave 9**

Bekijk **Voorbeeld 2** en werk met de applet waarmee je de componenten van een eenheidsvector bepaalt.

- a** Teken de situatie van het dalen van het vliegtuig op schaal.

- b** Ga door meten in je figuur na, dat het vliegtuig inderdaad ongeveer 1096 m lager vliegt.

- c** Hoe hoog vliegt het toestel na 6000 m dalen?

Opgave 10

Tijdens een lange rit langs een kaarsrechte polderweg heb je de wind schuin tegen. De windvector maakt een hoek van 160° met je fietsrichting en de wind blaast met een snelheid van 35 km/h.

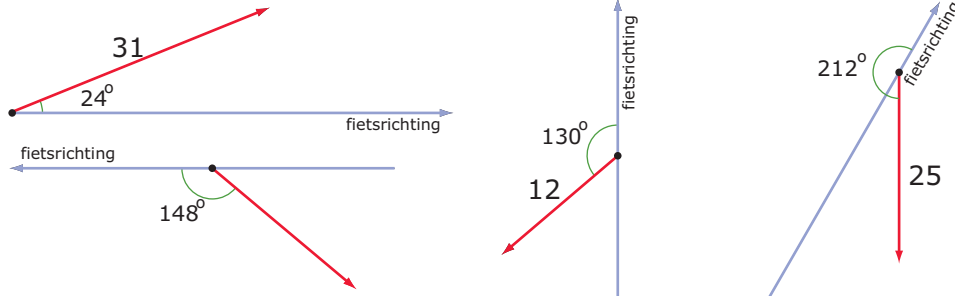
Hoeveel bedraagt de tegenwindcomponent die je voelt?



Verwerken

Opgave 11

Hieronder en op het [werkblad](#) zie je vier windvectoren en de fietsrichting getekend.



Teken de twee componenten waarin je deze vectoren kunt ontbinden en bereken ze met behulp van de applet.

Opgave 12

Een roltrap in een warenhuis is 8 m lang. Hij maakt een hoek van 30° met de vloer.

Hoe groot is de afstand tussen de twee verdiepingen?

**Opgave 13**

Een weg loop omlaag onder een hoek van 10° met een horizontaal vlak. De lengte van de weg is 300 meter.

Hoeveel daal je als je over deze weg naar beneden loopt?

Opgave 14

Een wipwap van 3 m lengte staat schuin omhoog onder een hoek van 22° met de begane grond. Het laagste punt van de wipwap bevindt zich 50 cm boven de grond.

Hoever zit het hoogste punt boven de grond?

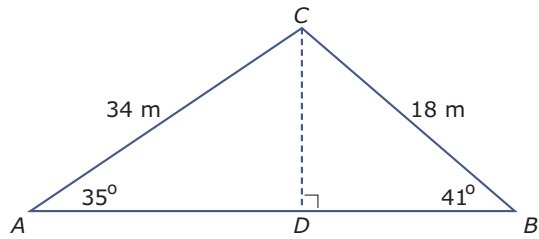
Opgave 15

De touwen van een schommel zijn 4 m lang. Het zitje zit 60 cm boven de grond als de touwen verticaal hangen.

Hoever is dat zitje boven de grond als de touwen een hoek van 50° met die verticale stand maken?

**Opgave 16**

Bekijk de driehoek hieronder.



Bereken de lengte van AB in dm nauwkeurig.



Toepassen

Hieronder vind je twee toepassingen van het werken met richtingen, dus hoeken, en lengtes. Gebruik de applet uit **Practicum** om de componenten van een eenheidsvector bij een gegeven hoek te bepalen.

Opgave 17: Vissersboot 'Mazen'

De vissersboot 'Mazen' vaart evenwijdig aan de kust met een snelheid van 10 knopen (1 knoop = 1852 meter per uur). Op een bepaald moment varen ze ter hoogte van de vuurtoren '**Van Speijk**' in Egmond aan Zee die ze dan onder een hoek van 90° met hun vaarrichting zien. Na 10 minuten varen zien ze deze vuurtoren onder een hoek van 96° . De vuurtoren staat aan de kustlijn.

Hoe ver vaart vissersboot 'Mazen' uit de kust?

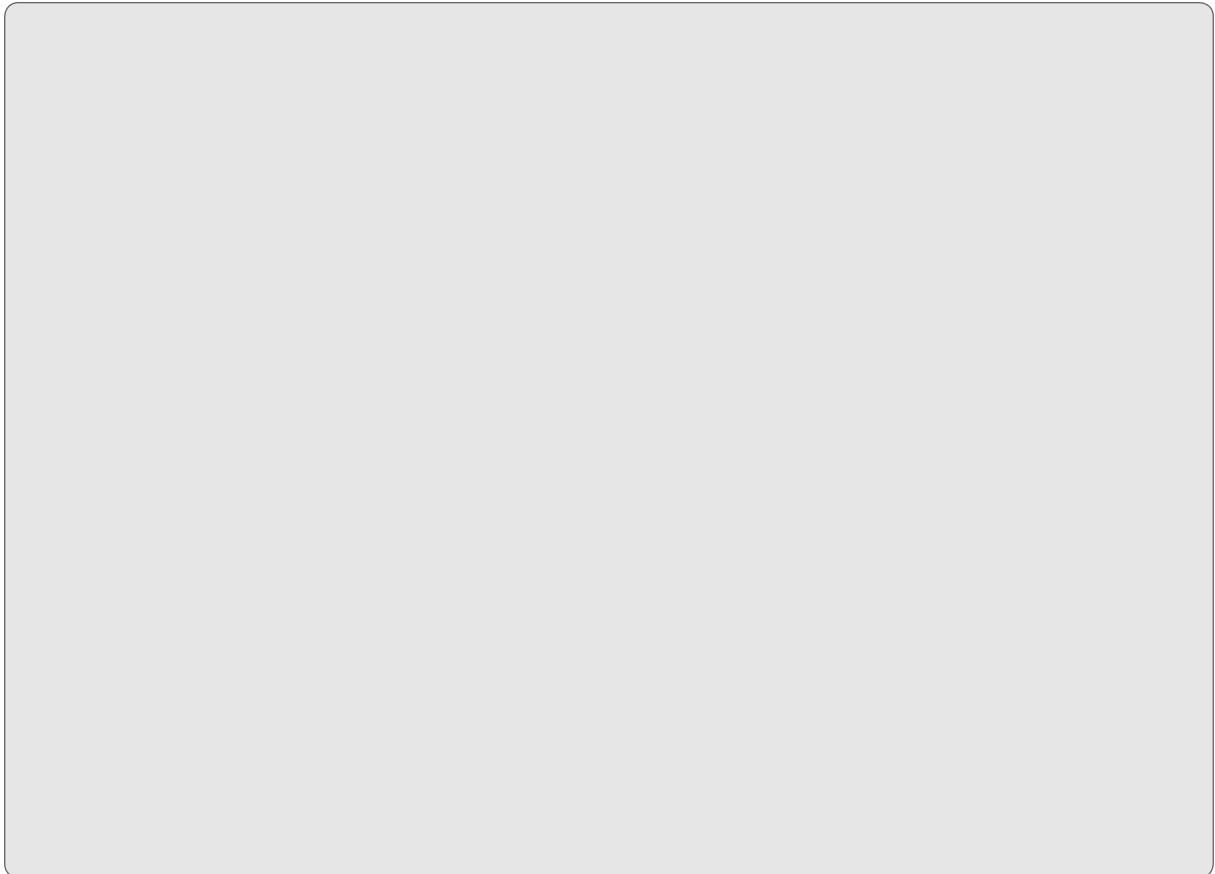




Opgave 18: Tunnel tussen Amsterdam en Londen

Ga er van uit dat de aarde een zuivere bol is met een straal van 6371 kilometer. Als je een rechte tunnel zou graven van Amsterdam naar Londen, dan zou deze zich halverwege het verst onder het aardoppervlak bevinden.

Als de afstand van beginpunt tot eindpunt over de grote cirkel op het aardoppervlak 420 kilometer is, wat is dan het diepste punt van de tunnel?



Practicum

De componenten van een eenheidsvector bepalen: stel de juiste hoek in en let zelf op de mintekens voor de componenten!

Applet

2.2 Sinus en cosinus

Verkennen

Opgave V1

Een vliegtuig stijgt op onder een hoek van 21° met de begane grond.

- a** Hoe hoog vliegt dit vliegtuig als het 3000 meter heeft afgelegd? (Gebruik de applet in [Practicum](#).)



De hoek die de vliegrichting met de begane grond maakt, is afgerond op gehele graden. Stel je voor dat die hoek in één decimaal nauwkeurig kan worden ingesteld. De hoek van 21° kan dan variëren vanaf $20,5^\circ$ tot en met $21,4^\circ$.

- b** Hoeveel verschil in hoogte zit er dan na een vlucht van 3000 m met deze hoeken?

- c** Is dit hoogteverschil belangrijk, denk je?



Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

Een vliegtuig stijgt op onder een hoek van 21° met de begane grond.

De vraag: "Hoe hoog vliegt dit vliegtuig als het 3000 meter heeft afgelegd?" kun je beantwoorden met behulp van de sinus of cosinus van de gegeven hoek.

- a** Gebruik je de sinus of de cosinus van de gegeven hoek? Waarom?

- b** Bereken hoe hoog dit vliegtuig na 3000 m vliegt in dm nauwkeurig.

Opgave 2

Een schip heeft 15 km gevaren met een koershoek van 63° ten opzichte van het noorden. Een koershoek wordt met de wijzers van de klok mee uitgezet.

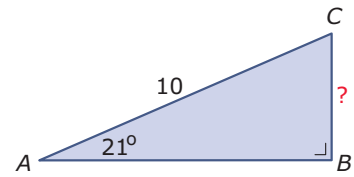
- a** Hoeveel km noordelijker en hoeveel km oostelijker is het schip dan gekomen?

Het schip vaart vervolgens 20 km met een koershoek van 150° .

- b** Hoeveel kilometer noordelijker en hoeveel kilometer oostelijker komt het schip gedurende die vaart?

**Opgave 3**

Je ziet hier een rechthoekige driehoek ABC waarvan de hypotenusa $AC = 10$ cm. Je wilt de lengte van BC berekenen.



- a** Vat AC op als vector $\overrightarrow{AC}$. Waarom ligt het dan voor de hand dat AB de centrale richting is?

- b** Is BC de centrale component of de zijwaartse component van vector $\overrightarrow{AC}$?

- c** Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

- d** Maak de lengte van AC 1,5 keer zo groot. Bereken weer de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig. Wordt die lengte ook 1,5 keer zo groot?

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet waarmee je de componenten van een vector $\overrightarrow{AC}$ kunt bekijken.

Deze vector heeft een grootte van 14 eenheden.

- a** Reken zelf de waarden voor de componenten na. Waarom wordt component $\overrightarrow{AB}$ met behulp van cosinus berekend bij deze gegeven hoek?



- b** Stel in $\alpha = 100^\circ$. Bereken opnieuw de componenten van vector $\overrightarrow{AC}$ in één decimaal nauwkeurig.

- c** Waarom is de centrale component bij b negatief?

- d** Bij welke hoeken zijn beide componenten negatief?

Opgave 5

Kies een centrale richting en teken een vector $\vec{v}$ die een hoek van 134° met die centrale richting maakt. Maak de vector 10 cm lang.

- a** Teken de centrale en de zijwaartse component van deze vector. Welke component is negatief?

- b** Bereken de centrale en de zijwaartse component in drie decimalen nauwkeurig.

- c** Als de lengte van de gegeven vector 2 keer zo groot wordt, geldt dit dan ook voor beide componenten? En waarom?

**Opgave 6**

Bekijk de berekeningen in **Voorbeeld 2**.

- a** Reken zelf de waarden voor de componenten na. Waarom wordt AB met behulp van cosinus berekend bij deze gegeven hoek?

Je kunt ook werken met CB als centrale richting, met vector $\overrightarrow{CA}$ en met $\angle C$.

- b** Bereken eerst $\angle C$. Bereken opnieuw de twee rechthoekszijden in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 7

Gegeven is een rechthoekige $\triangle KLM$ met $\angle K = 32^\circ$ en hypotenusa $KM = 21$ cm.

Bereken de lengtes van de twee rechthoekszijden in één decimaal nauwkeurig.

**Opgave 8**

Je staat aan de voet van een berghelling die 340 m onder een hoek van 60° steil omhoog loopt.

Hoe groot is het hoogteverschil tussen de top van de berghelling en de voet ervan?

Opgave 9

Bekijk de berekening in **Voorbeeld 3**.

- a** Reken de lengte van de hypotenus zelf na. Waarom wordt er met sinus gewerkt?

Je kunt ook werken met CB als centrale richting, met vector $\overrightarrow{CA}$ en met $\angle C$.

- b** Bereken eerst $\angle C$. Bereken opnieuw de hypotenusa in één decimaal nauwkeurig.

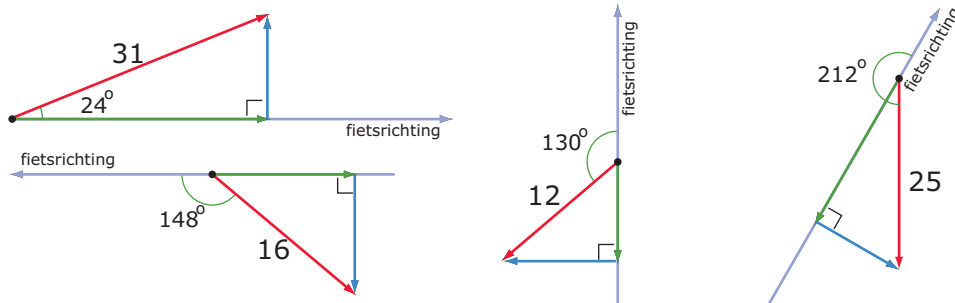
- c** Bereken de lengte van AB in één decimaal nauwkeurig.

