

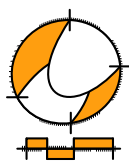
Wiskunde

3 HAVO

Katern 1 / Theorie

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Algebra 3

- 1.1 Rekenen met variabelen 6
- 1.2 Breuken 9
- 1.3 Haakjes 12
- 1.4 Machten 15
- 1.5 Wortels 18

2 Vlakke meetkunde 20

- 2.1 Gelijk of gelijkvormig 24
- 2.2 Rekenen in driehoeken 28
- 2.3 Bijzondere lijnen 31
- 2.4 Vlakke figuren 34
- 2.5 Vergrotingsfactoren 37

3 Vergelijkingen 39

- 3.1 Basishandelingen 42
- 3.2 Terugrekenen 45
- 3.3 De balansmethode 48
- 3.4 Ontbinden in factoren 51
- 3.5 Breuken in vergelijkingen 54

Register 57

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

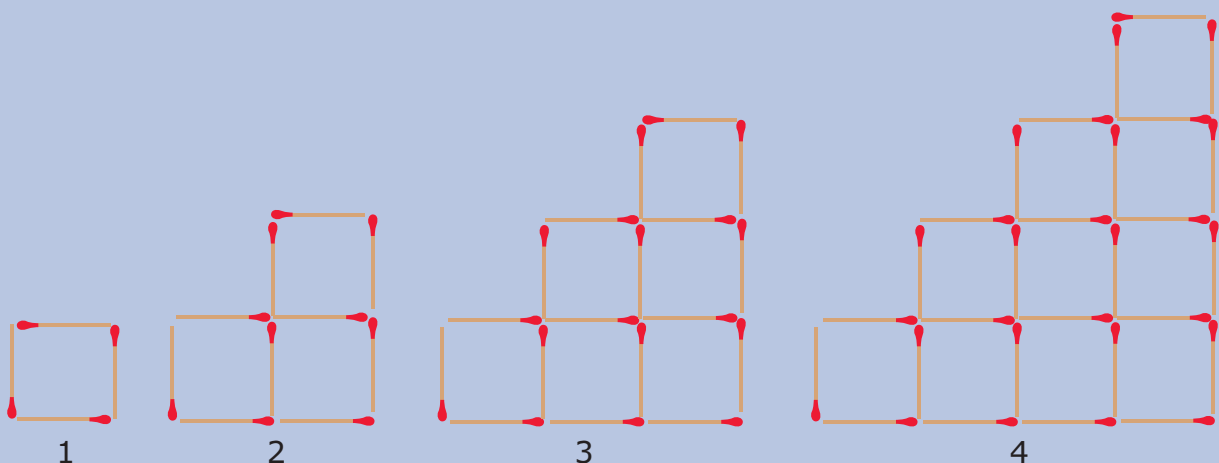
Begrippen

- ▶ gelijksoortige termen — ongelijksoortige termen — wisseleigenschap;
- ▶ gelijknamig maken — kleinste gemeenschappelijke veelvoud — KGV;
- ▶ tweeterm — vierterm — verdeeleigenschap — distributieve eigenschap — haakjes uitwerken — ontbinden in factoren — grootste gemeenschappelijke deler — GGD — buiten haakjes halen;
- ▶ macht — exponent — wetenschappelijke notatie;
- ▶ wortel — worteltrekken — n de machtswortel trekken.

Activiteiten

- ▶ rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met variabelen, formules en uitdrukkingen herleiden, gelijksoortige termen;
- ▶ breuken vereenvoudigen, gelijknamig maken, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, het KGV;
- ▶ haakjes uitwerken en ontbinden in factoren, de GGD en de som-en-productmethode;
- ▶ rekenen met machten met gehele exponenten, de wetenschappelijke notatie van getallen;
- ▶ rekenen met (hogere machts) wortels, wortelvormen herleiden.

Variabele luciferpatronen



Domein

Rekenen en algebra

Hoofdstuk

Algebra

Inhoud

1.1	Rekenen met variabelen	6
1.2	Breuken	9
1.3	Haakjes	12
1.4	Machten	15
1.5	Wortels	18



1.1 Rekenen met variabelen

Inleiding

Weet je nog wat variabelen zijn?

Hoe zou je ze gebruiken als je van een rechthoek met een oppervlakte van 24 cm^2 en een omtrek van 22 cm de zijden wilt bepalen?

breedte b

rechthoek

lengte l

Je leert in dit onderwerp

- wat variabelen zijn en hoe je ermee rekent, dus wat algebra is;
- de wisseleigenschap van optellen en vermenigvuldigen gebruiken en uitdrukkingen met variabelen herleiden door gelijksoortige termen samen te nemen;
- voor variabelen getallen invullen en de uitdrukking berekenen.

Voorkennis

- getallen gebruiken om te tellen en te rekenen;
- het begrip variabele en eenvoudige berekeningen met variabelen uitvoeren.

Opgave V1

Opgave V2

Uitleg

Van een rechthoek zijn lengte en breedte onbekend, je kunt er dus nog verschillende getallen voor kiezen. De lengte en de breedte zijn variabel, veranderlijk. Je noemt de lengte en de breedte daarom 'variabelen'. Variabelen stel je in de wiskunde voor door letters, meestal kleine letters en cursief gedrukt. De lengte kun je hier l noemen en de breedte b . Voor deze rechthoek geldt dan:

breedte b

rechthoek

lengte l

- De omtrek is $l + b + l + b = 2 \cdot l + 2 \cdot b = 2l + 2b$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = lb$.

Hierbij is gebruik gemaakt van de afspraak dat je het maalteken $\cdot$ weglaat als daardoor geen misverstanden kunnen ontstaan. Bijvoorbeeld $2 \cdot a = 2a$ en $a \cdot b = ab$, maar $2 \cdot 3 \neq 23$. Verder gebruik je bij het rekenen met variabelen dezelfde regels als bij het rekenen met getallen.

- Je weet $3 + 3 = 2 \cdot 3$. Zo is ook $a + a = 2 \cdot a = 2a$.
- Je weet $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$. Zo is ook $a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$.
- En dus is $2a + 5a = 7a$. De 'gelijksoortige termen' $2a$ en $5a$ kun je optellen en aftrekken.
- Maar zo kun je $2a + 5b$ niet korter schrijven. De ongelijksoortige termen $2a$ en $5b$ kun je niet optellen of aftrekken.
- Je weet $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ en $2 + 3 = 3 + 2$. Zo is ook $a \cdot b = b \cdot a$ en $a + b = b + a$. (De 'wisseleigenschap' voor optellen en vermenigvuldigen.)
- Je weet $3 \cdot 3 = 3^2$. Zo is ook $a \cdot a = a^2$.



Je ziet dat je veel uitdrukkingen met variabelen ook anders kunt schrijven. Je noemt dat 'herschrijven' of 'herleiden' van zo'n uitdrukking. Zo is $2a + 5b + 3a + 4b$ te herleiden tot $5a + 9b$.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Rekenen is het werken met getallen. Er zijn vier hoofdbewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Verder ken je de bewerkingen machtsverheffen en worteltrekken.

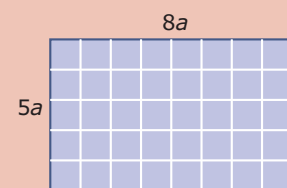
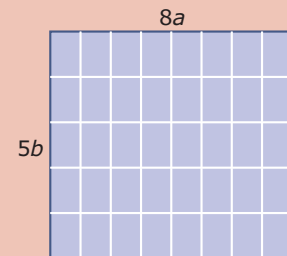
Algebra is het rekenen met **variabelen**. Daarbij gelden dezelfde regels als bij het rekenen. Als er geen misverstanden door ontstaan laat je in de algebra het vermenigvuldigingsteken weg.

Belangrijke situaties zijn:

- $a + a = 2a$ en $a + a + a = 3a$ enzovoort.
- $a \cdot a = a^2$ en $a \cdot a \cdot a = a^3$ enzovoort.
- $a \cdot b = ab$ en $a \cdot a \cdot b = a^2b$ enzovoort.
- **gelijksoortige termen** kun je optellen en aftrekken: $8a + 5a = 13a$ en $8a - 5a = 3a$.
- **ongelijksoortige termen** kun je niet optellen en aftrekken: $8a + 5b$ en $8a - 5b$ kun je niet korter schrijven.
- $8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab$ en $8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2$.

Verder maak je regelmatig gebruik van de **wisseleigenschap** van optellen en vermenigvuldigen: $a + b = b + a$ en $a \cdot b = b \cdot a$.

In de algebra is het gebruikelijk om uitdrukkingen zo kort en overzichtelijk mogelijk te schrijven door ze te **herleiden** met behulp van bovengenoemde eigenschappen. De variabelen zet je daarbij zoveel mogelijk in alfabetische volgorde. En verder schrijf je $1x$ als x en is $0x = 0$ en zo'n losse nul laat je weg.



Voorbeeld 1

De omtrek van de bovenste rechthoek is $8a + 5b + 8a + 5b = 16a + 10b$.

De omtrek van de onderste rechthoek is $8a + 5a + 8a + 5a = 26a$.

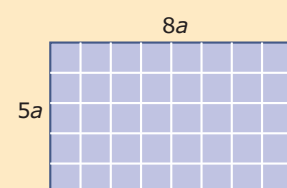
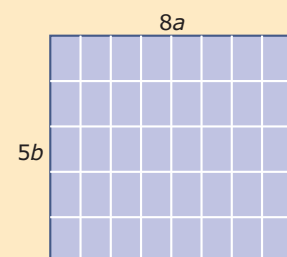
Je ziet hoe gelijksoortige termen worden samengenomen en ongelijksoortige niet. Soms verwissel je eerst twee termen.

De oppervlakte van de bovenste rechthoek is $8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab$.

Tel maar na dat er 40 rechthoekjes met oppervlakte ab zijn.

De oppervlakte van de onderste rechthoek is $8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2$.

Tel maar na dat er 40 rechthoekjes met oppervlakte a^2 zijn.



Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6

**Voorbeeld 2**

Bij het herleiden van uitdrukkingen met variabelen kun je ook met negatieve getallen werken en/of termen van elkaar aftrekken. Je ziet hier enkele voorbeelden.

- $9a - 7a = 9a + -7a = 2a$
- $5a - 6b - a + 5b = 5a + -6b + -1a + 5b = 5a + -1a + -6b + 5b = 4a + -1b = 4a - b$
- $9a \cdot -7a = 9 \cdot -7 \cdot a \cdot a = -63a^2$
- $2x \cdot -4y - 6 \cdot -3xy = -8xy - -18xy = -8xy + 18xy = 10xy$

[Opgave 7](#) [Opgave 8](#) [Opgave 9](#) [Opgave 10](#)**Voorbeeld 3**

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek 22 cm . Je wilt de lengte en de breedte bepalen.

Antwoord

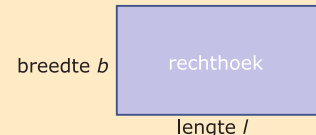
Dergelijke problemen kun je oplossen door gewoon getallen te proberen, zeker als de uitkomsten gehele getallen zijn.

Maar ook dan is het vaak handig om de gegevens eerst te 'vertalen' naar wiskundige uitdrukkingen. Zowel de lengte als de breedte zijn hier onbekend. Je kunt er daarom variabelen voor invoeren: noem de lengte bijvoorbeeld l en de breedte b .

De gegevens leveren dan op:

- De omtrek is $2l + 2b = 22$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = 24$.

Met behulp van een tabel kun je nu systematisch de oplossing zoeken.

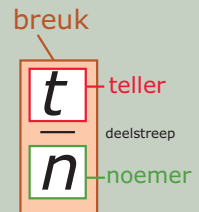
[Opgave 11](#) [Opgave 12](#)

1.2 Breuken

Inleiding

Je kunt al met breuken rekenen.

Maar nu ga je dit doen als er ook variabelen in de teller of de noemer van de breuk voorkomen. Dat gaat op dezelfde manier als gewoon met getallen, maar toch...



Je leert in dit onderwerp

- werken met breuken waarin variabelen voorkomen;
- breuken (met variabelen) vereenvoudigen en gelijknamig maken;
- breuken (met variabelen) optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Voorkennis

- getallen gebruiken om te tellen en te rekenen, met name rekenen met breuken;
- het begrip variabele en berekeningen met variabelen uitvoeren, uitdrukkingen herleiden.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Bij het rekenen met breuken is het gelijknamig maken van twee (of meer) breuken een belangrijke vaardigheid. Daarmee zorg je er voor dat de noemers gelijk worden, zodat het gelijksoortige breuken worden. Je zoekt daartoe het kleinste getal dat van beide noemers een veelvoud is. Dit heet het 'kleinste gemeenschappelijke veelvoud' of kortweg 'KGV' van beide noemers.

