

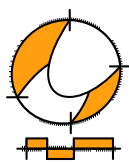
Wiskunde

3 HAVO

Katern 1 / Opgaven

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Algebra 3

- 1.1 Rekenen met variabelen 6
- 1.2 Breuken 14
- 1.3 Haakjes 19
- 1.4 Machten 26
- 1.5 Wortels 32
- 1.6 Totaalbeeld 38

2 Vlakke meetkunde 41

- 2.1 Gelijk of gelijkvormig 44
- 2.2 Rekenen in driehoeken 49
- 2.3 Bijzondere lijnen 54
- 2.4 Vlakke figuren 58
- 2.5 Vergrotingsfactoren 62
- 2.6 Totaalbeeld 66

3 Vergelijkingen 69

- 3.1 Basishandelingen 72
- 3.2 Terugrekenen 76
- 3.3 De balansmethode 81
- 3.4 Ontbinden in factoren 86
- 3.5 Breuken in vergelijkingen 91
- 3.6 Totaalbeeld 95

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

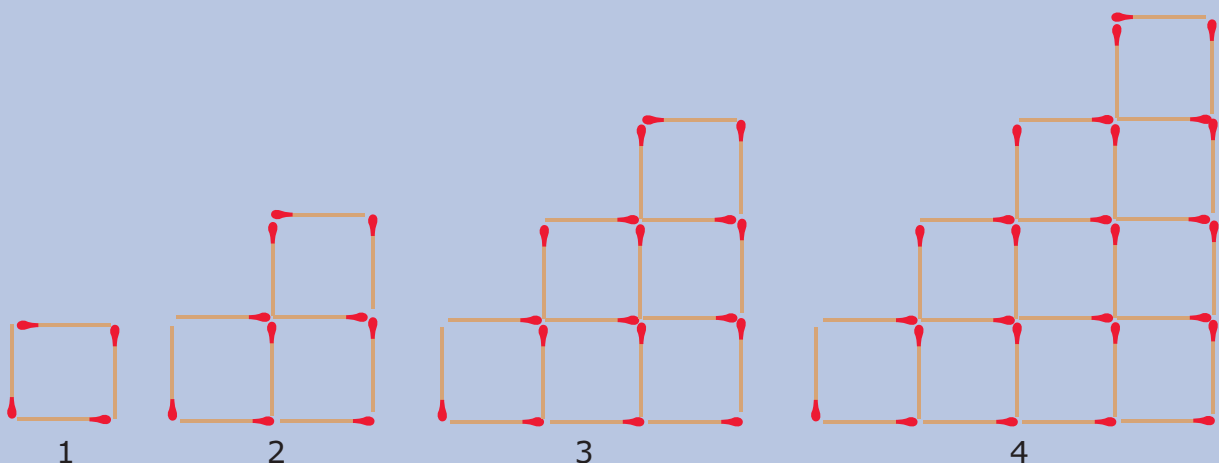
Begrippen

- ▶ gelijksoortige termen — ongelijksoortige termen — wisseleigenschap;
- ▶ gelijknamig maken — kleinste gemeenschappelijke veelvoud — KGV;
- ▶ tweeterm — vierterm — verdeeleigenschap — distributieve eigenschap — haakjes uitwerken — ontbinden in factoren — grootste gemeenschappelijke deler — GGD — buiten haakjes halen;
- ▶ macht — exponent — wetenschappelijke notatie;
- ▶ wortel — worteltrekken — n de machtswortel trekken.

Activiteiten

- ▶ rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met variabelen, formules en uitdrukkingen herleiden, gelijksoortige termen;
- ▶ breuken vereenvoudigen, gelijknamig maken, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, het KGV;
- ▶ haakjes uitwerken en ontbinden in factoren, de GGD en de som-en-productmethode;
- ▶ rekenen met machten met gehele exponenten, de wetenschappelijke notatie van getallen;
- ▶ rekenen met (hogere machts) wortels, wortelvormen herleiden.

Variabele luciferpatronen



Domein

Rekenen en algebra

Hoofdstuk

Algebra

Inhoud

1.1	Rekenen met variabelen	6
1.2	Breuken	14
1.3	Haakjes	19
1.4	Machten	26
1.5	Wortels	32
1.6	Totaalbeeld	38

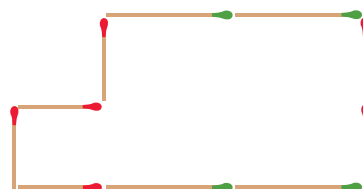


1.1 Rekenen met variabelen

Verkennen

Opgave V1

Bekijk deze luciferfiguur. Hij is gemaakt van lange lucifers (groen) met een lengte van a cm en korte lucifers (rood) met een lengte van b cm.



- a Kies $a = 3$ cm en $b = 2$ cm. Teken de figuur en bereken de omtrek ervan.
- b Bereken de oppervlakte van de figuur die je hebt getekend.
- c Neem nu aan dat $a = 5$ cm en $b = 4$ cm en bereken opnieuw de omtrek en de oppervlakte van de figuur.
- d Geef een formule voor de omtrek en de oppervlakte van deze figuur.

Opgave V2

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek 22 cm.

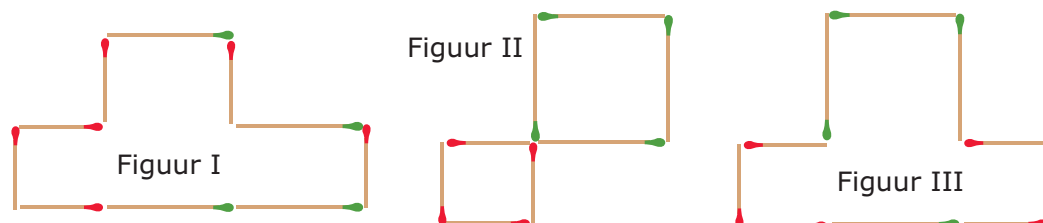
- a Teken een rechthoek met lengte l en breedte b . Schrijf de formules voor de oppervlakte en de omtrek van deze rechthoek in je figuur.
- b Gebruik nu de gegeven waarden voor de oppervlakte en de omtrek en zoek waarden voor l en b die voldoen.

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met variabelen rekent. Let er op dat je gelijksoortige termen zoveel mogelijk samenneemt. Met luciferfiguren kun je het rekenen met variabelen zichtbaar maken.

Je ziet hier drie luciferfiguren. De korte lucifers hebben lengte a , de lange hebben lengte b .



- a Bepaal van deze drie luciferfiguren de omtrek. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.
- b Neem nu aan dat $a = 3$ cm en $b = 5$ cm. Hoeveel bedraagt dan de omtrek van elke figuur?
- c Waarom is het herleiden van de uitdrukkingen met variabelen handig?



- d** Bepaal van deze drie luciferfiguren de oppervlakte. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.
- e** Neem nu aan dat $a = 3$ cm en $b = 5$ cm. Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van elke figuur?

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je voorbeelden van het rekenen met variabelen.

- a** Laat zien, dat $2a + 5a = 7a$.
- b** Laat zien, dat $2a + 5b + 3a + 4b = 5a + 9b$.