**Opgave 10**

Gegeven is een rechthoekige $\triangle KLM$ met $\angle K = 32^\circ$ en rechthoekszijde $KL = 21$ cm. Bereken de lengtes van de twee andere zijden in één decimaal nauwkeurig.

Verwerken**Opgave 11**

Hieronder zie je vier windvectoren en de fietsrichting getekend. De componenten waarin je deze vectoren kunt ontbinden zijn ook getekend.



Bereken deze componenten met behulp van sinus en cosinus in één decimaal nauwkeurig.

**Opgave 12**

Gegeven is een rechthoekige $\triangle PQR$ met $\angle Q = 31^\circ$ en hypotenusa $QR = 12$ cm.

Bereken de lengtes van de twee andere zijden in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 13

Gegeven is een rechthoekige $\triangle PQR$ met $\angle R = 55^\circ$ en rechthoekszijde $QR = 8$ cm.

- a** Bereken de lengte van de hypotenusa in één decimaal nauwkeurig.

- b** Bereken de lengte van de andere rechthoekszijde in één decimaal nauwkeurig met behulp van de stelling van Pythagoras.

- c** Bereken de zijde bedoeld bij b nogmaals, maar nu met behulp van sinus of cosinus.

Opgave 14

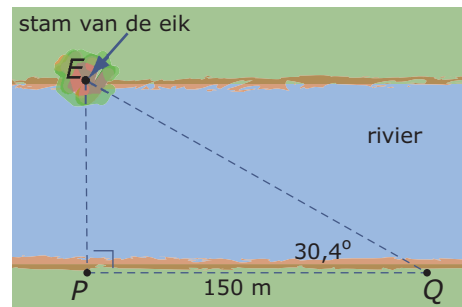
Een trein rijdt 200 m langs een berghelling omhoog. De hoek van de spoorbaan met een horizontaal vlak is hierbij 17° .

Bereken hoeveel de trein is gestegen gedurende deze rit.

**Opgave 15**

Om de breedte van een rivier te bepalen gebruikt Boris een grote eikenboom die op de tegenover hem liggende oever staat. Hij markeert een punt P recht tegenover de eik aan zijn kant van de oever en past dan 150 m langs de oever af tot punt Q . Dan meet hij zo nauwkeurig mogelijk $\angle PQE$. (Daarvoor bestaan speciale hoekmeters.) Hij vindt ongeveer $30,4^\circ$.

Bereken de breedte van de rivier in m nauwkeurig.

**Toepassen**

Stel je voor dat er een proefvlucht plaatsvindt van een onbemand vliegtuigje. Het stijgt op van een vliegbasis en vliegt 5 km lang onder een hoek van 40° ten opzichte van het Noorden. Op dat moment volgt een koerscorrectie en vliegt het vliegtuigje onder een hoek van 120° ten opzichte van het noorden. Na 3 km stort het vliegtuigje echter neer. Met een helikopter die vanaf dezelfde vliegbasis start, wordt het weer opgehaald.



Hoeveel km ten noorden en ten oosten van de vliegbasis is het onbemande vliegtuigje neergestort? Hoeveel km is de vlucht die de helikopter heeft afgelegd?

Opgave 16: Onbemand vliegtuigje

Bekijk de situatie die in **Toepassen** wordt beschreven.

- a** Maak een bijpassende tekening. Denk er om dat koershoeken altijd met de klok mee en ten opzichte van het Noorden worden gemeten.

- b** Bereken de positie van onbemande vliegtuigje na het neerstorten.



c Hoeveel km moet de reddingshelikopter afleggen?

Practicum

De componenten van een eenheidsvector bepalen: stel de juiste hoek in en let op het gebruik van mintekens!

Applet

2.3 Hoeken berekenen

Verkennen

Opgave V1

Een vliegtuig stijgt in een rechte lijn op van de begane grond. Als het 3000 meter heeft afgelegd, heeft het een hoogte bereikt van 1000 m boven de begane grond.

Onder welke hoek met de begane grond is het vliegtuig opgestegen?



Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** het verhaal van het opstijgende vliegtuig.

- a** Waarom wordt bij het berekenen van de hoek sinus gebruikt?

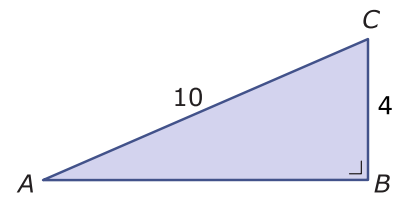
- b** Bereken de hoek door eerst met de stelling van Pythagoras de centrale component uit te rekenen en dan met cosinus te werken.



Opgave 2

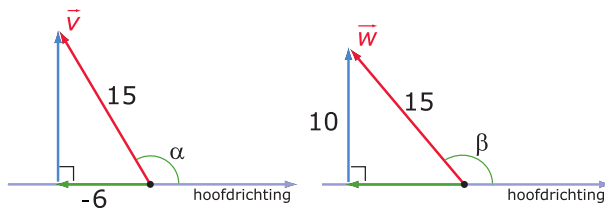
Je ziet hier $\triangle ABC$.

Bereken de grootte van $\angle A$. Doe dit een keer met behulp van sinus en een keer met behulp van cosinus.



Opgave 3

Je ziet hier twee vectoren waarvan de lengte van de centrale component of de zijwaartse component zijn gegeven.



- a** Waarom geldt voor hoek α dat $15 \cdot \cos(\alpha) = -6$? Bereken hieruit de grootte van deze hoek in graden nauwkeurig.

- b** Om hoek β te berekenen werk je met de zijwaartse component van vector $\vec{w}$. Laat zien hoe je te werk gaat.

**Opgave 4**

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je de grootte van een scherpe hoek van een rechthoekige driehoek kunt berekenen.

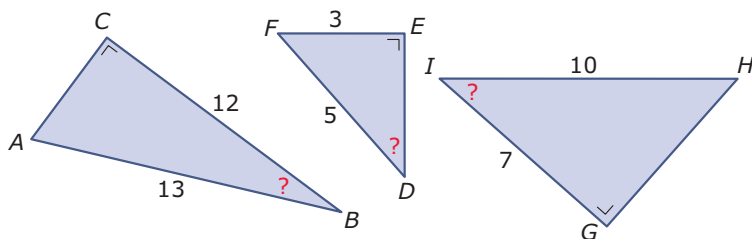
- a** Voer ook zelf de berekening van deze hoek uit. Gebruik je rekenmachine of de applet in het **Practicum**.

- b** Bereken eerst met de stelling van Pythagoras de lengte van zijde BC . Bereken daarna opnieuw de grootte van hoek C , maar nu met behulp van cosinus.

- c** Waarom hoef je nu de grootte van $\angle A$ niet meer met goniometrie te berekenen?

Opgave 5

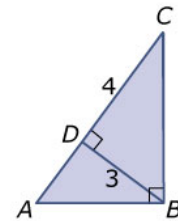
Bereken in deze driehoeken de grootte van de hoeken met het vraagteken in graden nauwkeurig.





Opgave 6

Bereken in deze driehoek de grootte van $\angle BAD$.



Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je de hoek kunt berekenen die een gespannen draad maakt met de grond.

- a** Voer ook zelf de berekening van deze hoek uit. Gebruik je rekenmachine of de applet in het **Practicum**.

- b** Je kunt ook de antennemast als hoofdrichting nemen. Dan bereken je eerst de hoek β die de draad met de antenne maakt. Ga na dat dit een waarde voor β oplevert die in overeenstemming is met de waarde van α die je eerder hebt gevonden.

- c** Waarom is voor het berekenen van de hoogte van de antennemast niet de waarde van α in graden nauwkeurig genomen, maar een nauwkeuriger waarde?

- d** Bereken de hoogte van de antennemast ook met behulp van de stelling van Pythagoras.

**Opgave 8**

Er wordt een nieuwe antennemast opgericht met een hoogte van 10 m. Deze antennemast wordt loodrecht gehouden door draden vanaf de top te spannen naar punten op de grond. Deze draden moeten een hoek van 50° met de begane grond maken.

Hoe lang worden deze draden? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

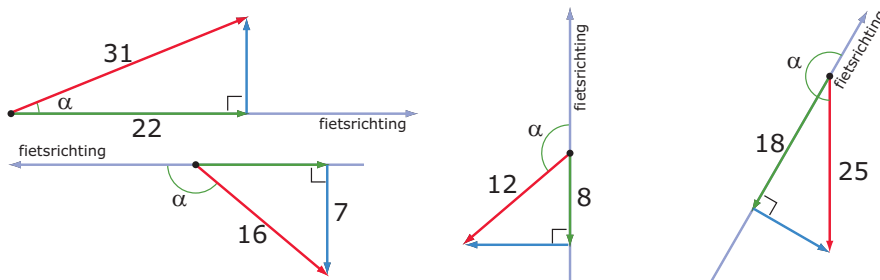
Opgave 9

Een vliegtuig ondervindt een windsnelheid van 60 km/uur schuin tegen. De snelheid van het vliegtuig neemt daardoor met 15 km/uur af.

Welke hoek maakt de windrichting met de vliegrichting?

Verwerken**Opgave 10**

Hieronder zie je vier windvectors en de fietsrichting getekend. De componenten waarin je deze vectoren kunt ontbinden zijn ook getekend. Van zowel de vectoren als sommige componenten is de lengte gegeven.



Bereken de hoek die de windvector met de fietsrichting maakt in graden nauwkeurig.

**Opgave 11**

Een trein rijdt 200 m langs een berghelling omhoog. Hij is dan 68 m gestegen.

Hoe groot is de hoek die het spoor met de horizontale richting maakt? Geef het antwoord in graden nauwkeurig.

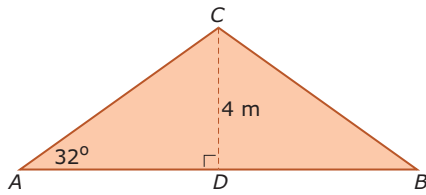
Opgave 12

Iemand bevindt zich in een oude mijngang 40 m lager dan de ingang. Hij loopt terug naar die ingang. De eerste 400 meter loopt hij schuin omhoog onder een hoek van 5° . Het is dan nog 200 meter terug naar de ingang.

Onder welke hoek loopt hij het laatste deel van de terugtocht schuin omhoog? Geef het antwoord in graden in één decimaal nauwkeurig.

**Opgave 13**

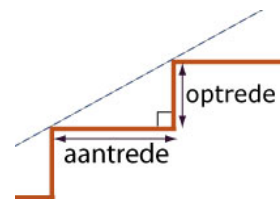
$\triangle ABC$ is het vooraanzicht van de bovenkant van een symmetrische gevel. De zijden AC en BC vormen de breedtes van de rechthoekige dakdelen.



Bereken de breedte van een dakdeel in cm nauwkeurig.

Opgave 14

Van een zogenaamde 'luie trap' is de optrede 15 cm en de aantrede 30 cm. Zie figuur. Tussen twee verdiepingen van een warenhuis zit een luie trap met 26 treden. De hoekpunten bij de rechte hoeken die aantrede en optrede met elkaar maken liggen op een rechte lijn die een hoek maakt met de vloeren van de verdiepingen.



Bereken die hoek in tienden van graden nauwkeurig.

Opgave 15

Van een gelijkbenige driehoek zijn de zijden 12, 12 en 10 cm. Bereken de hoeken van deze driehoek in graden nauwkeurig.



Toepassen

Je ziet hier de twee **tekendriehoeken** die je vroeger in veel wiskundelokalen aantrof.

De éne tekendriehoek heeft dezelfde vorm als je geodriehoek, dus hoeken van 45° , 45° en 90° .

De andere geodriehoek is de rechthoekige driehoek die de helft is van een gelijkzijdige driehoek. Deze heeft dus hoeken van 60° , 30° en 90° .



Opgave 16: Hoeken van 45 graden

Bekijk de twee tekendriehoeken die in **Toepassen** worden beschreven.

- a** Laat zien dat elke geodriehoek zijden van a , a en $a\sqrt{2}$ heeft.

- b** Bereken de exacte waarde van $\sin(45)$ en van $\cos(45)$.

Opgave 17: Hoeken van 30 graden en 60 graden

Bekijk de twee tekendriehoeken die in **Toepassen** worden beschreven.

- a** Laat zien dat de tekendriehoek die de helft van een gelijkzijdige driehoek is, zijden van a , $2a$ en $a\sqrt{3}$ heeft.



- b** Bereken de exacte waarde van $\sin(60)$ en van $\cos(60)$.

- c** Bereken de exacte waarde van $\sin(30)$ en van $\cos(30)$.

Practicum

Applet

De hoek bepalen als sinus of cosinus zijn gegeven: zoek de juiste hoek bij de gegeven sinus of cosinus ervan.

2.4 Helling en tangens

Verkennen

Opgave V1

Jan en Pim zijn het oneens over de hoogte van een nieuw flatgebouw in Nijmegen. Volgens Jan is de flat hoger dan de Dom van Utrecht, maar Pim denkt van niet. Volgens hem is het gebouw lager dan de 111 m van de Dom in Utrecht. Ze besluiten de hoogte van de flat te berekenen.

Hoe kunnen ze dat doen?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de berekening van de hoogte van het flatgebouw.

- a** Je kunt de berekening uitvoeren door alleen met cosinus en sinus (of de stelling van Pythagoras) te werken. Laat zien, hoe dat gaat.

- b** Voer nu zelf de berekening van de hoogte met behulp van de tangens van de hellingshoek uit.