- Als je $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het KGV van 5 en 4. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is 20 en de breuken worden $\frac{8}{20}$ en $\frac{15}{20}$.
- Als je $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het KGV van 6 en 4. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is 12 en de breuken worden $\frac{10}{12}$ en $\frac{9}{12}$.
- Als je $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het KGV van b en d . Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is bd en de breuken worden $\frac{ad}{bd}$ en $\frac{bc}{bd}$.
- Als je $\frac{2}{a}$ en $\frac{3}{2a}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het KGV van a en $2a$. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is $2a$ en de breuken worden $\frac{4}{2a}$ en $\frac{3}{2a}$.

En nu kun je deze breuken optellen, aftrekken en delen. Bij het vermenigvuldigen van breuken is gelijknamig maken niet nodig, je vermenigvuldigt de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.



Soms kun je breuken vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bijvoorbeeld:

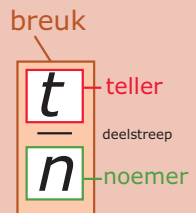
- $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ (teller en noemer delen door 12).
- $\frac{4a}{6a^2} = \frac{2}{3a}$ (teller en noemer delen door $2a$).

Belangrijk is nog dat bij breuken de noemer niet 0 kan zijn, want delen door 0 heeft geen betekenis. Daar moet je voortdurend van uit gaan.

Opgave 1 **Opgave 2** **Opgave 3**

Theorie

Je kunt al **rekenen met breuken**: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Het rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen gaat net zo.



- Bij optellen en aftrekken maak je de breuken eerst **gelijknamig**:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{en} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

- Bij vermenigvuldigen moet je tellers en noemers afzonderlijk vermenigvuldigen:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

- Bij delen maak je de breuken eerst gelijknamig:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \div \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad}{bc} \quad (\text{beide breuken met } b \cdot d \text{ vermenigvuldigen})$$

Er is één maar: door 0 delen heeft geen betekenis. In de berekeningen hierboven moet daarom steeds $b \neq 0$ en $d \neq 0$ en bij de deling moet ook $c \neq 0$.

Kijk goed of je de breuken waarmee je werkt nog kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bij het gelijknamig maken zoek je het **kleinste gemeenschappelijke veelvoud** of kortweg **KGV** van de noemers van de breuken.

Voorbeeld 1

Gegeven de twee breuken $\frac{2}{p}$ en $\frac{3}{2q}$ (met $p \neq 0$ en $q \neq 0$). Tel beide breuken op, vermenigvuldig ze en deel de eerste door de tweede.

Antwoord

- Optellen: $\frac{2}{p} + \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 2q}{p \cdot 2q} + \frac{3 \cdot p}{2q \cdot p} = \frac{4q}{2pq} + \frac{3p}{2pq} = \frac{4q+3p}{2pq}$
- Vermenigvuldigen: $\frac{2}{p} \cdot \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 3}{p \cdot 2q} = \frac{6}{2pq} = \frac{3}{pq}$
- Delen: $\frac{2}{p} \div \frac{3}{2q} = \frac{4q}{2pq} \div \frac{3p}{2pq} = \frac{4q}{3p}$

Opgave 4 **Opgave 5** **Opgave 6**

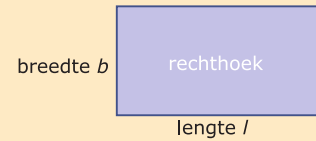


Voorbeeld 2

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek $21,4 \text{ cm}$. Je wilt de lengte en de breedte bepalen.

Antwoord

Dergelijke problemen met twee variabelen kun je oplossen met behulp van grafieken.



Je neemt voor de lengte bijvoorbeeld l en voor de breedte b .

De gegevens leveren dan op:

- De omtrek is $2l + 2b = 21,4$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = 24$.

Deze formules kun je met behulp van de balansmethode herleiden tot de vorm $l = \dots$:

- Uit de formule voor de omtrek volgt $l = 10,7 - b$.
- Uit de formule voor de oppervlakte volgt $l = \frac{24}{b}$.

Je zegt wel dat l nu is **uitgedrukt in** b . Dat doe je om gemakkelijker tabellen en grafieken te kunnen maken. Probeer daarmee de juiste waarden voor lengte en breedte te vinden.

[Opgave 7](#) [Opgave 8](#) [Opgave 9](#)

1.3 Haakjes

Inleiding

Soms komen in uitdrukkingen met variabelen haakjes voor. Dat heeft met de rekenvolgorde te maken. Maar niet altijd zijn die haakjes handig, een uitdrukking is af en toe te vereenvoudigen door de haakjes weg te werken.

Ook kun je sommige uitdrukkingen zonder haakjes weer van haakjes voorzien. Dat heet 'ontbinden in factoren'.



Je leert in dit onderwerp

- in uitdrukkingen met variabelen termen en factoren onderscheiden;
- uitdrukkingen met variabelen waarin haakjes voorkomen vereenvoudigen door haakjes weg te werken;
- ontbinden in factoren door een gemeenschappelijke factor buiten haakjes te halen en/of met behulp van de som-product-methode.

Voorkennis

- het begrip variabele en berekeningen met variabelen uitvoeren, uitdrukkingen herleiden;
- breuken met variabelen herleiden.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

De figuren hiernaast laten zien dat

- $2 \cdot (x + 7) = 2 \cdot x + 2 \cdot 7 = 2x + 14$

Het product van de factoren 2 en $x + 7$ herleid je zo tot de 'tweeterm' $2x + 14$.

- $(x + 5) \cdot (x + 7) = x \cdot x + 7 \cdot x + 5 \cdot x + 5 \cdot 7 = x^2 + 12x + 35$

Het product van de factoren $x + 5$ en $x + 7$ herleid je zo tot de 'drieterm' $x^2 + 12x + 35$.

	x	7
2	$2 \cdot x$	$2 \cdot 7$

	x	7
x	$x \cdot x$	$x \cdot 7$
5	$5 \cdot x$	$5 \cdot 7$

Een product bestaat uit 'factoren' en een optelling (of aftrekking)

uit 'termen'. En je ziet in de bovenste figuur dat de factor 2 wordt verdeeld over de twee termen van de factor $x + 7$. In de onderste figuur gebeurt iets dergelijks.

Dit is de 'verdeeieigenschap' of ook wel 'distributieve eigenschap' van getallen en daarom ook van variabelen. Je noemt dit wel 'haakjes wegwerken' of 'haakjes uitwerken'. Deze eigenschap gaat op voor alle getallen, ook negatieve.



Je kunt ook in de omgekeerde richting werken:

- $2x + 14 = 2 \cdot x + 2 \cdot 7 = 2 \cdot (x + 7)$
- $x^2 + 12x + 35 = x \cdot x + 7 \cdot x + 5 \cdot x + 5 \cdot 7 = (x + 7) \cdot (x + 5)$

Dit heet 'ontbinden in factoren' omdat je nu van een tweeterm of een drieterm weer een product van twee factoren maakt. Bij de eerste van deze twee ontbindingen zoek je de 'grootste gemeenschappelijke deler' (GGD) van beide termen. Je kunt dan die GGD 'buiten haakjes halen'. Maar bij de tweede ontbinding kun je beter anders te werk gaan.

Opgave 1 **Opgave 2** **Opgave 3**

Theorie

De figuren hiernaast laten zien dat

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Het product van de factoren a en $b + c$ herleid je zo tot de **tweeterm** $ab + ac$.

- $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Het product van de factoren $a + b$ en $c + d$ herleid je zo tot de **vierterm** $ac + ad + bc + cd$.

	b	c
a	$a \cdot b$	$a \cdot c$

	c	d
a	$a \cdot c$	$a \cdot d$
b	$b \cdot c$	$b \cdot d$

Een product bestaat uit **factoren** en een optelling (of aftrekking)

uit **termen**. En je ziet in de bovenste figuur dat de factor a wordt verdeeld over de twee termen van de factor $b + c$. In de onderste figuur gebeurt iets dergelijks.

Dit is de **verdeeleeigenschap** of ook wel **distributieve eigenschap** van getallen en daarom ook van variabelen. Je noemt dit wel **haakjes wegwerken**. Deze eigenschap gaat op voor alle getallen, ook negatieve.

Je kunt ook in de omgekeerde richting werken:

- $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
- $a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d = (a + b) \cdot (c + d)$

Dit heet **ontbinden in factoren** omdat je nu van een tweeterm of een vierterm weer een product van twee factoren maakt. Bij de eerste van deze twee ontbindingen zoek je de **grootste gemeenschappelijke deler** (GGD) van beide termen. Je kunt dan die GGD **buiten haakjes halen**. Maar bij de tweede ontbinding kun je beter anders te werk gaan, je gebruikt dan de **som-en-productmethode**, zie **Voorbeeld 3**.

Voorbeeld 1

Hier zie je nog enkele voorbeelden van haakjes wegwerken.

- $3(5 + 2x) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2x = 15 + 6x$
- $-2k(k - 4) = -2k(k + -4) = -2k \cdot k + -2k \cdot -4 = -2k^2 + 8k$
- $(p + 3)(p - 4) = (p + 3) \cdot (p + -4) = p \cdot p + -4 \cdot p + 3 \cdot p + 3 \cdot -4 = p^2 - p - 12$
- $2(x + 1)(x - 1) = 2(x^2 - x + x - 1) = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$
- $2(q + 1) - 2(2 - q) = 2q + 2 - 4 + 2q = 4q - 2$
- $q(q + 1) - (q - 1) = q^2 + q - q + 1 = q^2 + 1$

Opgave 4 **Opgave 5** **Opgave 6** **Opgave 7**

**Voorbeeld 2**

Een uitdrukking zonder haakjes kun je soms ontbinden in factoren door de GGD van alle termen buiten haakjes te halen. Hier zie je er enkele voorbeelden van.

- $5x + 10 = 5 \cdot x + 5 \cdot 2 = 5(x + 2)$
- $-5x + 10 = -5 \cdot x - 5 \cdot 2 = -5(x - 2)$
of
 $-5x + 10 = 5 \cdot -x + 5 \cdot 2 = 5(-x + 2)$
- $-5x^2 - 10x = -5x \cdot x + -5x \cdot 2 = -5x(x + 2)$
- $5x^2 - 10x + 15 = 5 \cdot x^2 + 5 \cdot 2x + 5 \cdot 3 = 5(x^2 + 2x + 3)$
- $5x^2 - 10xy = 5x \cdot x + 5x \cdot 2y = 5x(x + 2y)$
- $5xy - 5y = 5y \cdot x - 5y \cdot 1 = 5y(x - 1)$

Opgave 8 **Opgave 9** **Opgave 10**

Voorbeeld 3

De uitdrukking $x^2 + 5x + 6$ kun je niet ontbinden in factoren door een GGD buiten haakjes te halen, er is namelijk geen GGD (behalve 1).

In de figuur hiernaast zie je dat $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Maar hoe kom je nu aan die 2 en die 3?

Je ziet in de figuur dat de term $5x$ ontstaat door de oppervlaktes $2x$ en $3x$ op te tellen en dat de term 6 de oppervlakte van het rechthoekje van 2 bij 3 is. Kortom: het getal in de term met x is de som van 2 en 3 en het getal in de term zonder x is het product van 2 en 3 .

Wil je een uitdrukking zoals $x^2 + 5x + 6$ ontbinden dan zoek je dus twee getallen die opgeteld 5 en vermenigvuldigd 6 opleveren. In dit geval zijn dat de getallen 2 en 3 . Maar in het algemeen zijn dergelijke getallen alleen te vinden als je er van uitgaat dat je uitsluitend gehele getallen wilt hebben. Je kunt dan systematisch alle mogelijkheden voor de vermenigvuldiging nagaan. Je gebruikt de zogenaamde 'som-en-productmethode'.

		x	3
x	$x \cdot x$	$3 \cdot x$	
2	$2 \cdot x$	$2 \cdot 3$	

Opgave 11 **Opgave 12** **Opgave 13** **Opgave 14**

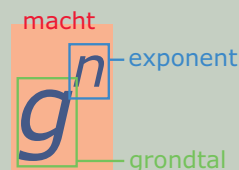
1.4 Machten

Inleiding

Machten ontstaan door herhaaldelijk hetzelfde te vermenigvuldigen.

Dat kun je ook met variabelen doen: $x \cdot x \cdot x = x^3$.

En dan kun je weer uitdrukkingen met variabelen en machten herleiden...



Je leert in dit onderwerp

- werken met machten van variabelen;
- uitdrukkingen met variabelen waarin machten voorkomen vereenvoudigen (ook door haakjes weg te werken);
- het rekenen met machten gebruiken bij rekenen met getallen in de wetenschappelijke notatie.

Voorkennis

- rekenen met machten en de wetenschappelijke notatie gebruiken;
- het begrip variabele en berekeningen met variabelen uitvoeren, uitdrukkingen herleiden, ook met breuken;
- uitdrukkingen met variabelen waarin haakjes voorkomen vereenvoudigen door haakjes weg te werken;
- ontbinden in factoren door een gemeenschappelijke factor buiten haakjes te halen en/of met behulp van de som-product-methode.