Herleid nu zelf:

- c** $18a + 6b + 10a + 4b$
- d** $12p + 6q + 10p + 4p$
- e** $x + 3y + 5y + 8x + 7y$
- f** $ab + b^2 + 3ab + b^2$

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je variabelen optelt. Herleid nu zelf:

- a** $3a + 12b + 2a + 4b$
- b** $8p + q + 2p + q$
- c** $4a + 3b + 4a + a$
- d** $p + 6p + 5q$

Opgave 4

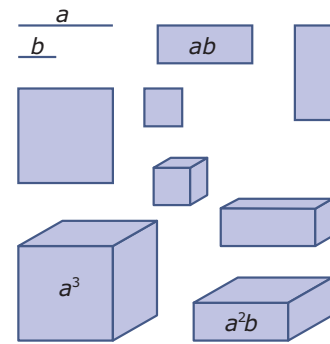
Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je variabelen vermenigvuldigt en soms daarna weer optelt. Herleid nu zelf:

- a** $4a \cdot 3b$
- b** $4a \cdot 3b + 5a \cdot 2b$
- c** $4a \cdot 3b + 5a \cdot 2a$
- d** $6p \cdot 2q + 4q \cdot p$

**Opgave 5**

In de figuur hiernaast ontbreken nog enkele uitdrukkingen. Hij staat ook op het [werkblad](#).

- a** Schrijf bij elke figuur de juiste uitdrukking.
- b** Leg uit waarom ab^2 en a^2b geen gelijksoortige termen zijn.
- c** Hoe volgt uit de figuur dat $ab = ba$?

**Opgave 6**

Herleid:

- a** $7b + b$
- b** $2abc + 8abc + bac$
- c** $12p \cdot 4q + 3qp$
- d** $3ab^2 + 2a^2b + a^2b + 4ab^2$
- e** $4x \cdot 3y + 2x \cdot x + y \cdot 2x$
- f** $2x \cdot x + x + 4x^2 + 5x$

Opgave 7

Bekijk in [Voorbeeld 2](#) hoe je met mintekens werkt bij het optellen en aftrekken van termen. Herleid nu zelf:

- a** $-7p - 5p$
- b** $3a - 5b + 2a + 7b$
- c** $3 + 2x - 5x - 7$

Opgave 8

Bekijk in [Voorbeeld 2](#) hoe je met mintekens werkt bij het herleiden als er ook vermenigvuldigingen voorkomen. Herleid nu zelf:

- a** $-7p \cdot -5p$
- b** $4x \cdot 2y - 3y \cdot -7y$
- c** $3ab - 5a \cdot 2b + ab$

Opgave 9

Met behulp van AlgebraKIT kun je het herleiden van uitdrukkingen oefenen. In het [Practicum](#) kun je dit doen.

Oefen jezelf met AlgebraKIT.

**Opgave 10**

Herleid:

- a** $6p \cdot 3q - 3p \cdot -4q$
- b** $-5xy - 3x \cdot -2y$
- c** $-3 \cdot -2p - 6 \cdot -8p$
- d** $-3 - 2p - 6 - 8p$
- e** $4ab \cdot b - a \cdot b \cdot 2b - 3ab \cdot a + 2a \cdot 3b^2$
- f** $ab \cdot c + 2b \cdot ac - 3abc$

Opgave 11

In **Voorbeeld 3** wordt het probleem van **Opgave 2** nog eens bekeken. Om het probleem overzichtelijker te maken worden variabelen ingevoerd.

l	b	$l \cdot b$	$l + b$
1	24	24	25
2		24	
3		24	
4		24	
6		24	
...		24	

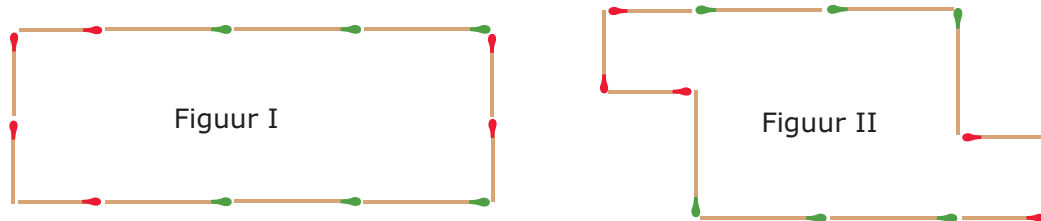
- a** De formule die te maken heeft met de omtrek van de rechthoek kun je vereenvoudigen. Laat dat zien.
- b** Maak een tabel zoals die hiernaast.
- c** Waarom wordt in de tabel uitgegaan van een vaste oppervlakte en niet van een vast getal voor omtrek?
- d** Welke twee getallen voldoen aan beide formules?
- e** In dit geval kwamen zowel de lengte als de breedte op gehele getallen uit. Hoe ga je verder als dit niet het geval is?

Opgave 12

Van een rechthoek is de omtrek 152 cm en de lengte en de breedte verschillen 32 cm. Bereken de lengte en de breedte van deze rechthoek.

**Verwerken****Opgave 13**

Je ziet hier twee luciferfiguren. De korte lucifers hebben lengte a , de lange hebben lengte b .



- a** Schrijf van beide figuren zowel de omtrek als de oppervlakte op. Herleid alle uitdrukkingen tot ze zo kort mogelijk zijn.
- b** Neem aan dat $a = 4$ en $b = 7$. Bereken nu van beide figuren zowel de omtrek als de oppervlakte.

Opgave 14

Herleid:

- a** $7x + 20x$
- b** $7x \cdot 20x$
- c** $7x \cdot 20y$
- d** $6x - x$
- e** $6x \cdot -10xy$
- f** $6x \cdot -20x - 15x \cdot -10x$
- g** $-x \cdot 5y + 3y \cdot 2x$
- h** $-x \cdot 5y + 3y \cdot 2y$

Opgave 15

Bereken voor $p = 10$, $q = 5$ en $r = -2$:

- a** $4p \cdot -2q + 6q \cdot p$
- b** $3p \cdot -5q \cdot r$
- c** $5q \cdot 3r \cdot p - 3p \cdot 2q \cdot r$
- d** $3p \cdot 2r^2 - 4pr \cdot 8r$
- e** $6r^2 + 3p - 3r \cdot 2r$
- f** $4pq \cdot 6qr - 3pr \cdot 8q^2$



Opgave 16

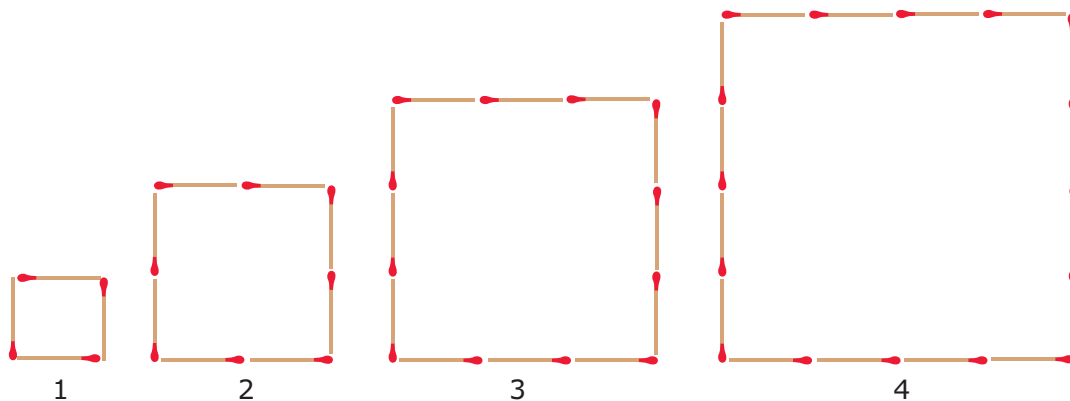
Van een rechthoek is de oppervlakte 104 cm^2 en de lengte en de breedte verschillen 5 cm. Bereken de lengte en de breedte van deze rechthoek.

