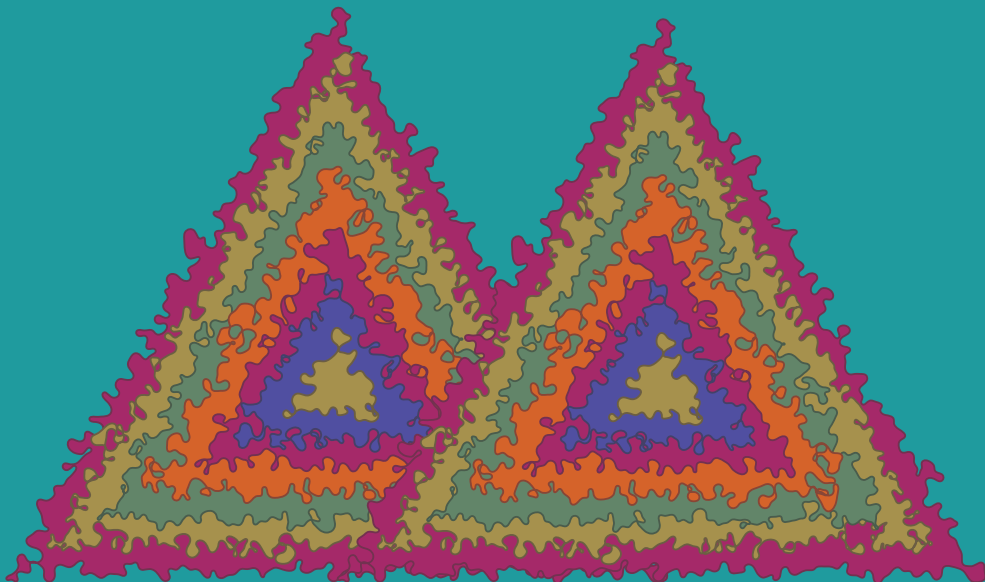


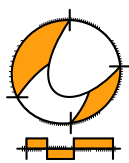
# Wiskunde

# 3 HAVO

Katern 2 / Theorie

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website [www.math4all.nl](http://www.math4all.nl) is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via [info@math4all.nl](mailto:info@math4all.nl). Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

## Voorwoord 3

## 1 Lineaire verbanden 3

- 1.1 Recht evenredig 6
- 1.2 Lineaire functies 8
- 1.3 Het hellingsgetal 10
- 1.4 Lineaire modellen 13

## 2 Goniometrie 15

- 2.1 Vectoren 18
- 2.2 Sinus en cosinus 21
- 2.3 Hoeken berekenen 24
- 2.4 Helling en tangens 27
- 2.5 Rekenen in driehoeken 30

## 3 Kwadratische verbanden 33

- 3.1 Kwadratische functies 36
- 3.2 Nulpunten en top 39
- 3.3 Kwadratische vergelijkingen 42
- 3.4 Handig oplossen 45

## Register 49



# Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website [www.math4all.nl](http://www.math4all.nl). In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

### Begrippen

- ▶ recht evenredig — evenredigheidsconstante — recht evenredig verband;
- ▶ lineaire functie — richtingscoëfficiënt;
- ▶ evenwijdige lijnen — vergelijking van een lijn;
- ▶ lineair model — snijpunten en nulpunten van lineaire functies.

### Activiteiten

- ▶ een recht evenredig verband en de evenredigheidsconstante herkennen en er grafieken bij tekenen;
- ▶ een lineaire functie en de richtingscoëfficiënt herkennen en er grafieken bij tekenen;
- ▶ een formule opstellen bij een lijn door twee gegeven punten;
- ▶ snijpunten en nulpunten bij grafieken van lineaire functies berekenen en interpreteren.

## Hoe hoger, des te kouder



Domein

# Functies en grafieken

Hoofdstuk

## Lineaire verbanden

Inhoud

|     |                   |    |
|-----|-------------------|----|
| 1.1 | Recht evenredig   | 6  |
| 1.2 | Lineaire functies | 8  |
| 1.3 | Het hellingsgetal | 10 |
| 1.4 | Lineaire modellen | 13 |



# 1.1 Recht evenredig

## Inleiding

In Denemarken wordt als betaalmiddel de Deense Kroon (DKK) gebruikt. Een Deense Kroon is ongeveer € 0,13 waard. Hoeveel kost het om bijvoorbeeld 300 DKK te kopen? En hoeveel kun je er krijgen voor 100 euro?



### Je leert in dit onderwerp

- wat een recht evenredig verband tussen twee variabelen is en de evenredigheidsconstante (of de richtingscoëfficiënt of het hellingsgetal) bepalen en daarmee een formule opstellen;
- grafieken tekenen bij recht evenredige verbanden.

### Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule.

### Opgave V1

## Uitleg

Een winkelier verkoopt losse LegoBasic doosjes voor € 8,99 per stuk. De opbrengst  $R$  voor de winkelier is dan afhankelijk van het aantal van die doosjes  $a$  dat hij verkoopt. Als de winkelier tweemaal zo veel verkoopt is zijn opbrengst ook tweemaal zo groot. Hier geldt de formule  $R = 8,99 \cdot a$ . Met  $R$  voor de opbrengst in euro en  $a$  het aantal doosjes dat de winkelier verkocht heeft. De variabele  $R$  is nu 'recht evenredig' met de variabele  $a$ , omdat een verdubbeling van de éne variabele ook leidt tot een verdubbeling van de andere variabele.



### Opgave 1 Opgave 2

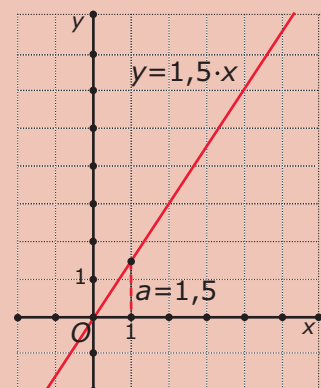
## Theorie

Applet

Een variabele  $y$  is **recht evenredig** met variabele  $x$  als een verdubbeling van  $x$  ook een verdubbeling van  $y$  tot gevolg heeft. De bijbehorende formule heeft dan de vorm  $y = a \cdot x$  met  $a$  een willekeurig reëel getal.

De bijbehorende grafiek is een rechte lijn die door de oorsprong gaat.

- $a$  heet de **evenredigheidsconstante**.
- $a$  bepaalt hoe schuin de lijn omhoog of omlaag loopt. Als  $a$  positief is, stijgt de lijn, is  $a$  negatief dan daalt de lijn. Daarom wordt  $a$  ook wel eens het **hellingsgetal** genoemd of de **richtingscoëfficiënt**.







Omgekeerd hoort ook bij elke rechte lijn door de oorsprong van het assenstelsel een **recht evenredig verband** tussen  $x$  en  $y$ .

### Voorbeeld 1

Applet

Gegeven zijn de formules  $y_1 = 2x$  en  $y_2 = 2x + 3$ . Van welke van beide formules kun je met deze applet de grafiek maken? Bij welk van beide formules is sprake van een recht evenredig verband?

Antwoord

Door  $a = 2$  te kiezen maak je de grafiek van  $y_1 = 2x$ .

De grafiek van  $y_2 = 2x + 3$  kun je niet maken want die grafiek gaat niet door  $(0,0)$ , omdat bij  $x = 0$  de uitkomst  $y = 3$  hoort.

Alleen bij  $y_1 = 2x$  is sprake van een recht evenredig verband omdat de grafiek daarvan wel een rechte lijn door  $(0,0)$  is.

[Opgave 3](#) [Opgave 4](#)

### Voorbeeld 2

Een schaatser schaatst met een constante snelheid van Sneek naar Leeuwarden. Na 14 minuten heeft hij 5 kilometer afgelegd. Geef een formule voor de tijd  $t$  die hij onderweg is (in minuten) afhankelijk van de afgelegde afstand  $s$  in km.

Antwoord

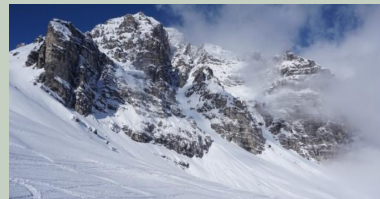
De schaatser doet over elke km  $14/5 = 2,8$  minuten. Over  $s$  km doet hij  $2,8 \cdot s$  minuten, dus  $t = 2,8 \cdot s$  minuten. Dit is de gevraagde formule.

[Opgave 5](#) [Opgave 6](#)

## 1.2 Lineaire functies

### Inleiding

Hoog in de bergen is het meestal kouder dan vlak boven de zeespiegel. Welke verband is er eigenlijk tussen de hoogte waarop je zit en de temperatuur?



### Je leert in dit onderwerp

- wat een lineair verband tussen twee variabelen is en de richtingscoëfficiënt (of het hellingsgetal) en het snijpunt met de verticale as aflezen uit de formule;
- (snel) grafieken tekenen bij lineaire verbanden.

### Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- werken met recht evenredige verbanden, formule en grafieken erbij maken, de begrippen evenredigheidsconstante en richtingscoëfficiënt gebruiken.

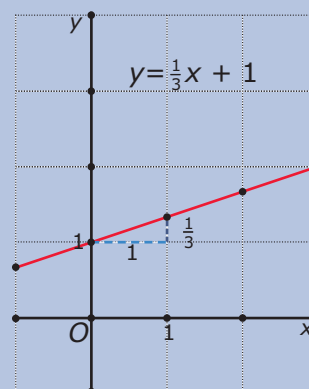
### Opgave V1

### Uitleg

De grafiek bij de formule  $y = \frac{1}{3}x + 1$  is een rechte lijn. Want als je begint met de uitkomst voor  $x = 0$  te berekenen ( $y = 1$ ), dan wordt daarna elke keer dat je de  $x$ -waarde met 1 verhoogt, de  $y$ -waarde met  $\frac{1}{3}$  verhoogd. En als je de  $x$ -waarde met 1 verlaagt, dan wordt de  $y$ -waarde met  $\frac{1}{3}$  verlaagd. Dat getal  $\frac{1}{3}$  is de coëfficiënt van  $x$  en bepaalt de richting van de lijn. Het is de 'richtingscoëfficiënt' of ook wel het 'hellingsgetal' van de lijn.

Bij een formule die in de vorm  $y = \dots$  (met op de stippeltjes een uitdrukking met alleen  $x$  als variabele) staat, zeg je dat  $y$  een 'lineaire functie' is van  $x$ .

De grafiek gaat door  $(0,1)$  en per stap met  $\frac{1}{3}$  omhoog. Het volgende roosterpunt is daarom  $(3,2)$  en daarna  $(6,3)$ , enzovoorts.



### Opgave 1 Opgave 2



## Theorie

Applet

Een variabele  $y$  is een **lineaire functie** van  $x$  als er een formule van de vorm

$$y = a \cdot x + b$$

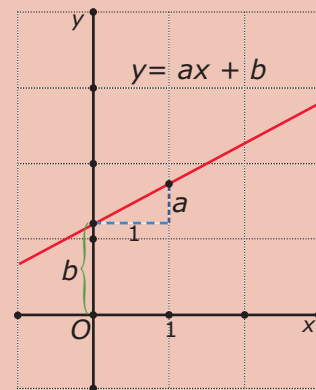
met  $a$  en  $b$  willekeurige reële getallen bij hoort.

De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.

De waarden van  $a$  en  $b$  kun je nog kiezen.

- $a$  heet de **richtingscoëfficiënt** of het **hellingsgetal** van de lijn. Dit getal geeft de toename of afname van  $y$  als  $x$  met 1 wordt verhoogd.  $a$  bepaalt hoe schuin de lijn omhoog of omlaag loopt.
- $b$  bepaalt het snijpunt met de  $y$ -as, dat is  $(0, b)$ .

Bij elke rechte lijn in een  $xy$ -assenstelsel hoort een **lineair verband** tussen  $x$  en  $y$ .