Opgave V1 Opgave V2 Opgave V3

Uitleg

Een 'macht' is een herhaalde vermenigvuldiging: $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Het getal waarmee je steeds vermenigvuldigt heet het 'grondtal' van de macht en het aantal keren dat je die vermenigvuldiging doet heet de 'exponent'.



Het werken met machten ken je al:

- Als je twee machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigt, kun je de exponenten optellen: $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$.
- Als je twee machten met hetzelfde grondtal deelt, kun je de exponenten aftrekken: $5^6 / 5^2 = 5^4$.

Hieruit volgt meteen:

- Een macht met exponent 0 heeft als uitkomst 1: $5^0 = 1$.
- Als je een macht weer tot een bepaalde macht verheft, kun je de exponenten vermenigvuldigen: $(5^4)^2 = 5^8$.
- Ook negatieve exponenten komen voor: $5^{-3} = 5^{0-3} = 5^0 / 5^3 = \frac{1}{5^3}$.



Deze rekenregels gelden in het algemeen voor machten met een willekeurig grondtal en een gehele exponent.

Ze zijn vooral nuttig bij het werken met de ‘wetenschappelijke notatie’ van hele grote en hele kleine getallen.

Een getal zoals 135 miljard = 135000000000 schrijf je als:

$$135000000000 = 1,35 \cdot 100000000000 = 1,35 \cdot 10^{11}.$$

Een getal zoals 31 miljoenste = 0,000031 schrijf je als:

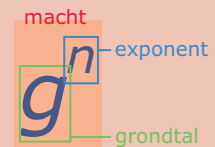
$$0,000031 = 3,1 \cdot 0,00001 = 3,1 \cdot \frac{1}{100000} = 3,1 \cdot 10^{-5}.$$

In de wetenschappelijke notatie schrijf je een getal in de vorm $a \cdot 10^n$, waarbij $1 \leq a < 10$ en n een geheel getal is.

Opgave 1 **Opgave 2** **Opgave 3**

Theorie

Een **macht** is een herhaalde vermenigvuldiging, notatie g^n . Het getal g waarmee je steeds vermenigvuldigt heet het **grondtal** van de macht en het aantal keren n dat je die vermenigvuldiging doet heet de **exponent**.



Het werken met machten ken je al:

- Als je twee machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigt, kun je de exponenten optellen: $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$.
- Als je twee machten met hetzelfde grondtal deelt, kun je de exponenten aftrekken: $g^a / g^b = g^{a-b}$.

Hieruit volgt meteen:

- Een macht met exponent 0 heeft als uitkomst 1: $g^0 = 1$.
- Als je een macht weer tot een bepaalde macht verheft, kun je de exponenten vermenigvuldigen: $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$.
- Ook negatieve exponenten komen voor: $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$.

Deze rekenregels gelden in het algemeen voor machten met een willekeurig grondtal (bij delingen is het grondtal ongelijk aan 0) en een gehele exponent.

Ze zijn vooral nuttig bij het werken met de **wetenschappelijke notatie** van hele grote en hele kleine getallen.

In de wetenschappelijke notatie schrijf je een getal in de vorm $a \cdot 10^n$, waarbij $1 \leq a < 10$ en n een geheel getal is.

**Voorbeeld 1**

Hier zie je enkele voorbeelden van het werken met machten. Denk er om dat je alleen gelijksoortige termen kunt optellen en aftrekken.

- $2a^7 \cdot 5a^4 = 2 \cdot 5 \cdot a^7 \cdot a^4 = 10a^{7+4} = 10a^{11}$
- $\frac{2a^7}{5a^4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{a^7}{a^4} = 0,4a^{7-4} = 0,4a^3$
- $\frac{5a^4}{2a^7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{a^4}{a^7} = 2,5 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{2,5}{a^3}$
- $(-2a^3)^4 = -2a^3 \cdot -2a^3 \cdot -2a^3 \cdot -2a^3 = 16a^{12}$
- $(-2a^3)^4 + (a^2)^6 = 16a^{12} + a^{12} = 17a^{12}$
- $18a^2b^3 - (2ab)^2 \cdot 3b = 18a^2b^3 - 12a^2b^3 = 6a^2b^3$

Opgave 4 **Opgave 5** **Opgave 6**

Voorbeeld 2

Deze getallen zijn geschreven in de wetenschappelijke notatie: $a = 3,6 \cdot 10^{13}$, $b = 1,2 \cdot 10^{12}$, $c = 1,2 \cdot 10^{-6}$ en $d = 9,0 \cdot 10^{-7}$.

Bereken $a + b$, $a \cdot c$, $c - d$ en a/d . De antwoorden geef je dan natuurlijk ook in de wetenschappelijke notatie!

Antwoord

Let vooral op het werken met de machten van 10. Alleen gelijksoortige uitdrukkingen mag je optellen of aftrekken.

- $a + b = 3,6 \cdot 10^{13} + 1,2 \cdot 10^{12} = 3,6 \cdot 10^{13} + 0,12 \cdot 10^{13} = 3,72 \cdot 10^{13}$
- $a \cdot c = 3,6 \cdot 10^{13} \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} = 4,32 \cdot 10^7$
- $c - d = 1,2 \cdot 10^{-6} - 9,0 \cdot 10^{-7} = 12,0 \cdot 10^{-7} - 9,0 \cdot 10^{-7} = 3,0 \cdot 10^{-7}$
- $\frac{a}{d} = \frac{3,6 \cdot 10^{13}}{9,0 \cdot 10^{-7}} = 0,4 \cdot 10^{20} = 4,0 \cdot 10^{19}$

Opgave 7 **Opgave 8**

1.5 Wortels

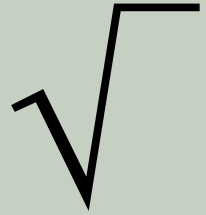
Inleiding

Wortels ontstaan uit het terugrekenen vanuit machten.

Zo ontstaat de 'gewone' wortel door terugrekenen vanuit een kwadraat.

Zo ontstaat de derdemachtswortel door terugrekenen vanuit een derde macht.

Enzovoort...



Je leert in dit onderwerp

- werken met (hogere machts) wortels, ook als daar variabelen in voor komen;
- uitdrukkingen waarin wortels voor komen vereenvoudigen.

Voorkennis

- rekenen met machten en terugrekenen vanuit machten;
- het begrip variabele en berekeningen met variabelen uitvoeren, uitdrukkingen herleiden, ook met breuken en machten;
- uitdrukkingen met variabelen waarin haakjes voorkomen vereenvoudigen door haakjes weg te werken;
- ontbinden in factoren door een gemeenschappelijke factor buiten haakjes te halen en/of met behulp van de som-product-methode.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

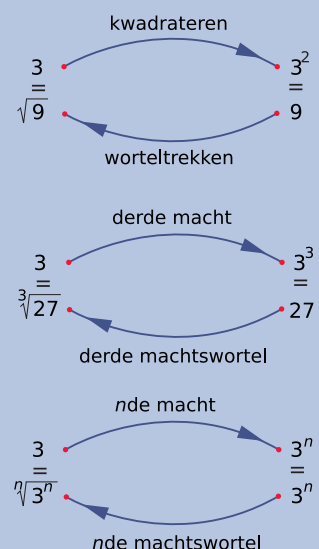
Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren. De wortel uit 9 is 3 omdat $3^2 = 9$. Zo geldt in het algemeen:

$$\sqrt{a^2} = a \text{ als } a \geq 0.$$

Helaas zijn de meeste getallen geen zuivere kwadraten en kun je de wortels eruit alleen maar benaderen. Maar vroegtijdig benaderen is in berekeningen vaak niet gewenst. En daarom moet je het rekenen met wortels oefenen. Je weet al hoe dat gaat:

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ als $a \geq 0$ en $b > 0$.
- Alleen gelijke wortels kun je optellen of aftrekken: $3\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 5\sqrt{10}$, maar $3\sqrt{10} + 2\sqrt{11}$ kun je niet verder vereenvoudigen.

Bij worteltrekken gaat het om terugrekenen vanuit een kwadraat. Maar er bestaan ook hogere machten. Bij het terugrekenen vanuit derde machten spreek je van derde machts worteltrekken, bij het terugrekenen vanuit vierde machten van vierde machts worteltrekken, enz.





Met dergelijke 'hogere machtswortels' kun je op dezelfde manier rekenen als met 'gewone' wortels. Nu is:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ als } a \geq 0 \text{ en } n = 2, 3, 4, 5, \dots$$

Er is wel één ding waar je op moet letten: derde machten en vijfde machten, enz., kunnen ook negatief zijn. En kwadraten, vierde machten, zesde machten, enz., kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.

Opgave 1 **Opgave 2** **Opgave 3**

Theorie

Worteltrekken is terugrekenen vanuit kwadrateren. **n-de machts worteltrekken** is terugrekenen vanuit een n-de macht.

Zo geldt in het algemeen:

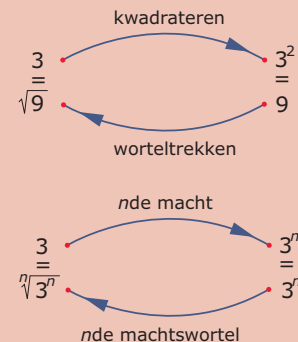
$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ als } a \geq 0 \text{ en } n = 2, 3, 4, \dots$$

Het rekenen met n-de machts wortels gaat zo:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$.
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ als $a \geq 0$ en $b > 0$.
- Alleen gelijke wortels kun je optellen en/of aftrekken.

Let er op dat oneven machten ook negatief kunnen zijn. En even machten kunnen niet negatief zijn. Dit betekent dat bijvoorbeeld dat $\sqrt[3]{-8} = -2$, maar dat $\sqrt[4]{-16}$ geen reëel getal is.

De rekenregels hierboven zijn dus voor **oneven** n ook geldig voor negatieve waarden van a en/of b.



Voorbeeld 1

Hier zie je hoe je met behulp van de rekenregels voor wortels enkele uitdrukkingen kunt vereenvoudigen.

- $\sqrt{48} + 3\sqrt{27} = \sqrt{16 \cdot 3} + 3\sqrt{9 \cdot 3} = 4\sqrt{3} + 3 \cdot 3\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$
- $\sqrt{3a^2} + 2a\sqrt{12} = \sqrt{a^2 \cdot 3} + 2a\sqrt{4 \cdot 3} = a\sqrt{3} + 2a \cdot 2\sqrt{3} = 5a\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} + \sqrt[3]{125 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot \sqrt[3]{2} = 8 \cdot \sqrt[3]{2}$

Opgave 4 **Opgave 5** **Opgave 6**

Voorbeeld 2

Bij breuken met wortels in de noemer is het vaak handig om die wortel weg te werken uit de noemer. Dat kun je doen door teller en noemer met die wortel te vermenigvuldigen. Bekijk deze voorbeelden maar.

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\frac{a}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{a \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{a\sqrt{a}}{a} + \sqrt{a} = \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$

Bij hogere machtswortels is dit minder eenvoudig.

Opgave 7 **Opgave 8** **Opgave 9**





Begrippen

- ▶ overeenkomstige hoeken — overeenkomstige zijden — congruentie — gelijkvormigheid — vergrotingsfactor;
- ▶ congruentie — gelijkvormigheid van driehoeken;
- ▶ middelloodlijn — deellijn (bissectrice) — zwaartelijn — hoogtelijn — omgeschreven cirkel — ingeschreven cirkel;
- ▶ regelmatige veelhoek — omgeschreven cirkel;
- ▶ lengtevergrotingsfactor — oppervlaktevergrotingsfactor.

Activiteiten

- ▶ de begrippen gelijkvormig en congruent leren gebruiken;
- ▶ herkennen wanneer driehoeken gelijkvormig zijn en behulp daarvan berekeningen in driehoeken uitvoeren;
- ▶ bijzondere lijnen in driehoeken — ingeschreven en omgeschreven cirkel van een driehoek tekenen;
- ▶ rekenen in vierhoeken, vijfhoeken, etc, met behulp van congruentie en gelijkvormigheid;
- ▶ werken met de lengtevergrotingsfactor en de bijbehorende oppervlaktevergrotingsfactor.

Jacobsstaf



Domein

Meetkunde

Hoofdstuk

Vlakke meetkunde

Inhoud

2.1	Gelijk of gelijkvormig	24
2.2	Rekenen in driehoeken	28
2.3	Bijzondere lijnen	31
2.4	Vlakke figuren	34
2.5	Vergrotingsfactoren	37

2

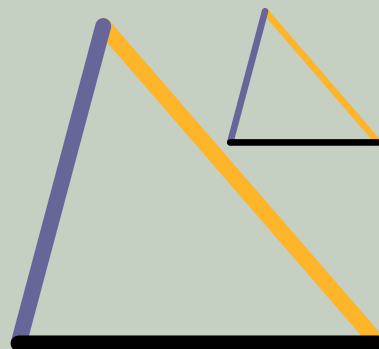
2.1 Gelijk of gelijkvormig

Inleiding

Hier zie je twee driehoeken.