Opgave 17

Kees en Jochum zijn samen 118 jaar oud. Kees is 16 jaar ouder dan Jochum. Bereken hun leeftijden.

Toepassen

Je ziet hier het begin van een serie luciferfiguren waar regelmaat in zit. Die regelmaat kun je beschrijven met een formule voor het aantal lucifers a afhankelijk van het figuurnummer n . Daarmee kun je vragen beantwoorden als: "Vanaf welk figuurnummer liggen er meer dan 1000 lucifers?"



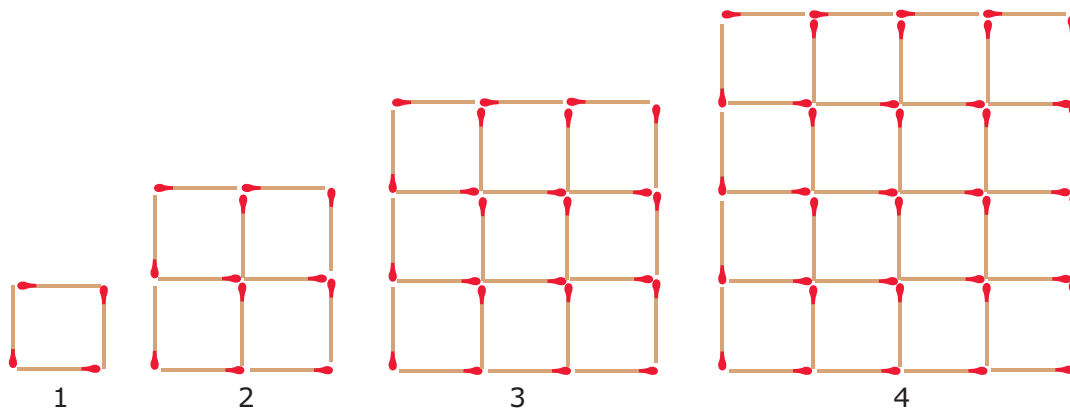
Opgave 18: Luciferpatroon (1)

Bekijk het begin van de serie luciferfiguren hierboven en zet het patroon voort.

- Hoeveel lucifers bevat figuur nummer 10?
- Stel een formule op voor het aantal lucifers a afhankelijk van het nummer n van de figuur.
- Vanaf welk figuurnummer heb je meer dan 1000 lucifers nodig om die figuur te leggen?

**Opgave 19: Luciferpatroon (2)**

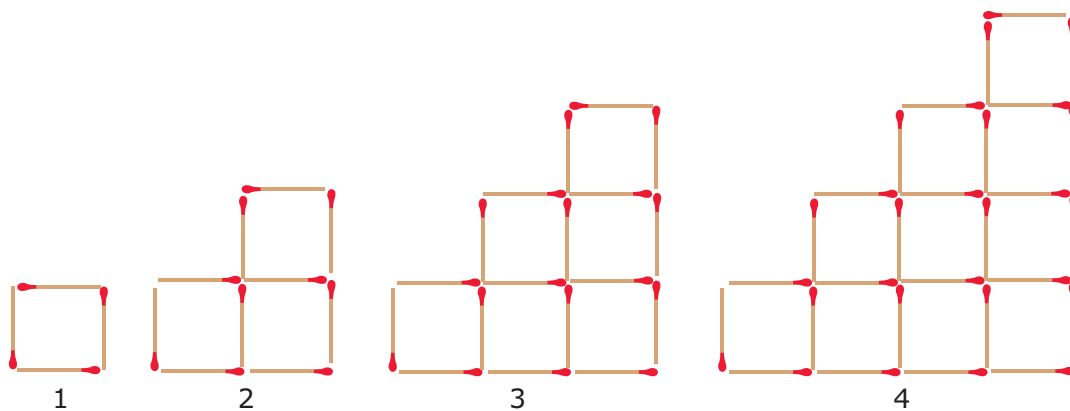
Hier zie je het begin van een ander luciferpatroon.



- a** Hoeveel lucifers bevat nu figuurnummer 10?
- b** Stel een formule op voor het aantal lucifers a afhankelijk van het nummer n van de figuur.
- c** Vanaf welk figuurnummer heb je meer dan 1000 lucifers nodig om die figuur te leggen?

Opgave 20: Luciferpatroon (3)

Hier zie je het begin van weer een ander luciferpatroon.



- a** Hoeveel lucifers bevat nu figuurnummer 10?
- b** Stel een formule op voor het aantal lucifers a afhankelijk van het nummer n van de figuur.
- c** Vanaf welk figuurnummer heb je meer dan 1000 lucifers nodig om die figuur te leggen?



Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van termen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

1.2 Breuken

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al rekenen met de breuken. Neem bijvoorbeeld $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$.

- a Bereken de som van beide breuken.
- b Bereken $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$, het verschil van deze breuken.
- c Hoeveel is het product van beide breuken?
- d Bereken het quotiënt van beide breuken, deel de grootste door de kleinste.

Opgave V2

Je kunt op dezelfde manier rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen. Werk met de breuken $\frac{5}{a}$ en $\frac{3}{b}$. Neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

- a Bereken de som van beide breuken.
- b Bereken $\frac{5}{a} - \frac{3}{b}$, het verschil van deze breuken.
- c Hoeveel is het product van beide breuken?
- d Bereken $\frac{5}{a} \div \frac{3}{b}$.
- e Waarom moet je aannemen dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je breuken gelijknamig maakt om ze te kunnen optellen, aftrekken en delen. Neem de breuken $\frac{2}{a}$ en $\frac{3}{b}$.

- a Maak beide breuken gelijknamig.
- b Bereken nu $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$, $\frac{2}{a} - \frac{3}{b}$ en $\frac{2}{a} \div \frac{3}{b}$.
- c Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 2

Neem de breuken $\frac{2}{3a}$ en $\frac{3}{5a}$.

- a Maak beide breuken gelijknamig.
- b Bereken nu $\frac{2}{3a} + \frac{3}{5a}$, $\frac{2}{3a} - \frac{3}{5a}$ en $\frac{2}{3a} \div \frac{3}{5a}$.
- c Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

**Opgave 3**

Neem de breuken $\frac{4p}{2pr}$ en $\frac{5}{3q}$.

- a** Welke van beide breuken kun je nog vereenvoudigen? Doe dat eerst.
- b** Tel beide breuken op.
- c** Vermenigvuldig beide breuken.

Opgave 4

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{3}{2p}$ en $\frac{5}{q}$ met $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

- a** Bereken de som en het product van beide breuken.
- b** Deel $\frac{3}{2p}$ door $\frac{5}{q}$.

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{2}{3}p$ en $\frac{1}{2p}$ met $p \neq 0$.