## Voorbeeld 1

Applet

Gegeven is de formule  $y = 1,5x + 3$ . Omdat deze formule de vorm  $y = a \cdot x + b$  heeft, is  $y$  een lineaire functie van  $x$ . De grafiek is een rechte lijn die je snel kunt tekenen omdat

- hij door het punt  $(0, 3)$  moet gaan;
- het hellingsgetal 1,5 is, wat betekent dat het vergroten van de  $x$ -waarde met 1 een toename van de  $y$ -waarde met 1,5 tot gevolg heeft.

Zo kun je gemakkelijk meer punten van de rechte lijn vinden. Bepaal in ieder geval eerst twee roosterpunten om hem te tekenen.

Door in de applet de waarden van  $a$  en  $b$  te veranderen, kun je van andere lineaire functies de grafiek maken.

[Opgave 3](#) [Opgave 4](#)

## Voorbeeld 2

Applet

Gegeven zijn de lineaire functies  $y = 0,5x + b$ . Voor welke waarde van  $b$  gaat de grafiek door het punt  $(3, 5)$ ?

Antwoord

Vul  $x = 3$  en  $y = 5$  in de gegeven formule in. Je vindt:  $5 = 0,5 \cdot 3 + b$ .

Dit levert op:  $b = 3,5$ .

[Opgave 5](#) [Opgave 6](#)

## 1.3 Het hellingsgetal

### Inleiding

De grafiek van een lineair verband wordt bepaald door twee gegevens. Dat kunnen de richtingscoëfficiënt en het snijpunt met de verticale as zijn, maar het kunnen ook gewoon twee gegeven punten van de grafiek zijn. Maar hoe bepaal je dan de bijbehorende formule?



### Je leert in dit onderwerp

- bij een lineair verband de richtingscoëfficiënt (of het hellingsgetal) berekenen en daarmee een formule opstellen.

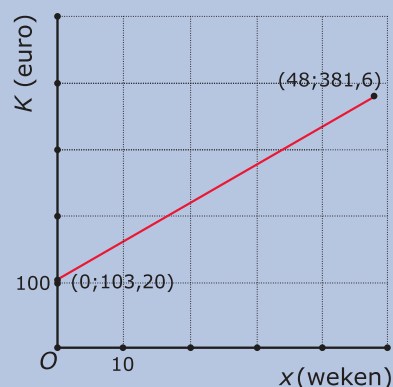
### Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- werken met recht evenredige en lineaire verbanden.

Opgave V1 Opgave V2

### Uitleg

In de gemeente Vijfhouten worden de zwarte vuilcontainers wekelijks en maximaal 48 keer per jaar opgehaald. Elk gezin betaalt per jaar € 103,20 plus een vast bedrag voor elke geleegde zwarte container. Als je iedere week de container laat legen moet je na een jaar € 381,60 betalen. Deze grafiek laat het verband zien tussen het aantal keren  $x$  dat je de zwarte container laat legen en de kosten per jaar  $K$ .



Bij deze grafiek hoort een lineaire functie van de vorm  $K = ax + b$ . Uit de gegevens volgt onmiddellijk  $b = 103,20$ .

Maar hoe bepaal je nu de waarde van de richtingscoëfficiënt  $a$ ?

Bekijk de twee gegeven punten van de grafiek  $(0; 103,20)$  en  $(48; 381,60)$ . Het aantal weken  $x$  neemt tussen deze twee punten toe met  $48 - 0 = 48$ . Het te betalen bedrag  $K$  neemt tussen deze twee punten toe met  $381,60 - 103,20 = 278,40$ . Per week is dat  $278,40 \div 48 = 5,80$ . De toename per eenheid is het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, van de lijn.

Kortweg:  $a = \frac{381,60 - 103,20}{48 - 0} = 5,80$ .

En de bij de grafiek passende lineaire functie is  $K = 5,80x + 103,20$ .

Opgave 1 Opgave 2



## Theorie

Applet

De algemene formule voor een lineair verband is

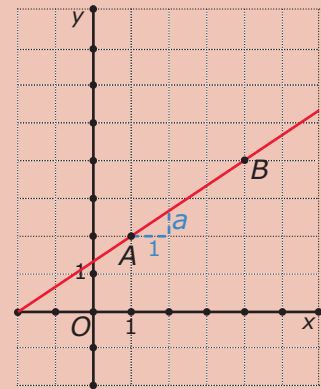
$y = a \cdot x + b$  met  $a$  en  $b$  willekeurige reële getallen.

Het **hellingsgetal**, of de **richtingscoëfficiënt**  $a$ , geeft aan hoeveel de  $y$ -waarde stijgt of daalt als de  $x$ -waarde met 1 toeneemt.

Van een lineaire grafiek waarvan alleen twee punten bekend zijn, kun je zelf een bijpassende formule opstellen. Je bepaalt dan eerst het hellingsgetal  $a$  door het verschil van de  $y$ -waarden van beide punten te delen door het verschil van de  $x$ -waarden. (Dit kan alleen bij lijnen die niet verticaal lopen.)

Bij de lijn door  $A(1,2)$  en  $B(4,4)$  is  $a = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$ .

**Evenwijdige lijnen** hebben hetzelfde hellingsgetal.



## Voorbeeld 1

Applet

Stel een formule op bij de lijn door de punten  $A(0,1)$  en  $B(1,4)$ .

Antwoord

De formule heeft de vorm  $y = a \cdot x + b$  waarin  $a$  het hellingsgetal is. Dit getal vind je door te bepalen hoeveel  $y$  toeneemt bij een toename van  $x$  met 1.

Teken daartoe eerst de twee punten en de lijn in een assenstelsel.

Maak deze lijn in de applet door de punten  $A$  en  $B$  op de juiste plek te zetten.

- Tussen de punten  $A$  en  $B$  neemt  $x$  toe met 1.
- Tussen de punten  $A$  en  $B$  neemt  $y$  toe met  $4 - 1 = 3$ .

Je weet nu dat het hellingsgetal  $a = 3$  is. De juiste waarde van  $b$  lees je af bij het punt op de verticale as:  $b = 1$ .

De gevraagde formule wordt  $y = 3x + 1$ .

[Opgave 3](#) [Opgave 4](#)

## Voorbeeld 2

Applet

Stel een formule op bij de lijn door de punten  $A(1,2)$  en  $B(4,4)$ .

Antwoord

De formule heeft de vorm  $y = a \cdot x + b$  waarin  $a$  het hellingsgetal is. Dit getal vind je door te bepalen hoeveel  $y$  toeneemt bij een toename van  $x$  met 1. Dat kun je zo doen:

- Tussen de punten  $A$  en  $B$  neemt  $x$  toe met  $4 - 1 = 3$ .
- Tussen de punten  $A$  en  $B$  neemt  $y$  toe met  $4 - 2 = 2$ .
- Als  $x$  met 1 toeneemt, neemt  $y$  toe met  $\frac{2}{3}$ .



Nu je weet dat het hellingsgetal  $a = \frac{2}{3}$ , wordt je formule  $y = \frac{2}{3}x + b$ . De juiste waarde van  $b$  bepaal je door de coördinaten van één van beide gegeven punten in de vergelijking in te vullen.

Ga na, dat je dezelfde vergelijking krijgt als in de applet. (Maar nu exact in breuken!)

[Opgave 5](#) [Opgave 6](#) [Opgave 7](#)

### Voorbeeld 3

Een lijn  $k$  gaat door het punt  $(1,20)$  en loopt evenwijdig met de lijn  $l$ . Bij lijn  $l$  hoort de formule  $y = 2x + 1$ . Welke formule hoort bij lijn  $k$ ?

Antwoord

Omdat de lijnen  $l$  en  $k$  evenwijdig zijn, hebben ze dezelfde richtingscoëfficiënt. De formule bij lijn  $k$  heeft dus de vorm  $y = 2x + b$ .

De juiste waarde van  $b$  bepaal je door de coördinaten van het gegeven punt van  $k$  in de vergelijking in te vullen:  $20 = 2 \cdot 1 + b$  geeft  $b = 18$ .

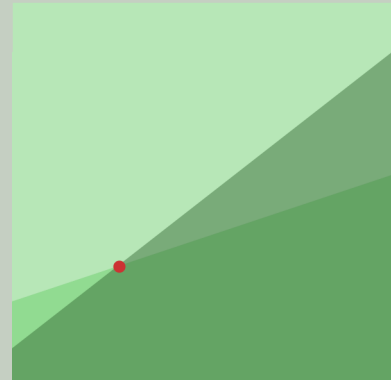
De gevraagde formule is  $y = 2x + 18$ .

[Opgave 8](#) [Opgave 9](#)

## 1.4 Lineaire modellen

### Inleiding

Soms heb je met meerdere lineaire verbanden te maken. Bijvoorbeeld als je bij het oplossen van sommige puzzels gebruik maakt van twee onbekenden en daar formules bij opstelt die je kunt herleiden tot lineaire functies. Je noemt dat 'een lineair model opstellen'. De bijbehorende lineaire vergelijking los je met de balansmethode op.



### Je leert in dit onderwerp

- het snijpunt van twee lineaire functies berekenen;
- het nulpunt van een lineaire functie berekenen;
- bij vraagstukken die zich daartoe lenen formules opstellen die je kunt herleiden tot lineaire functies en daarmee het probleem oplossen.

### Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- werken met recht evenredige en lineaire verbanden;
- bij een lineair verband de richtingscoëfficiënt (of het hellingsgetal) berekenen en daarmee een formule opstellen.

Opgave V1 Opgave V2

### Uitleg

Bij **Opgave V1** werd je een 'probleem' voorgeschoteld om op te lossen. Waarschijnlijk kwam je er met gewoon proberen wel redelijk snel uit, het is ook nog geen heel moeilijke puzzel. Maar ook werd je een meer systematisch aanpak getoond (in de tweede opgave) met behulp van lineaire verbanden. Als je een probleem kunt 'vertalen' naar lineaire formules dan zeg je wel dat je een lineair model hebt gemaakt.

Bij het probleem van de leeftijden van Bob en Jeroen worden twee variabelen ingevoerd:  $x$  voor Bob's leeftijd in 2006 en  $y$  voor Jeroen's leeftijd in 2006. Het lineaire model bestaat uit twee lineaire formules, te weten  $x + y = 22$  en  $y + 4 = 2(x + 4)$ .

Deze formules kun je met de balansmethode herleiden tot de vorm  $y = \dots$ . Je kunt er dan grafieken bij tekenen zoals die hiernaast. Het punt dat aan beide formules voldoet is het **snijpunt** van beide grafieken. Omdat in dat punt de  $y$ -waarden van beide formules gelijk zijn, kun je het uitrekenen door  $-x + 22 = 2x + 4$  op te lossen.





Deze lineaire vergelijking kun je oplossen met de balansmethode. Ga na dat je  $x = 6$  vindt. Door invullen van deze  $x$ -waarde in één van beide lineaire functies vind je ook de gewenste  $y$ -waarde. Het snijpunt van beide grafieken is  $(6,16)$ .

En daarmee kun je antwoord geven op de vraag die werd gesteld.

Opgave 1 Opgave 2

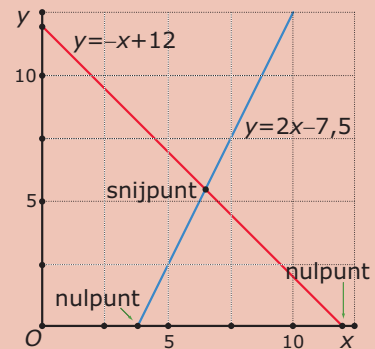
### Theorie

Als je een probleem kunt 'vertalen' naar lineaire formules dan zeg je wel dat je een **lineair model** hebt gemaakt.

Vaak gaat het dan om het berekenen van een **snijpunt** van de grafieken bij twee formules.