Hebben ze dezelfde vorm? En wat weet je dan van hun hoeken en zijden?

Daarover gaat dit onderdeel.



Je leert in dit onderwerp

- wat congruente (gelijke) figuren en wat gelijkvormige figuren zijn;
- overeenkomstige hoeken en zijden herkennen;
- het begrip vergrotingsfactor en daarmee zijden berekenen.

Voorkennis

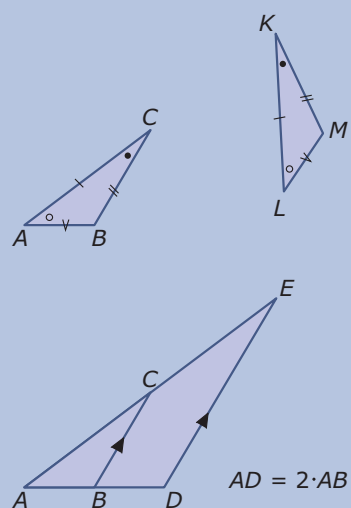
- de basisbegrippen van vlakke meetkunde, zoals punt, lijn, lijnstuk, zijde, hoekpunt, hoek;
- namen en eigenschappen van vlakke figuren.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Als twee figuren gelijk zijn, zoals in het bovenste plaatje, dan betekent dit dat je als het ware beide figuren kunt uitknippen en precies over elkaar heen kunt leggen. De 'overeenkomstige hoeken' zijn dan even groot en de 'overeenkomstige zijden' zijn even lang. Figuren die precies gelijk aan elkaar zijn noem je 'congruent'. Hier zijn de driehoeken ABC en LMK congruent en dat schrijf je als $\triangle ABC \cong \triangle LMK$.

Maar er bestaan ook figuren die wel dezelfde vorm hebben, maar toch niet even groot zijn. De éne figuur is dan een vergroting (of verkleining) van de andere. Dit betekent dat wel alle hoeken van beide figuren even groot zijn, maar dat de zijden van de éne figuur met een vaste factor moeten worden vermenigvuldigd.





In het onderste plaatje zie je dat de lijnstukken BC en DE evenwijdig zijn. Dus zijn de hoeken bij B en D en die bij C en E even groot. De zijde AD is tweemaal zo groot als AB . Dit geldt ook voor DE en BC en voor AE en AC . De zijden van $\triangle ADE$ zijn 2 keer zo groot als de overeenkomstige zijden van $\triangle ABC$. Je zegt nu dat de driehoeken ABC en ADE 'gelijkvormig' zijn en dat schrijf je als $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. $\triangle ADE$ is een vergroting van $\triangle ABC$ met 'vergrotingsfactor' 2.

Opgave 1 **Opgave 2** **Opgave 3** **Opgave 4**

Theorie

Twee figuren heten **congruent** als ze voor wat betreft hun vorm en hun afmetingen precies gelijk zijn. Dit betekent voor veelhoeken dat hun **overeenkomstige hoeken** gelijk zijn en hun **overeenkomstige zijden** gelijk zijn.

Twee figuren zijn **gelijkvormig** als de ene figuur een vergroting of verkleining van de andere is. Voor veelhoeken betekent dit dat de overeenkomstige hoeken even groot zijn en de overeenkomstige zijden met eenzelfde **vergrotingsfactor** zijn vermenigvuldigd.

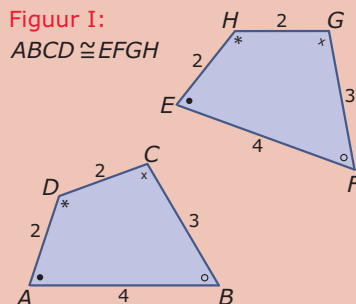
Bij gelijkvormige veelhoeken kun je een **verhoudingstabel** maken waarin de overeenkomstige zijden boven elkaar staan. Bij de gelijkvormige vierhoeken hiernaast hoort onderstaande verhoudingstabel.

AB 4 cm	BC 3 cm	CD 2 cm	DA 2 cm
EF 6 cm	FG 4,5 cm	GH 3 cm	HE 3 cm

De bijbehorende vergrotingsfactor is 1,5.

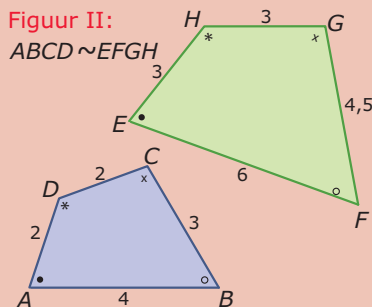
Figuur I:

$ABCD \cong EFGH$



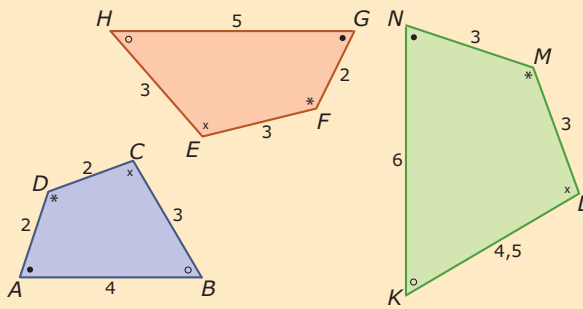
Figuur II:

$ABCD \sim EFGH$



**Voorbeeld 1**

Laat met een berekening zien welke van de onderstaande vierhoeken gelijkvormig zijn en welke niet.



Antwoord

Van alle drie de vierhoeken zijn de overeenkomstige hoeken gelijk. Het gaat dus om de overeenkomstige zijden. Die moeten een verhoudingstabel opleveren.

Vergelijk eerst bijvoorbeeld de vierhoeken $ABCD$ en $GHEF$. (Je ziet dat de lettervolgorde van de tweede vierhoek zo is gekozen dat de letters bij de overeenkomstige hoeken in dezelfde volgorde staan als die van vierhoek $ABCD$.)

Maak een tabel zoals deze waarin de overeenkomstige zijden boven elkaar staan.

AB 4 cm	BC 3 cm	CD 2 cm	DA 2 cm
GH 5 cm	HE 3 cm	EF 3 cm	FG 2 cm

Je ziet dat er geen vaste vergrotingsfactor vanuit de zijden van $ABCD$ waarmee je de overeenkomstige zijden van $GHEF$ krijgt. Deze tabel is geen verhoudingstabel. Dus deze twee vierhoeken zijn niet gelijkvormig.

Op dezelfde manier kun je de vierhoeken $ABCD$ en $NKLM$ vergelijken.

Opgave 5 **Opgave 6** **Opgave 7**

Voorbeeld 2

Teken met passer en geodriehoek een driehoek ABC met $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm en $AC = 6$ cm. Vraag een medeleerling om dit ook te doen. Zijn jullie driehoeken verschillend?

Teken vervolgens $\triangle DEF$ waarvan $DE = 2 \cdot AB$, $EF = 2 \cdot BC$ en $FE = 2 \cdot CA$. Zijn de driehoeken ABC en DEF automatisch gelijkvormig?

Antwoord

Alle driehoeken met zijden van 4, 5 en 6 cm zijn hetzelfde. Ze passen allemaal op elkaar en zijn dus congruent. De lengtes van de zijden bepalen de vorm van de driehoek. Twee driehoeken zijn dus congruent als hun zijden gelijk zijn. Op de hoeken hoef je dan niet meer te letten.

Verder zie je dat het vergroten van alle zijden met dezelfde factor een driehoek oplevert met dezelfde vorm als de oorspronkelijke driehoek, dus met dezelfde hoeken. Twee



driehoeken zijn gelijkvormig als de overeenkomstige zijden met dezelfde factor zijn vermenigvuldigd.

Bij driehoeken hoef je niet op de zijden en de hoeken te letten om te beoordelen of ze congruent of gelijkvormig zijn. Je hoeft alleen maar naar de zijden te kijken of alleen maar naar de hoeken te kijken.

[Opgave 8](#) [Opgave 9](#) [Opgave 10](#)

2.2 Rekenen in driehoeken

Inleiding

Hier zie je twee driehoeken.

Ze zijn gelijkvormig. Dat betekent dat hun hoeken gelijk zijn. En voor driehoeken is dat ook genoeg, hun zijden hebben dan automatisch een vaste vergrotingsfactor. De zijden van de grote driehoek zijn bijvoorbeeld allemaal 2,5 keer zo groot als die van de kleinere.



Je leert in dit onderwerp

- wanneer driehoeken gelijkvormig zijn;
- gelijkvormige driehoeken gebruiken bij berekeningen.

Voorkennis

- wat congruente (gelijke) figuren en wat gelijkvormige figuren zijn;
- overeenkomstige hoeken en zijden herkennen;
- het begrip vergrotingsfactor en daarmee zijden berekenen.

Opgave V1

Opgave V2

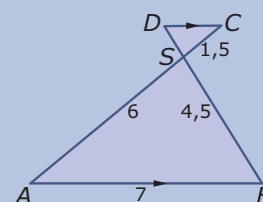
Uitleg

Als verschillende mensen de opdracht krijgen om een driehoek ABC met $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm en $AC = 8$ cm te tekenen, krijgen ze allemaal dezelfde driehoek. Driehoeken waarvan de overeenkomstige zijden gelijk zijn, zijn congruent.

Als verschillende mensen de opdracht krijgen om een driehoek ABC te tekenen met $\angle A = 60^\circ$ en $\angle B = 40^\circ$, krijgen ze niet altijd dezelfde driehoeken. Maar al hun driehoeken worden wel gelijkvormig, omdat de overeenkomstige hoeken gelijk zijn.

In de figuur hiernaast kun je beredeneren dat de driehoeken ABS en CDS twee paar gelijke hoeken hebben. Dat volgt uit de evenwijdigheid van AB en CD . Bij de overeenkomstige zijden van deze twee driehoeken kun je daarom een verhoudingstabel maken.

AB 7 cm	BS 4,5 cm	AS 6 cm
CD a cm	DS b cm	CS 1,5 cm



De twee onbekende zijden kun je nu uitrekenen met behulp van de vergrotingsfactor van $\triangle ABS$ naar $\triangle CDS$.

Opgave 1

Opgave 2

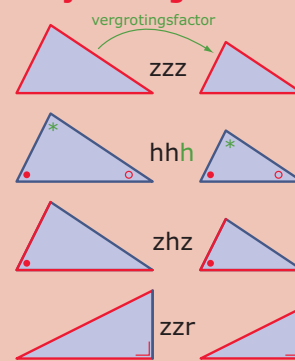


Theorie

Twee driehoeken zijn **gelijkvormig** als

- bij de drie paren overeenkomstige zijden past een verhoudingstabel;
- er twee paren gelijke overeenkomstige hoeken zijn (Het derde paar is dan automatisch ook gelijk.);
- er één paar gelijke overeenkomstige hoeken zijn en bij de twee paren overeenkomstige zijden op de benen van die hoeken een verhoudingstabel past;
- beide driehoeken een rechte hoek hebben en bij twee paren overeenkomstige zijden een verhoudingstabel past.

Gelijkvormigheid



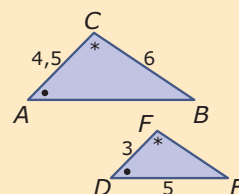
Bij gelijkvormige driehoeken kun je een **verhoudingstabel** maken waarin de overeenkomstige zijden boven elkaar staan. De bijbehorende vergrotingsfactor bereken je door de lengtes van twee overeenkomstige zijden op elkaar te delen. En met die vergrotingsfactor kun je vaak onbekende lengtes van lijnstukken berekenen.

Voorbeeld 1

Je ziet hiernaast twee gelijkvormige driehoeken. Leg uit waarom ze gelijkvormig zijn en bereken de lengtes van AB en EF .

Antwoord

Beide driehoeken hebben twee paren gelijke hoeken. Daarom zijn ze gelijkvormig. Bij de overeenkomstige zijden past dus een verhoudingstabel.



AB x	BC 6	AC 4,5
DE 5	EF y	DF 3

De vergrotingsfactor van $\triangle ABC$ naar $\triangle DEF$ bedraagt $3/4,5 = \frac{2}{3}$, dus $EF = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$.

De vergrotingsfactor van $\triangle DEF$ naar $\triangle ABC$ bedraagt $4,5/3 = 1,5$, dus $AB = 1,5 \cdot 5 = 7,5$.

Opgave 3 **Opgave 4**

Voorbeeld 2

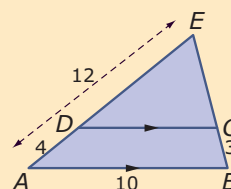
In deze figuur zijn AB en CD evenwijdig.

Bereken de lengte van CD en die van CE .

Antwoord

Omdat $\angle A = \angle CDE$ (F-hoeken) en $\angle B = \angle DCE$ (F-hoeken) is $\triangle ABE \sim \triangle DCE$.

Maak nu een verhoudingstabel voor de zijden en vul getallen of onbekenden in.