- c** Wat gebeurt er met de hellingshoek als de zijwaartse component groter wordt en de centrale component niet?



d Wat betekent het als een helling 10% is?

Opgave 2

Een landmeter staat 50 m van een cilindervormige koeltoren af en meet de hellingshoek naar de top. Hij vindt 31° . Zijn hoekmeter staat op een statief en zit 1,50 m boven de grond. Bereken de hoogte van deze koeltoren.

Opgave 3

Een weerballon wordt geobserveerd vanuit een punt dat 800 m verwijderd is van de plaats waar hij wordt losgelaten. De ballon stijgt loodrecht op en in 1 minuut wordt de hellingshoek naar die ballon van 38° groter tot 45° .

Hoeveel is de ballon in die minuut gestegen?

Opgave 4

Van een rechthoek met een lengte van 12 cm maakt de diagonaal een hoek van 41° met de langste zijde.

Bereken de omtrek van deze rechthoek in mm nauwkeurig.



Opgave 5

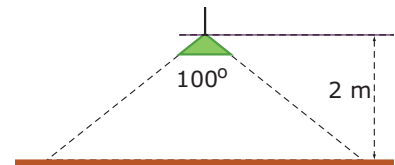
Een boom die 10 m van een huis staat wordt omgehakt. De hellingshoek naar de top van die boom, gemeten vanuit het kelderraam op de begane grond is 44° .

Is het veilig om de boom in de richting van het huis te laten vallen?

Opgave 6

Een lamp hangt 2 m boven de grond en geeft een kegelvormige lichtbundel met een tophoek van 100° .

Bereken de straal van het verlichte gebied.



Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** de berekening van de afstand van het statief van de landmeter tot een schoorsteen.

- a** Leg uit waarom $\tan(20^\circ) = \frac{38,20}{a}$.

- b** Waarom volgt uit $\tan(20^\circ) = \frac{38,20}{a}$ dat $a = 38,20/\tan(20^\circ) \approx 104,95$? Voer zelf de berekening van de afstand uit.

**Opgave 8**

Hoe lang is de schaduw van een 10 m hoge vlaggenmast als de hoek die de zonnestralen met de grond maken 47° bedraagt?

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3** de berekening van het hellingspercentage en de hellingshoek van een oprit.

- a** Laat zien dat $AB = \sqrt{168} \approx 12,96$.

- b** Hoe wordt het hellingspercentage berekend?

- c** Bereken zelf de hellingshoek.

Opgave 10

Dit verkeersbord geeft aan dat de weg waarbij het staat een hellingspercentage van (gemiddeld) 10% heeft.

- a** Welke hellingshoek hoort er bij zo'n hellingspercentage?



- b** Als je 3 km op deze weg hebt gereden, hoeveel m ben je dan (gemiddeld) gestegen?

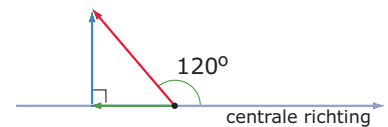


- c** Als je 100 m bent gestegen op deze weg, hoeveel m heb je dan hemelsbreed ongeveer afgelegd?

Opgave 11

Hier zie je een vector met een 'hellingshoek' van 120° .

- a** Waarom is $\tan(120)$ een negatief getal?



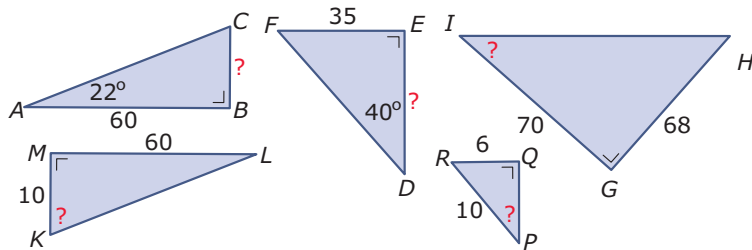
- b** Als de zijwaartse component van deze vector 5 is, hoeveel bedraagt dan de centrale component?



Verwerken

Opgave 12

Je ziet hier vijf rechthoekige driehoeken.



Bereken telkens de zijde of de hoek waar een vraagteken bij staat. Geef de zijden in één decimaal en de hoeken in graden nauwkeurig.

Opgave 13

Een lange ladder staat tegen een muur. De voet van de ladder is 1,50 m van de muur en hij maakt een hoek van 72° met de begane grond.

Hoe hoog ligt het punt waar de ladder de muur raakt boven de grond? Hoe lang is de ladder?

**Opgave 14**

Een vuurtorenwachter zit boven in zijn vuurtoren 40 m boven de zeespiegel. Hij ziet twee schepen die zich met de vuurtoren precies in één vlak bevinden. De man ziet deze boten onder hellingshoeken van 22° en 16° .

Bereken de afstand tussen beide schepen.

Opgave 15

Tegen een berghelling met een hellingspercentage van 123% zit een steile trap.

- a** Bereken de hellingshoek van deze berghelling.

- b** Hoe lang is deze trap als het hoogste punt 80 m boven het laagste punt zit?

Opgave 16

Op het hoekpunt A van een vierkant plein $ABCD$ staat een toren die 60 m hoog is. De zijde van het plein is 150 m lang. De top van de toren is T .

- a** Bereken de hoek die lijn TB maakt met de zijde AB .



- b** Bereken de hoek die lijn TC maakt met de diagonaal AC .

Opgave 17

Van een vierzijdige piramide is het grondvlak rechthoek $ABCD$ is met $AB = 8$ cm en $BC = 6$ cm. De top T van deze piramide ligt recht boven het snijpunt S van de diagonalen van het grondvlak. $TS = 12$ cm.

- a** Bereken $\angle SAT$.

- b** Bereken $\angle BAT$.

Toepassen

Applet

Ook rechte lijnen hebben een helling. Bij een hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) kun je een **hellingshoek van een rechte lijn** berekenen. Zo'n hellingshoek heeft alleen betekenis als op beide assen de schaalverdeling hetzelfde is.

In de applet kun je zien dat de tangens van de richtingshoek α gelijk is aan het hellingsgetal van de lijn.

Hellingsgetallen kunnen ook negatief zijn. Hoe zit het dan met hellingshoeken?

De afspraak is dat bij positieve hellingsgetallen positieve hellingshoeken horen. Je draait dan de lijn om het snijpunt met de y -as van de positieve x -richting naar de positieve y -richting, in de positieve richting. Bij negatieve hellingsgetallen horen negatieve hellingshoeken, want nu draai je de lijn van de positieve x -richting naar de negatieve y -richting, in de negatieve richting.

**Opgave 18: Hellingshoeken van lijnen**

Bekijk de applet in [Toepassen](#). Daarin zie je van een lijn zowel het hellingsgetal a als de hellingshoek α .

- a** Ga voor een aantal waarden van a na, dat $\tan(\alpha) = a$.

- b** Leg uit waarom $\tan(\alpha) = a$.

- c** Bereken de hellingshoek van de lijn $y = 2x + 1$.

- d** Bereken de hellingshoek van de lijn $y = -0,25x + 3$.

Opgave 19: De hoek tussen twee lijnen

Gegeven zijn de twee lijnen $l: y = 3x + 2$ en $m: y = 0,5x + 2$.

- a** Teken deze lijnen in een assenstelsel met op beide assen dezelfde schaalverdeling. Meet vervolgens de hoek tussen beide lijnen.

- b** Bereken de hellingshoek van zowel l als m .



- c** Hoe bereken je de hoek tussen beide lijnen vanuit hun beider hellingshoeken? Bereken de hoek tussen l en m .

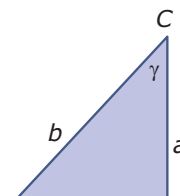
- d** Bereken de hoek tussen de lijnen l en k : $y = -0,5x + 3$.

2.5 Rekenen in driehoeken

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je een rechthoekige driehoek. De scherpe hoeken worden weergegeven door de griekse letters α en γ , de zijden zijn gegeven door kleine letters.



- a Leg uit waarom $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ en $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$.

- b Schrijf vergelijkbare uitdrukkingen op voor $\sin(\gamma)$, $\cos(\gamma)$ en $\tan(\gamma)$.

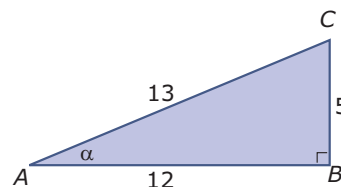
- c De rechte hoek kun je β noemen. Kun je ook de sinus, de cosinus en de tangens van deze hoek opschrijven?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de drie goniometrische verhoudingen in een rechthoekige driehoek. Gebruik de $\triangle ABC$ hiernaast.

- a Welke zijde is van hoek α de aanliggende rechthoekszijde? En welke zijde de overstaande rechthoekszijde?





- b** Schrijf voor hoek α alle drie de goniometrische verhoudingen in getallen op.

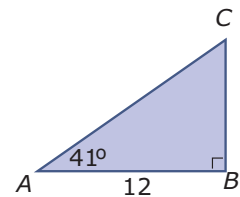
- c** Bereken vanuit elk van deze drie goniometrische verhoudingen de grootte van hoek α . Ga na, dat je drie keer dezelfde uitkomst krijgt.

- d** Stel dat je ook $\gamma = \angle C$ met behulp van een goniometrische verhouding wilt berekenen. Welke zijde is van deze hoek de aanliggende rechthoekszijde? Bereken de grootte van die hoek met behulp van cosinus.

Opgave 2

In deze driehoek wil je uitrekenen hoe lang BC is.

- a** Waarom ga je werken met de tangens van $\angle A$?



- b** Schrijf de berekening van de lengte van BC op.

- c** Je kunt de lengte van BC ook berekenen door gebruik te maken van de tangens van $\angle C$. Laat zien hoe dat gaat.

**Opgave 3**

In het **Voorbeeld 1** zie je hoe je goniometrische verhoudingen in een rechthoekige driehoek toepast. Je hebt - vanwege de gegevens - met sinus gewerkt.

- a** Je kunt ook wel snel zien hoe groot $\angle A$ is. Bereken nu met behulp van deze hoek de lengte van AC .

- b** In het voorbeeld is de lengte van de schuine zijde uitgerekend met behulp van goniometrie. Waarom was dat in dit geval niet nodig?

- c** Je kunt zijde AB nu uitrekenen met behulp van goniometrie, de stelling van Pythagoras, of door gebruik te maken van de eigenschappen van deze bijzondere driehoek. Laat zien dat je telkens dezelfde waarde vindt.

Opgave 4

Van de rechthoekige driehoek KLM is $\angle K = 90^\circ$, $\angle L = 40^\circ$ en $KM = 7,1$ cm. Bereken de lengte van KL in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 5

Van de rechthoekige driehoek PQR is $\angle R = 90^\circ$, $PR = 5$ cm en $PQ = 8$ cm. Bereken de grootte van $\angle P$ in graden nauwkeurig.

**Opgave 6**

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je goniometrische verhoudingen in een niet-rechthoekige driehoek kunt gebruiken.

- a** Waarom ligt het tekenen van hoogtelijn CD voor de hand?

- b** Bereken zelf de lengtes van AD en CD . Waarom bereken je die in twee decimalen nauwkeurig?

- c** Reken ook de lengte van DB na.

- d** Bereken de omtrek en de oppervlakte van $\triangle ABC$.

Opgave 7

Van driehoek KLM is $\angle K = 34^\circ$, $KM = 16$ cm en $LM = 10$ cm.

Bereken de omtrek in één decimaal en de grootte van $\angle L$ in graden nauwkeurig.



Opgave 8

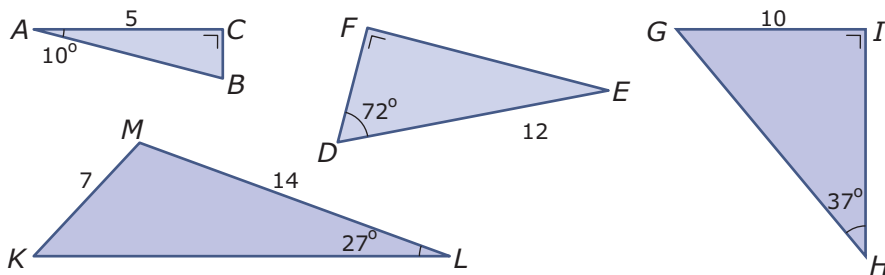
Van een driehoek ABC is $\angle A = 23^\circ$, $\angle C = 46^\circ$ en is $CD = 5$ cm de lengte van de hoogtelijn op zijde AB .

Bereken de oppervlakte van driehoek ABC in één decimaal nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 9

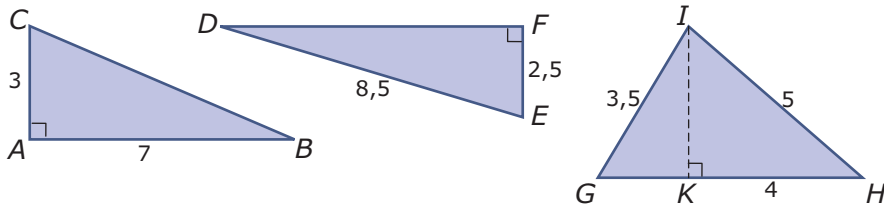
Je ziet hier vier driehoeken.



Bereken alle onbekende zijden in één decimaal nauwkeurig.

**Opgave 10**

Je ziet hier drie driehoeken.



Bereken alle onbekende hoeken in graden nauwkeurig.

Opgave 11

Een **tandradtrein** rijdt over een spoorweg met een extra rail in het midden waarin de uitsteeksels van het tandrad van de trein passen. Zo'n trein wordt gebruikt voor steile berg-hellingen. Een tandradtrein rijdt bijvoorbeeld 1400 m langs een steile helling omhoog en het hoogteverschil is 525 m.