- c** Bereken de som en het product van beide breuken.
- d** Deel $\frac{2}{3}p$ door $\frac{1}{2p}$.

Opgave 5

Bekijk altijd vooraf of je de breuken niet beter eerst kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Misschien hoeft je wel niet eens met breuken te rekenen. Zo is $\frac{12a^2b}{3ab} = 4a$.

Herleid de volgende uitdrukkingen (neem aan dat alle variabelen ongelijk 0 zijn):

- a** $\frac{2p}{4pq} + \frac{6}{3q}$
- b** $\frac{-3b}{ab} \div \frac{2a}{a^2}$
- c** $\frac{2pq}{p} - \frac{15p}{3}$
- d** $\frac{4pq}{2p} \cdot \frac{6p}{3}$

Opgave 6

Oefen nu het rekenen met breuken met variabelen via het [Practicum](#).

Opgave 7

Bekijk het probleem in [Voorbeeld 2](#).

- a** Ga zelf na, dat dit probleem kan worden vertaald in de formules $2l + 2b = 21,4$ en $l \cdot b = 24$.
- b** Laat zien, hoe je de formule $2l + 2b = 21,4$ kunt herleiden tot een vorm waarin l is uitgedrukt in b .
- c** Hoe kun je de formule $l \cdot b = 24$ herleiden tot l is uitgedrukt in b ? Welke waarde kan b dan niet meer hebben?



Je hebt nu twee formules gekregen waarbij je grafieken kunt maken.

- d** Van welke variabele komen de waarden op de horizontale as? En waarom?
- e** Maak bij beide formules een tabel en teken de bijbehorende grafieken in één figuur. Los het probleem op met behulp van inklemmen.

Opgave 8

Herleid de volgende formules tot een vorm waarin y is uitgedrukt in x . Neem aan dat $x \neq 0$ en $y \neq 0$.

- a** $3x + 2y = 8$
- b** $3x - 2xy = 8$
- c** $x \cdot 3y = 9$
- d** $\frac{x}{3y} = 9$

Opgave 9

Van een ruit is de oppervlakte 15 cm^2 . Deze ruit past precies in een rechthoek waarvan de zijden evenwijdig zijn met de diagonalen van de ruit en die een omtrek heeft van 23 cm. Hoe lang zijn de diagonalen van deze ruit?

Stel bij dit probleem formules op en bereken het antwoord met behulp van grafieken.

Verwerken

Opgave 10

Reken met de twee breuken $\frac{2a}{b}$ en $\frac{a}{3b}$. Neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

- a** Bereken de som en het product van beide breuken.
- b** Bereken ook $\frac{2a}{b} - \frac{a}{3b}$ en $\frac{2a}{b} \div \frac{a}{3b}$

Reken met de twee breuken $\frac{2a}{b}$ en $\frac{b}{3a}$.

- c** Bereken de som en het product van beide breuken.

Opgave 11

Herleid tot een vorm met niet meer dan één breuk:

- a** $\frac{1}{2a} + \frac{3}{b}$
- b** $\frac{15ab}{3a} - \frac{12b^2}{4b}$
- c** $\frac{b}{4a} \cdot \frac{2a^2}{3b}$
- d** $\frac{1}{a} - \frac{2}{b}$



e $\frac{6}{a} \div \frac{1}{2a}$

f $\frac{1}{a} + \frac{a}{2}$

Opgave 12

Bereken als $p = 3$ en $q = -4$.

a $\frac{6p}{pq} \cdot \frac{5q}{3p}$

b $\frac{4}{3q} - \frac{1}{q}$

c $\frac{1}{p} + \frac{2}{q}$

d $\frac{2p}{pq} \div \frac{6}{q}$

Opgave 13

Herleid de volgende formules tot ze een vorm hebben waarin a is uitgedrukt in b .

a $a \cdot 3b = 6$

b $3a + b = 6$

c $\frac{3a}{2b^2} = \frac{1}{b}$

d $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$

Opgave 14

Twee getallen verschillen 14. Als je het grootste getal door het kleinste deelt, dan krijg je 5. Welke getallen zijn dat?

Stel bij dit probleem formules op en bereken het antwoord.

Toepassen

In sommige gevallen heb je met bijzondere gemiddelden te maken. Naast het 'gewogen gemiddelde' (waarin niet alle getallen even zwaar meetellen, maar meetellen volgens een bepaald gewicht), heb je het **harmonisch gemiddelde**. Een voorbeeld daarvan heb je misschien al eerder gezien.

Je vliegt heen en weer van Amsterdam naar Moskou. Op de heenreis is je gemiddelde snelheid 900 km/uur, op de terugreis is je gemiddelde vliegsnelheid 960 km/uur vanwege de weersomstandigheden. In beide gevallen is de gevlogen afstand hetzelfde.

Hoeveel bedraagt je gemiddelde snelheid over de gehele vlucht?

Die gemiddelde snelheid is een harmonisch gemiddelde...

**Opgave 15: Harmonisch gemiddelde**

- a** Hoeveel bedraagt je gemiddelde snelheid over de gehele vlucht?

Uit de [Wikipedia: Harmonisch gemiddelde](#): “De gemiddelde snelheid van twee ritten over dezelfde afstand, gereden met verschillende maar constante snelheid, is het harmonisch gemiddelde van de beide snelheden. Als de heenreis wordt gereden met 100 km/uur en de terugreis met 120 km/uur, is de gemiddelde snelheid van de totale rit het harmonisch gemiddelde van de twee snelheden, 109 km/uur. Als in plaats van de lengte, de tijdsduur van de ritten gelijk is, dient men het rekenkundig gemiddelde te gebruiken.”

- b** Laat zien dat deze uitspraak correct is.

Practicum

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met breuken**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

[AlgebraKIT](#)

1.3 Haakjes

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de figuur hiernaast.

	3	7
2	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 7$

- a Leg uit dat deze figuur laat zien dat $2 \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7$.
- b Teken zelf een figuur die laat zien dat $2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3$.
- c Reken ook nog even na, dat $2 \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7$ en $2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3$.

Opgave V2

Bekijk de figuur hiernaast.

	3	7
2	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 7$
5	$5 \cdot 3$	$5 \cdot 7$

- a Leg uit dat deze figuur laat zien dat $(2 + 5) \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$.
- b Teken zelf een figuur die laat zien dat $(5 - 2) \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$.
- c Reken ook nog even na, dat $(2 + 5) \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ en $(5 - 2) \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$.

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je haakjes kunt wegwerken.

- a Maak zelf een rechthoek waarmee je laat zien dat $4(2x + 3) = 8x + 12$.
- b Maak zelf een rechthoek waarmee je laat zien dat $(2x + 3)(x + 4) = 2x^2 + 11x + 12$.
- c Werk van $x(2x + 3)$ de haakjes uit.

Je kunt van $x(2x - 3)$ de haakjes wegwerken door de uitdrukking te schrijven als $x(2x - 3) = x(2x + -3)$.

- d Wat krijg je dan als je het antwoord zo ver mogelijk herleidt?
- e Werk van $(x + 5)(2x - 3)$ de haakjes uit.
- f Laat met behulp van de verdeeleeigenschap zien, dat $-(x - 3) = -x + 3$.