AB 10 cm	BE $x + 3$ cm	AE 12 cm
DC y cm	CE x cm	DE 8 cm

De vergrotingsfactor van $\triangle ABE$ naar $\triangle DCE$ is $8/12 = \frac{2}{3}$.

$$CD = \frac{2}{3} \cdot 10 = \frac{20}{3}.$$

Om CE te berekenen gebruik je $x = \frac{2}{3} \cdot (x + 3)$. Hieruit volgt $x = 6$ en dus $CE = 6$.

Opgave 5 **Opgave 6** **Opgave 7**

Voorbeeld 3

Bereken de lengte van AD in één decimaal nauwkeurig.

Antwoord

In rechthoekige driehoeken geldt ook de stelling van Pythagoras. Je kunt dus ook de lengte van BC berekenen met $BC^2 = 12^2 + 8^2$, dus $BC = \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{208}$.

In deze figuur zijn drie gelijkvormige driehoeken te vinden, namelijk $\triangle ABC$, $\triangle DAC$ en $\triangle DBA$. Ga na dat van die driehoeken alle drie de paren overeenkomstige hoeken gelijk zijn.

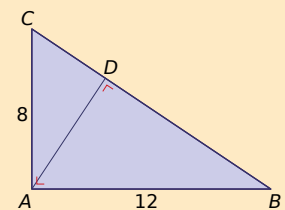
Neem nu bijvoorbeeld de driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DAC$ en maak een verhoudingstabel voor de zijden.

AB 12 cm	BC $\sqrt{208}$ cm	AC 8 cm
DA x cm	AC 8 cm	DC y cm

De vergrotingsfactor van $\triangle ABE$ naar $\triangle DAC$ is $8/\sqrt{208}$.

$$AD = 8/\sqrt{208} \cdot 12 \approx 6,7 \text{ cm}.$$

Opgave 8 **Opgave 9**



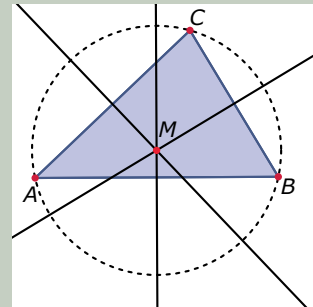
2.3 Bijzondere lijnen

Inleiding

Gegeven is een driehoek ABC . Van elke zijde is een middelloodlijn getekend. Deze middelloodlijnen lijken door één punt te gaan.

Wat zijn middelloodlijnen eigenlijk precies en gaan ze altijd door één punt?

En zijn er nog andere bijzondere lijnen in driehoeken te tekenen?



Je leert in dit onderwerp

- wat een middelloodlijn, wat een zwaartelij, wat een deellijn en wat een hoogtelijn in een driehoek is;
- de eigenschappen van deze soorten lijnen herkennen;
- de ingeschreven en de omgeschreven cirkel van een driehoek construeren.

Voorkennis

- wat congruente (gelijke) figuren en wat gelijkvormige figuren zijn;
- overeenkomstige hoeken en zijden herkennen;
- het begrip vergrotingsfactor en daarmee zijden berekenen.

Opgave V1

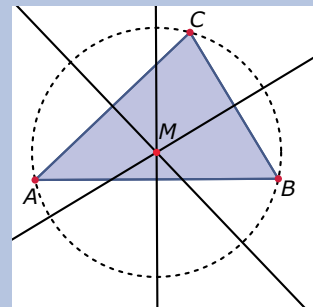
Uitleg

Applet

Een 'middelloodlijn' van een lijnstuk is een lijn die door het midden van dat lijnstuk gaat en er loodrecht op staat, dus de symmetrieas van dat lijnstuk.

Je ziet hier $\triangle ABC$ met daarin de drie middelloodlijnen van de zijden getekend. Die drie lijnen gaan door één punt M . Dit punt M is het middelpunt te zijn van een cirkel door de drie hoekpunten van die driehoek. Deze cirkel heet de 'omgeschreven cirkel' van de driehoek.

Er zijn nog meer bijzondere lijnen in een driehoek...



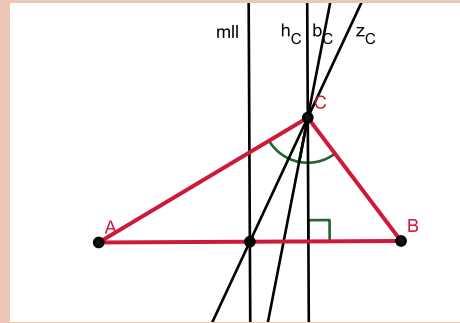
Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Applet

In veel vlakke figuren kun je bijzondere lijnen tekenen. Je ziet hier in $\triangle ABC$:

- de **middelloodlijn** van zijde AB , dat is een lijn die deze zijde loodrecht middendoor deelt;
- de **deellijn** of **bissectrice** van $\angle C$, dat is een lijn die deze hoek middendoor deelt;
- de **zwaartelijn** vanuit punt C , dat is een lijnstuk vanuit dit punt naar het midden van de overstaande zijde (de zijde tegenover punt C);
- de **hoogtelijn** vanuit punt C , dat is een lijnstuk vanuit dit punt loodrecht op de overstaande zijde (de zijde tegenover punt C).



De bijzondere lijnen van een driehoek hebben bepaalde eigenschappen. Je kunt uitspraken doen als “De drie middelloodlijnen in een driehoek gaan door één punt en dat punt is het middelpunt van een cirkel door de drie hoekpunten van de driehoek”. Die cirkel heet de **omgeschreven cirkel** van de driehoek.

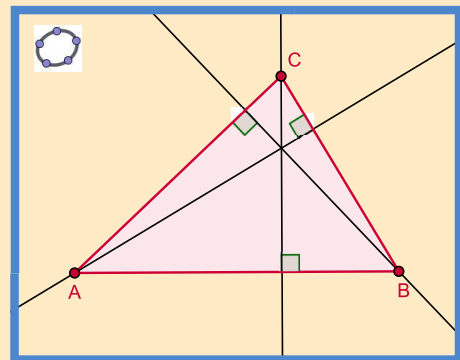
Elke driehoek heeft ook een **ingeschreven cirkel**. Dat is de grootste cirkel die nog precies binnen de driehoek ligt.

Voorbeeld 1

Applet

Je ziet hier $\triangle ABC$ met daarin de drie hoogtelijnen.

Ook die drie hoogtelijnen gaan door één punt, zelfs als twee hoogtelijnen niet binnen de driehoek vallen.



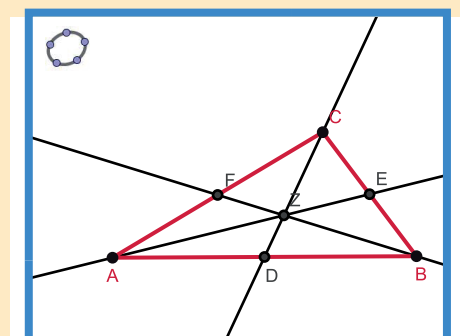
Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Applet

Je ziet hiernaast $\triangle ABC$ waarin de drie zwaartelijnen zijn getekend. Deze lijnstukken verbinden een hoekpunt met het midden van de overstaande zijde. Hun snijpunt is het zwaartepunt Z van de driehoek. Een opvallende eigenschap van het zwaartepunt is dat dit punt de zwaartelijnen in twee stukken verdeelt die de verhouding 2 : 1 hebben.

Laat dit zien met behulp van gelijkvormigheid.





Antwoord

Teken lijnstuk EF .

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ABC en FEC volgt $EF \parallel AB$ en $EF = \frac{1}{2} \cdot AB$. En daarom is $\triangle ABZ \sim \triangle EFZ$. Bij de overeenkomstige zijden past dus een verhoudings-tabel:

AB	BZ	AZ
EF	FZ	EZ

De vergrotingsfactor van $\triangle ABZ$ naar $\triangle EFZ$ bedraagt $\frac{1}{2}$, dus $EZ = \frac{1}{2} \cdot AZ$ en $FZ = \frac{1}{2} \cdot BZ$. En dus is $AZ : EZ = BZ : FZ = 2 : 1$.

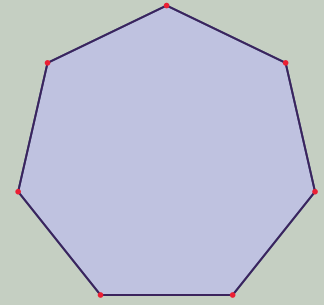
[Opgave 6](#) [Opgave 7](#)

2.4 Vlakke figuren

Inleiding

Dit is een regelmatige zevenhoek. Dat betekent dat alle hoeken gelijk zijn en alle zijden ook.

Als de zijden 2 cm zijn, hoe teken je dan zo'n regelmatige zevenhoek?



Je leert in dit onderwerp

- het begrip regelmatige veelhoek;
- de hoeken van een regelmatige veelhoek berekenen en regelmatige veelhoeken construeren;
- meetkundige problemen oplossen.

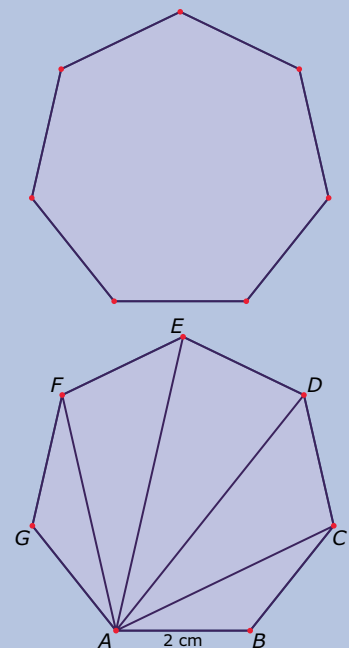
Voorkennis

- wat congruente (gelijke) figuren en wat gelijkvormige figuren zijn;
- overeenkomstige hoeken en zijden herkennen en zijden berekenen met behulp van de vergrotingsfactor;
- de eigenschappen van middelloodlijnen, zwaartelijnen, bissectrices en hoogtelijnen in een driehoek;
- de begrippen ingeschreven en omgeschreven cirkel.

Opgave V1

Uitleg

Je ziet hier een regelmatige zevenhoek met zijden van 2 cm. Alle hoeken en alle zijden zijn gelijk. Om zo'n figuur te kunnen tekenen verdeel je hem vanuit één hoekpunt in driehoeken. Omdat hij uit vijf driehoeken bestaat is zijn totale hoekensom $5 \cdot 180 = 900^\circ$. Elke hoek is dan $900/7 \approx 128,6^\circ$. Nu kun je de regelmatige zevenhoek tekenen. Je weet immers alle hoeken en alle zijden, dus de figuur ligt vast.



Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3



Theorie

Alleen driehoeken zijn **star**: als de lengtes van de drie zijden bekend zijn, ligt de vorm van de driehoek vast. Hij is dan niet meer te vervormen. (Daarom worden in constructies die hun vorm moeten behouden altijd driehoeken gebruikt.) Elke driehoek heeft een omgeschreven cirkel en een ingeschreven cirkel. Als van een driehoek alle zijden gelijk zijn, zijn de hoeken dat automatisch ook, alle drie 60° .



Voor vierhoeken, vijfhoeken, etc., geldt dit niet.

Om die te kunnen tekenen heb je gegevens nodig over zowel hun zijden als hun hoeken. Zelfs als alle zijden gelijk zijn, hoeft dit nog niet voor de hoeken te gelden. Alleen de **regelmatige veelhoeken** vormen hierop een uitzondering, daarvan zijn zowel de hoeken als de zijden gelijk.

De hoekensom van elke n -hoek is $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Dat komt omdat hij in $n - 2$ driehoeken is op te delen.

Veelhoeken hebben in het algemeen geen omgeschreven cirkel (en ook geen ingeschreven cirkel). Alleen driehoeken en regelmatige veelhoeken hebben wel van dergelijke cirkels.

Een **omgeschreven cirkel** teken je door de middelloodlijnen van de zijden van de figuur met elkaar te snijden. Als alle middelloodlijnen precies één snijpunt hebben is dit snijpunt het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

Voorbeeld 1

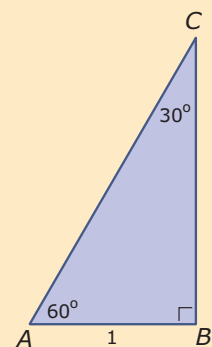
Je ziet hier $\triangle ABC$ met $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ en $AB = 1$ cm. Laat zien, dat $AC = 2$ en $BC = \sqrt{3}$ cm.

Antwoord

Als je deze driehoek spiegelt in lijn BC zie je dat hij de linkerhelft van een gelijkzijdige driehoek ADC is. Daarvan is $AD = 2 \cdot AB = 2 \cdot 1 = 2$ cm.

Dit betekent dat ook $AC = 2$ cm.

En dan kun je met behulp van de stelling van Pythagoras berekenen dat $BC = \sqrt{3}$ cm.



Opgave 4 Opgave 5

**Voorbeeld 2**

Applet

Van vierhoek $ABCD$ is gegeven dat $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $AD = 4$ en $\angle B = 90^\circ$. Laat zien dat er meerdere vierhoeken mogelijk zijn, maar dat maar één van die vierhoeken een omgeschreven cirkel heeft.