Het snijpunt van de grafieken bij lineaire formules zoals  $x + y = 12$  en  $4x - 2y = 15$  is als volgt uit te rekenen:

- Eerst herleid je beide vergelijkingen tot  $y$  een functie is van  $x$ .
- Je krijgt dan twee formules van de vorm  $y = \dots$   
Die kun je aan elkaar gelijk stellen:  $-x + 12 = 2x - 7,5$ .
- Deze vergelijking los je op met de balansmethode. Je vindt:  $x = 6,5$ .
- De bijbehorende waarde van  $y$  vind je door de gevonden  $x$ -waarde in één van beide formules te substitueren.



Je krijgt als snijpunt van beide lijnen  $(6,5; 5,5)$ .

Ook een **nulpunt**, dus het snijpunt van de grafiek met de  $x$  as, van een lineaire formule is op te sporen door een vergelijking op te lossen. Het nulpunt van de formule  $y = 2x - 7,5$  vind je door  $2x - 7,5 = 0$  op te lossen. Dit geeft  $x = 3,75$ , dus het nulpunt is  $(3,75; 0)$ .

### Voorbeeld 1

Bereken het snijpunt van de lijn  $l$  door  $(2,0)$  en  $(3,4)$  en de lijn  $k$  door  $(2,1)$  en  $(4,0)$ .

Antwoord

Stel eerst bijbehorende lineaire formules op.

- Bij lijn  $l$  vind je de formule  $y = 4x - 8$ .
- Bij lijn  $k$  vind je de formule  $y = -0,5x + 2$ .

Voor het snijpunt geldt  $4x - 8 = -0,5x + 2$ .

Met de balansmethode vind je  $x = -\frac{20}{9}$ . Het snijpunt wordt na invullen van deze  $x$ -waarde  $(-\frac{20}{9}; \frac{8}{9})$ .

Opgave 3 Opgave 4



**Voorbeeld 2**

Een goed voorbeeld van het werken met een lineair model is de keuze tussen een auto met een benzinemotor of een elektrische auto. Ga er van uit dat je zo'n auto least: je huurt hem van een leasemaatschappij voor auto's.

In de tabel zie je enkele gegevens uit 2020.

Van dezelfde auto is de benzineversie vergeleken met de elektrische versie.

Voor de benzineversie betaal je nog € 10 per maand aan wegenbelasting.

Hierbij kun je twee formules opstellen voor de kosten  $K$  als functie van het aantal maandelijks gereden kilometers  $a$ . Laat zien hoe dat gaat en bereken bij welk aantal gereden km per maand het rijden in de elektrische versie voordeliger is.

| Auto leasen |            |         |
|-------------|------------|---------|
| Kosten in € | elektrisch | benzine |
| per maand   | 360        | 220     |
| per km      | 0,07       | 0,12    |

Antwoord

Leidt zelf af dat uit de gegevens volgt:

- Voor de benzineauto:  $K = 230 + 0,12 \cdot a$ .
- Voor de elektrische auto:  $K = 360 + 0,07 \cdot a$ .

Je kunt nu narekenen dat je volgens deze schatting vanaf ongeveer 2600 km per maand voordeliger uit bent met de elektrische versie.

[Opgave 5](#) [Opgave 6](#) [Opgave 7](#)

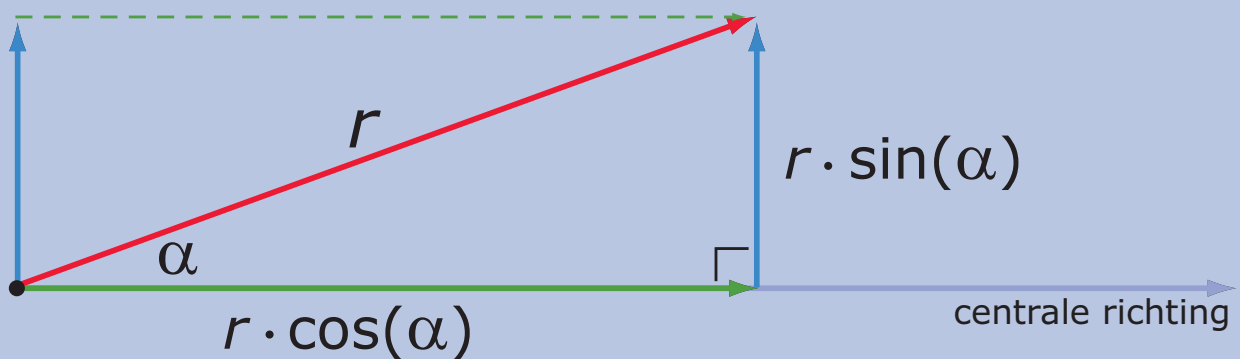
### Begrippen

- ▶ vector — richtingshoek, draaihoek — componenten van een vector;
- ▶ sinus — cosinus — eenheidsvector — richtingshoek;
- ▶ hoeken berekenen met sinus en cosinus;
- ▶ tangens — hellingshoek;
- ▶ goniometrische verhoudingen — formules voor sinus, cosinus en tangens.

### Activiteiten

- ▶ een vector ontbinden in een zijwaartse en een centrale component;
- ▶ sinus en cosinus gebruiken om componenten van vectoren te berekenen;
- ▶ hoeken berekenen met behulp van sinus en cosinus;
- ▶ berekeningen met helling, tangens en hellingshoeken uitvoeren;
- ▶ zijden en hoeken berekenen in rechthoekige driehoeken en dit toepassen meetkundige situaties.

## Vectoren ontleden



Domein

# Meetkunde

Hoofdstuk

## Goniometrie

Inhoud

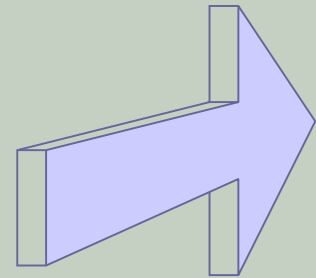
|     |                       |    |
|-----|-----------------------|----|
| 2.1 | Vectoren              | 18 |
| 2.2 | Sinus en cosinus      | 21 |
| 2.3 | Hoeken berekenen      | 24 |
| 2.4 | Helling en tangens    | 27 |
| 2.5 | Rekenen in driehoeken | 30 |

2

## 2.1 Vectoren

### Inleiding

Twee belangrijke begrippen in de meetkunde zijn 'afstand' en 'richting'. Een vector combineert die twee begrippen. Een vector is een pijl met een richting en een afstand. Daarom ga je nu eerst werken met vectoren.



### Je leert in dit onderwerp

- het begrip vector (een pijl met richting en afstand);
- de begrippen hoofdrichting (of centrale richting), centrale component en zijwaartse component;
- een vector ontbinden in de twee componenten.

### Voorkennis

- de basisbegrippen van vlakke meetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek;
- hoeken meten in graden.

Opgave V1 Opgave V2

### Uitleg 1

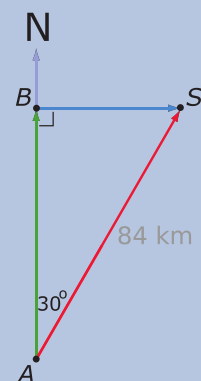
Applet

Een schip vaart op een koers van  $30^\circ$  met het noorden en heeft een snelheid van 16,8 km/uur en is gestart in punt A. Na 5 uur is het aangekomen in punt S. Zie de figuur hiernaast.

Deze **verplaatsing** kun je voorstellen door een pijl van A naar S. Je spreekt van een **vector**  $\overrightarrow{AS}$ . Vector  $\overrightarrow{AS}$  heeft een lengte van 84 km en maakt een hoek ten opzichte van een vooraf vastgestelde richting. Voor koersen is dat meestal het noorden.

Je kunt de vector **ontbinden in twee loodrechte componenten**, namelijk een component in de noordelijke richting en een component in de oostelijke richting. Deze twee componenten staan loodrecht op elkaar. In de figuur zijn dit de vectoren  $\overrightarrow{AB}$  en  $\overrightarrow{BS}$ . Als je de figuur op schaal tekent, dan kun je vaststellen dat het schip ongeveer 72,7 kilometer ten noorden van punt A en 42 kilometer ten oosten van punt A zit.

De componenten waarin je de vector  $\overrightarrow{AS}$  kunt ontbinden, hangen af van de koershoek met het Noorden. Die hoek heeft bovendien een bepaalde richting. Bij koersen worden hoeken ten opzichte van het Noorden en met de klok mee getekend.





## Uitleg 2

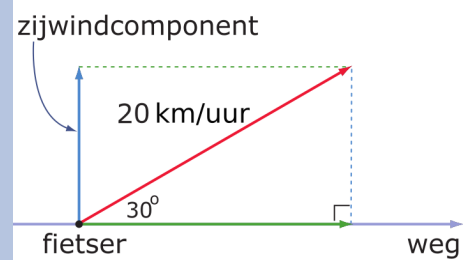
Applet

Een fietser moet de vele kilometers die hij op een kaarsrechte polderweg moet afleggen, rekening houden met de wind. Je ziet in de figuur dat hij de wind schuin mee heeft. De hoek die de windvector met zijn fietsrichting maakt is  $30^\circ$ . De windvector  $\vec{w}$  druk je uit in km/h (km per uur).

Maar een deel van die windvector werkt in de richting waarin wordt gefietst. Dat deel van de windvector helpt de fietser vooruit. In de figuur zie je hoe groot die meewindcomponent in de fietsrichting is.

Maakt de wind een hoek van  $140^\circ$  met de fietsrichting, dan heeft de fietser de wind schuin tegen. Een deel van de windvector werkt nu precies tegen de fietsrichting in. Je geeft die tegenwindcomponent aan met een negatief getal, net als in een assenstelsel gebruikelijk is.

Merk op dat nu de hoek van de windvector met de fietsrichting tegen de wijzers van de klok in wordt uitgezet!



[Opgave 1](#) [Opgave 2](#) [Opgave 3](#) [Opgave 4](#)

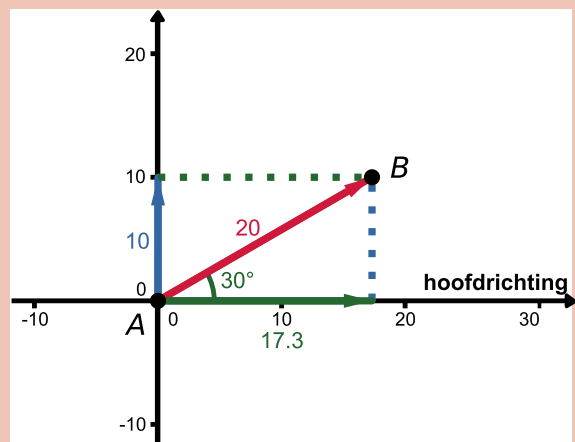
## Theorie

Applet

Een **vector** heeft een bepaalde lengte en maakt een hoek met een vooraf afgesproken richting. Je noemt die vooraf afgesproken richting wel de **hoofdriching** of de **centrale richting**. In een assenstelsel is dat de x-as.

Zo'n vector kun je aangeven door bijvoorbeeld  $\vec{v}$ , maar ook wel door  $\overrightarrow{AB}$  als hij een verplaatsing van punt A naar punt B aangeeft.

De hoek wordt uitgezet vanaf de hoofdriching en tegen de wijzers van de klok in. (Hoeken bij koersen ten opzichte van het Noorden vormen hierop een uitzondering, die meet je met de klok mee.)



Zo'n vector kun je **ontbinden in twee loodrechte componenten**:

- een **centrale component** in de centrale richting;
- een **zijwaartse component** in een richting loodrecht op de centrale richting.

Deze componenten kunnen - net als de coördinaten in een assenstelsel - zowel positieve als negatieve waarden hebben. Voorlopig bepaal je die componenten door tekeningen op schaal te maken en te meten.

**Voorbeeld 1**

Applet

Met de applet kun je bij elke vector van lengte 1 de centrale component en de zijwaartse component aflezen. Je moet zelf bedenken of de component positief of negatief is.

Een vliegtuig stijgt op onder een hoek van  $20^\circ$ . Hoe hoog vliegt het na 1000 meter?

Antwoord

Met de applet maak je een eenheidsvector met een hoek van  $20^\circ$ .