Opgave 2

Werk de haakjes uit en herleid zover mogelijk:

- a $5(a + 2b)$
- b $5a(a - 2b)$



- c** $(x + 4)(x + 5)$
- d** $(2x - 4)(x - 5)$
- e** $3(2p + 4) + 5(4 - p)$
- f** $3(2p + 4) - (4 - p)$

Opgave 3

Het omgekeerde van haakjes wegwerken is ontbinden in factoren. Daarbij maak je van een tweeterm of een drieterm (of een uitdrukking met nog meer termen) een product van factoren. Eerst ga je op zoek naar de gemeenschappelijke delers van alle termen.

- a** Bekijk de uitdrukking $6x + 9$. Welke GGD hebben beide termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?
- b** Bekijk de uitdrukking $8x - 6x^2$. Welke GGD hebben beide termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?
- c** Bekijk de uitdrukking $2x^2 - 6x + 12$. Welke GGD hebben alle drie de termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?
- d** Bekijk de uitdrukking $x^2 + 5x + 6$. Is er een GGD van alle drie de termen? Laat zien dat $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Opgave 4

Werk van de volgende uitdrukkingen de haakjes weg en herleid ze zo ver mogelijk.

- a** $2x + 3(4 - x)$
- b** $(2k + 3)(k + 4)$
- c** $4x(x - y + 5)$
- d** $3(2x - 1)(4 - x)$
- e** $2(x^2 - 3x) - x(2 - x)$
- f** $(6 - p) \cdot -p + 2(p - 3)$

Opgave 5

Bij het wegwerken van haakjes kom je een paar bijzondere gevallen tegen. Dat zijn de merkwaardige producten: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ en $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

- a** Laat zien, dat $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- b** Laat zien, dat: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Je kunt hiermee in sommige gevallen de haakjes sneller wegwerken. Pas dit bij het wegwerken en herleiden van de volgende uitdrukkingen toe.

- c** $(k - 5)(k + 5)$
- d** $(x + 10)^2$
- e** $(3p + 1)(1 - 3p)$



- f** $(2x - 3)^2$
- g** $(a + 2)^2 - (a - 2)^2$
- h** $x(5x - 4) - (x - 2)(x + 2)$

Opgave 6

Oefen het wegwerken van haakjes via het **Practicum**.

Opgave 7

Ook bij het werken met breuken kun je met haakjes te maken krijgen. Je wilt bijvoorbeeld van $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ één breuk maken.

- a** Wat is het KGV van x en $x + 1$?
- b** Maak nu beide breuken gelijknamig en tel ze op.
- c** Schrijf de breuk zonder haakjes.

Opgave 8

Je ziet in **Voorbeeld 2** hoe je kunt ontbinden in factoren door een zo groot mogelijke gemeenschappelijke deler buiten haakjes te halen.

- a** Bij de tweede uitdrukking zie je hoe er op twee manieren kan worden ontbonden in factoren. Is dat vaker het geval?
- b** Hoe kun je controleren of je ontbinding goed is?

Opgave 9

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

- a** $6x + 8y$
- b** $14k^2 - 21k$
- c** $-4xy - 12y^2 + 6y$
- d** $p^2 - p$
- e** $3a^2 + 16ab$
- f** $-12x^2 - 6x + 18$

Opgave 10

Oefen het buiten haakjes halen via het **Practicum**.

Opgave 11

Neem **Voorbeeld 3** eerst door. Bekijk nu de uitdrukking $x^2 + 6x + 8$. Je wilt deze uitdrukking ontbinden.

- a** Waarom kun je deze uitdrukking niet ontbinden door iets buiten haakjes te halen?



- b** Volgens de som-en-productmethode kun je deze uitdrukking ontbinden door twee getallen te zoeken die opgeteld 6 en vermenigvuldigd 8 opleveren. Welke getallen voldoen daar aan?
- c** Schrijf de juiste ontbinding op.
- d** Controleer je ontbinding door de haakjes weer uit te werken.

Opgave 12

Ontbind de volgende uitdrukkingen met de som-en-productmethode.

- a** $x^2 + 7x + 12$
- b** $x^2 + 12x + 20$
- c** $x^2 + 13x + 12$
- d** $x^2 + 2x + 1$
- e** $x^2 + 19x + 90$
- f** $x^2 + 18x + 81$

Opgave 13

Het ontbinden in factoren wordt wat lastiger als je ook mintekens hebt en de twee manieren van ontbinden door elkaar gaat gebruiken of zelfs beide moet gebruiken bij dezelfde uitdrukking. Dan wordt een systematische aanpak belangrijk.

product	getallen	som
-6	-6 en 1	-5
-6	6 en -1	5
-6	-3 en 2	-1
-6	3 en -2	1

- a** Laat zien, dat $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$. Leg ook uit hoe je dit in de tabel hiernaast kunt zien.
- b** Ontbind zelf $x^2 - 5x - 6$
- c** Ontbind ook $x^2 - x - 6$

Je ziet dat bij ontbinden met de som-en-productmethode een tabel van alle mogelijke gehele getallen die het juiste product opleveren handig is.

- d** Waarom doe je dit voor het product en niet voor de som van beide getallen?
- e** Ontbind $x^2 - 2x - 8$

De som-en-productmethode is alleen geschikt voor vormen zoals $x^2 + px + q$. Zo'n vorm herleid je dan tot $(x + a)(x + b)$.

- f** Druk p en q uit in a en b .
- g** Laat zien, dat p en q ook 0 kunnen zijn. Geef van beide situaties een voorbeeld.

Opgave 14

Ontbind de volgende uitdrukkingen. Kijk eerst of je iets buiten haakjes kunt halen en gebruik pas als dat niet (meer) kan de som-en-productmethode.

- a** $x^2 - 7x + 12$



b $x^2 + 2x - 48$

c $x^2 - 9$

d $x^2 - 9x$

e $2x^2 + 16x + 24$

f $3x^2 - 48$

Verwerken

Opgave 15

Werk de haakjes weg en herleid zover mogelijk.

a $2x(x + 5)$

b $2x - (x + 5)$

c $(2x - 1)(x + 5)$

d $3(2x - 1) - 4(x + 5)$

e $(x + 5)^2$

f $(2x - 1)^2 - (x - 5)(x + 5)$

g $(2x + y)(y + 5) + 2x(5 - y)$

h $(2x + y)^2 - (y + 5)^2$

Opgave 16

Breng een zo groot mogelijke factor buiten haakjes.

a $14x + 21y$

b $3p^2 - 6pq$

c $-4a^2b - 4ab$

d $p^3 - 3p^2 - p$

Opgave 17

Ontbind in factoren met behulp van de som-en-productmethode.

a $x^2 + 17x + 30$

b $x^2 - x - 12$

c $16 - 10x + x^2$

d $k^2 - 100$

**Opgave 18**

Ontbind in factoren.

- a** $12a^2 - 8a$
- b** $6p - 16 + p^2$
- c** $\frac{1}{2}k^2 - 8$
- d** $3x^2 - 6x - 9$
- e** $-4pq + 8pq^2$
- f** $8x - 16 - x^2$

Opgave 19

Oefen het ontbinden in factoren via het [Practicum](#).