Antwoord

Teken een paar van deze vierhoeken. Begin met de zijden AB en BC die loodrecht op elkaar staan. Punt D ligt op een cirkel met straal 4 cm en middelpunt A . Waar het punt op die cirkel ligt kun je zelf nog bepalen.

Teken nu de omgeschreven cirkel met behulp van de middelloodlijnen van AB en BC . Er zijn twee punten waar de omgeschreven cirkel en de cirkel waar punt D op ligt elkaar snijden. Slechts één van die punten levert een vierhoek $ABCD$ op met een omgeschreven cirkel.

[Opgave 6](#) [Opgave 7](#)

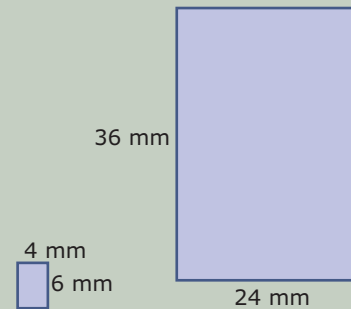
2.5 Vergrotingsfactoren

Inleiding

Je ziet twee gelijkvormige rechthoeken.

De vergrotingsfactor is duidelijk 6, dus de zijden van de grote rechthoek zijn 6 keer die van de kleine rechthoek.

Maar is de oppervlakte ook 6 keer zo groot geworden?



Je leert in dit onderwerp

- het begrip oppervlaktevergrotingsfactor;
- bij vergroting of verkleining van een figuur de oppervlaktevergrotingsfactor berekenen vanuit de lengtevergrotingsfactor en omgekeerd.

Voorkennis

- wat congruente (gelijke) figuren en wat gelijkvormige figuren zijn;
- overeenkomstige hoeken en zijden herkennen en zijden berekenen met behulp van de vergrotingsfactor;
- de eigenschappen van middelloodlijnen, zwaartelijnen, bissectrices en hoogtelijnen in een driehoek;
- de begrippen ingeschreven en omgeschreven cirkel.

Opgave V1

Uitleg

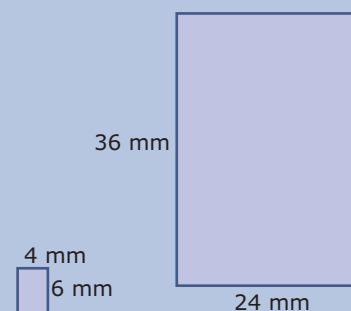
Je ziet hier een kleine rechthoek met zijden van 4 mm en 6 mm. Daarnaast zie je een grotere rechthoek waarvan de zijden 6 keer zo groot zijn.

- De omtrek van de kleine rechthoek is $6 + 4 + 6 + 4 = 24$ mm.
- De omtrek van de grote rechthoek is $36 + 24 + 36 + 24 = 120$ mm.

Dus de omtrek van de grotere rechthoek is 6 zo groot als die van de kleine rechthoek.

Geldt dit ook voor de oppervlakte van de rechthoeken?

- De oppervlakte van de kleine rechthoek is $6 \cdot 4 = 24 \text{ mm}^2$.
- De oppervlakte van de grote rechthoek is $36 \cdot 24 = 864 \text{ mm}^2$.





Door de vergroting is de oppervlakte $864/24 = 36 = 6^2$ keer zo groot geworden. En dat is ook logisch: zowel de lengte als de breedte wordt 6 keer zo groot en voor de oppervlakte moet je ze vermenigvuldigen.

De vergrotingsfactor van de lengtes noem je de 'lengtevergrotingsfactor'. De bijbehorende 'oppervlaktevergrotingsfactor' is het kwadraat van de lengtevergrotingsfactor.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Hier zie je wat er gebeurt als je van een vierkant alle zijden 3 keer zo groot maakt:

- alle lengtes worden 3 keer zo groot;
- de oppervlakte wordt $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ keer zo groot.

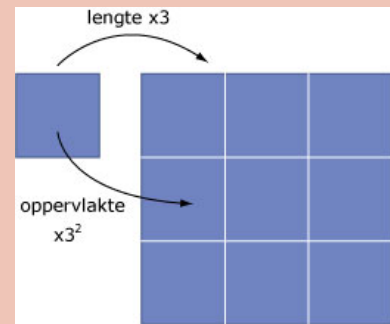
Omdat de oppervlakte van een figuur niet meer is dan de som van een (niet altijd geheel) aantal eenheidsvierkanten, geldt dit voor elke figuur. Bovendien kun je het veralgemeniseren tot een lengtevermenigvuldiging met factor k :

Als alle lengtes k keer zo groot worden, worden alle oppervlaktes k^2 keer zo groot.

Omdat de vorm van beide figuren bij vergroten hetzelfde blijft heten ze **gelijkvormig**.

Ofwel: is bij twee gelijkvormige figuren de **lengtevergrotingsfactor** k , dan is de **oppervlaktevergrotingsfactor** k^2 .

- Als $k > 1$ is er sprake van een vergroting.
- Als $k < 1$ is er sprake van een verkleining.
- Als $k = 1$ verandert er niets.



Voorbeeld 1

Bekijk de figuur hiernaast. Gegeven is dat $PQ = 8$, $ST = 5$ en $PR = QR = 13$ cm.

Bereken de oppervlakte van $\triangle STR$.

Antwoord

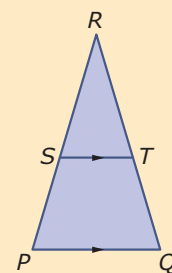
De driehoeken PQR en STR zijn gelijkvormig.

De hoogte van driehoek PQR is gelijk aan $\sqrt{153}$, dus de oppervlakte van die driehoek is $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{153} = 4\sqrt{153}$ cm².

ST is $5/8 = \frac{5}{8}$ van PQ , dus de lengtevergrotingsfactor van driehoek PQR naar driehoek STR is $\frac{5}{8}$.

De bijbehorende oppervlaktevergrotingsfactor is $\left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$.

De oppervlakte van $\triangle STR$ is daarom $\frac{25}{64} \cdot 4\sqrt{153} = \frac{25}{16}\sqrt{153}$ cm².



Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

**Voorbeeld 2**

De vierhoeken $ABCD$ en $KLMN$ zijn gelijkvormig. De oppervlakte van vierhoek $KLMN$ is gelijk aan 240 cm^2 en de oppervlakte van vierhoek $ABCD$ is gelijk aan 20 cm^2 . De omtrek van vierhoek $ABCD$ is 18 cm .

Bereken de omtrek van vierhoek $KLMN$.

Antwoord

De oppervlaktevergrotingsfactor van vierhoek $ABCD$ naar vierhoek $KLMN$ is 12 .

De lengtevergrotingsfactor van vierhoek $ABCD$ naar vierhoek $KLMN$ is daarom $\sqrt{12}$.

De omtrek van vierhoek $KLMN$ is daarom $\sqrt{12} \cdot 18 = 36\sqrt{3}$.

Opgave 6

Opgave 7

Begrippen

- ▶ vergelijking — snijpunt — nulpunt;
- ▶ terugrekenen — rekenschema — terugrekenschema;
- ▶ balansmethode — oplossen van vergelijkingen;
- ▶ ontbinden in factoren — buiten haakjes halen — som product methode — vergelijkingen splitsen — op 0 herleiden;
- ▶ gebroken vergelijking oplossen — analogierekenen.

Activiteiten

- ▶ het begrip vergelijking en een vergelijking grafisch (en met inklemmen) oplossen;
- ▶ vergelijkingen algebraïsch oplossen door terugrekenen;
- ▶ vergelijkingen algebraïsch oplossen door de balansmethode te gebruiken;
- ▶ vergelijkingen algebraïsch oplossen door ontbinden in factoren;
- ▶ vergelijkingen waarin de onbekende in de noemer van een breuk voorkomt algebraïsch oplossen.

Wikken en wegen



Domein

Rekenen en algebra

Hoofdstuk

Vergelijkingen

Inhoud

- 3.1 Basishandelingen 42
- 3.2 Terugrekenen 45
- 3.3 De balansmethode 48
- 3.4 Ontbinden in factoren 51
- 3.5 Breuken in vergelijkingen 54

3

3.1 Basishandelingen

Inleiding

Zo'n cilindervormige kaars zou eigenlijk gelijkmatig moeten opbranden. Als de kaars erg dik is, zal dat waarschijnlijk niet precies zo gaan, maar voor een nogal dunne kaars zou het redelijk moeten lukken. Er gaat dan elk uur (ongeveer) evenveel cm van de lengte van de kaars af. En dus kun je uitrekenen hoe lang het duurt voor hij 'op' is.



Je leert in dit onderwerp

- de oplossing van een vergelijking zoeken;
- nulpunten bepalen met behulp van vergelijkingen.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking en oplossing van een vergelijking;
- grafieken maken bij formules met twee variabelen;
- rekenen met getallen en variabelen.

Opgave V1

Uitleg

Applet

Je ziet hier de grafieken van twee cilindervormige kaarsen die op hetzelfde moment zijn aangestoken. In de grafiek zie je dat ze steeds korter worden. De bijbehorende formules zijn:

- Groene kaars: $h = 20 - 4 \cdot t$
- Blauwe kaars: $h = 30 - 7,5 \cdot t$

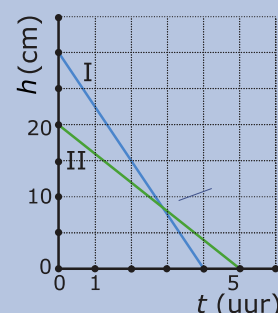
met h de lengte van de kaars in cm en t de tijd in uren.

De groene kaars lijkt in de grafiek na 5 uur helemaal op. Dat is het punt waarin $h = 0$. Een dergelijk punt heet een 'nulpunt'.

Om zeker te weten of dit ook echt het geval is gebruik je de formule van de groene kaars. Je lost op $h = 0$ dus $20 - 4t = 0$. Dit heet een 'vergelijking'. Ga na dat voor $t = 5$ de vergelijking waar is. $t = 5$ heet 'oplossing' van de vergelijking.

Je ziet dat beide grafieken elkaar snijden.

Beide kaarsen zijn dan even lang, dus de hoogte van de groene kaars is gelijk aan de





hoogte van de blauwe kaars. Als je het bijbehorende tijdstip wilt bepalen dan los je eigenlijk de vergelijking $20 - 4t = 30 - 7,5t$ op.

Je ziet dat de formule van de blauwe kaars gelijk is gesteld aan die van de groene.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Een formule waarin een isgelijktteken voorkomt heet een **vergelijking**.

Dat isgelijktteken wijst erop dat wat links ervan staat dezelfde waarde moet hebben als wat er rechts van staat. De vergelijking is in 'balans'.

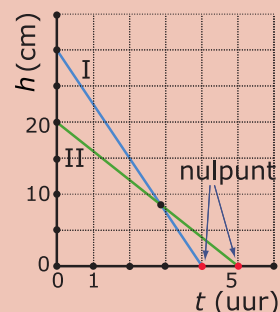
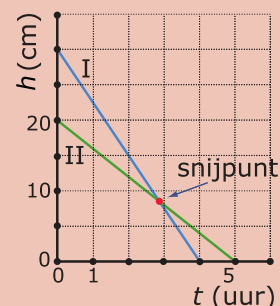
Het vergelijken van de lengtes van twee kaarsen is hiervan een voorbeeld. Je ziet dit in beide grafieken in beeld gebracht.

Als beide kaarsen gelijk zijn geldt

$$20 - 4t = 30 - 7,5t.$$

Een waarde van t die linker- en rechterkant van deze vergelijking gelijk maakt heet **oplossing** ervan. Deze waarde hoort bij het **snijpunt** van beide grafieken. Met een tabel kun je dit snijpunt vinden, soms alleen benaderen.

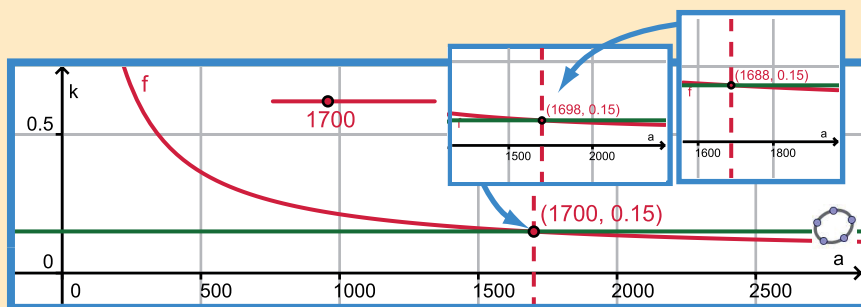
Als de lengte van een kaars 0 is, heb je te maken met een **nulpunt** van de grafiek. Je ziet hiernaast twee nulpunten. Het linker nulpunt vind je door $30 - 7,5t = 0$ op te lossen. Het rechter nulpunt vind je door $20 - 4t = 0$ op te lossen.