Je leest de componenten af:

- de centrale component is 0,940
- de zijwaartse component is 0,342

Bij het vliegtuig is de begane grond de hoofdrichting. De vluchtvector heeft een lengte van 1000 m. De hoogte is de zijwaartse component van die vector en is dus ongeveer  $1000 \cdot 0,342 = 342$  m.

Het vliegtuig vliegt op 342 m hoogte.

[Opgave 5](#) [Opgave 6](#) [Opgave 7](#) [Opgave 8](#)

**Voorbeeld 2**

Applet

Met de applet kun je bij elke vector van lengte 1 de centrale component en de zijwaartse component aflezen. Je moet zelf bedenken of de component positief of negatief is.

Een vliegtuig vliegt op een hoogte 5000 m en daalt onder een hoek van  $20^\circ$  met de horizontale richting. Hoe hoog vliegt het na 3000 meter te hebben afgelegd?

Antwoord

De hoek van de vluchtvector met de horizontale richting is nu  $340^\circ$ . Met de applet maak je een eenheidsvector met een hoek van  $340^\circ$ .

Je leest de componenten af:

- de centrale component is 0,940
- de zijwaartse component is -0,342

Bij het vliegtuig is een horizontale lijn de hoofdrichting. De vluchtvector heeft een lengte van 3000 m. Het hoogteverlies is de zijwaartse component van die vector en is dus ongeveer  $3000 \cdot -0,342 = -1026$  m.

Het vliegtuig vliegt op  $5000 - 1026 = 3974$  m hoogte.

[Opgave 9](#) [Opgave 10](#)

## 2.2 Sinus en cosinus

### Inleiding

Een opstijgend vliegtuig heeft een snelheidsvector met een duidelijke richting en grootte. De zijwaartse component (hier opwaarts gericht) geeft de snelheid weer waarmee de hoogte verandert.

Maar lang voordat er vliegtuigen bestonden werd er met componenten van vectoren gerekend. De componenten van een eenheidsvector hebben al in de Oudheid de namen 'sinus' en 'cosinus' gekregen.



### Je leert in dit onderwerp

- de begrippen sinus en cosinus gebruiken voor de componenten van een eenheidsvector.

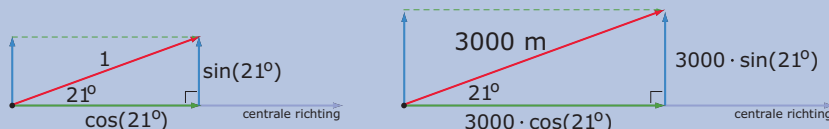
### Voorkennis

- het begrip vector met hoofdrichting (of centrale richting), centrale component en zijwaartse component;
- een vector ontbinden in de twee componenten.

### Opgave V1

### Uitleg

De centrale- en zijwaartse component van een vector hangen af van de hoek die hij met de centrale richting maakt. Voor de centrale component van de eenheidsvector wordt het woord 'cosinus' gebruikt en voor de zijwaartse component van de eenheidsvector wordt het woord 'sinus' gebruikt.



In de linker figuur zie je sinus en cosinus van een eenheidsvector, een vector met lengte 1 en een 'richtingshoek' van  $21^\circ$ . Sinus wordt afgekort tot 'sin' en cosinus tot 'cos'. Om aan te geven dat beide van de richtingshoek afhangen, zet je die er tussen haakjes bij.

Als de vector de lengte 3000 heeft, dan worden alle afmetingen van de driehoek met 3000 vermenigvuldigd. De centrale component is dan  $3000 \cdot \cos(21^\circ)$  en de zijwaartse component is  $3000 \cdot \sin(21^\circ)$ .

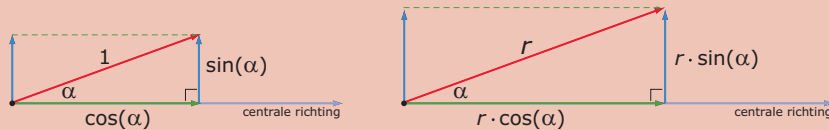
Op je rekenmachine kun je deze waarden berekenen, ook als de hoeken nauwkeuriger zijn gegeven. Let er wel op dat je rekenmachine dan moet staan ingesteld op rekenen met graden. Je kunt ook de applet in het [Practicum](#) gebruiken, die werkt alleen in drie decimalen nauwkeurig.

Je ziet in beide figuren dat de zijwaartse component zowel in het hoekpunt bij de richtingshoek kan worden geplaatst als langs een rechthoekszijde. Dat hangt van de toepassing af.

[Opgave 1](#) [Opgave 2](#) [Opgave 3](#)

**Theorie**

De centrale- en zijwaartse component van een vector hangen af van de hoek die hij met de centrale richting maakt. Voor de centrale component van de eenheidsvector wordt het woord **cosinus** gebruikt en voor de zijwaartse component van de eenheidsvector wordt het woord **sinus** gebruikt. Ze staan loodrecht op elkaar.



In de linker figuur zie je sinus en cosinus van een **eenheidsvector**, een vector met lengte 1. Sinus wordt afgekort tot 'sin' en cosinus tot 'cos'. Om aan te geven dat beide van de **richtingshoek**  $\alpha$  afhangen, zet je dat er tussen haakjes bij.  $\alpha$  (spreek uit 'alfa') is de eerste letter van het Griekse alfabet. Voor hoeken worden vaak griekse letters gebruikt zoals  $\alpha$ ,  $\beta$  (spreek uit 'bèta'),  $\gamma$  (spreek uit 'gamma'), enzovoorts.

Als de vector de lengte  $r$  heeft, dan worden alle afmetingen van de driehoek met  $r$  vermenigvuldigd. De centrale component is dan  $r \cdot \cos(\alpha)$  en de zijwaartse component is  $r \cdot \sin(\alpha)$ .

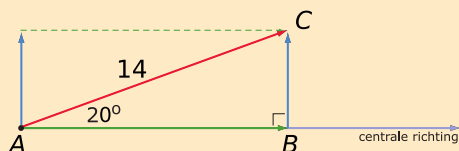
Je ziet in beide figuren dat de zijwaartse component zowel in het hoekpunt bij  $\alpha$  kan worden geplaatst als langs een rechthoekszijde. Dat hangt van de toepassing af.

In **Practicum** zie je een applet waarin je de cosinus en de sinus van een eenheidsvector kunt aflezen tot op drie decimalen nauwkeurig.

**Voorbeeld 1**

Applet

Je ziet hier  $\overrightarrow{AC}$  met een grootte van 14 eenheden en een hoek van  $20^\circ$  met de hoofd-richting.



Bereken de twee componenten  $\overrightarrow{AB}$  en  $\overrightarrow{BC}$  in één decimaal nauwkeurig.

Antwoord

Gebruik je rekenmachine of de applet in **Practicum** om de sinus en de cosinus van een hoek van  $20^\circ$  te bepalen.

Je berekent de componenten zo:

- $\overrightarrow{AB}$  is  $14 \cdot \cos(20) \approx 13,2$
- $\overrightarrow{BC}$  is  $14 \cdot \sin(20) \approx 4,8$

Beide componenten zijn positief. Dat wordt anders als  $\angle \alpha$  meer dan  $90^\circ$  is.

**Opgave 4** **Opgave 5**





### Voorbeeld 2

Je ziet hier een rechthoekige  $\triangle ABC$  met  $\angle A = 50^\circ$  en hypotenusa  $AC = 15$ .

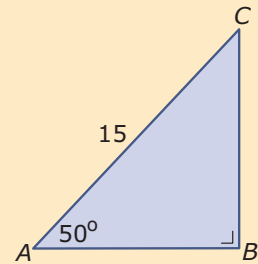
Bereken de lengtes van de twee rechthoekszijden in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Je vat de hypotenusa  $AC$  op als vector die een hoek van  $50^\circ$  met de centrale richting  $AB$  maakt. Gebruik je rekenmachine of de applet in **Practicum** om de sinus en de cosinus van een hoek van  $50^\circ$  te bepalen.

- $AB$  is  $15 \cdot \cos(50) \approx 9,64$
- $BC$  is  $15 \cdot \sin(50) \approx 11,49$

In een rechthoekige driehoek zijn dit meteen de lengtes van de rechthoekszijden, want daarin komen geen hoeken groter dan  $90^\circ$  voor. Je hoeft dan niet met eventuele mintekens van componenten rekening te houden.



**Opgave 6** **Opgave 7** **Opgave 8**

### Voorbeeld 3

Je ziet hier een rechthoekige  $\triangle ABC$  met  $\angle A = 50^\circ$  en rechthoekszijde  $BC = 10$ .

Bereken de lengte van de hypotenusa in één decimaal nauwkeurig.

Antwoord

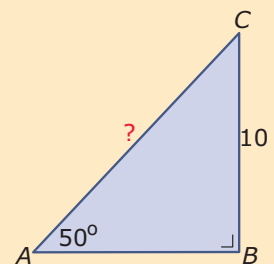
Je vat de hypotenusa  $AC$  op als vector die een hoek van  $50^\circ$  met de centrale richting  $AB$  maakt. Nu geldt:

$$AB = AC \cdot \sin(50)$$

En dus is

$$10 = AC \cdot \sin(50)$$

Hieruit volgt  $AC = \frac{10}{\sin(50)} \approx 13,1$  cm.



**Opgave 9** **Opgave 10**

## 2.3 Hoeken berekenen

### Inleiding

Een opstijgend vliegtuig heeft een snelheidsvector met een duidelijke richting en grootte. De zijwaartse component geeft de snelheid weer waarmee de hoogte verandert. Als je weet hoeveel m het vliegtuig heeft afgelegd en hoe hoog het dan zit, kun je vanuit de zijwaartse component (dus met behulp van de sinus) de hoek berekenen waaronder het vliegtuig opstijgt.



### Je leert in dit onderwerp

- met behulp van sinus en cosinus hoeken berekenen.

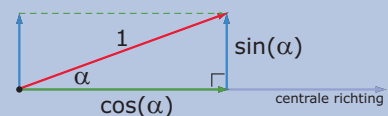
### Voorkennis

- het begrip vector met hoofdrichting (of centrale richting), centrale component en zijwaartse component;
- een vector ontbinden in de twee componenten;
- de begrippen sinus en cosinus gebruiken voor de componenten van een eenheidsvector.

### Opgave V1

### Uitleg

Als de lengte van een vector en zijn hoek met de centrale richting bekend zijn kun je de zijwaartse- of de centrale component berekenen. Maar je kunt omgekeerd de richtingshoek berekenen als de lengte van de vector en de zijwaartse- of de centrale component zijn gegeven. Daarvoor gebruik je sinus of cosinus, de componenten van de eenheidsvector. Met je rekenmachine kun je vanuit sinus en cosinus terugrekenen.



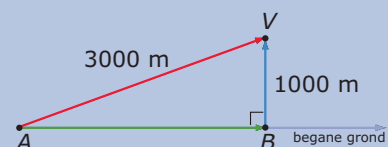
Hier zie je de situatie van een opstijgend vliegtuig. Als het 3000 m heeft afgelegd, is het 1000 m gestegen. Je kunt nu de hoek die de baan van het vliegtuig met de begane grond maakt berekenen.

In de figuur geldt:  $BV = AV \cdot \sin(\alpha)$  of wel  $1000 = 3000 \cdot \sin(\alpha)$ .

Hieruit volgt  $\sin(\alpha) = \frac{1000}{3000} = \frac{1}{3}$ .

Met je rekenmachine kun je vanuit sinus terugrekenen.

Vaak wordt dat aangeduid als  $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$  of (op z'n Amerikaans) als  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 19,47$ . Je vindt:  $\alpha \approx 19,5^\circ$ .