Opgave 20

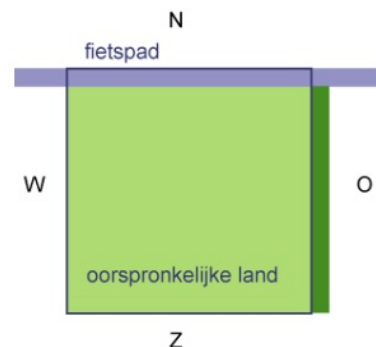
Schrijf als één breuk en zonder haakjes.

- a** $\frac{2}{a-2} + \frac{3}{a}$
- b** $\frac{3}{a-2} + \frac{2}{a+2}$

Toepassen

Een boer heeft een vierkant stuk land. De gemeente wil langs de noordrand een fietspad van 3 m breed aanleggen. Ze wil daarom een strook van die breedte aankopen. In plaats van het stuk land dat hij kwijt raakt mag de boer aan de oostkant zijn land uitbreiden met een strook van dezelfde breedte.

Heeft de boer nu een even groot stuk land als voorheen?

**Opgave 21: Fietspad aanleggen**

Bekijk het probleem dat wordt beschreven in [Toepassen](#).

De afmetingen van het oorspronkelijke vierkante stuk land zijn onbekend. Je kunt daarom voor de lengte en de breedte de variabele x kiezen.

- a** Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van het oorspronkelijke stuk land?
Nu gaat er aan de noordkant een strook van 3 m af, die er aan de oostkant weer bij komt. Het landje wordt nu rechthoekig.
- b** Welke lengte en welke breedte krijgt het stuk land na aanleg van het fietspad?
- c** Bereken de oppervlakte van het stuk land na aanleg van het fietspad. Schrijf je antwoord zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.
- d** Welke conclusie trek je?



Practicum: Oefenen: werken met haakjes

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het uitwerken van haakjes** en met **het ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

AlgebraKIT

1.4 Machten

Verkennen

Opgave V1

Een **kettingbrief** is een brief die elke ontvanger enige malen moet kopiëren en vervolgens door moet sturen (dit kan ook digitaal). Je ziet hiernaast een voorbeeld, op de stippeltjes vul je natuurlijk het adres van een goed doel in. Stel je begint door vijf vrienden zo'n brief te sturen en die sturen hem weer door naar vijf van hun vrienden, enzovoort. Stel verder dat niemand van twee of meer personen deze zelfde brief krijgt.

Voorbeeld kettingbrief

*Stuur deze brief door
naar vijf van jouw
vrienden en maak 1 euro
over naar ...*

- a** Waarom is het aantal brieven dat jouw vrienden versturen dan 5^2 ? En wat stelt 5^3 voor?

5^2 en 5^3 zijn machten van 5. Als de kettingbrief steeds doorgaat is het aantal brieven dat elke nieuwe groep ontvangers verstuurd steeds 5 keer zo groot en krijg je nog hogere machten van 5.

- b** Hoeveel is 5^4 ?
- c** Laat zien, dat $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$.
- d** Laat ook zien, dat $5^6 / 5^2 = 5^4$.

Opgave V2

In de eerste ronde worden er 5 brieven verstuurd, in de tweede ronde 5^2 , in de derde ronde 5^3 , enzovoorts.

- a** Hoeveel brieven worden er in de vierde ronde verstuurd? En in de achtste?
- b** Leg uit waarom $(5^4)^2 = 5^8$.
- c** Hoeveel is $(5^4)^6$? (Geef je antwoord als macht van 5.)

Opgave V3

Als je machten van 5 uitrekent, krijg je al snel gigantische bedragen. Dat is leuk voor je goede doel als de kettingbrief blijft doorlopen en iedereen die éne euro overmaakt.

- a** Hoeveel is 5^{10} ?
- b** Waarom is het onwaarschijnlijk dat deze kettingbrief lang blijft doorlopen?

Grote getallen geef je weer met de wetenschappelijke notatie $a \cdot 10^n$ met n een geheel getal en $1 \leq a < 10$.

- c** Schrijf 5^{10} in de wetenschappelijke notatie afgerond op twee decimalen nauwkeurig.
- d** In welke ronde zou het aantal brieven dat wordt verstuurd ongeveer gelijk zijn aan de totale wereldbevolking?



Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met machten kunt rekenen. Deze rekenregels zijn vooral nuttig als de grondtallen en de exponenten groot zijn.

- a** Je rekenmachine kan $5^{200}/5^{198}$ waarschijnlijk niet voor je uitrekenen. Toch kun je dit zelf wel. Laat dat zien.
- b** Bereken $\frac{19^{121} \cdot (19^{50})^2}{19^{220}}$.
Je ziet in de uitleg dat ook 0 en zelfs negatieve getallen als exponent kunnen voorkomen. Bij delen mag je de exponenten van elkaar aftrekken.
- c** Laat zien dat daaruit volgt dat $5^0 = 1$.
- d** Laat zien dat daaruit volgt dat $3^{-6} = \frac{1}{3^6}$.
- e** Bereken $(15^{14})^{10} \cdot 15^{108} / 15^{250}$.

Opgave 2

Werk met de rekenregels voor machten en herleid zo ver mogelijk. Neem aan dat $a \neq 0$.

- a** $a^5 \cdot a^2$
- b** $3a^5 \cdot 4a^2$
- c** $3a^5 / 4a^2$
- d** $(3a^5)^4$
- e** $(-2a^3)^4 \cdot a^3 / (-2a^5)^3$

Opgave 3

De omtrek van de Aarde is 40000 km.

- a** Hoeveel m is dat? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie.
- b** Een nanometer is 1 miljardste m. Schrijf dit getal in de wetenschappelijke notatie.
- c** Hoeveel nanometer is de omtrek van de Aarde? Laat zien hoe je daarbij met getallen in de wetenschappelijke notatie rekt.

Opgave 4

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 1** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen.

- a** $6a^5b^2 \cdot 2a^3b$
- b** $\frac{6a^5b^2}{2a^3b}$
- c** $(4a)^2 - 4a^2$



d $a^3 \cdot 2b + 2(ab)^2$

e $8a^3 \cdot 2ab^2 - (2a^2b)^2$

f $\frac{2a \cdot (-2b)^3}{b^2 \cdot 4ab}$

Opgave 5

Ook bij het uitwerken van haakjes kun je met machten te maken krijgen. Werk in de volgende uitdrukkingen de haakjes uit en herleid ze zover mogelijk.

a $2p^3(1 - 6p^2)$

b $(x^2 - 4)(x^2 + 1)$

c $(y^3 - 2)^2$

d $4k^2(k + 3) - 2k(k^2 - 4)$

e $(4 + 3k^2)^2 - (k^2 - 1)(k^2 + 1)$

f $(p + 1)^3$

Opgave 6

Uitdrukkingen met machten die uit meerdere termen bestaan kun je soms ontbinden in factoren. Hieronder zie je dergelijke uitdrukkingen. Ontbind ze zover mogelijk.

a $2k^4 + 6k^3$

b $a^2b^3 - 4a^3b^5$

c $x^3 - 4x$

d $24a^2 - 8a^3 + 2a^4$

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je met getallen in de wetenschappelijke notatie rekt.

a Probeer de vier voorbeelden eerst zelf uit te rekenen zonder naar de oplossing te kijken. Schrijf je antwoorden ook in de wetenschappelijke notatie.

b Bereken $a \cdot d$.

c Bereken $a - b$.

d Bereken b^3 .

e Waarom is $a - c \approx a$?