Voorbeeld 1

De school huurt een kopieerapparaat speciaal voor de leerlingen. Dit kost de school maandelijks € 152 en het maken van een kopie met dit apparaat kost de school 6 cent. De leerlingen betalen 15 cent per kopie. Hoeveel kopieën moeten er worden gemaakt opdat dit voor de school uit kan? Bekijk daarvoor de grafiek.

Applet



Antwoord

De grafiek brengt het probleem in beeld. Je kunt de kosten per kopie van de school en die van de leerling aflezen.

Bekijk zelf wanneer beide even groot zijn. Je zult nog geen nauwkeurig antwoord kunnen geven, er zijn nog steeds meerdere getallen waar je op 15 cent per kopie uitkomt.



Om te bepalen welke daarvan het juiste getal is, moet je het aantal decimalen waarmee je het snijpunt afleest verhogen. Dan kun je tot op de kopie nauwkeurig antwoord geven. De oplossing wordt door inklemmen gevonden. Je doet dit handmatig met een tabel.

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

De school huurt een kopieerapparaat speciaal voor de leerlingen. Dit kost de school maandelijks € 152 en het maken van een kopie met dit apparaat kost de school 6 cent. De leerlingen betalen 15 cent per kopie. Hoeveel kopieën moeten er worden gemaakt opdat dit voor de school uit kan?

Antwoord

De kosten per kopie kun je k noemen en het aantal kopieën is a .

Voor de school geldt dan $k = 0,06 + \frac{152}{a}$ en voor de leerling geldt $k = 0,15$ want je betaalt voor elke kopie 15 cent.

Je moet dus deze vergelijking oplossen: $0,06 + \frac{152}{a} = 0,15$.

Linkerkant en rechterkant moeten gelijk blijven dus moet $\frac{152}{a} = 0,09$.

Nu maak je gebruik van een rekenopgave die erg op lijkt zoals $\frac{6}{2} = 3$.

Dit kun je ook schrijven als $2 = \frac{6}{3}$ en voor onze vergelijking betekent dat $a = \frac{152}{0,09} \approx 1689$.

Deze manier van werken heet wel **analogierekenen**.

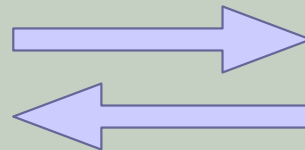
Hier moet je afronden op gehele getallen.

Opgave 5 Opgave 6

3.2 Terugrekenen

Inleiding

Soms kun je bij een vergelijking een rekenschema maken. En dan kun je zo'n vergelijking oplossen door terug te rekenen. Je loopt dan het rekenschema in omgekeerde richting door.



Je leert in dit onderwerp

- de oplossing van een vergelijking bepalen door middel van terugrekenen.

Voorkennis

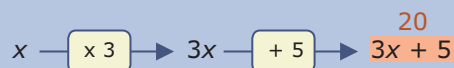
- de begrippen vergelijking en oplossing van een vergelijking;
- grafieken maken bij formules met twee variabelen en daarmee een bijpassende vergelijking oplossen;
- rekenen met getallen en variabelen.

[Opgave V1](#) [Opgave V2](#)

Uitleg

Je hebt in voorgaande jaren bij het oplossen van een vergelijking soms gewerkt met een rekenschema. Dat beschrijft van begin tot eind wat er bij een vergelijking allemaal met de (onbekende) variabele gebeurt.

Bij een vergelijking als $3x + 5 = 20$ hoort het rekenschema:



Houd daarbij rekening met de voorrangsregels.

Bij een rekenschema past een terugrekenenschema:



Zo ben je in staat om de waarde van de variabele x uit te rekenen: $x = (20 - 5) / 3 = 5$. Deze waarde heet de oplossing van de gegeven vergelijking. Bij ingewikkelder vergelijkingen bestaat de oplossing soms uit meerdere waarden voor x .

[Opgave 1](#) [Opgave 2](#) [Opgave 3](#)

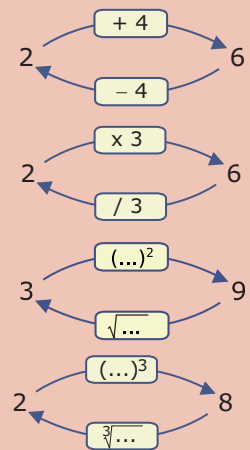
**Theorie**

Vergelijkingen waarin de (onbekende) variabele maar op één plaats voorkomt kun je vaak oplossen door **terugrekenen**. Het gaat dus om vergelijkingen van de vorm

uitdrukking met op precies één plaats een variabele = uitkomst

Je gaat daarbij als volgt te werk:

- Je maakt een **rekenschema** waarin je uitgaande van de variabele laat zien welke rekenstappen er moeten worden gezet om aan de uitkomst te komen.
- Je maakt een **terugrekenschema** door uitgaande vanuit de uitkomst elke rekenstap te vervangen door zijn terugrekenstap.
- Je rekent de oplossing uit door het terugrekenschema uit te voeren.



Hierin is aftrekken de terugrekenstap van optellen, optellen de terugrekenstap van aftrekken, delen de terugrekenstap van vermenigvuldigen, vermenigvuldigen de terugrekenstap van delen, worteltrekken de terugrekenstap van kwadrateren en kwadrateren de terugrekenstap van worteltrekken. En je zult nog meer terugrekenmethoden gaan leren...

LET OP: Bij terugrekenen vanuit een kwadraat krijg je twee waarden!

Voorbeeld 1

Los op: $2x^2 - 35 = -7$

Antwoord

Hier komt de variabele x op één plaats aan de linkerzijde van het isgelijktteken voor. Hier kan terugrekenen dus helpen.

- Rekenschema: $x \xrightarrow{\dots^2} \dots \xrightarrow{\times 2} \dots \xrightarrow{-35} -7$
- Terugrekenschema: $x \xleftarrow{\sqrt{\dots}} \dots \xleftarrow{/2} \dots \xleftarrow{+35} -7$
ofwel:

$$-7 \xrightarrow{+35} \dots \xrightarrow{/2} \dots \xrightarrow{\sqrt{\dots}} x$$

De oplossing is dus $x = \pm \sqrt{\frac{-7+35}{2}} = \pm \sqrt{14}$.

Het teken $\pm$ betekent dat er twee oplossingen zijn namelijk $x = \sqrt{14}$ en/of $x = -\sqrt{14}$.

Opgave 4 **Opgave 5**

**Voorbeeld 2**

Sommige vergelijkingen kun je oplossen door terugrekenen, andere niet. Hier zie je daar een paar voorbeelden van.

- $0,5x^3 + 2 = 8$
- $0,5x^3 + 2x = 8$
- $\sqrt{2x - 3} = 5$

Alleen de eerste en de derde vergelijking kun je oplossen door terugrekenen. De andere vergelijking niet, die is helemaal nog niet zo eenvoudig op te lossen anders dan met grafieken en inklemmen.

[Opgave 6](#) [Opgave 7](#) [Opgave 8](#)

3.3 De balansmethode

Inleiding

Je kent het werken met de 'balansmethode' al uit voorgaande jaren. Dit blijft een belangrijke methode om vergelijkingen op te lossen, dus je gaat er opnieuw mee werken.



Je leert in dit onderwerp

- de oplossing van een vergelijking bepalen door de balansmethode te gebruiken.

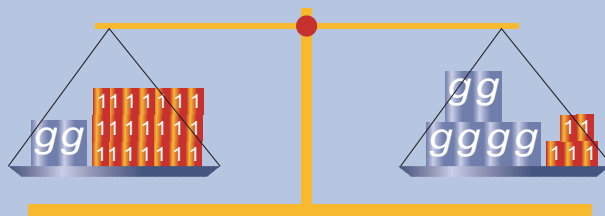
Voorkennis

- de begrippen vergelijking en oplossing van een vergelijking;
- grafieken maken bij formules met twee variabelen en daarmee een bijpassende vergelijking oplossen;
- een vergelijking oplossen door terugrekenen als dat kan.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Stel je eens voor dat je een aantal blikjes voor je hebt liggen met een onbekend gewicht g . Je geeft een vriend van jou twee blikjes en 21 losse gewichtjes van 1 gram. Zelf pak je zes blikjes en 5 losse gewichtjes van 1 gram. Als je dit op een balans legt, merk je dat die evenwicht is.



Kun je dan uitrekenen hoeveel een blikje weegt? Bekijk hieronder hoe je dit probleem met een balans kunt oplossen.

$$\begin{array}{rcl} 2g + 21 & = & 6g + 5 \\ 2g + 16 & = & 6g \\ 16 & = & 4g \\ g & = & 16/4 = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{beide zijden } -5 \\ \text{beide zijden } -2g \\ \text{beide zijden } /4 \end{array}$$

Het blikje weegt 4 gram.

Je hebt nu de 'balansmethode' toegepast. De vergelijking wordt algebraïsch opgelost, namelijk door een berekening met variabelen en getallen. De terugrekenmethode is een andere manier van algebraïsch oplossen. Er bestaan nog meer manieren...

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3



Theorie

Om vergelijkingen waarin de (onbekende) variabele op meerdere plaatsen voorkomt op te lossen maak je vaak gebruik van de **balansmethode**.

Je maakt daarbij gebruik van het feit dat je de vergelijking kunt opvatten als een balans die in evenwicht blijft als je:

- links en rechts van het isgelijktteken hetzelfde optelt of aftrekt;
- links en rechts van het isgelijktteken met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigt;
- links en rechts van het isgelijktteken door hetzelfde (behalve 0) deelt.



En soms pas je ook nog andere bewerkingen op dezelfde wijze toe. Bijvoorbeeld bij het terugrekenen vanuit een kwadraat zeg je wel: "Links en rechts worteltrekken." Of bij het terugrekenen vanuit wortels zeg je: "Links en rechts kwadrateren."

Dat zijn echter situaties die verder gaan dan de balansmethode. Dit kan niet altijd zo maar...

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $\frac{1}{6}x + \frac{1}{3} = -5x + 1,5$ algebraïsch op.

Merk op dat je de variabele nu niet g maar x is. Het gaat natuurlijk niet altijd over gewicht.

Antwoord

Je gebruikt de balansmethode:

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} & = & -5x + 1,5 \\
 x + 2 & = & -30x + 9 \quad \text{beide zijden } \times 6 \\
 x & = & -30x + 7 \quad \text{beide zijden } -2 \\
 31x & = & 7 \quad \text{beide zijden } +30x \\
 x & = & \frac{7}{31} \quad \text{beide zijden } /31
 \end{array}$$

De oplossing van de vergelijking is dus $x = \frac{7}{31}$.

Laat een breuk in het antwoord staan en rond niet af. Je hebt dan de vergelijking **exact** opgelost. Afronden doe je alleen als daar om gevraagd wordt!

Opgave 4 **Opgave 5**

**Voorbeeld 2**

Los algebraïsch op: $-2(b + 3) = 5(b + 7) + 2b$.

Antwoord

Ook hier doe je de balansmethode, maar nu werk je eerst de haakjes uit.

$$\begin{aligned} -2(b + 3) &= 5(b + 7) + 2b && \text{beide zijden haakjes uitwerken en verder herleiden} \\ -2b - 6 &= 7b + 35 && \text{beide zijden } +6 \\ -2b &= 7b + 41 && \text{beide zijden } -7b \\ -9b &= 41 && \text{beide zijden } -9 \\ b &= 41 / -9 = -\frac{41}{9} && \text{beide zijden } /-9 \end{aligned}$$

Natuurlijk controleer je de oplossing weer door substitueren.

[Opgave 6](#) [Opgave 7](#) [Opgave 8](#)

Voorbeeld 3

Los algebraïsch op: $0,5(x - 3)^2 - 10 = 50$.

Antwoord

Deze vergelijking kun je snel oplossen door terugrekenen, maar je kunt ook de balansmethode toepassen:

$$\begin{aligned} 0,5(x - 3)^2 - 10 &= 50 && \text{beide zijden } +10 \\ 0,5(x - 3)^2 &= 60 && \text{beide zijden } /0,5 \\ (x - 3)^2 &= 120 && \text{terugrekenen vanuit een kwadraat (beide zijden worteltrekken)} \\ x - 3 &= \pm\sqrt{120} && \text{beide zijden } +3 \\ x &= 3 \pm \sqrt{120} \end{aligned}$$

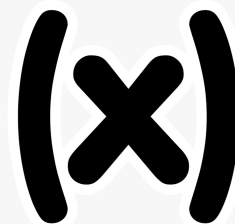
De exacte oplossing is $x = 3 + \sqrt{120}$ en/of $x = 3 - \sqrt{120}$.

[Opgave 9](#) [Opgave 10](#)

3.4 Ontbinden in factoren

Inleiding

Je hebt al kennis gemaakt met het ontbinden in factoren. Tot nu toe was dit een beetje iets dat 'gewoon kan', maar het nut ervan ga je nu pas in dit onderdeel zien. Met name bij vergelijkingen waarin kwadraten of hogere machten voorkomen kan dit af en toe helpen bij het vinden van de oplossing. Helaas is het geen oplossing die altijd werkt...