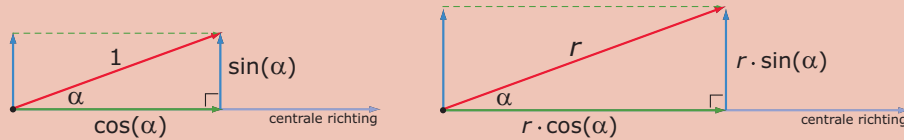


Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3



### Theorie

De centrale- en zijwaartse component van een vector hangen af van de hoek die hij met de centrale richting maakt. Voor de centrale component van de eenheidsvector wordt het woord **cosinus** gebruikt en voor de zijwaartse component van de eenheidsvector wordt het woord **sinus** gebruikt. Ze staan loodrecht op elkaar.



In de linker figuur zie je sinus en cosinus van een **eenheidsvector**, een vector met lengte 1. Sinus wordt afgekort tot 'sin' en cosinus tot 'cos'. Om aan te geven dat beide van de **richtingshoek**  $\alpha$  afhangen, zet je dat er tussen haakjes bij. Het rekenen met sinus en cosinus heet **goniometrie** en dat betekent 'hoekmeetkunde' ('gonia' is grieks voor 'hoek').

Als de vector de lengte  $r$  heeft, dan worden alle afmetingen van de driehoek met  $r$  vermenigvuldigd. De centrale component is dan  $r \cdot \cos(\alpha)$  en de zijwaartse component is  $r \cdot \sin(\alpha)$ .

Je kunt dit ook gebruiken om de hoek  $\alpha$  te berekenen als de lengte van de vector en één van beide componenten is gegeven.

In het **Practicum** zie je een applet waarin je de grootte van de hoek van een eenheidsvector kunt zoeken als de sinus of de cosinus ervan bekend is. Je moet wel goed kijken of je hoek scherp, stomp of zelfs overstrekt is, want er zijn in de applet steeds twee hoeken met dezelfde sinus en ook twee hoeken met dezelfde cosinus.

Ook de rekenmachine kan  $\alpha$  berekenen als je  $\sin(\alpha)$  of  $\cos(\alpha)$  weet. Hij kan terugrekenen vanuit sinus en cosinus. Maar je rekenmachine kan niet zien welke hoek je wilt uitrekenen en geeft dus soms een scherpe hoek terwijl je een stompe hoek wilt hebben. Je kunt echter uit je antwoord wel de goede hoek afleiden.

### Voorbeeld 1

Bereken de grootte van hoek  $C$  in de figuur hiernaast.

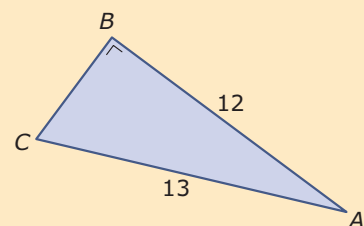
Antwoord

Vanuit hoekpunt  $C$  gezien kun je  $AC$  opvatten als vector die een hoek maakt met de centrale component  $BC$ . En dan is  $AB$  de zijwaartse component. Dus is

$$13 \cdot \sin(\angle C) = 12 \text{ en dus } \sin(\angle C) = \frac{12}{13}.$$

En hierbij hoort  $\angle C \approx 67,4^\circ$ .

Op je rekenmachine vind je dit (afhankelijk van het merk) door  $\sin^{-1}(12/13)$  of  $\arcsin(12/13)$  te berekenen.



**Opgave 4** **Opgave 5** **Opgave 6**

**Voorbeeld 2**

Op 3 meter van de voet van een antennemast worden enkele korte paaltjes de grond in geslagen. Van de top van de mast worden draden van 7 meter gespannen naar de voet van de paaltjes.

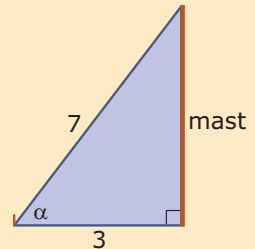
Bereken de hoogte van de antennemast en de hoek die elke draad met de grond maakt.

Antwoord

Verwerk de gegevens in een tekening zoals hiernaast. Je gaat er van uit dat de antennemast loodrecht op de grond staat.

Je neemt de grond als centrale richting. In de tekening zie je dat de 'vector' een lengte van 7 m en een centrale component met een lengte van 3 m heeft. Er geldt dus  $7 \cdot \cos(\alpha) = 3$ . De grootte van hoek  $\alpha$  is ongeveer  $65^\circ$ .

De hoogte van de mast is dan ongeveer  $7 \cdot \sin(64,6) \approx 6,32$  m.



[Opgave 7](#) [Opgave 8](#) [Opgave 9](#)

## 2.4 Helling en tangens

### Inleiding

Dit is een foto van de Dom van Utrecht. De toren is 111 m hoog.

Hoe zou je die hoogte kunnen berekenen als je ervoor op de begane grond staat en alleen je geodriehoek en een rekenmachine bij je hebt?



### Je leert in dit onderwerp

- het begrip tangens en het verband met de helling van een vector;
- met behulp van tangens berekeningen uitvoeren van lengtes en hoeken.

### Voorkennis

- het begrip vector met hoofdrichting (of centrale richting), centrale component en zijwaartse component;
- een vector ontbinden in de twee componenten;
- de begrippen sinus en cosinus gebruiken voor de componenten van een eenheidsvector;
- met behulp van sinus en cosinus hoeken berekenen.

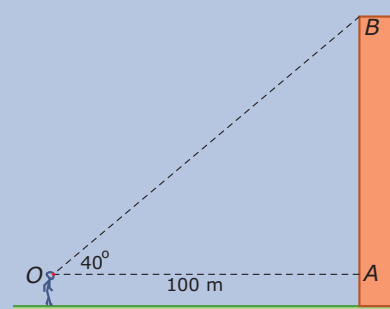
### Opgave V1

### Uitleg

Hiernaast zie je hoe Jan de hoogte van een flatgebouw berekent. Hij gaat 100 m van een verticale gevel van de flat staan en meet de hoek waaronder hij de top van die gevel ziet. Dat is de hoek tussen een horizontale lijn (hier de centrale richting) en de kijklijn vanuit zijn oog naar de top van de gevel. Zo'n hoek met de centrale richting heet een 'hellingshoek'. Jan meet een hellingshoek van  $40^\circ$ .

Met deze gegevens en je kennis van goniometrie kun je nu de hoogte van de flat berekenen. Maar dat is nogal wat werk. Je kunt beter gebruik maken van het begrip helling: de helling van een vector is de verhouding van zijn twee componenten, het is de zijwaartse component gedeeld door de centrale component. Hiervoor is het woord 'tangens' ingevoerd. Die tangens hangt af van de grootte van de hellingshoek. In dit geval geldt:

$$\tan(40^\circ) = \frac{AB}{100}$$



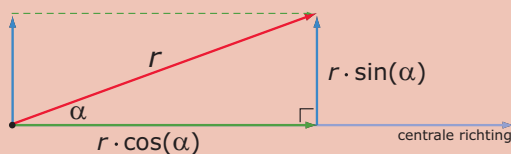


Je rekenmachine kan ook de tangens van een hellingshoek berekenen. Je vindt dan  $\frac{AB}{100} \approx 0,839$  en dus  $AB \approx 83,9$  m. Als Jan z'n ogen op 1,80 m van de grond heeft, dan is de flat 85,7 m hoog.

[Opgave 1](#) [Opgave 2](#) [Opgave 3](#)

### Theorie

De hoek  $\alpha$  die een vector met zijn centrale richting maakt heet de **hellingshoek** van die vector. De bijbehorende **helling** wordt bepaald door de verhouding van de zijwaartse component en de centrale component van die vector. Voor die helling wordt het woord **tangens** gebruikt.



Voor een vector met lengte  $r$  en hellingshoek  $\alpha$  betekent dit dat de helling  $\tan(\alpha) = \frac{r \cdot \sin(\alpha)}{r \cdot \cos(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$  is.

Omdat je rekenmachine de sinus en de cosinus van een hoek kan uitrekenen, kan hij ook de tangens van een hoek uitrekenen.

Soms wordt een helling (een tangens dus) als **hellingspercentage** weergegeven. Dan is de waarde van de tangens met 100 vermenigvuldigd.

### Voorbeeld 1

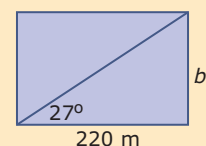
Een rechthoekig veld is 220 m lang. De hoek tussen de langste zijde en de diagonaal is  $27^\circ$ .

Bereken de breedte van het veld.

Antwoord

Maak een schets van de situatie.

Je ziet dat  $\tan(27^\circ) = \frac{b}{220}$ . Dus  $b = 220 \cdot \tan(27^\circ) \approx 112$  m.



[Opgave 4](#) [Opgave 5](#) [Opgave 6](#)

**Voorbeeld 2**

Een schoorsteen van een fabriek is 40 m hoog. Een landmeter meet de hellingshoek naar de top en vindt  $20^\circ$ . De persoon in kwestie gebruikt een hoekmeter die 1,80 m boven de begane grond op een statief zit.

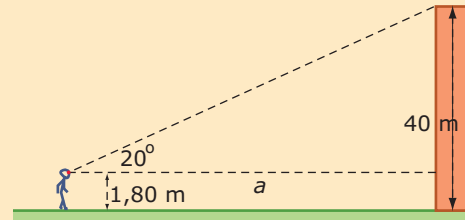
Hoe ver staat dit statief van de schoorsteen af?

Antwoord

Maak een schets van de situatie.

Je ziet dat  $\tan(20^\circ) = \frac{38,20}{a}$ . Dus  $a = 38,20 / \tan(20^\circ) \approx 104,95$  m.

Hij staat ongeveer 195 m van de schoorsteen af.



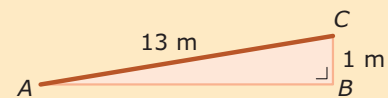
**Opgave 7** **Opgave 8**

**Voorbeeld 3**

Je ziet hier een oprit naar een huis van 13 m lengte die een hoogteverschil van 1 m overbrugt.

Hoeveel bedraagt het hellingspercentage van deze oprit?

En hoe groot is de hellingshoek?



Antwoord

Met de stelling van Pythagoras vind je  $AB = \sqrt{168} \approx 12,96$  m.

De helling is dus  $1/12,96 \approx 0,077$  en dat geeft een hellingspercentage van ongeveer 7,7%.

Omdat de helling van een vector gelijk is aan de tangens van de hellingshoek  $\alpha$ , geldt  $\tan(\alpha) \approx 0,077$ . Dit geeft met je rekenmachine  $\alpha \approx 4,4^\circ$ .

**Opgave 9** **Opgave 10** **Opgave 11**

## 2.5 Rekenen in driehoeken

### Inleiding

Je hebt de begrippen sinus, cosinus en tangens tot nu toe leren kennen als componenten van vectoren. Dat blijft ook de belangrijkste toepassing ervan en laat ook zien dat ze zowel positieve als negatieve waarden kunnen hebben. Maar nu ga je ze gebruiken bij berekeningen in (vooral rechthoekige) driehoeken.

### Je leert in dit onderwerp

- sinus, cosinus en tangens gebruiken voor berekeningen van lengtes en hoeken in (rechthoekige) driehoeken.

### Voorkennis

- het begrip vector met hoofdrichting (of centrale richting), centrale component en zijwaartse component;
- de begrippen sinus en cosinus gebruiken voor de componenten van een eenheidsvector;
- het begrip tangens en het verband met de helling van een vector;
- met behulp van sinus, cosinus en tangens hoeken en lengtes berekenen.

### Opgave V1

### Uitleg

Werk je alleen in rechthoekige driehoeken met sinus, cosinus en tangens, dan kun je je beperken tot scherpe hoeken zoals de hoek  $\alpha$  in deze figuur. In deze driehoek geldt:  $a = b \cdot \sin(\alpha)$ ,  $c = b \cdot \cos(\alpha)$  en  $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$ . En dus is  $\sin(\alpha) = \frac{a}{b}$ ,  $\cos(\alpha) = \frac{c}{b}$  en  $\tan(\alpha) = \frac{a}{c}$ .