Bereken de hellingshoek van deze tandradbaan.

Opgave 12

De diagonaal van een rechthoek is 16 cm lang. De kleinste hoek tussen de diagonalen is 40° .

Bereken de oppervlakte van deze rechthoek in één decimaal nauwkeurig.



Opgave 13

De toren van Pisa staat al jaren scheef. De toren is 82 m lang, maar als je een steen neerlaat aan een touw vanaf het laagste punt van de scheve bovenrand, dan raakt de steen de grond als het touw 80 m lang is.

Hoe groot is dan de hoek die de scheve toren van Pisa met de begane grond maakt?



Opgave 14

Je ziet hier het SmartCover van een iPad2. Dit SmartCover bedekt de iPad volledig, de afmetingen ervan zijn 18,5 bij 24 cm. Hij bestaat (zoals je ziet) uit vier aaneengesloten banen van 24 cm lengte, die echter niet allemaal even breed zijn. De tweede baan van links is ongeveer 5,6 cm breed en de andere drie zijn 4,3 cm breed.

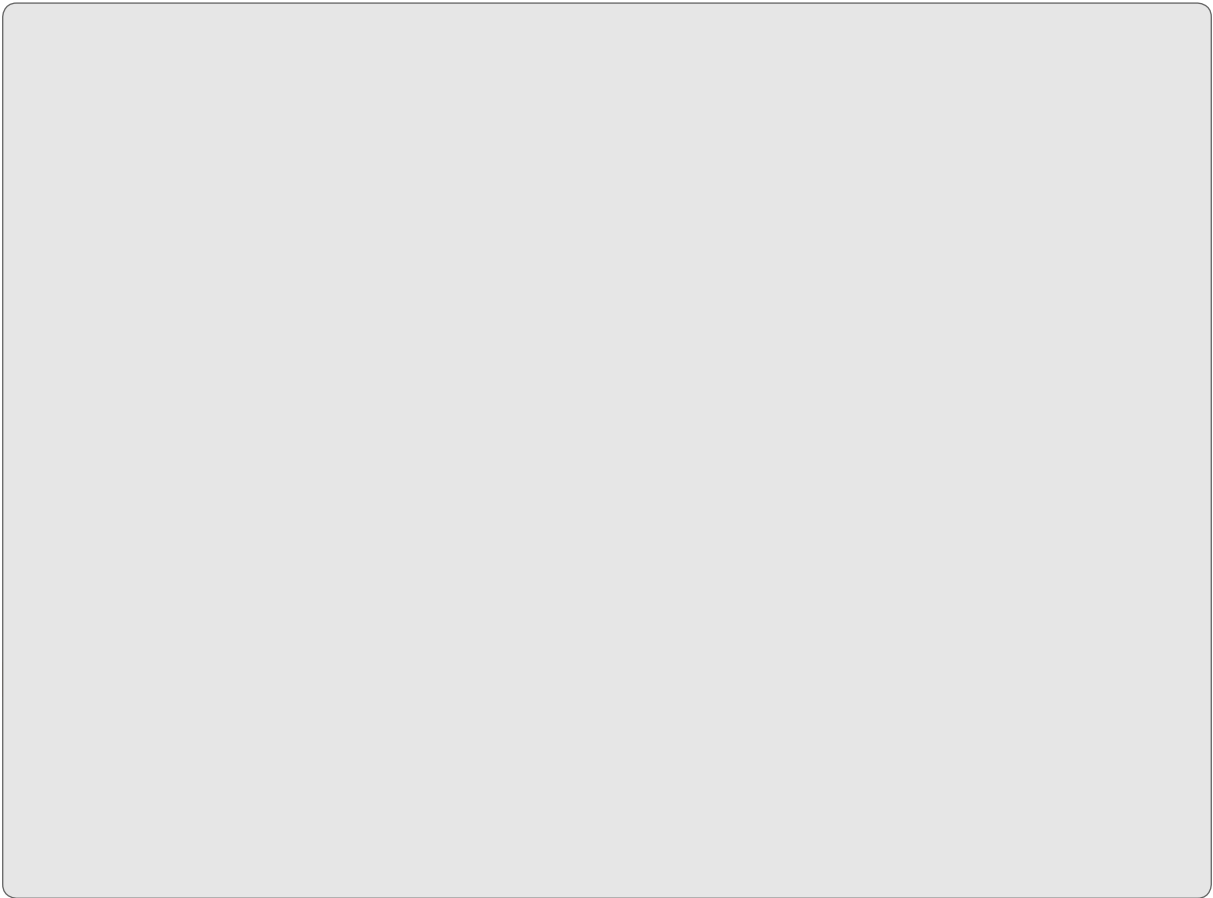
Als je het SmartCover oprolt zoals in de figuren hieronder is te zien, dan maakt het scherm een hoek met de tafel waar hij op ligt. Neem voor deze opgave aan dat de iPad en de SmartCover geen dikte hebben.



- a** Hoe groot is de hellingshoek van de iPad met de tafel?



- b** Je kunt de driehoekige steun nog verder scharnieren en zo de iPad in de kijkstand zetten. Een strook van 4,3 cm breedte ligt nu op het tafelblad en de tablet leunt tegen een andere strook van 4,3 cm. Welke hoek maakt de iPad nu met het tafelblad? En hoe hoog zit de bovenrand van de iPad nu boven het tafelblad?



Toepassen

Applet

Met deze applet maak je regelmatige veelhoeken. Ze passen in een cirkel met straal 1. Je kunt een regelmatige n -hoek opdelen in n gelijke en gelijkbenige driehoeken waarvan de tophoek het middelpunt van de cirkel is waar de andere hoekpunten op liggen.

Met behulp van goniometrie kun je van zo'n driehoek de oppervlakte berekenen. En daarmee bereken je ook de oppervlakte van de veelhoek. En zo kun je zelfs π benaderen...

Opgave 15: Regelmatige vijfhoek

Bekijk de applet in [Toepassen](#). Als je $n = 5$ instelt zie je een regelmatige vijfhoek.

- a** In hoeveel gelijke en gelijkbenige driehoeken kun je deze figuur opdelen?





- b** Hoe groot zijn de hoeken van zo'n driehoek?

- c** Bereken de oppervlakte van zo'n driehoek.

- d** Hoe groot is de oppervlakte van de vijfhoek?

Opgave 16: Regelmatige zeshoek, achthoek, ...

Bekijk de applet in [Toepassen](#). Als je $n = 6$ instelt zie je een regelmatige zeshoek.

- a** Bereken op dezelfde manier als in de voorgaande opgave de oppervlakte van de regelmatige zeshoek.

Neem nu $n = 8$.

- b** Bereken de oppervlakte van de regelmatige achthoek.

Neem nu $n = 10$.

- c** Bereken de oppervlakte van de regelmatige tienhoek.

Neem nu $n = 100$.

- d** Bereken de oppervlakte van de regelmatige honderdhoek.



- e** Als je n steeds kon blijven vergroten, welk getal ga je dan steeds meer benaderen?

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je leren werken met vectoren en hun componenten. Maar vooral met sinus, cosinus en tangens. Met deze goniometrische verhoudingen kun je vanuit gegeven lengtes hoeken berekenen. Je werkt vooral in rechthoekige driehoeken, al moet je die vaak wel zelf nog verzinnen. Goniometrie is een heel krachtig hulpmiddel in de meetkunde en je zult dit in de bovenbouw vooral bij wiskunde B en D veel tegenkomen.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **'Goniometrie'** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- ▶ vector — richtingshoek, draaihoek — componenten van een vector;
- ▶ sinus — cosinus — eenheidsvector — richtingshoek;
- ▶ hoeken berekenen met sinus en cosinus;
- ▶ tangens — hellingshoek;
- ▶ goniometrische verhoudingen — formules voor sinus, cosinus en tangens.

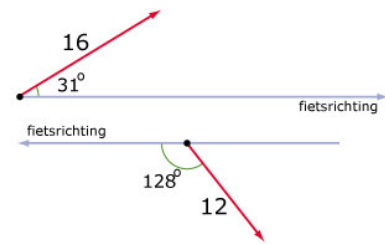
Activiteiten

- ▶ een vector ontbinden in een zijwaartse en een centrale component;
- ▶ sinus en cosinus gebruiken om componenten van vectoren te berekenen;
- ▶ hoeken berekenen met behulp van sinus en cosinus;
- ▶ berekeningen met helling, tangens en hellingshoeken uitvoeren;
- ▶ zijden en hoeken berekenen in rechthoekige driehoeken en dit toepassen meetkundige situaties.

**Opgave 1**

Hiernaast en op het **werkblad** zie je twee windvectoren (in m/s) en de fietsrichting getekend.

Ontbind deze windvectoren in een component in de fietsrichting en een component loodrecht op de fietsrichting. Bereken deze componenten in één decimaal nauwkeurig.

**Opgave 2**

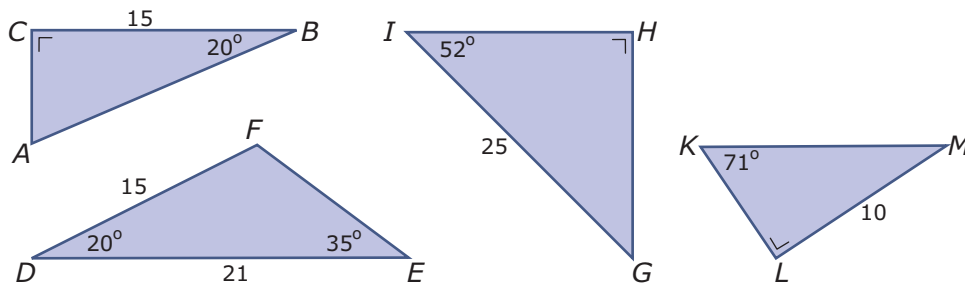
Je fietst met een snelheid van 16 km/uur op een lange rechte weg. Je hebt de wind schuin tegen. De windsnelheid is 10 km/uur. Zonder deze wind zou je snelheid 22 km/uur bedragen.

Teken de situatie en bereken de hoek die de windvector met jouw fietsrichting maakt in graden nauwkeurig.



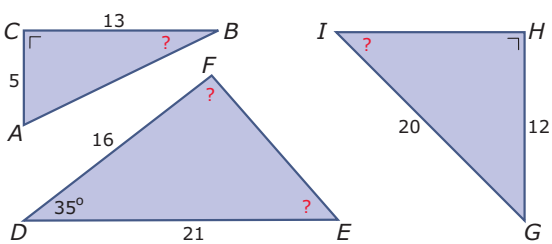
Opgave 3

Bereken van deze driehoeken alle zijden die nog niet bekend zijn in één decimaal nauwkeurig.



Opgave 4

Bereken van deze driehoeken alle hoeken waar een vraagteken in staat in graden nauwkeurig.



**Opgave 5**

Bij een helling staat een bord dat een hellingspercentage van 15% aangeeft.

- a** Hoe groot is de bijbehorende hellingshoek?

- b** Als deze helling 2,3 km lang is, welk hoogteverschil zit er dan tussen het beginpunt en het eindpunt ervan?

Opgave 6

Van vlieger $ABCD$ is $BD = 20$ cm, $\angle A = 60^\circ$ en $\angle C = 100^\circ$.

- a** Bereken de oppervlakte van deze vlieger.

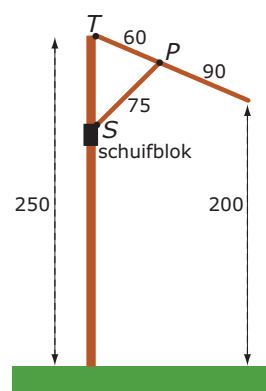
- b** Bereken de omtrek van deze vlieger.



Opgave 7

Je ziet hier één van de stangen van een parasol die het doek opspannen. Deze stang draait om punt T . Het doek wordt opgespannen door het schuifblok om de paal van de parasol omhoog te schuiven. Aan dit schuifblok zit een steun SP die de stang omhoog duwt. Als de parasol is uitgeklappt zit het laagste punt van de stang 2,00 m boven de grond. Er zijn zes van deze stangen.

In de figuur zijn alle afmetingen in cm.



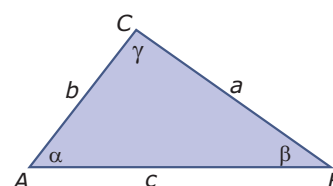
- a** Bereken de hoek die de stang maakt met de paal van de parasol in graden nauwkeurig.

- b** Bereken hoe hoog punt S boven de grond zit.

Toepassen

Je hebt nu geleerd om sinus, cosinus en tangens te gebruiken om lengten van zijden en hoeken uit te rekenen. Je moest daarbij steeds op zoek naar rechte hoeken, rechthoekige driehoeken.

Het is echter mogelijk om formules af te leiden die het zoeken naar rechthoekige driehoeken overbodig maken. Eén van deze regels is de **sinusregel**. Je gaat daarbij uit van een driehoek ABC zoals je die hiernaast ziet. Let goed op de keuze van de letters voor de hoeken en de lengtes van de zijden.



De sinusregel luidt: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.

In de volgende opgaven ga je deze regel afleiden en toepassen.

**Opgave 8: De sinusregel**

Teken zelf een driehoek zoals je die in **Toepassen** ziet. Zorg er voor dat hij drie scherpe hoeken heeft en zet bij de hoekpunten, de hoeken en de zijden op eenzelfde manier de letters.

- a** Teken hoogtelijn CD . Laat zien, dat $CD = b \cdot \sin(\alpha)$ en ook $CD = a \cdot \sin(\beta)$.