Opgave 8

De astronomische eenheid (AE) is de gemiddelde afstand van de Aarde tot de Zon. $1 \text{ AE} \approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$.

- a Hoeveel AE is 1 km?
- b Planeet Jupiter bevindt zich ongeveer 5,2 AE van de zon. Hoeveel km is dat?
- c Pluto bevindt zich ongeveer $5,9 \cdot 10^9 \text{ km}$ van de zon. Hoeveel AE is dat?
- d Een lichtjaar is de afstand die het licht in een jaar aflegt. De lichtsnelheid is $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Hoeveel AE is 1 lichtjaar?



Verwerken

Opgave 9

Bereken $\frac{860 \cdot 2200}{4^{192}}$ door met machten van 2 te rekenen.

Opgave 10

Werk eventuele haakjes uit en herleid zover mogelijk.

- a $3p^2q^3 \cdot -2pq^2$
- b $\frac{3p^2q^3}{-2pq^2}$
- c $(3k^2)^3 + 2k^2 \cdot k^3 - 2k^2 \cdot 5k^4$
- d $3a^2(ab^2 - 2b) - 2ab(a^2b - a)$
- e $(x^3 + 5)^2 - x^2 \cdot x^4$
- f $\frac{2a^2b + 3ab^2}{2ab}$
- g $p^5(p^2 - 4)(p^2 + 1)$
- h $2x(3y^2)^3 - 2xy \cdot y^5$

Opgave 11

Ontbind in factoren.

- a $12k^6 - 18k^3$
- b $4ab^3 + 12a^2b - 4ab$
- c $x^5 - x^4 - 2x^3$
- d $4x - 8x^2 + 4x^3$

**Opgave 12**

Alle stoffen bestaan uit atomen. Die atomen hebben een zekere massa, de atoommassa. Die atoommassa wordt uitgedrukt in een eenheid u die gelijk is aan ééntwaalfde deel van een koolstof-12 atoom, namelijk $1,66 \cdot 10^{-24}$ gram.

a Het koolstof-12 atoom heeft dus een massa van 12 u. Hoeveel gram is dat?

b Uit hoeveel atomen bestaat 12 gram koolstof-12?

Waterstof heeft een atoommassa van ongeveer 1 u en zuurstof van ongeveer 16 u.

c Laat zien dat 1 gram waterstof en 16 gram zuurstof evenveel atomen bevatten.

Water heeft moleculen die bestaan uit 1 atoom zuurstof en 2 atomen waterstof. De molecuulmassa is daarom 18 u.

d Hoeveel moleculen zitten er in 1 kg (dat is 1 liter) water?

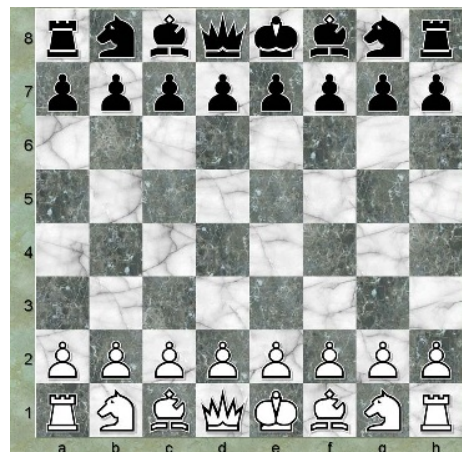
Opgave 13

Oefen het werken met machten van variabelen via het [Practicum](#).

Toepassen

Sissah Ben Dahir is de uitvinder van het schaakspel. De Indiase koning Shirham vroeg hem wat hij als beloning voor die uitvinding wilde hebben. Sissah Ben Dahir zei: "Geef me één graankorrel om op het eerste veld van het bord te leggen, 2 graankorrels voor op het tweede veld, 4 voor op het derde veld, 8 op het vierde en laat me zo verder gaande alle 64 velden bedekken."

De koning lachte en antwoordde: "Is dat echt alles dat je wilt hebben?" en hij gaf opdracht het graan uit te betalen. Toen bleek dat de koning te weinig graan had om Sissah uit te betalen, liet hij hem in de gevangenis opsluiten.

**Opgave 14: Sissah ben Dahir**

Bekijk het verhaal dat wordt beschreven in [Toepassen](#).

Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

a Hoeveel graankorrels moet de koning op het tiende vakje leggen?

b Hoeveel graankorrels komen er op het 64ste vakje?

c Je rekenmachine kan het aantal graankorrels op het 64ste vakje niet uitrekenen, alleen benaderen. Hoeveel graankorrels worden het ongeveer?

Neem aan dat een graankorrel ongeveer 65 mg weegt.

d Hoeveel gewicht zou er dan op het 64ste vakje rusten als alle graankorrels er op zouden kunnen liggen?



Neem aan dat een vakje van het schaakbord 5 bij 5 cm is en dat in elke cm^3 zo'n 100 graankorrels kunnen worden geperst. De hoeveelheid graan op het 64ste vakje past dan in een balkvormige toren met een grondvlak van 5 bij 5 cm.

- e** Hoe hoog zou die toren moeten worden?

Opgave 15: Machten optellen

Bekijk nog eens het verhaal dat wordt beschreven in **Toepassen**.

Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

- a** Hoeveel graankorrels moet de koning op de eerste tien vakjes samen leggen?
- b** Laat zien dat het antwoord op de vorige vraag gelijk is aan $2^{10} - 1$.

De totale hoeveelheid graankorrels die op het schaakbord zouden moeten komen is $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63}$. Dit is gelijk aan $2^{64} - 1$.

- c** Dat kun je zelf beredeneren. Probeer die redenering te vinden.

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met machten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

1.5 Wortels

Verkennen

Opgave V1

Van een vierkant met zijde 3 is de oppervlakte $3^2 = 9$.

Van een vierkant met oppervlakte 9 is de zijde $\sqrt{9} = 3$.

Worteltrekken is terugrekenen vanuit een kwadraat.

- a** Je ziet hier een vierkant $ABCD$ met oppervlakte 10. Hoe lang is de zijde exact? En ongeveer?

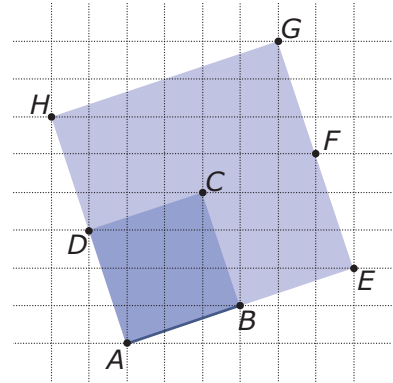
Door vier van die vierkanten tegen elkaar te leggen, kun je weer een vierkant maken. De zijde ervan kun je op twee manieren berekenen.

- b** Welke oppervlakte heeft dit vierkant? Op welke twee manieren kun je de zijde ervan berekenen?

Rechthoek $A E F D$ heeft een lengte van $\sqrt{40}$ en een breedte van $\sqrt{10}$.

- c** Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt{40} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{40 \cdot 10}$.

- d** Laat ook zien, dat $2 \cdot (2\sqrt{10} + \sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$.