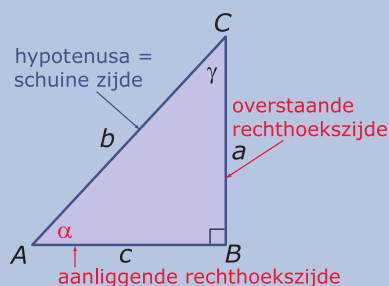
Nu zeg je wel dat  $a$  de 'overstaande rechthoekszijde' van  $\alpha$  en  $b$  de 'aanliggende rechthoekszijde' van  $\alpha$  is. En in plaats van hypotenusa zeg je wel 'schuine zijde'. Dan geldt in elke rechthoekige driehoek:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

Je spreekt van de drie 'goniometrische verhoudingen' in een rechthoekige driehoek.



### Opgave 1 Opgave 2





## Theorie

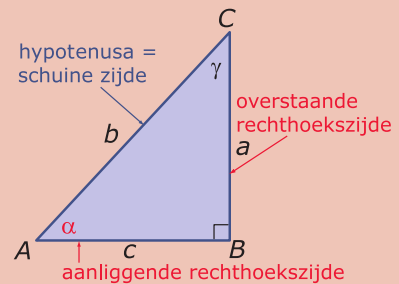
Je ziet hier een rechthoekige driehoek. De lengtes van de zijden worden met kleine letters aangeduid die corresponderen met de hoofdletters van de hoekpunten er tegenover. De groottes van de hoeken worden met griekse letters aangeduid die corresponderen met de hoekpunten. In dit geval is  $\beta = 90^\circ$ . In zo'n rechthoekige driehoek geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

Je spreekt van de drie **goniometrische verhoudingen** in een rechthoekige driehoek. Je gebruikt ze bij berekeningen in driehoeken, ook als die geen rechte hoek hebben. Je spreekt wel van **trigonometrie** ('driehoeksmmeetkunde').



## Voorbeeld 1

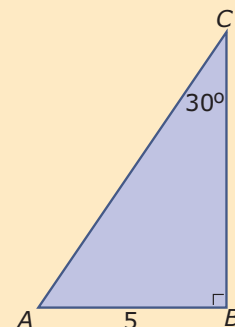
Van een rechthoekige driehoek  $ABC$  is  $AB = 5$  cm,  $\angle B = 90^\circ$  en  $\angle C = 30^\circ$ . Bereken de lengte van  $AC$ .

Antwoord

Maak een schets van de situatie.

Zijde  $AC$  is de schuine zijde van de driehoek en zijde  $AB$  is de overstaande rechthoekszijde van de gegeven  $\angle C$ . Je werkt daarom met de sinus van deze hoek.

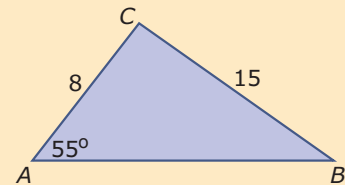
Je ziet dat  $\sin(30^\circ) = \frac{5}{AC}$ . Dus  $AC = 5/\sin(30^\circ) = 10$ .



[Opgave 3](#) [Opgave 4](#) [Opgave 5](#)

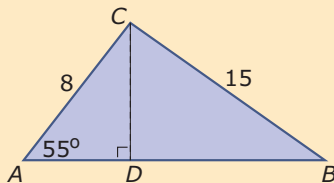
**Voorbeeld 2**

Je ziet hier een niet-rechthoekige driehoek  $ABC$  met  $AC = 8$  cm,  $BC = 15$  cm en  $\angle A = 55^\circ$ . Bereken de omtrek en de oppervlakte van deze driehoek, beide in één decimaal nauwkeurig.



Antwoord

Omdat de driehoek niet rechthoekig is, kun je zijde  $AB$  niet berekenen met de stelling van Pythagoras. Alleen goniometrie toepassen is een optie, maar dan moet je ook een rechte hoek hebben. Dus maak je een rechte hoek door een hoogtelijn te tekenen. De hoogtelijn uit  $C$  ligt het meest voor de hand.



Nu kun je in  $\triangle ADC$  de twee rechthoekszijden berekenen met behulp van goniometrie. Ga na dat  $AD \approx 4,59$  en  $DC \approx 6,55$ .

Nu kun je in  $\triangle DBC$  met de stelling van Pythagoras berekenen, dat  $DB \approx 13,49$ .

Nu kun je zelf de omtrek en de oppervlakte van de gegeven driehoek berekenen...

[Opgave 6](#) [Opgave 7](#) [Opgave 8](#)



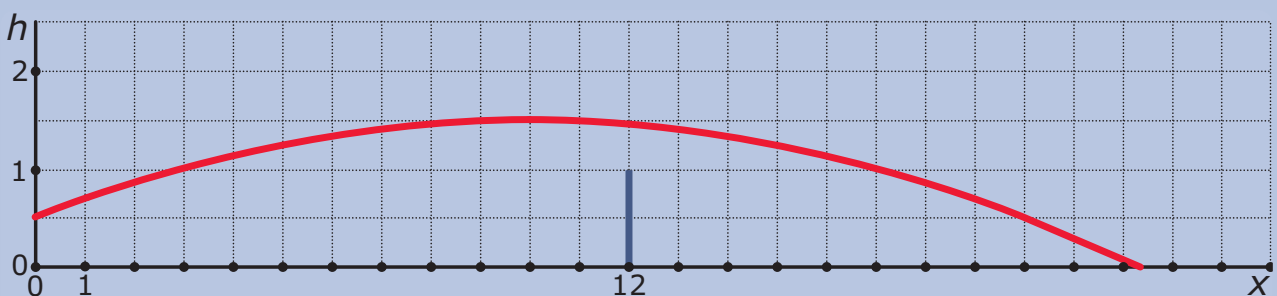
### Begrippen

- ▶ kwadratische functie — parabool — top — minimum — maximum — symmetrie-as — dalparabool — bergparabool — uiterste (extreme) waarde;
- ▶ top — nulpunten — ontbinden in factoren;
- ▶ tweede graads vergelijking (kwadratische vergelijking) — abc-formule — discriminant;
- ▶ handig oplossen.

### Activiteiten

- ▶ van een kwadratische functie van de vorm  $y = a(x - p)^2 + q$  de top en de extreme (uiterste) waarde bepalen;
- ▶ nulpunten en top bepalen, drie gedaantes van de formule bij een kwadratische functie herkennen;
- ▶ de abc-formule gebruiken om een kwadratische vergelijking systematisch op te lossen, de discriminant van een kwadratische vergelijking gebruiken;
- ▶ kwadratische vergelijkingen handig oplossen, onder andere door ontbinden in factoren, terugrekenen en de abc-formule.

## Boogballetje



Domein

# Functies en grafieken

Hoofdstuk

## Kwadratische verbanden

Inhoud

|     |                             |    |
|-----|-----------------------------|----|
| 3.1 | Kwadratische functies       | 36 |
| 3.2 | Nulpunten en top            | 39 |
| 3.3 | Kwadratische vergelijkingen | 42 |
| 3.4 | Handig oplossen             | 45 |

3

## 3.1 Kwadratische functies

### Inleiding

Je weet al dat bij kwadratische verbanden van de vorm  $y = a \cdot (x - p)^2 + q$  parabolen horen met top  $(p, q)$ .  
Je gaat daar nu opnieuw mee werken.



### Je leert in dit onderwerp

- werken met kwadratische verbanden en de bijbehorende parabolen.

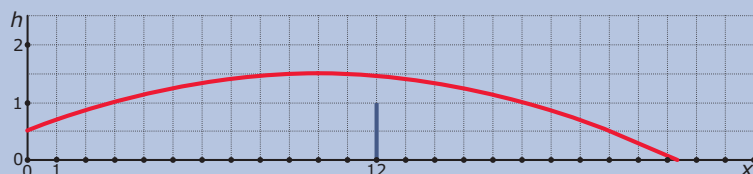
### Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- bij kwadratische verbanden van de vorm  $y = a(x - p)^2 + q$  een bijbehorende grafiek tekenen, een parabool met top  $(p, q)$ .

### Opgave VI

### Uitleg

Applet



Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies in de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog.

De baan van de bal is een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule

$$h = -0,01 \cdot (x - 10)^2 + 1,5$$

Deze formule is van de vorm  $h = \dots$  en dus is  $h$  een functie van  $x$ . In dit geval is er sprake van een 'kwadratische functie'. Hieronder zie je de bijbehorende tabel.

| x       | 0    | 2    | 4    | 6    | 8    | 10   | 12    | 14    | 16    | 18    | 20    | 22    | 24    |
|---------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| h       | 0,50 | 0,86 | 1,14 | 1,34 | 1,46 | 1,50 | 1,46  | 1,34  | 1,14  | 0,86  | 0,50  | 0,06  | -0,46 |
| toename |      | 0,36 | 0,28 | 0,20 | 0,12 | 0,04 | -0,04 | -0,12 | -0,20 | -0,28 | -0,36 | -0,44 | -0,52 |

Je ziet dat de toename van de hoogte van de tennisbal steeds wat minder wordt. Hoeveel minder is moeilijk in te schatten. Op het eerste gezicht lijkt er geen regelmaat in de rij



van de toenames te zitten. Maar als je de verandering van de toenames bekijkt is deze constant. Toeval of geen toeval?

De grafiek hierboven is een deel van een 'parabool'. Je ziet dat het hoogste punt de coördinaten (10; 1,5) is. Dit noem je de 'top' van de parabool. De top ligt op de 'symmetrieas' van de parabool. In dit geval is het de lijn  $x = 10$ .

[Opgave 1](#) [Opgave 2](#)

### Theorie

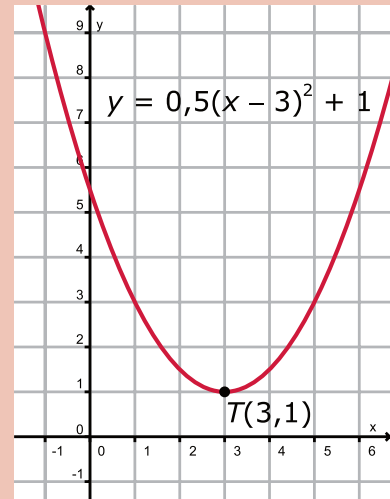
Applet

Bij een **kwadratische functie** hoort een formule van de vorm  $y = a \cdot (x - p)^2 + q$  met  $a \neq 0$ . De bijbehorende grafiek is een **parabool** met **top**  $(p, q)$  en **symmetrieas**  $x = p$ .

- Als  $a > 0$  heb je een **dalparabool** met een laagste waarde, een **minimum** van  $q$  voor  $x = p$ .
- Als  $a < 0$  heb je een **bergparabool** met een hoogste waarde, een **maximum** van  $q$  voor  $x = p$ .

Een maximum of een minimum noem je een **uiterste waarde** of ook wel een **extreme waarde** van een functie.

Als je in een bijbehorende tabel de waarden van  $x$  met vaste stappen laat toenemen, dan kun je een kwadratisch verband herkennen aan de symmetrie in de tabel. Kenmerkend voor een kwadratisch verband is ook dat de verandering van de toenames (of de afnames) constant is.



### Voorbeeld 1

Applet

Bij een kwadratische functie hoort de formule  $y = (x - 1)^2 + 3$ .

Bereken de extreme waarde van deze kwadratische functie en teken de bijbehorende parabool.

Antwoord

De top van de parabool kun je uit de formule aflezen:  $T(1, 3)$ . De parabool heeft daarom de lijn  $x = 1$  als symmetrieas en je ziet dat het een dalparabool is.

De extreme waarde is daarom een minimum van 3 voor  $x = 1$ .

Nu kun je gemakkelijk een tabel maken en de grafiek tekenen.

[Opgave 3](#) [Opgave 4](#) [Opgave 5](#)

**Voorbeeld 2**

Bij een kwadratische functie hoort de formule  $y = (x - 1)^2 - 3$ .

Bereken de snijpunten van de bijbehorende parabool met beide coördinaatassen.