Uit wat je bij a hebt gevonden volgt: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$.

- b** Hoe kom je nu aan de rest van de sinusregel?

- c** Neem aan dat in jouw driehoek $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 50^\circ$ en $a = 5$. Bereken b met behulp van de sinusregel.

- d** Teken een driehoek ABC met $\alpha = 70^\circ$, $a = 5$ en $b = 4$.

- e** Bereken in de driehoek die je bij c hebt getekend hoek β met behulp van de sinusregel. Controleer je antwoord door nameten.

Opgave 9: De sinusregel toepassen

Gegeven is $\triangle ABC$ door $\alpha = 40^\circ$, $a = 4$ en $b = 6$ cm.

- a** Teken de twee mogelijke driehoeken die hieraan voldoen.



- b** Bereken in de driehoek die je bij a hebt getekend hoek β met behulp van de sinusregel. Laat zien dat er inderdaad twee mogelijkheden zijn.

Gegeven is $\triangle ABC$ door $a = 4$, $b = 6$ en $c = 7$ cm.

- c** Teken deze driehoek.

- d** Laat zien, dat je in de driehoek bij c de hoeken niet met behulp van de sinusregel kunt berekenen. Waarom kan dit wel met de cosinusregel?

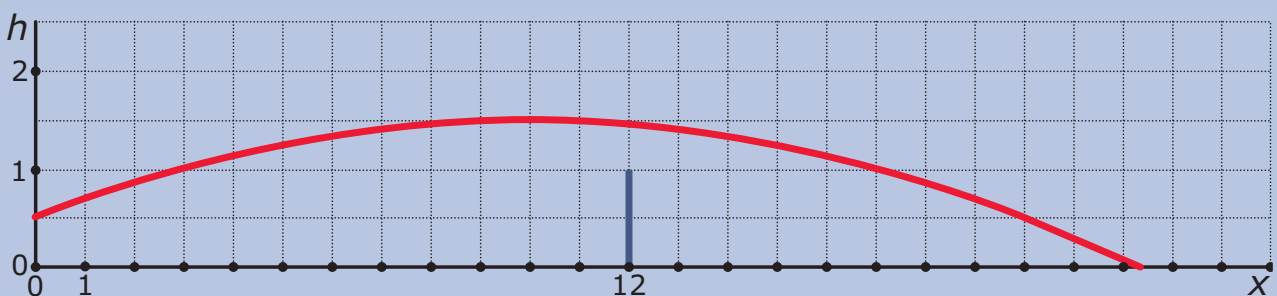
Begrippen

- ▶ kwadratische functie — parabool — top — minimum — maximum — symmetrie-as — dalparabool — bergparabool — uiterste (extreme) waarde;
- ▶ top — nulpunten — ontbinden in factoren;
- ▶ tweede graads vergelijking (kwadratische vergelijking) — abc-formule — discriminant;
- ▶ handig oplossen.

Activiteiten

- ▶ van een kwadratische functie van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ de top en de extreme (uiterste) waarde bepalen;
- ▶ nulpunten en top bepalen, drie gedaantes van de formule bij een kwadratische functie herkennen;
- ▶ de abc-formule gebruiken om een kwadratische vergelijking systematisch op te lossen, de discriminant van een kwadratische vergelijking gebruiken;
- ▶ kwadratische vergelijkingen handig oplossen, onder andere door ontbinden in factoren, terugrekenen en de abc-formule.

Boogballetje



Domein

Functies en grafieken

Hoofdstuk

Kwadratische verbanden

Inhoud

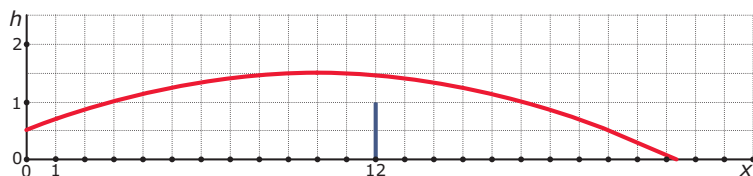
- 3.1 Kwadratische functies 118
- 3.2 Nulpunten en top 129
- 3.3 Kwadratische vergelijkingen 141
- 3.4 Handig oplossen 157
- 3.5 Totaalbeeld 172

3

3.1 Kwadratische functies

Verkennen

Opgave V1



Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies in de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog.

De baan van de bal is een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule

$$h = -0,01 \cdot (x - 10)^2 + 1,5$$

Hierin stelt h de hoogte van de bal boven het tennisveld voor en is x de afstand van de monding van het tenniskanon tot het punt recht onder de bal.

Hoe hoog komt de tennisbal maximaal?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de baan van een tennisbal die wordt afgeschoten door een tenniskanon. De formule die de baan van de bal beschrijft is gegeven.

- a** Waarom hoort deze formule bij een kwadratische functie?

- b** Bereken zelf de hoogte van de tennisbal als $x = 3$.



- c** Je ziet dat er ook een rij is gemaakt van de toenames van de hoogte telkens als x met 2 wordt verhoogd. Maak zelf een rij met de verandering van die toenames.

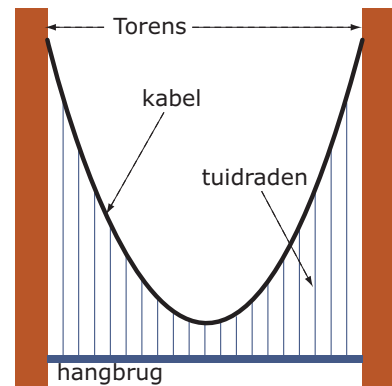
- d** De top van de parabool kun je uit de tabel aflezen. Maar je kunt hem ook direct uit de formule afleiden. Ga na hoe.

Opgave 2

Een hangbrug is met tuidraden opgehangen aan twee kabels die zijn bevestigd aan twee grote pilaren aan weerszijden van de brug. De kabels hangen dan in de vorm van een parabool. Een mogelijke formule voor zo'n parabool is

$$h = 0,01 \cdot (a - 70)^2 + 16$$

Hierin is h de hoogte van een punt op de kabel boven het wegdek van de brug en a de afstand in meters tot de linker toren.



- a** Hoe hoog boven het wegdek zit de kabel aan de linker toren vast?

- b** Maak een tabel met voor a de waarden 0, 10, 20, enzovoorts. Maak ook een rij met afnames en een rij met de verandering van de afnames. Wat valt op bij die laatste rij?

- c** Hoe groot is de afstand tussen beide torens?



- d** Welk punt is de top van de parabool? Hoe hoog zit de kabel daar boven het wegdek?

Opgave 3

- a** Stel in de applet de formule in die in het voorbeeld is gegeven.
Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van deze functie een dalparabool is?

- b** Waarom is het belangrijk om eerst de symmetrieas te weten voor je een tabel maakt?

- c** Hier zie je een geschikte tabel voor deze parabool. Maak hem af en teken de parabool.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							

- d** Maak een extra rij in deze tabel met daarin de afnames van de y-waarden bij elke stap. En maak ook een extra rij met de verandering van die afnames.



- e Is de verandering van de afnames constant?

Opgave 4

Bepaal van de volgende kwadratische functies de extreme waarde en de symmetrieas. Vermeld ook welke soort parabool het betreft. Gebruik eventueel de applet in de [Theorie](#).

a $y = -(x + 1)^2 - 4$

b $y = 2(x - 4)^2 + 1$

c $y = -0,01(x - \sqrt{3})^2 + 2$

Opgave 5

Gegeven is de formule $y = (2x - 4)^2 + 3$.

- a Laat zien dat je deze formule kunt schrijven als $y = 4(x - 2)^2 + 3$.

- b Deze formule hoort dus ook bij een kwadratische functie. Welke uiterste waarde en welke symmetrieas heeft de bijbehorende parabool?

**Opgave 6**

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je bij een kwadratische functie de snijpunten van de bijbehorende parabool met de beide coördinaatassen kun opstellen.

- a** Stel in de applet de formule in die in het voorbeeld is gegeven. Lees de gevraagde punten uit je figuur af.

- b** Laat zien hoe de snijpunten met de x -as worden berekend. Schrijf hun exacte coördinaten op.

- c** Laat zien dat beide snijpunten met de x -as evenver van de symmetrieas van de parabool liggen.

- d** Geef een benadering van de snijpunten met de x -as in twee decimalen nauwkeurig. Ga na dat ze passen bij wat je uit de figuur hebt afgelezen.

Opgave 7

Een kwadratische functie is gegeven door de formule $y = -4(x - 8,5)^2 + 5$.

- a** Bereken van de bijbehorende parabool het snijpunt met de y -as.

- b** Bereken de exacte snijpunten van de bijbehorende parabool met de x -as.

**Opgave 8**

In **Voorbeeld 3** wordt uitgelegd wat de raaklijn door de top van een parabool is.

- a** Waarom is bij een kwadratische functie de raaklijn door de top altijd horizontaal, dus evenwijdig aan de x -as?

- b** De parabool met formule $y = -0,5(x - 1)^2 + p$ heeft ook de lijn $y = 2$ als raaklijn door de top. Welke waarde moet p dan hebben?

Gegeven is een parabool door de formule $y = (x - 3)^2 + 5$.

- c** Welke lijn raakt deze parabool in de top?

- d** Waaraan zie je dat deze parabool geen snijpunten met de x -as heeft? En hoe zit het met het snijpunt met de y -as?

Opgave 9

Gegeven is een kwadratische functie van de vorm $y = a(x + 3)^2 + q$.

- a** De lijn $y = 1$ raakt de bijbehorende parabool. Welke waarde heeft q ?

- b** Welke lijn is de symmetrieas van deze parabool?



- c** De waarde van a heeft geen enkele invloed op je voorgaande twee antwoorden. Hoe komt dat en waarop heeft de waarde van a wel invloed?

Verwerken

Opgave 10

Van een kwadratische functie is de formule $y = -0,5(x - 6)^2 + 10$.
De bijbehorende grafiek is een bergparabool.

- a** Waarom is de bijbehorende grafiek een bergparabool? Welk punt is de top van die parabool?

- b** Welke extreme waarde heeft deze kwadratische functie?

- c** Maak een geschikte tabel en teken de parabool. Zorg er voor dat de top in ieder geval duidelijk in beeld is.



- d** Maak een tabel van de toenames van de y -waarden bij een toename van x met 2. Maak ook een tabel met de verandering van de toenames. Is die verandering constant?

Opgave 11

Bereken van elk van de volgende kwadratische functies de extreme waarde.

a $y = (x + 5)^2 + 7$

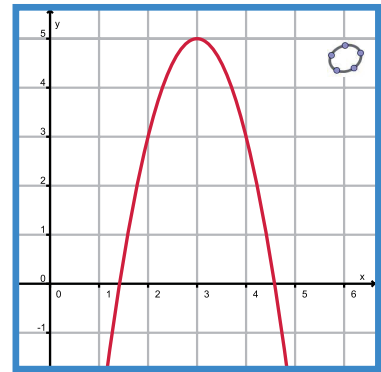
b $y = -2(x - 12)^2 + 45$

c $y = (x + \sqrt{2})^2 - \sqrt{3}$

d $y = 5,5 - 3(x - 2)^2$

**Opgave 12**

Je ziet hier een parabool. De bijbehorende formule is $y = -2(x - 3)^2 + 5$.



- a** Bepaal de top van deze parabool en bereken het snijpunt met de y -as.

- b** Bereken de coördinaten van de snijpunten van deze parabool met de x -as.

- c** Bereken de exacte afstand tussen de snijpunten van deze parabool met de x -as.

Opgave 13

Gegeven is een parabool met formule $y = -0,5(x - 10)^2 + 40$ en een lijn met vergelijking $y = a$.

- a** Bereken de snijpunten van deze parabool met de beide coördinaatassen.

- b** Voor welke waarde van a is de lijn een raaklijn aan de parabool?

- c** Voor welke waarden van a hebben de lijn en de parabool twee snijpunten?



- d** Voor welke waarden van a hebben de lijn en de parabool geen snijpunten?

Toepassen

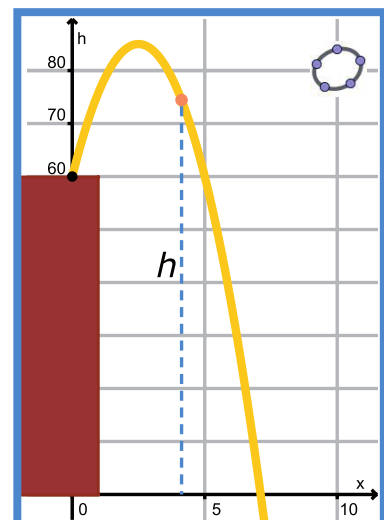
Parabolen komen regelmatig voor. Wel moet je daarbij vaak uitgaan van ideale omstandigheden die in de praktijk niet precies gelden. Voorbeelden zijn:

- de baan van een voorwerp dat wordt afgeschoten en daarna beweegt onder invloed van de zwaartekracht (als de luchtweerstand geen rol van betekenis speelt);
- de hoogte van een voorwerp dat wordt afgeschoten en daarna beweegt onder invloed van de zwaartekracht (als de luchtweerstand geen rol van betekenis speelt) afhankelijk van de tijd;
- de boog die de kabels van een hangbrug maken als die brug met behulp van zogenaamde tuidraden aan de kabels is opgehangen.

Afhankelijk van de omstandigheden (de kracht waarmee het voorwerp wordt afgeschoten, de afmetingen van de hangbrug) kun je bij die parabolen formules maken waarmee je dan weer berekeningen kunt uitvoeren.