Je leert in dit onderwerp

- de oplossing van een vergelijking bepalen door ontbinden in factoren te gebruiken.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking en oplossing van een vergelijking;
- grafieken maken bij formules met twee variabelen en daarmee een bijpassende vergelijking oplossen;
- een vergelijking oplossen door terugrekenen of door de balansmethode te gebruiken.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg 1

Je kunt al uitdrukkingen herleiden door haakjes uitwerken. Het omgekeerde, ontbinden in factoren, is lastiger. En toch kun je daarmee sommige vergelijkingen algebraïsch oplossen.

In de bovenste figuur zie je: $6x + 9 = 3 \cdot (2x + 3)$.

Dat komt omdat 3 de grootste gemeenschappelijke deler (GGD) van $6x$ en 9 is.

In de tweede figuur zie je: $3x^2 + 18x = 3x(x + 6)$.

Dat komt omdat $3x$ de GGD van $3x^2$ en $18x$ is.

En hiermee kun je de vergelijking $3x^2 + 18x = 0$ oplossen. Omdat $3x^2 + 18x = 3x(x + 6)$ kun je de vergelijking schrijven als $3x \cdot (x + 6) = 0$.

Nu heb je twee factoren met als product 0. En dat betekent $3x = 0$ en/of $x + 6 = 0$.

En dus moet $x = 0$ en/of $x = -6$.

In plaats van en/of gebruik je vanaf nu het teken $\vee$.

De oplossing van $3x^2 + 18x = 0$ is dus $x = 0 \vee x = -6$.

Je kunt je antwoorden controleren door beide x -waarden in de vergelijking in te vullen.

	$2x + 3$				
3	x	x	1	1	1
	x	x	1	1	1
	x	x	1	1	1

$$6x + 9 = 3 \cdot (2x + 3)$$

	$x + 6$					
3x	x^2	x	x	x	x	x
	x^2	x	x	x	x	x
	x^2	x	x	x	x	x

$$3x^2 + 18x = 3x(x + 6)$$

**Uitleg 2**

Tot nu toe heb je alleen tweetermen ontbonden in factoren. Het ontbinden van drietermen is lastiger. In de figuur en de tabel hiernaast kun je zien hoe de uitdrukking $x^2 + 6x + 8$ in vieren kan worden opgesplitst.

Het product van de factoren $x + 2$ en $x + 4$ is $x^2 + 6x + 8$. Dus $x^2 + 6x + 8 = (x + 2) \cdot (x + 4)$

Je ziet dat het getal 6 voor de x verdeeld wordt in een 4 en een 2. Dit geldt ook voor de 8. 6 is de som en 8 het product van 2 en 4. Deze methode heet de 'som-product-methode'.

Je kunt de ontbinding controleren door in $(x + 2) \cdot (x + 4)$ de haakjes uit te werken.

Met deze ontbinding kun je de vergelijking $x^2 + 6x + 8 = 0$ oplossen. Want deze vergelijking kun je na de ontbinding schrijven als $(x + 2) \cdot (x + 4) = 0$.

En dit betekent $x + 2 = 0 \vee x + 4 = 0$.

De oplossing wordt dan $x = -2 \vee x = -4$.

	$x + 4$				
$x + 2$	x^2	x	x	x	x
	x	1	1	1	1
	x	1	1	1	1

$\times$	x	4
x	x^2	$4x$
2	$2x$	8

Opgave 1 **Opgave 2** **Opgave 3** **Opgave 4**

Theorie

Een tweeterm kun je **ontbinden in factoren** door de grootste gemeenschappelijke deler **buiten haakjes** te halen. Hierbij kun je gebruik maken van een tabel.

Een drieterm kun je ontbinden met de **som-product-methode**. Het getal voor de x is de som en het 'losse' getal het product van dezelfde twee getallen. Ook hierbij is een tabel handig.

Ontbinden in factoren kun je vaak toepassen om vergelijkingen op te lossen. De vergelijking kun je dan herleiden tot een product van factoren waar 0 uit komt. De vergelijking kun je dan schrijven in de vorm $a \cdot b = 0$. En omdat $a \cdot b = 0$ gelijkwaardig is met $a = 0 \vee b = 0$ kun je de vergelijking dan **splitsen** in twee eenvoudiger vergelijkingen.

Omdat dit splitsen alleen lukt bij een product waar 0 uit komt, moet je de vergelijking altijd eerst de vorm $\dots = 0$ geven. Dat heet **op 0 herleiden**.

	$x + 4$				
x	x^2	x	x	x	x

$$x^2 + 4x = x \cdot (x + 4)$$

	$x + 3$			
$x + 1$	x^2	x	x	x
	x	1	1	1

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1) \cdot (x + 3)$$


Voorbeeld 1

Los de vergelijking $5x^2 = 25x$ op.

Antwoord

$$\begin{aligned}
 5x^2 &= 25x \\
 5x^2 - 25x &= 0 && \text{op 0 herleiden} \\
 5x \cdot (x - 5) &= 0 && \text{linker zijde ontbinden in factoren} \\
 5x = 0 \vee x - 5 &= 0 && \text{vergelijking splitsen} \\
 x = 0 \vee x &= 5 && \text{oplossing opschrijven}
 \end{aligned}$$

Opgave 5 **Opgave 6**

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $x^2 + 14x + 45 = 0$ op.

Antwoord

Links van het isgelijktteken staat een drieterm die je probeert te ontbinden met de som-product-methode. Je zoekt daartoe een getallenpaar dat als som 14 en product 45 heeft. Uit de tabel hiernaast volgt dat dit het getallenpaar 5 en 9 is. De uitdrukking $x^2 + 14x + 45$ kun je dus schrijven als $(x + 5) \cdot (x + 9)$.

getallenpaar	som	product
1 en 45	46	45
-1 en -45	-46	45
3 en 15	18	45
-3 en -15	-18	45
5 en 9	14	45
-5 en -9	14	45

Dit gebruik je om de vergelijking op te lossen.

Die kun je nu schrijven als $(x + 5) \cdot (x + 9) = 0$.

Nu kan een product van twee factoren alleen 0 zijn als minstens één van beide factoren 0 is. Dus $x + 5 = 0 \vee x + 9 = 0$. De oplossing daarvan is: $x = -5 \vee x = -9$.

Opgave 7 **Opgave 8** **Opgave 9**

Voorbeeld 3

Los de vergelijking $2x^2 = 10x - 8$ op.

Antwoord

$$\begin{aligned}
 2x^2 &= 10x - 8 \\
 2x^2 - 10x + 8 &= 0 && \text{op 0 herleiden} \\
 x^2 - 5x + 4 &= 0 && \text{beide zijden /2} \\
 (x - 1)(x - 4) &= 0 && \text{linker zijde ontbinden in factoren} \\
 x - 1 = 0 \vee x - 4 &= 0 && \text{vergelijking splitsen} \\
 x = 1 \vee x &= 4 && \text{oplossing opschrijven}
 \end{aligned}$$

Opgave 10 **Opgave 11**

3.5 Breuken in vergelijkingen

Inleiding

Je rijdt in een auto over een rechte snelweg van 30 km lengte. Je reistijd is afhankelijk van de (constante) snelheid waarmee de auto rijdt. Je kunt die snelheid berekenen, door je reistijd te meten. Daarbij past een vergelijking waarin een breuk voorkomt...



Je leert in dit onderwerp

- de oplossing van een vergelijking bepalen waarin breuken voor komen.

Voorkennis

- rekenen met breuken, ook als daar variabelen in voor komen;
- de begrippen vergelijking en oplossing van een vergelijking;
- grafieken maken bij formules met twee variabelen en daarmee een bijpassende vergelijking oplossen;
- een vergelijking oplossen door de balansmethode te gebruiken en/of ontbinden in factoren.

Opgave V1

Uitleg

Op de **Afsluitdijk** ligt een snelweg van 32 km lengte. Hoe sneller je rijdt, hoe korter je over die 32 km doet. Je gebruikt onderweg 5 minuten voor het tanken van brandstof.

Je kunt de reistijd t in minuten berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid v (in km/h), met 60 te vermenigvuldigen en tenslotte nog 5 bij de uitkomst op te tellen:

$$t = \frac{32}{v} \cdot 60 + 5 = \frac{1920}{v} + 5.$$

Deze formule hoort bij een hyperbolisch verband.

Wil je de snelheid uitrekenen bij een reistijd van 25 minuten, dan moet je de gebroken vergelijking:

$$\frac{1920}{v} + 5 = 25$$

oplossen.





Dat kan in dit geval door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je overhoudt te vergelijken met bijvoorbeeld $\frac{6}{2} = 3$.

Dit noem je wel 'analogierekenen'.

Deze manier van rekenen kun je echter niet altijd toepassen. Dan val je terug op de balansmethode. En dan moet je er rekening mee houden dat je niet door 0 kunt delen!

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ dus } 2 = \frac{6}{3}$$

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Een vergelijking waarbij de variabele in de noemer van een breuk voor komt heet een **gebroken vergelijking**.

Een voorbeeld is $\frac{1920}{v} + 5 = 25$.

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je over houdt te vergelijken met $\frac{6}{2} = 3$.

Dit noem je wel **analogierekenen**.

Een ander voorbeeld van een gebroken vergelijking is $\frac{6}{x} + x = 5$.

Deze vergelijking kun je niet met analogierekenen oplossen. Nu gebruik je de balansmethode: beide zijden met x vermenigvuldigen. Maar dan moet wel $x \neq 0$ zijn.

De meeste gebroken vergelijkingen kun je goed oplossen door te beginnen met links en rechts van het isgelijktteken te vermenigvuldigen met het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (KGV) van alle noemers. Je bent dan de breuken kwijt.

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ dus } 2 = \frac{6}{3}$$

Voorbeeld 1

Leg je een afstand van 32 km met een constante snelheid af, houd je onderweg 5 minuten pauze en wil je de snelheid uitrekenen bij een reistijd van 25 minuten, dan moet je de gebroken vergelijking:

$$\frac{1920}{v} + 5 = 25$$

oplossen. Dat kan met de balansmethode. Daarbij moet je er rekening mee houden dat je NIET door 0 kunt delen of beide zijden met 0 vermenigvuldigen! Hier zie je hoe dat gaat.

$$\begin{aligned} \frac{1920}{v} + 5 &= 25 \\ \frac{1920}{v} &= 20 && \text{beide zijden } -5 \\ 1920 &= 20v && \text{beide zijden } \cdot v \\ v &= \frac{1920}{20} = 96 && \text{beide zijden } /20 \end{aligned}$$

Je rijdt dus 96 km/h.

Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

**Voorbeeld 2**

Los de vergelijking $\frac{6}{x} = x - 5$ algebraïsch op.

Antwoord

Als $x \neq 0$ kun je beide zijden van deze vergelijking met x vermenigvuldigen. Je krijgt dan:

$$6 = x^2 - 5x$$

Deze vergelijking kun je verder oplossen door op 0 te herleiden en ontbinden in factoren toe te passen. Ga na dat je dan $x = -1 \vee x = 6$ als oplossing vindt.

[Opgave 6](#)[Opgave 7](#)

Register

a

algebra 7
analogierekenen 44, 55

b

balansmethode 49
bissectrice 32
buiten haakjes 52
buiten haakjes halen 13

c

congruent 25

d

deellijn 32
distributieve eigenschap 13
n-de machts worteltrekken 19

e

exact 49
exponent 16

f

factoren 13

g

gebroken vergelijking 55
gelijknamig 10
gelijksoortige termen 7
gelijkvormig 25, 29, 38
grondtal 16
grootste gemeenschappelijke deler 13

h

haakjes uitwerken 13
herleiden 7
hoogtelijn 32

i

ingeschreven cirkel 32

k

kgv 10
kleinste gemeenschappelijke veelvoud 10

l

lengtevergrotingsfactor 38

m

macht 16
middelloodlijn 32

n

nulpunt 43

o

omgeschreven cirkel 32, 35
ongelijksoortige termen 7
ontbinden in factoren 13, 52
op 0 herleiden 52
oplossing 43
oppervlaktevergrotingsfactor 38
overeenkomstige hoeken 25
overeenkomstige zijden 25

r

rekenen 7
regelmatige veelhoeken 35
rekenen met breuken 10
rekenschema 46

s

snijpunt 43
som-en-productmethode 13
som-product-methode 52
splitsen 52
star 35

t

termen 13
terugrekenen 46
terugrekenschema 46
tweeterm 13

u

uitdrukken in 11

v

variabelen 7
verdeeleeigenschap 13
vergelijking 43
vergrotingsfactor 25
verhoudingstabel 25, 29
vierterm 13

w

worteltrekken 19
wetenschappelijke notatie 16
wisseleigenschap 7

z

zwaartelij **32**

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

- 1. Algebra**
- 2. Vlakke meetkunde**
- 3. Vergelijkingen**



www.math4all.nl