Antwoord

Het snijpunt met de  $y$ -as kun je eenvoudig berekenen door  $x = 0$  in te vullen:  $y = (0 - 1)^2 - 3 = -2$ .

Het snijpunt met de  $y$ -as is dus  $(0, -2)$ .

Met de  $x$ -as heeft de parabool twee snijpunten die je vindt door  $y = 0$  te nemen.

Dat geeft de vergelijking  $(x - 1)^2 - 3 = 0$ .

Deze vergelijking kun je oplossen door terugrekenen. Je vindt  $y = 1 \pm \sqrt{3}$ . Nu kun je beide snijpunten wel opschrijven. Als dat wordt gevraagd kun je ze benaderen in bijvoorbeeld één decimaal nauwkeurig.

**Opgave 6** **Opgave 7**

**Voorbeeld 3**

Door de top van een parabool gaan twee lijnen die precies één punt met de parabool gemeenschappelijk hebben. Eén van die twee lijnen is de symmetrieas van de parabool. De andere lijn noem je een **raaklijn** aan de parabool in de top.

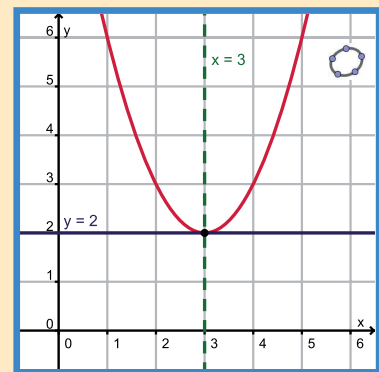
Bekijk nu de parabool met formule  $y = (x - 3)^2 + 2$ . Welke lijn is de symmetrieas en welke lijn is de raaklijn door de top?

Antwoord

De top is  $T(3, 2)$ .

De symmetrieas is de lijn  $x = 3$ .

De raaklijn door de top is de lijn  $y = 2$ .



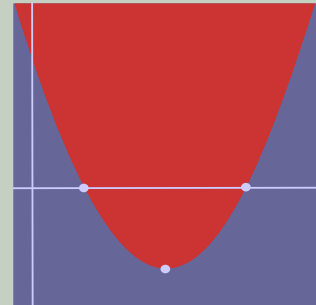
**Opgave 8** **Opgave 9**



## 3.2 Nulpunten en top

### Inleiding

Je weet al dat bij kwadratische verbanden van de vorm  $y = a \cdot (x - p)^2 + q$  parabolen horen met top  $(p, q)$ . Maar kwadratische functies kunnen ook een andere vorm hebben. En ook dan wil je kunnen bepalen welke top de bijbehorende parabool heeft en welke nulpunten.



### Je leert in dit onderwerp

- nulpunten en top berekenen van een kwadratische functie.

### Voorkennis

- werken met variabelen en met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- ontbinden in factoren, ook met de som-en-productmethode;
- bij kwadratische verbanden van de vorm  $y = a(x - p)^2 + q$  een bijbehorende grafiek tekenen, een parabool met top  $(p, q)$ .

### Opgave V1

### Uitleg

Een boer heeft een stuk weiland naast een vijver. Hij wil naast de vijver een stuk grond afzetten met 200 m hekwerk. Zie figuur. Langs de vijver komt geen hek.

$b$  is de lengte van  $AB$ .

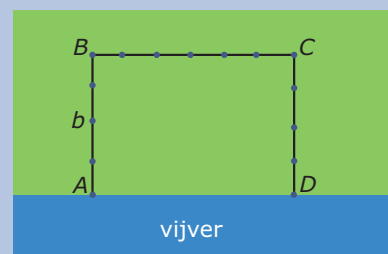
Voor  $BC$  krijg je dan een lengte van  $200 - 2b$ .

Voor de oppervlakte van het weiland krijg je dan de formule:

$$A = b(100 - 2b) = 100b - 2b^2$$

Deze formule kun je kennelijk in twee vormen schrijven: een vorm met haakjes en een vorm die als hoogste macht van  $b$  een kwadraat heeft, maar ook nog een term heeft waarin  $b$  niet in het kwadraat staat. Er is dan ook sprake van een kwadratische functie. Maar hoe bepaal je het maximum van die functie?

Je kunt natuurlijk een grafiek van deze functie tekenen door eerst een tabel te maken. Maar welke waarden moet je kiezen om in te vullen? Daarvoor bereken je eerst de nulpunten, de snijpunten met de  $x$ -as van deze functie, want je weet dat die er moeten zijn.





Daartoe moet je oplossen  $b(100 - 2b) = 0$ .

Juist vanwege de haakjes is dat eenvoudig:  $b = 0 \vee 100 - 2b = 0$  geeft  $b = 0 \vee b = 50$ .

De nulpunten zijn dus  $(0,0)$  en  $(50,0)$ .

Daarom maak je een tabel met voor  $x$  de waarden 0, 10, 20, 30, 40 en 50. Je kunt dan de parabool tekenen en de top bepalen.

**Opgave 1** **Opgave 2** **Opgave 3**

### Theorie

Applet

Kwadratische functies kunnen verschillende vormen aan-nemen:

- $y = a \cdot (x - p)^2 + q$  waarin  $(p, q)$  de **top** van de parabool is.
- $y = a(x - m)(x - n)$
- $y = ax^2 + bx + c$

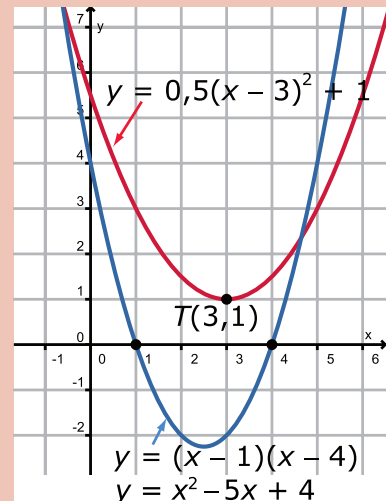
Dat het hier voor  $a \neq 0$  bij alledrie om kwadratische functies gaat, wordt duidelijk als je bij de eerste twee vormen de haakjes uitwerkt. De hoogste macht van  $x$  die dan in de formule voorkomt is 2.

Bij kwadratische functies van de vorm  $y = a \cdot (x - p)^2 + q$  is de top van de parabool meteen uit de formule af te lezen.

Het berekenen van de snijpunten met de  $x$ -as, de **nulpunten** doe je door de vergelijking  $y = 0$  op te lossen.

Bij kwadratische functies van de vorm  $y = a(x - m)(x - n)$  kun je juist de nulpunten meteen zien:  $(m, 0)$  en  $(n, 0)$ . De top bepaal je dan door te bedenken dat hij op de symmetrieas ligt, dus een  $x$ -coördinaat heeft midden tussen  $m$  en  $n$  in.

Bij kwadratische functies van de vorm  $y = ax^2 + bx + c$  probeer je door **ontbinden in factoren** in de vorm te brengen waarin je de nulpunten meteen kunt zien. Dat lukt echter niet altijd...



**Voorbeeld 1**

Bij een kwadratische functie hoort de formule  $y = -0,2(x - 3)(x + 2)$ .  
Bepaal de nulpunten van de bijbehorende parabool en bereken de top.

Antwoord

Als de formule van een kwadratische functie een vorm heeft zoals die hierboven, kun je de nulpunten uit de formule aflezen. Immers  $-0,2(x - 3)(x + 2) = 0$  kun je (na delen door  $-0,2$ ) splitsen in  $x - 3 = 0 \vee x + 2 = 0$  en dat geeft  $x = 3 \vee x = -2$ .

De nulpunten zijn daarom  $(-2,0)$  en  $(3,0)$ .

De top van deze parabool kun je berekenen door gebruik te maken van de symmetrie. De symmetrieas is de verticale lijn die midden tussen beide nulpunten door de  $x$ -as gaat. Dus dat is de lijn  $x = 0,5$ .

Omdat de top van de parabool op de symmetrieas ligt kun je hem nu berekenen: de  $x$ -waarde van de top is  $0,5$  en die kun je in de formule invullen om de bijbehorende  $y$ -waarde te vinden.

[Opgave 4](#) [Opgave 5](#) [Opgave 6](#)

**Voorbeeld 2**

Bij een kwadratische functie hoort de formule  $y = 2x^2 - 6x - 1$ .  
Bereken de top van de bijbehorende parabool.

Antwoord

Bij deze formule kun je de uitdrukking rechts van het isgelijktteken niet in factoren ontbinden. Om de top te kunnen berekenen heb je de symmetrieas van de parabool nodig. Die kun je bepalen door twee punten op de parabool met dezelfde  $y$  op te zoeken. De symmetrieas vind je dan door het gemiddelde van de  $x$ -coördinaten van die twee punten te berekenen.

In dit geval kun je twee punten met  $y = -1$  gemakkelijk berekenen.

Immers uit  $2x^2 - 6x - 1 = -1$  volgt  $2x^2 - 6x = 0$ .

Die vergelijking is wel te ontbinden en op te lossen:

$2x^2 - 6x = 0$  geeft  $2x(x - 3) = 0$ , zodat  $x = 0 \vee x = 3$ .

De twee punten met  $y = -1$  zijn  $(0,-1)$  en  $(3,-1)$  en de symmetrieas van de parabool is  $x = 1,5$ .

Nu is de top van de parabool te berekenen en kun je een geschikte tabel en grafiek maken.

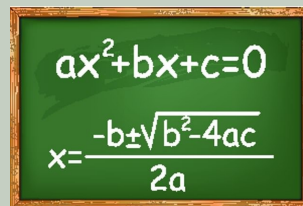
[Opgave 7](#) [Opgave 8](#) [Opgave 9](#)

## 3.3 Kwadratische vergelijkingen

### Inleiding

Zo'n 1200 jaar geleden bedacht de Perzische wiskundige **Al-Khwarizmi** een oplossing voor alle kwadratische vergelijkingen. Die oplossing heet tegenwoordig de abc-formule. Je ziet hem hier in moderne notatie.

Je moet van een gegeven vergelijking alleen de waarden van  $a$ ,  $b$  en  $c$  aflezen en die invullen in de oplossingsformule en klaar.


$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Je leert in dit onderwerp

- alle kwadratische vergelijkingen oplossen met de abc-formule.

### Voorkennis

- werken met variabelen en met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- ontbinden in factoren, ook met de som-en-productmethode;
- bij kwadratische functies (met een geschikte formule) de top en de nulpunten bepalen.

Opgave V1 Opgave V2

### Uitleg

Elke vergelijking die je kunt schrijven in de vorm  $ax^2 + bx + c = 0$  heet een 'kwadratische vergelijking' of ook wel 'tweedegraads vergelijking' (mits  $a \neq 0$ ) omdat de hoogste macht van de onbekende  $x$  die voorkomt 2 is. (Een lineaire vergelijking noem je ook wel een eerstegraads vergelijking.)

Soms kun je een kwadratische vergelijking oplossen, bijvoorbeeld door ontbinden of door terugrekenen. Maar dat lukt lang niet altijd. Wiskundigen hebben zich al honderden jaren geleden over dit probleem gebogen. Ze hebben de **abc-formule** gevonden:

De oplossing van de vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$  is  $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$   $\vee$   $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  als  $a \neq 0$ .

Als je nu  $x^2 + 6x + 7 = 0$  wilt oplossen, dan maak je van de bovenstaande oplossing gebruik. Je leest af  $a = 1$ ,  $b = 6$  en  $c = 7$ . Deze drie getallen vul je in de oplossing van de algemene vergelijking in en je krijgt de oplossing van jouw vergelijking:

$$x = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} \vee x = \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$$

ofwel:

$$x = \frac{-6 + \sqrt{8}}{2} \vee x = \frac{-6 - \sqrt{8}}{2}$$

Het is handiger om de vorm  $b^2 - 4ac$  die onder het wortelteken staat afzonderlijk te berekenen. Je noemt deze uitdrukking de 'discriminant'  $D = b^2 - 4ac$ .