Opgave 14: Kogelbaan

In een experiment wordt vanaf een 50 meter hoge toren een tennisbal afgeschoten die uiteindelijk zal neerkomen op het plein voor deze toren. De baan die de kogel volgt wordt gefilmd en met behulp van een computerprogramma wordt de baan van de bal berekend. De hoogte van de tennisbal boven de grond wordt bij benadering gegeven voor de formule $h = -4(x - 2,5)^2 + 85$, waarin h de hoogte van de bal boven de begane grond in meters en x de afstand van het punt op de grond recht onder de plaats van afschieten en het punt op de grond recht onder de bal is. Ook x is in m.



- a** Waaraan kun je zien dat deze tennisbal nogal steil omhoog wordt geschoten?

- b** Hoe hoog boven de grond komt deze tennisbal maximaal?

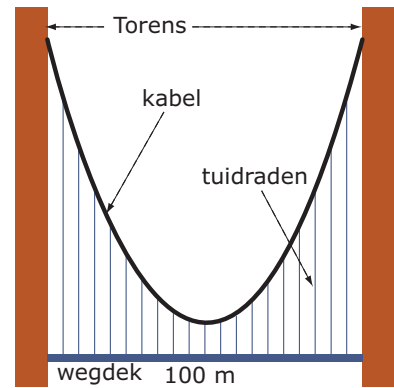


- c** Hoeveel m vanaf het punt op de grond recht onder het afschietpunt komt de bal weer op de grond?

Opgave 15: Hangbrug

Je ziet hier een hangbrug. Het wegdek is tussen beide torens 100 m lang. De ophangpunten van de kabels zitten aan de buitenkant van de torens op 100 m boven het wegdek. De kortste van de 19 tuidraden is 10 m lang.

Je ziet één van beide kabels. Hij hangt in de vorm van een parabool. Neem aan dat de x -as samenvalt met het wegdek en de y -as over de kortste tuidraad loopt. Neem aan dat de eenheden op beide assen in m zijn. De formule van de bijbehorende kwadratische functie is dan $y = \frac{9}{250}x^2 + 10$.



- a** Ga na dat de parabool bij deze formule past bij de tekening van de hangbrug.

- b** Hoelang is de negentiende tuidraad gezien vanaf de linker toren?

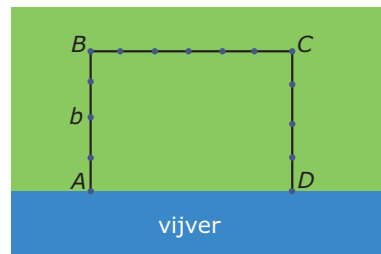
3.2 Nulpunten en top

Verkennen

Opgave V1

Een boer heeft een stuk weiland naast een vijver. Hij wil naast de vijver een stuk grond afzetten met 100 m hekwerk. Zie de figuur. Langs de vijver komt geen hek.

b is de lengte van AB . Door b te veranderen kun je de oppervlakte veranderen.



Applet

Hoe groot is de oppervlakte A van het landje maximaal?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je de nulpunten van de kwadratische functie $A = b(100 - 2b) = 100b - 2b^2$ bepaalt.

- a** Waarom is dit het gemakkelijkst vanuit de vorm met de haakjes?

Je kunt nu een geschikte tabel maken bij de gegeven functie.

- b** Doe dat en teken de bijbehorende grafiek.



- c** Welke symmetrieas heeft de bijbehorende parabool? Hoe kun je die uit de twee nulpunten afleiden?

Je kunt nu de top van de parabool bepalen. Daarmee bepaal je de maximale oppervlakte van het landje.

- d** Bereken die top en geef de maximale waarde van het landje.

Opgave 2

Gegeven is de kwadratische functie $y = 0,5(x - 2)(x - 6)$.

- a** Bereken de nulpunten van deze kwadratische functie.

- b** Waarom is $x = 4$ de symmetrieas van de bijbehorende parabool?

- c** Bepaal de top van deze parabool.

- d** Teken de parabool.

**Opgave 3**

Gegeven is de kwadratische functie $y = x^2 - 5x + 6$.

- a** Ontbind deze functie eerst in factoren; gebruik de som-en-product methode. Bereken daarna de nulpunten van deze kwadratische functie.

- b** Welke symmetrieas heeft de bijbehorende parabool?

- c** Bepaal de top van deze parabool.

- d** Teken de parabool.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

Zorg er eerst voor dat de formule van het voorbeeld in de applet staat ingesteld.

- a** Ga na, dat de nulpunten die je uit de formule afleest overeenkomen met die in de grafiek.

- b** Bereken de coördinaten van de top van de parabool.

**Opgave 5**

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

Stel in de applet de formule $y = (x - 2)(x - 5)$ in.

- a** Bereken de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

Stel in de applet de formule $y = -2x(x - 5)$ in.

- b** Bereken de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

Je kunt in de applet steeds weer een nieuwe formule van de vorm $y = a(x - m)(x - n)$ instellen en jezelf zo oefenen in het vinden van de top van de bijbehorende parabool.

- c** Oefen dit met behulp van de applet.

Opgave 6

Gegeven is de kwadratische functie met formule $y = 3x^2 + 42x + 120$.

- a** Door ontbinden in factoren kun je de formule schrijven in de vorm $y = a(x - m)(x - n)$. Laat dat zien en geef dan de nulpunten van deze functie.

- b** Bereken de uiterste waarde van deze kwadratische functie.

**Opgave 7**

Bekijk **Voorbeeld 2** en werk met de applet.

Zorg er eerst voor dat de formule van het voorbeeld in de applet staat ingesteld.

- a** Waarom wordt $y = -1$ opgelost en niet een andere y -waarde gekozen?

- b** Leg uit hoe je aan de symmetrieas van de bijbehorende parabool komt.

- c** Hoe zou je de nulpunten van deze parabool kunnen berekenen?

Opgave 8

Werk opnieuw met de applet in **Voorbeeld 2**. Nu heb je een kwadratische functie met formule $y = 1,5x^2 + 3x - 4,5$. Stel dit in de applet in.

- a** Bereken de exacte coördinaten van twee punten op deze parabool die dezelfde y -waarde hebben.

- b** Bereken de top van de parabool. Komt hij overeen met de top van de parabool in de applet?

- c** Je kunt in de applet steeds weer een nieuwe parabool instellen en dan de top berekenen. Oefen dit (met een medeleerling) tot je geen fouten meer maakt.

**Opgave 9**

Bekijk nu de formule $y = -0,5x^2 + 50x$.

De parabool die bij deze formule hoort krijg je met de applet in **Voorbeeld 2** niet in beeld. Om deze parabool te kunnen tekenen is het nuttig om eerst de top en de nulpunten te berekenen.

- a** Van deze parabool kun je de exacte nulpunten berekenen. Laat dat zien.

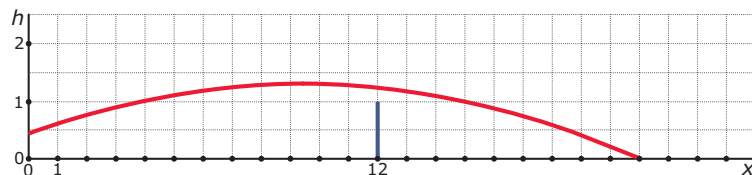
- b** Welk punt is nu de top van de parabool?

- c** Maak een schets van de parabool.

Verwerken**Opgave 10**

Je ziet hier de baan van een tennisbal die door een tennisser op de baseline wordt geraakt en aan de andere kant van het net op de grond komt. Veronderstel dat de baan van de bal een zuivere parabool is.

Er geldt: $h = -0,01(x + 2)(x - 21)$.



- a** Op welke hoogte wordt de bal boven de baseline geraakt?



- b** Na hoeveel m vanaf de baseline komt de bal (voor de andere baseline) weer op de grond?

- c** Waar zit het hoogste punt van de bal?

Opgave 11

Hieronder is telkens de formule van een kwadratische functie gegeven. Bereken de nulpunten en de extreme waarde.

- a** $y = 2x(x - 30)$

- b** $y = (x - 2,5)^2 - 1$

- c** $y = -0,5(x - 4)(x + 1)$

- d** $y = (x - 3)^2 + 1$



e $y = (4 - x)^2 - 7,5$

f $y = -2(x + 1)^2$

Opgave 12

Gegeven is de kwadratische functie $y = 0,5x^2 - x - 4$.

- a** Bereken de nulpunten van deze functie.

- b** Bereken de top van de bijbehorende parabool.

- c** Teken de bijbehorende parabool.

Opgave 13

Gegeven is de kwadratische functie $y = 0,5x^2 - x + 1$.

- a** Bereken van deze functie twee punten met dezelfde y -waarde.



- b** Bereken de top van de bijbehorende parabool.

- c** Teken de bijbehorende parabool.

Opgave 14

Bereken van de volgende parabolen de coördinaten van de top.

- a** $y = x^2 + 8x + 2$

- b** $y = x^2 - 2x + 10$

- c** $y = 2x^2 + 10x - 8$

- d** $y = -4(x - 8)(x + 3)$

- e** $y = 0,5x^2 + x$



f $y = -x^2 + 6x - 4$

Toepassen

Ook in de **economie** komen kwadratische functies voor. Bekijk dit (sterk vereenvoudigde) economische model maar eens.

Een sportclub verkoopt in zijn kantine koppen erwtensoep. De kantinebeheerder heeft gemerkt dat het aantal koppen soep dat ze dagelijks verkopen afhangt van de prijs die ze ervoor vragen: hoe duurder een kop soep, hoe lager het aantal koppen soep dat ze op een dag verkopen. Deze tabel laat dat zien.



prijs per kop (in centen)	120	115	110	105	100
aantal verkocht per dag	100	110	120	130	140

Als je hierbij een grafiek tekent, dan zie je dat het aantal verkochte koppen soep per dag q afhangt van de prijs p (in centen) volgens een lineair verband: q is een lineaire functie van p .

Ga na, dat $q = 340 - 2p$.

De kantinebeheerder bedenkt nu dat de opbrengst R kan worden berekend door de prijs per kop te vermenigvuldigen met het aantal verkochte koppen soep: $R = p \cdot q$.

Dit levert een kwadratische formule op: $R = p \cdot (340 - 2p)$.

Nu kan de kantinebaas berekenen bij welke prijs zijn opbrengst zo groot mogelijk is.

Opgave 15: Soepverkoop (1)

Bekijk het verhaal van de verkoop van erwtensoep in [Toepassen](#).

a Leid zelf de lineaire formule voor q als functie van p af.



- b** Ga met behulp van de tabel na, dat de opbrengst stijgt als de prijs naar beneden gaat.

- c** Als de kantinebeheerder de prijs verder laat zakken worden er nog meer koppen soep verkocht. Blijft zijn opbrengst dan alsmear stijgen?

- d** Waaraan zie je dat de opbrengst R een kwadratische functie van p is? En waaraan zie je dat de opbrengst een maximum heeft?

- e** Bereken het maximum van R . Welke prijs moet de kantinebeheerder vragen als hij een zo groot mogelijke opbrengst wil hebben?

- f** Is het verstandig om een zo groot mogelijke opbrengst te willen hebben?

Opgave 16: Soepverkoop (2)

Nu ga je niet kijken naar een zo groot mogelijke opbrengst, maar naar een zo groot mogelijke winst.

- a** Wat is het verschil tussen opbrengst en winst?



Neem aan dat het maken van elke kop soep 50 cent kost.

- b** Leg uit, waarom dan voor de winst geldt $W = (p - 50)(340 - 2p)$.

- c** Ook bij deze formule is de grafiek een parabool. Bepaal de twee nulpunten van deze parabool. Wat betekenen deze getallen voor de winst?

- d** Bereken het maximum van W . Welke prijs moet de kantinebeheerder vragen als hij een zo groot mogelijke winst wil hebben?

3.3 Kwadratische vergelijkingen

Verkennen

Opgave V1

Wanneer je van een kwadratische functie de nulpunten wilt berekenen, moet je een vergelijking oplossen. Neem bijvoorbeeld $y = x^2 + 6x + 8$. Wil je van deze kwadratische functie de nulpunten berekenen dan moet je $x^2 + 6x + 8 = 0$ oplossen.

Los deze vergelijking op met behulp van ontbinden in factoren.

Opgave V2

Bekijk nu de functie $y = x^2 + 6x + 7$. Wil je van deze kwadratische functie de nulpunten berekenen dan moet je $x^2 + 6x + 7 = 0$ oplossen.

Kun je deze vergelijking exact oplossen?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je een kwadratische vergelijking oplost met de abc-formule.

- a** Los zelf de vergelijking $x^2 + 6x + 7 = 0$ op met behulp van de abc-formule.

- b** Geef benaderingen van beide x -waarden van de oplossing in drie decimalen nauwkeurig.



In **Opgave 1** werd de oplossing van $x^2 + 6x + 8 = 0$ gevraagd.

- c** Bepaal de oplossing van deze vergelijking met de abc-formule. Ga na, dat je oplossing overeenkomt met de oplossing die je eerder hebt gevonden.

Bij het gebruik van de abc-formule moet je er wel op letten dat de vergelijking die je oplost kwadratisch is en de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heeft.

- d** Waarom betekent dit dat $a \neq 0$?

- e** Los op: $4 + 2x^2 = 6x$.

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen op met de abc-formule.

- a** $x^2 + 12x + 4 = 0$



b $2x^2 + 5x - 10 = 0$

c $5x - x^2 + 7 = 0$

d $9x^2 = 17 - 10x$

e $2x^2 + 16 = 12x$

f $3x^2 + 8x - 3 = 0$

**Opgave 3**

Bekijk in de **Uitleg** wat de discriminant van een kwadratische vergelijking is.

Bekijk de vergelijking $2x^2 - 6x - 1 = 0$.

- a** Bereken de discriminant van deze vergelijking.

- b** Bereken vervolgens de oplossing.

- c** Geef een benadering van de oplossing van deze vergelijking in één decimaal nauwkeurig.

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x + 4,5 = 0$.

- d** Bereken eerst de discriminant. Leg uit dat je aan de discriminant kunt zien dat de oplossing van de vergelijking maar één waarde heeft. Bereken vervolgens die éne oplossing.

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x + 6 = 0$.

- e** Laat met behulp van de discriminant zien, dat de vergelijking geen reële oplossing heeft.

**Opgave 4**

Bepaal van de volgende kwadratische vergelijkingen eerst het aantal oplossingen (dus het aantal waarden in de oplossing). Los ze vervolgens op.

a $2x^2 + 5x - 20 = 0$

b $11 + 3x^2 = 9x$

c $3x^2 = 4x - 1$

d $4x^2 - 20x + 25 = 0$

**Opgave 5**

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe een kwadratische vergelijking wordt opgelost met de abc-formule. Leer deze formule uit het hoofd en zorg dat je de manier van werken beheerst!

- a** Herleiden op 0 is een belangrijke stap voordat je de abc-formule gaat toepassen. Waarom voer je deze stap eigenlijk uit?

- b** Laat zien, dat je door haakjes wegwerken en op 0 herleiden inderdaad op $x^2 - 5x + 3 = 0$ komt.

- c** Waarom staat bij de berekening van de discriminant de -5 eigenlijk tussen haakjes?

- d** Schrijf beide waarden van de oplossing afzonderlijk op en benader ze in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Los de volgende vergelijkingen op indien mogelijk.

- a** $3x^2 + 4 = 7x$

- b** $(x + 1)(2x - 1) = 4$



c $4x = x^2 + 7$

d $(x + 3)^2 = 4x$

e $(2x + 4)^2 = 32x$

f $(2x + 4)^2 = 32$

Opgave 7

Bekijk de vergelijking $(x + 4)^2 = 4 + x^2$.

a Is dit een kwadratische vergelijking?

b Werk de haakjes weg en herleid de vergelijking op 0.

c Hoe los je nu de vergelijking verder op?

**Opgave 8**

Oefen het oplossen van kwadratische vergelijkingen met de abc-formule via **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je de snijpunten van een parabool en een rechte lijn berekent.

- a** In dit voorbeeld is de abc-formule gebruikt om de kwadratische vergelijking op te lossen. Dit kan ook met de som-en-productmethode. Laat dat zien.

- b** Waarom is hier het werken met de discriminant overbodig?

- c** Als je de twee x -waarden hebt gevonden, moet je de bijbehorende y -waarden berekenen. Laat zien hoe je dat doet.

- d** Maakt het uit in welke van beide formules je de gevonden waarden van x invult? Waarom?

**Opgave 10**

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij de volgende formules.

a $y_1 = x^2 + 3x + 1$ en $y_2 = -x - 2$.

b $y_1 = (x + 2)(x - 3)$ en $y_2 = 2x + 4$.

c $y_1 = x^2$ en $y_2 = 2$.

Opgave 11

In de voorgaande opgave en ook in **Voorbeeld 2** waren de coördinaten van de snijpunten van beide grafieken gehele getallen. Maar dat hoeft niet.

Neem bijvoorbeeld de functies $y_1 = (x + 1)^2$ en $y_2 = 4 - x^2$.

a Met welke vergelijking bereken je de snijpunten van de twee bijbehorende grafieken?

b Hoe kun je aan de discriminant van deze vergelijking zien dat er twee snijpunten zijn waarvan de coördinaten geen gehele getallen zijn?



- c** Bereken de snijpunten van beide parabolen op twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 12

Bereken de oplossing van de volgende kwadratische vergelijkingen.

a $x^2 + 5x + 1 = 0$

b $2x^2 - 3x - 2 = 0$

c $-5x^2 - 7x = 1$

d $x(2x + 3) = 3$

e $x(2x + 3) = 3x$



f $x(2x + 3) = 0$

g $(x + 3)(x - 5) = 2$

h $(x + 3)(x - 5) = 0$

i $(2x + 5)^2 = 5$

Opgave 13

Onderzoek hoeveel oplossingen de volgende kwadratische vergelijkingen hebben (dus uit hoeveel waarden de oplossing bestaat).

a $2x^2 + 5x - 1 = 0$

b $5x^2 - x = 1$

c $-2x^2 + 6x = 18$



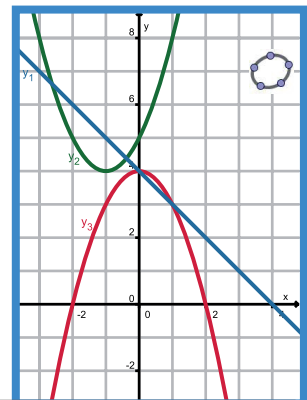
d $(1 - 2x)^2 = 12$

e $(x - 1)^2 + 4 = 0$

Opgave 14

Je ziet hier de grafieken van twee kwadratische functies en een lineaire functie. Ga er van uit dat de roosterpunten die op de grafieken lijken te liggen dat ook inderdaad doen.

Bij het berekenen van snijpunten of nulpunten, moet je telkens een vergelijking oplossen. Aan de discriminant van die vergelijking kun je zien hoeveel snijpunten er zijn. Geef in de volgende gevallen aan of die discriminant negatief, positief of 0 is en ook of die discriminant een kwadraat is.



a $y_1 = y_3$

b $y_1 = y_2$

c $y_2 = y_3$

d $y_3 = 0$



e $y_2 = 0$

f $y_2 = 4$

Opgave 15

Hieronder zijn telkens twee formules gegeven. Bereken de eventuele snijpunten van de bijbehorende grafieken. Geef waar nodig benaderingen in één decimaal nauwkeurig.

a $y_1 = -2x^2 + 8x$ en $y_2 = 2x - 36$.

b $y_1 = (x - 10)^2 - 50$ en $y_2 = 10 - 5x$.

Toepassen

Je hebt je waarschijnlijk de hele tijd al af zitten vragen hoe die wiskundigen nu aan de abc-formule zijn gekomen. Een manier om die formule af te leiden is met behulp van **kwadraat afsplitsen**. Dat is ook een techniek die je in de bovenbouw bij wiskunde B nodig hebt. De volgende opgaven zijn daarom ook vooral nuttig als je overweegt om dat vak te kiezen.

Neem als voorbeeld de kwadratische functie $y = x^2 + 6x + 1$.

Je kunt in de uitdrukking rechts van het isgelijkteken een **kwadraat afsplitsen**. Hiernaast zie je hoe de uitdrukking $x^2 + 6x$ te herleiden is tot $(x + 3)^2 - 9$.

De formule $y = x^2 + 6x + 1$ herleid je daarmee tot $y = (x + 3)^2 - 8$.

Uit deze vorm van de kwadratische functie kun je de top van de bijbehorende parabool aflezen. Bovendien kun je nu door terugrekenen de nulpunten exact bepalen.

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$$

**Opgave 16: Een kwadraat afsplitsen**

Bekijk in **Toepassen** hoe je een kwadratische functie door kwadraat afsplitsen kunt schrijven in de vorm $y = a(x - p)^2 + q$.

- a** Wat is het voordeel van die vorm?

- b** Laat zien, dat $x^2 + 8x = (x + 4)^2 - 16$.

- c** Schrijf nu de kwadratische functie $y = x^2 + 8x + 2$ in een vorm waarin je de top kunt aflezen.

Kwadraat afsplitsen werkt ook als er mintekens in de formules voorkomen, alleen kun je dan niet altijd meer een figuur erbij tekenen. Splits een kwadraat af bij de volgende kwadratische functies.

- d** $y = x^2 + 6x - 12$

- e** $y = x^2 - 4x + 9$

- f** $y = x^2 + 5x$

**Opgave 17: Een vergelijking oplossen door kwadraat afsplitsen**

Je kunt nu het kwadraat afsplitsen toepassen bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Elke kwadratische vergelijking kun je er mee oplossen...

Neem eerst de vergelijking $x^2 + 6x + 1 = 0$.

- a** Splits nu aan de linkerzijde van het isgelijktteken een kwadraat af. Los vervolgens de vergelijking op door terugrekenen.

Op dezelfde manier kun je de volgende vergelijkingen oplossen.

- b** Los op: $x^2 + 8x - 15 = 0$.

- c** Los op: $x^2 - 8x + 2 = 0$.

- d** Los op: $2x^2 - 8x + 2 = 0$.

Opgave 18: Een lastig geval

Kwadraat afsplitsen is een manier om elke kwadratische vergelijking op te lossen.

Los op: $3x^2 + 7x + 1 = 0$.



Opgave 19: De abc-formule afleiden

Kwadraat afsplitsen gaat altijd op dezelfde manier. Als je dit dus één keer netjes doet met de algemene vorm van een kwadratische vergelijking dan krijg je een formule voor alle oplossingen van een kwadratische vergelijking van die vorm.

Los op: $ax^2 + bx + c = 0$.

Practicum: Videoclip: abc-formule

Applet

In het engels spreek je van de 'quadratic formula', maar met een muziekje er onder is het leren werken met de abc-formule misschien toch wel aangenaam. De uitdrukking 'square root' betekent 'wortel', eigenlijk 'vierkantswortel'. Maar verder spreekt de videoclip voor zich.

(Bron: learningupgrade.com)

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het oplossen van kwadratische vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

3.4 Handig oplossen

Verkennen

Opgave V1

Je wilt de vergelijking $2x^2 + 12x = -10$ oplossen.

Doe dit op zoveel mogelijk verschillende manieren. Welke manier is het handigst?

Opgave V2

Je wilt de vergelijking $2x^2 + 12x = 0$ oplossen.

Laat zien hoe je dit op de handigste manier kunt doen.



Theorie

Opgave 1

Kwadratische vergelijkingen kun je beter niet altijd met de abc-formule oplossen. Die formule is als het ware de laatste mogelijkheid als je geen snellere manier kunt vinden.

- a** Bekijk eerst de vergelijkingen in de **Uitleg**. Als je deze vergelijkingen nog niet hebt opgelost, doe dit dan alsnog.

Bekijk de vergelijking $0,5x^2 = 4x - 6$.

- b** Wordt deze vergelijking na op 0 herleiden een drieterm of een tweeterm?

- c** Kun je deze vergelijking oplossen door ontbinden in factoren? Los de vergelijking verder op.

Bekijk de vergelijking $0,5x^2 = 4x - 5$.

- d** Waarom kun je deze vergelijking alleen met de abc-formule oplossen? Laat zien hoe je dat doet.

Bekijk de vergelijking $0,5x^2 - 4x = 5x$.

- e** Wordt deze vergelijking na op 0 herleiden een drieterm of een tweeterm? En gebruik je dan de abc-formule?



- f** Los deze vergelijking zo handig mogelijk op.

Opgave 2

Zoek bij de volgende vergelijkingen steeds de handigste manier van oplossen. Bereken vervolgens de exacte oplossingen.

a $0,1x(x - 2) = 1$

b $0,1(x - 2)^2 = 1$

c $0,1x(x - 2) = 0$

d $0,1x(x - 1) = 2$

Opgave 3

Bekijk de drie vergelijkingen in **Voorbeeld 1**.

- a** Ga na, dat je van de derde vergelijking inderdaad vrijwel direct de oplossing kunt opschrijven.



- b** Los nu de eerste vergelijking zo handig mogelijk op.

- c** Los ook de tweede vergelijking op.

Opgave 4

Je wilt de vergelijking $(2x - 7)^2 - 1 = 9$ oplossen.

- a** Waarom is nu het wegwerken van de haakjes niet handig?

- b** Los nu deze vergelijking zo handig mogelijk op.

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen op de handigste manier op.

- a** $3x^2 + 6x = 9$

- b** $15t(t - 1) = 30$



c $\frac{1}{2}x^2 = 32$

d $\frac{1}{4}p^2 = 3p$

e $(a - 4)^2 - 8 = 5$

f $4t + 1 = 6t^2$

g $(x - 2)(x + 2) = 1$

h $x^2 = 2x - 1$

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt een kwadratische vergelijking op een onverwachte manier opgelost.

a Los deze vergelijking eerst zelf op door de haakjes weg te werken.



- b** Los nu de vergelijking op de manier van het voorbeeld op.

Opgave 7

Los op:

a $(x + 1)^2 = (2x + 4)^2$

b $(x - 2)^2 = (-x + 3)^2$

c $(2a - 2)^2 = 36$

d $(5 + 3,5k)^2 = k^2$

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** wordt een kwadratische vergelijking op een onverwachte manier opgelost.

- a** Los deze vergelijking eerst zelf op door de haakjes weg te werken.



- b** Bekijk nu de manier van oplossen die in het voorbeeld wordt gebruikt. Waarom mag je niet gewoon beide zijden delen door $x + 4$?

- c** Wanneer kun je deze handige oplossingsmethode toepassen?