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4



## Theorie

Elke vergelijking die je kunt schrijven in de vorm  $ax^2 + bx + c = 0$

heet een **kwadratische vergelijking** of ook wel **tweedegraads vergelijking** (mits  $a \neq 0$ ) omdat de hoogste macht van de onbekende  $x$  die voorkomt 2 is. (Een lineaire vergelijking noem je ook wel een eerstegraads vergelijking.)

De oplossing van de vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$  met  $a \neq 0$  is

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Deze oplossing noem je de **abc-formule**.

### Bewijs 1

Hieronder zie je een **bewijs van de abc-formule**. Dat wil zeggen dat je aantoont dat de formule in alle gevallen klopt. Je gaat daartoe  $ax^2 + bx + c = 0$  in algemene zin oplossen. Je schrijft die formule daartoe eerst in de vorm  $a(x - p)^2 + q = 0$  waarin  $(p, q)$  de top van de parabool is.

Die top ga je eerst berekenen. Daartoe bepaal je de symmetrieas. Deze lijn is de middelloodlijn tussen twee punten op gelijke hoogte op de parabool, bijvoorbeeld op hoogte  $y = c$ . Die twee punten bereken je dus uit  $ax^2 + bx + c = c$ , ofwel  $ax^2 + bx = 0$ . Dit geeft  $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$ . De symmetrieas is daarom  $x = -\frac{b}{2a}$ . Dit invullen levert de top op:  $T\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ .

Dus moet je oplossen

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0. \text{ Dit geeft } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Worteltrekken:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

En nu een beetje herleiden:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En hiermee is de abc-formule gevonden.

Het is bij het oplossen van een kwadratische vergelijking handig om eerst de

**discriminant**  $D = b^2 - 4ac$  te berekenen.

- Als  $D > 0$  heb je twee waarden in de oplossing.
- Als  $D = 0$  heb je één waarde in de oplossing.
- Als  $D < 0$  heb je geen reële waarden in de oplossing.

Je kunt hiermee de oplossing van elke kwadratische vergelijking kortweg zo opschrijven:

$$\text{De oplossing van de vergelijking } ax^2 + bx + c = 0 \text{ is } x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Bekijk ook de (engelstalige) videoclip 'quadratic formula' in het **Practicum**.

**Voorbeeld 1**

Los de vergelijking  $(x - 2)(x - 3) = 3$  op.

Antwoord

Haakjes wegwerken en op 0 herleiden levert de vergelijking  $x^2 - 5x + 3 = 0$  op.

Deze vergelijking kun je oplossen met de abc-formule. Je berekent dan liever eerst de discriminant, dan weet je of er een oplossing is.

Lees af:  $a = 1$ ,  $b = -5$  en  $c = 3$ .

En dus is  $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13$ . De discriminant is positief en de oplossing bestaat dus uit twee waarden.

De oplossing is  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$ .

**Opgave 5** **Opgave 6** **Opgave 7** **Opgave 8**

**Voorbeeld 2**

Gegeven zijn een kwadratische functie met formule  $y_1 = x^2 + 8x + 1$  en een lineaire functie met formule  $y_2 = 2x - 4$ . Bereken de coördinaten van de snijpunten van hun grafieken.

Antwoord

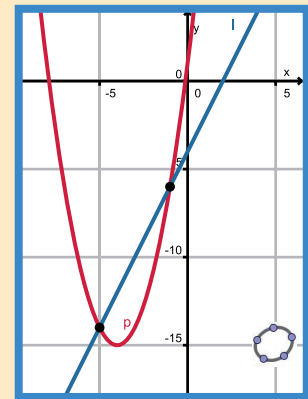
In de snijpunten geldt  $x^2 + 8x + 1 = 2x - 4$ .

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst op 0 te herleiden en dan de abc-formule toe te passen. Aan de grafieken zie je dat er twee x-waarden uit moeten komen.

Uit  $x^2 + 6x + 5 = 0$  lees je af:  $a = 1$ ,  $b = 6$  en  $c = 5$ .

De oplossing is  $x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$ . En dus vind je  $x = -5$  v  $x = -1$ .

Om beide snijpunten te vinden, moet je deze x-waarden nog invullen. Ga na, dat dit de snijpunten  $(-5, -14)$  en  $(-1, -6)$  oplevert.



**Opgave 9** **Opgave 10** **Opgave 11**

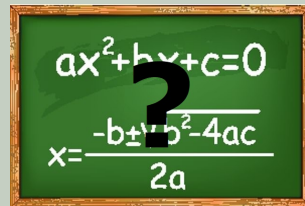
## 3.4 Handig oplossen

### Inleiding

In het voorgaande onderdeel heb je geleerd de abc-formule te gebruiken.

Daarmee kun je elke kwadratische vergelijking oplossen.

Waarom dan toch nog kijken naar andere manieren om dit te doen? Welnu, de abc-formule is vaak nogal onhandig in gebruik, er zijn snellere methoden. Dus nu ga je proberen om kwadratische vergelijkingen zo handig mogelijk op te lossen. Niet altijd maar domweg de abc-formule toepassen, maar eerst even kijken of het niet sneller kan...


$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Je leert in dit onderwerp

- kwadratische vergelijkingen zo handig mogelijk oplossen.

### Voorkennis

- werken met variabelen en met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- ontbinden in factoren, ook met de som-en-productmethode;
- kwadratische vergelijkingen oplossen met de abc-formule;
- bij kwadratische functies de top en de nulpunten berekenen.

Opgave V1 Opgave V2

### Uitleg

De vergelijking  $2x^2 + 12x = -10$  kan op meerdere manieren opgelost worden.

Allereerst merk je op dat het een kwadratische vergelijking en een drieterm is. Je herleidt dan eerst op 0:

$$2x^2 + 12x + 10 = 0$$

Je kunt nu de abc-formule gebruiken om de vergelijking op te lossen. Maar delen door 2 maakt hem in ieder geval eenvoudiger:

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

Nog steeds kun je de abc-formule toepassen, of je kunt een kwadraat afsplitsen, maar nu is ontbinden met de som-en-product-methode handiger.

Bij drietermen kies je meestal voor ontbinden (als je snel een ontbinding ziet) of anders voor de abc-formule. Maar hoe werk je bij een tweeterm?

Stel je wilt de vergelijking  $2x^2 + 12x = 0$  oplossen.

De abc-formule kan natuurlijk met  $a = 2$ ,  $b = 12$  en  $c = 0$ . Maar dat is wel erg onhandig. Gewoon de GGD buiten haakjes halen gaat echt veel sneller...

Opgave 1 Opgave 2

**Theorie**

Een kwadratische vergelijking (of tweedegraads vergelijking) kun je op meerdere manieren oplossen. De abc-formule lukt altijd als je hem in de vorm  $ax^2 + bx + c = 0$  hebt geschreven (met  $a \neq 0$ ). Maar regelmatig is de abc-formule niet nodig. Hier zie je welke keuzes je daarbij kunt maken.

- Komt de variabele maar op één plaats voor?  
Ga dan terugrekenen, met name worteltrekken.
- Heeft de vergelijking de vorm van een ontbinding die op 0 uitkomt?  
Splits de vergelijking dan in twee eenvoudiger vormen.
- Komen er in de vergelijking haakjes voor, maar kun je niet meteen ontbinden in factoren?  
Werk dan eerst de haakjes uit.
- Kun je na op 0 herleiden alle termen door hetzelfde getal delen?  
Doe dit dan en maak de vergelijking eenvoudiger.
- Kun je na op 0 herleiden en vereenvoudigen ontbinden in factoren?  
Doe dit dan en lees de oplossing uit de ontbinding af.
- Kun je na op 0 herleiden en vereenvoudigen niet ontbinden in factoren?  
Gebruik de abc-formule of splits een kwadraat af.

Als je deze stappen in deze volgorde doorloopt, kun je elke kwadratische vergelijking op zo handig mogelijke manier oplossen.

**Voorbeeld 1**

Je ziet hier een drietal kwadratische vergelijkingen die op elkaar lijken.

- $(x - 2)(x + 3) = 6$
- $(x - 2)(x + 3) = 7$
- $(x - 2)(x + 3) = 0$

Van welke van deze vergelijkingen kun je de oplossingen 'zo zien'? En welke kun je alleen oplossen met de abc-formule?

Antwoord

In de vind je een lijstje met keuzes die je kunt maken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Dit lijstje kan je helpen bij het beantwoorden van de vragen hierboven.

Bij geen van deze vergelijkingen komt de variabele op één plek voor, dus terugrekenen is nu onmogelijk. De derde vergelijking bestaat echter uit een ontbinding waar 0 uit komt. Die kun je dus heel snel oplossen door hem te splitsen in twee eenvoudiger vergelijkingen.

Bij beide andere vergelijkingen moet je eerst de haakjes wegwerken en op 0 herleiden. Dan zul je zien dat bij de tweede vergelijking de abc-formule nodig is. Of je moet een kwadraat afsplitsen, dat werkt ook altijd wel...

[Opgave 3](#) [Opgave 4](#) [Opgave 5](#)



**Voorbeeld 2**

Bereken de oplossing van de vergelijking  $(p + 2)^2 = (5 - 2p)^2$ .

Antwoord

Misschien denk je aan haakjes wegwerken en dan ontbinden of de abc-formule toepassen? De oplossing hieronder is dan totaal anders, echt 'out-of-the-box' denken.

Beide zijden worteltrekken geeft:

$$p + 2 = 5 - 2p \vee p + 2 = -(5 - 2p)$$

Dit zijn twee lineaire vergelijkingen die je met de balansmethode kunt oplossen.

Je krijgt:  $p = 1 \vee p = 7$ .

**Opgave 6** **Opgave 7**

**Voorbeeld 3**

Bereken de oplossing van de vergelijking  $2x(x + 4) = 3x + 12$ .

Antwoord

Misschien denk je aan haakjes wegwerken en daarna ontbinden of de abc-formule toepassen?

De oplossing hieronder is dan totaal anders, alweer 'out-of-the-box' denken.

Schrijf de vergelijking als:

$$2x(x + 4) = 3(x + 4)$$

Omdat beide zijden van de vergelijking nu een factor  $x + 4$  bevatten, kun je hem direct splitsen in:

$$2x = 3 \vee x + 4 = 0$$

En de oplossing wordt  $x = 1,5 \vee x = -4$ .

Dat gaat een stuk sneller dan haakjes wegwerken, op 0 herleiden en dan de abc-formule...

**Opgave 8** **Opgave 9**



# Register

## a

abc-formule 42, 43

## b

bergparabool 37

## c

centrale component 19

centrale richting 19

cosinus 22, 25

## d

dalparabool 37

discriminant 43

## e

evenwijdige lijnen 11

eenheidsvector 22, 25

evenredigheidsconstante 6

extreme waarde 37

## g

goniometrie 25

goniometrische verhoudingen 31

## h

helling 28

hellingsgetal 6, 9, 11

hellingshoek 28

hellingspercentage 28

hoofdrichting 19

## k

kwadratische functie 37

kwadratische vergelijking 43

## l

lineair model 14

lineair verband 9

lineaire functie 9

## m

maximum 37

minimum 37

## n

nulpunt 14

nulpunten 40

## o

ontbinden in factoren 40

ontbinden in twee loodrechte componenten  
18, 19

## p

parabool 37

## r

raaklijn 38

recht evenredig 6

recht evenredig verband 7

richtingscoëfficiënt 6, 9, 11

richtingshoek 22, 25

## s

sinus 22, 25

snijpunt 13, 14

symmetrieas 37

## t

tangens 28

top 37, 40

trigonometrie 31

tweedegraads vergelijking 43

## u

uiterste waarde 37

## v

vector 18, 19

verplaatsing 18

## z

zijwaartse component 19

**Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.**

**De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.**

**Stichting Math4All**

## **Inhoud Katern 2**

- 4. Lineaire verbanden**
- 5. Goniometrie**
- 6. Kwadratische verbanden**



[www.math4all.nl](http://www.math4all.nl)