Opgave 9

Los op:

a $5x(x - 3) = 6x - 18$

b $x(x + 1) = 5x$

c $x^2 = 6x$

d $(4x + 1)(2x - 5) = x(2x - 5)$



Verwerken

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen op. Probeer steeds een zo handig mogelijke manier te vinden.

a $x^2 = x$

b $(x - 1)^2 - 1 = 0$

c $5 - x^2 = 3$

d $x - x^2 = 0$

e $x - x^2 = 5$

f $x^2 + 2x - 7 = 3$



g $x^2 + 2x + 1 = 0$

h $(x + 3)(x - 3) = 9$

i $(x - 4)(x + 5) = 6$

j $x(2 - x) = 3x$

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen op. Probeer steeds een zo handig mogelijke manier te vinden.

a $(2x - 3)(x - 1) = 3$

b $(2x - 3)(x - 1) = 0$



c $(s - 3)^2 + 5 = 0$

d $4(s + 1)^2 - 7 = 2$

e $t - (t - 1)^2 = -4$

f $(x - 2)^2 = (4 - 3x)^2$

g $3(x - 1)^2 = (x - 1)^2$

h $3p(p - 1) = (p + 1)(p - 1)$

i $(x - 4)^2 = 5 - x$



j $0,5x^2 - 4x = 10$

Opgave 12

Een parabool wordt beschreven door de formule $y = 0,25(x - 2)^2 + 5$. Een lijn gaat door de punten $A(0,6)$ en $B(10,12)$. De snijpunten van deze lijn en deze parabool zijn A en C .

Bereken de coördinaten van punt C .

Opgave 13

Een bedrijf maakt Blu-ray spelers. De winst die het bedrijf per week maakt wordt berekend met de formule $W = -6q^2 + 100q - 246$. De winst (W) is hier in duizenden euro en het aantal per week verkochte spelers (q) in honderdtallen.



- a Bereken voor welke waarden van q winst wordt gemaakt. Om welke aantallen Blu-ray spelers gaat het daarbij?



- b** Bij welk aantal wekelijkse verkochte Blu-ray spelers is de winst zo groot mogelijk? Hoe groot is deze maximale winst?

Toepassen

Je hebt in deze paragraaf enkele handige manieren van het oplossen van vergelijkingen gezien. Vrijwel altijd waren dat kwadratische vergelijkingen. Maar deze technieken zijn veel vaker te gebruiken. Vooral voor leerlingen die in de bovenbouw met wiskunde B verder willen zijn handige oplossingstechnieken onontbeerlijk.

Eén van de belangrijkste **handige oplossingsmethoden** is het ontbinden in factoren. Dat doe je ofwel door de grootste gemeenschappelijke deler buiten haakjes te halen, ofwel met behulp van de som-en-productmethode. Je schrijft daarmee de vergelijking in de vorm $A \cdot B = 0$ met oplossing $A = 0 \vee B = 0$.

Maar in een paar situaties kun je nog snellere oplossingsstappen afleiden:

- Een vergelijking van de vorm $A \cdot B = A \cdot C$ wordt $A = 0 \vee B = C$.
- Een vergelijking van de vorm $A^2 = B^2$ wordt $A = B \vee A = -B$.
- Een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ wordt $A \cdot D = B \cdot C$ mits $B \neq 0$ en $D \neq 0$.
- Een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ wordt $A = 0 \vee B = C$ mits $B \neq 0$ en $C \neq 0$.
- Een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{C}{B}$ wordt $A = C$ mits $B \neq 0$.



wordt

$$A \cdot D = B \cdot C$$

De derde techniek noem je wel **kruislings vermenigvuldigen**. In de figuur hiernaast zie je waarom. Let er wel op dat delen door 0 niet mag!

Opgave 14: Handige oplossingstechnieken

Bekijk in **Toepassen** hoe je vergelijkingen handig kunt oplossen door ontbinden en wortel-trekken. Je kunt daaruit nog weer snellere stappen afleiden.

- a** Welk voorbeeld maakt gebruik van de strategie dat een vergelijking van de vorm $A \cdot B = A \cdot C$ kan worden geschreven als $A = 0 \vee B = C$? Laat zien hoe deze aanpak volgt uit ontbinden in factoren.



- b** Laat ook zien, dat een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ kan worden geschreven als $A \cdot D = B \cdot C$.

- c** Leid zelf af dat een vergelijking van de vorm $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ kan worden herleid tot $A = 0 \vee B = C$

Opgave 15: Vergelijkingen met hogere machten

Los de volgende vergelijkingen op. Maak gebruik van handige oplossingstechnieken.

- a** $x^3 = 4x$

- b** $3x^2(x - 5) = x^2$

- c** $4(x - 1)^3 = x - 1$

- d** $(x^2 + 1)^2 = 4$

- e** $(2x + x^2 - 4)^2 = (x + 1)^2$

**Opgave 16: Vergelijkingen met breuken**

Los de volgende vergelijkingen op. Maak gebruik van handige oplossingstechnieken.

a $\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+3}{2x+3}$

b $\frac{x}{2x-1} = \frac{2x}{1-x}$

c $\frac{2x-1}{3x} = \frac{2x-1}{x+2}$

d $\frac{x-2}{2x} = \frac{5}{2x}$

e $\frac{1-x}{2x} = 1 - \frac{2}{x}$

f Je kunt nog meer gebroken vergelijkingen oefenen via [Practicum](#).



Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het handig oplossen van kwadratische vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

3.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Met kwadratische verbanden heb je al leren werken. In dit onderwerp is die kennis herhaald en uitgebreid. Het begrip kwadratische functie is ingevoerd en je hebt geleerd hoe je een grafiek moet maken van een kwadratische functie als de formule ervan is gegeven. Ook het werken met (kwadratische) vergelijkingen om snijpunten en nulpunten te berekenen is voorbij gekomen, met name de abc-formule, maar ook technieken om kwadratische vergelijkingen handig op te lossen.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **'Kwadratische verbanden'** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3 en 4 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- ▶ kwadratische functie — parabool — top — minimum — maximum — symmetrie-as — dalparabool — bergparabool — uiterste (extreme) waarde;
- ▶ top — nulpunten — ontbinden in factoren;
- ▶ tweede graads vergelijking (kwadratische vergelijking) — abc-formule — discriminant;
- ▶ handig oplossen.

Activiteiten

- ▶ van een kwadratische functie van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ de top en de extreme (uiterste) waarde bepalen;
- ▶ nulpunten en top bepalen, drie gedaantes van de formule bij een kwadratische functie herkennen;
- ▶ de abc-formule gebruiken om een kwadratische vergelijking systematisch op te lossen, de discriminant van een kwadratische vergelijking gebruiken;
- ▶ kwadratische vergelijkingen handig oplossen, onder andere door ontbinden in factoren, terugrekenen en de abc-formule.

Opgave 1

Een afgeschoten kogel volgt bij benadering een baan die de vorm van een parabool heeft. Een voorbeeld van zo'n kogelbaan is de parabool met formule $h = -0,0001(x - 150)^2 + 4$. Hierin is h de hoogte van de kogel boven de grond en x de afstand die de kogel horizontaal heeft afgelegd.

- a** Op welke hoogte wordt de kogel afgeschoten?



- b** Welk punt is het hoogste punt dat de kogel bereikt?

- c** Na hoeveel m komt deze kogel op de grond?

Opgave 2

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - \frac{1}{2}$.

- a** Laat zien, dat deze formule kan worden geschreven als $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$.

- b** Welke extreme waarde heeft deze kwadratische functie? Is het een minimum of een maximum?

- c** Laat zien dat deze formule kan worden geschreven als $y = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 4)$.

- d** Wat zijn de nulpunten van de parabool die de grafiek is van deze kwadratische functie?

**Opgave 3**

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = -0,3(x + 2)(x - 5)$.

Bereken de top van de bijbehorende parabool en teken hem.

Opgave 4

Los de volgende kwadratische vergelijkingen exact op.

a $x^2 + 3x - 5 = 0$

b $x^2 + 3x - 4 = 0$

c $2x^2 - 4x = 48$

d $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 0$

e $3x^2 + x\sqrt{3} = 2$



f $x(x - 3) = 2 + x^2$

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen zo handig mogelijk exact op.

a $(2x - 6)^2 = 11$

b $x(x - 2) = 5x - 10$

c $(x - 3)(2x - 5) = 15$

d $(x - 3)(2x - 5) = 0$

e $(x^2 - 3)^2 = (2x + 1)^2$



f $(x^2 - 4)(x - 3) = 12$

Opgave 6

Gegeven is lineaire functie $y = 4x$ en de kwadratische functie $y = -0,5x^2 + 6x$.

- a** De grafiek van de lineaire functie heeft twee punten gemeen met de grafiek van de kwadratische functie. Toon dit aan met behulp van de bijbehorende vergelijking.

- b** Bereken beide snijpunten.

De lijn met formule $y = 4x + 2$ is evenwijdig met grafiek van de lineaire functie.

- c** Laat zien dat deze lijn precies één punt met de grafiek van de kwadratische functie gemeen heeft.



Toepassen

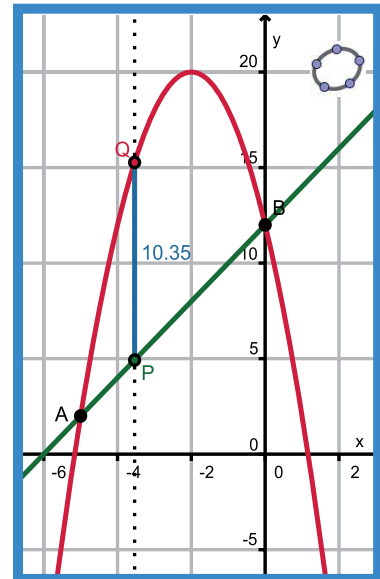
Applet

Je ziet hier de grafieken van de kwadratische functie met formule $y = -2x^2 - 8x + 12$ en de lineaire functie met formule $y = 2x + 12$.

Je ziet hier in de figuur een lijnstuk PQ dat evenwijdig is aan de verticale as en waarvan punt P op de grafiek van de lineaire functie en punt Q op de grafiek van de kwadratische functie ligt. De x -coördinaat van de punten P en Q is een getal tussen -5 en 0 .

Als je het punt Q verplaatst dan wordt de lengte van het lijnstuk PQ langer of korter. Met de applet kun je uitzoeken voor welke waarde van x de lengte van dit lijnstuk maximaal is.

Maar je kunt dit ook exact berekenen...



Opgave 7: Maximale lengte

Tussen de grafieken van de functies die je in **Toepassen** ziet bevindt zich lijnstuk PQ .

De lengte van dit lijnstuk kan variëren, je wilt de maximale lengte weten, want de minimale lengte is 0.

- a** Waarom is het minimum van de lengte van het daar beschreven lijnstuk 0?

- b** Noem de x -waarde van beide punten p . Welke coördinaten hebben P en Q dan?

- c** Leg uit dat de lengte van lijnstuk PQ gelijk is aan $L = -2p^2 - 10p$.



- d** De grafiek van L als functie van p is een bergparabool. Bereken het maximum van die functie.

Opgave 8: Winstmaximalisatie

In de micro-economie wordt het volgende rekenmodel voor de winst van de verkoop van een bepaald product gehanteerd als het bedrijf de enige aanbieder is.

Het aantal verkochte producten hangt alleen af van de prijs p in euro per stuk. Hoe hoger de prijs, hoe lager de hoeveelheid q die van dit product wordt verkocht per tijdseenheid. Bijvoorbeeld kan per week gelden $q = 500 - 2p$.

De inkoopkosten hangen weer af van de prijs per eenheid en de voorraadkosten. Bijvoorbeeld kan een eenheid product € 5,00 kosten en de voorraadkosten kunnen € 2000,- per week zijn.

Voor de opbrengst als wekelijks de hele voorraad wordt verkocht geldt $TO = p \cdot q$, de wekelijkse kosten noem je TK en de winst is $TW = TO - TK$.

- a** Waarom is $TO = p \cdot q$?

- b** Laat zien dat $TW = p(500 - 2p) - (2000 + 5q)$.

Als je in de formule bij b $q = 500 - 2p$ substitueert, dan kun je hem herleiden tot $TW = -2p^2 + 510p - 4500$.

- c** Laat dat zien.



De winst is in dit rekenmodel een kwadratische functie van p .

d Bereken de maximale winst.

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

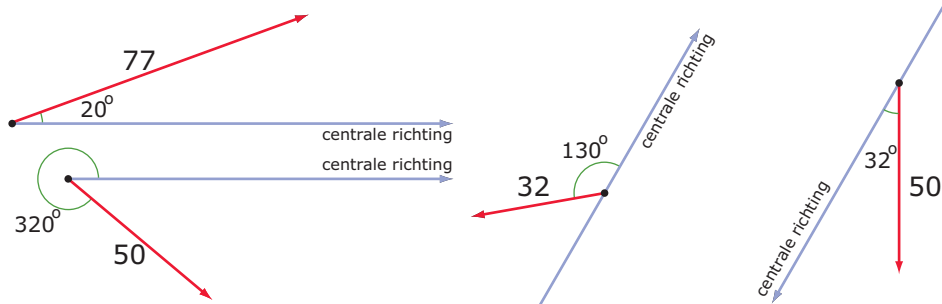
- 4. Lineaire verbanden**
- 5. Goniometrie**
- 6. Kwadratische verbanden**



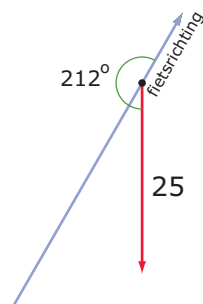
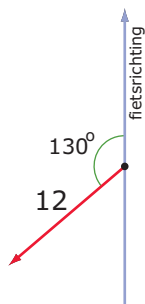
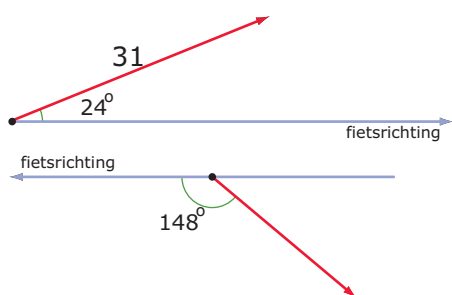
www.math4all.nl



Werkblad bij Opgave 6 op pagina 62



Werkblad bij Opgave 11 op pagina 65



Werkblad bij Opgave 1 op pagina 110