Opgave V2

Van een kubus met ribbe 2 is de inhoud $2^3 = 8$.

Van een kubus met inhoud 8 is de ribbe $\sqrt[3]{8} = 2$.

Derde machtswortel trekken is terugrekenen vanuit een derde macht.

- a** Hoe lang is een ribbe van een kubus met inhoud 10 exact? En ongeveer?

Door acht van die kubussen tegen elkaar te leggen, kun je weer een kubus maken. De ribbe ervan kun je op twee manieren berekenen.

- b** Welke inhoud heeft deze kubus? Op welke twee manieren kun je de ribbe ervan berekenen?

Een balk die bestaat uit twee van deze kubussen heeft een lengte van $\sqrt[3]{80}$ en een breedte en een hoogte van $\sqrt[3]{10}$.

- c** Laat zien dat hieruit volgt $\sqrt[3]{80} \cdot \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{80 \cdot 10 \cdot 10}$.

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt behalve over 'gewone' wortels ook gesproken over hogere machtswortels. Bereken de volgende hogere machtswortels en laat ook zien dat ze juist zijn.

- a** $\sqrt[3]{64}$

- b** $\sqrt[3]{343}$



- c $\sqrt[4]{16}$
- d $\sqrt[4]{\cdot 16}$
- e $\sqrt[5]{243}$

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met wortels kunt rekenen. Je kunt door kwadrateren aantonen dat de rekenregels juist zijn.

- a Waarom is een wortel wel een 'tweede machtswortel'?
- b Waarom staat bij $\sqrt{a^2} = a$ dat dit alleen geldt als $a \geq 0$? Laat met een voorbeeld zien dat die toevoeging nodig is.

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

- c $5\sqrt{15} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$
- d $\frac{4\sqrt{42}}{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$

Ook kun je bij sommige wortels kwadraten buiten het wortelteken halen: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

- e Haal bij $\sqrt{48}$ een zo groot mogelijk kwadraat buiten het wortelteken.

Opgave 3

Met derdemachtswortels kun je net zo rekenen als met 'gewone' wortels. Toch is er een verschil.

- a Waarom is de derdemachtswortel uit een negatief getal wel mogelijk? Geef een voorbeeld.
- b $\sqrt[3]{a^3} = a$ voor elke waarde van a . Hoeveel is $\sqrt[3]{a^6}$?

Gebruik de rekenregels om de volgende uitdrukkingen met wortels te vereenvoudigen.

- c $5 \cdot \sqrt[3]{15} - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$
- d $\frac{4\sqrt[3]{42}}{2\sqrt[3]{3}} + 2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$

Ook kun je bij sommige derdemachtswortels derde machten buiten het wortelteken halen: $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$.

- e Haal bij $\sqrt[3]{128}$ een zo groot mogelijke derde macht buiten het wortelteken.

Opgave 4

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 1** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen.

- a $\sqrt{12} - \sqrt{3}$
- b $\sqrt{128} + 2\sqrt{98}$
- c $6\sqrt{15a^2} - \sqrt{3a} \cdot \sqrt{5a}$ (met $a \geq 0$)
- d $3\sqrt{a^2b} - a\sqrt{b} + \sqrt{2b^2}$ (met $a \geq 0$ en $b \geq 0$)



- e** $\sqrt[3]{108} - 2\sqrt[3]{32}$
- f** $\sqrt[3]{72a^3} - \sqrt[3]{3a} \cdot \sqrt[3]{3a^2}$

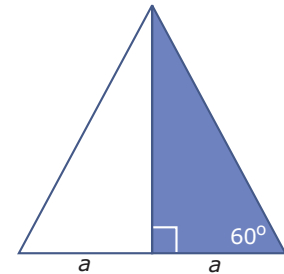
Opgave 5

Een geodriehoek is rechthoekig met twee even lange rechthoekszijden. Neem aan dat die zijden de lengte a hebben.

- a** Neem $a = 4$. Toon aan dat de hypotenusa dan een lengte van $4\sqrt{2}$ heeft.
- b** Toon aan dat de hypotenusa altijd een lengte van $a\sqrt{2}$ heeft.

Een rechthoekige driehoek met een hoek van 60° is de helft van een gelijkzijdige driehoek. Als de kortste rechthoekszijde een lengte van a heeft, dan heeft de langste rechthoekszijde een lengte van $a\sqrt{3}$.

- c** Neem $a = 4$. Laat zien dat de langste rechthoekszijde een lengte van $4\sqrt{3}$ heeft.
- d** Toon aan dat in het algemeen de langste rechthoekszijde een lengte van $a\sqrt{3}$ heeft.

**Opgave 6**

Van een kubus zijn alle zijvlaksdagonalen even lang en alle lichaamsdiagonalen even lang. Neem een kubus met een ribbe van lengte a .

- a** Neem $a = 4$. Toon aan dat de lengte van elke zijvlaksdiaagonaal $4\sqrt{2}$ is.
- b** Toon aan dat de lengte van elke zijvlaksdiaagonaal $a\sqrt{2}$ is.
- c** Neem $a = 4$. Toon aan dat de lengte van elke lichaamsdiaagonaal $4\sqrt{3}$ is.
- d** Toon aan dat de lengte van elke lichaamsdiaagonaal $a\sqrt{3}$ is.

Opgave 7

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 2**.

- a** Waarom wordt $\frac{1}{\sqrt{2}}$ vermenigvuldigt met $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$?
- b** Waarom is $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$?
- c** Laat zelf zien dat $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

Opgave 8

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 2** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen tot er geen wortels meer in de noemer van een breuk staan en ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

- a** $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- b** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{5}{2\sqrt{10}}$
- c** $\frac{2p}{\sqrt{p}} - \sqrt{\frac{1}{4}p}$



d $k\sqrt{\frac{4}{k}} + \sqrt{\frac{k}{4}}$

e $\frac{2x}{\sqrt[3]{x}}$

f $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}} + \sqrt[4]{a}$

Opgave 9

Oefen nu het herleiden van uitdrukkingen met wortels via het [Practicum](#).

Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Verwerken

Opgave 10

Bereken de volgende wortels en controleer het antwoord door machtsverheffen.

a $\sqrt{1024}$

b $\sqrt[5]{1024}$

c $\sqrt[10]{1024}$

Opgave 11

Herleid de volgende wortelvormen tot ze zo eenvoudig mogelijk zijn.

a $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$

b $\sqrt{28} + 2\sqrt{63}$

c $(\sqrt{6} - 1)^2$

d $(\sqrt[4]{10})^8$

e $\frac{10}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$

f $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{12}$

Opgave 12

Herleid de volgende wortelvormen. Neem aan dat $a > 0$ en $b > 0$.

a $\sqrt{\frac{3}{4}a^2} + \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

b $\frac{3a^2}{\sqrt{a}} - a\sqrt{a}$

c $\sqrt[4]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{16a^2b^3}$

**Opgave 13**

Een balk heeft ribben met een lengte van a , $2a$ en $3a$ cm.

- a** Bereken alle mogelijke lengtes van de zijvlaksdagonalen.
- b** Bereken de lengte van alle lichaamsdiagonalen.

Toepassen

Je ziet hier twee **tekendriehoeken** zoals die in veel wiskundelokalen nog wel voorkomen.

De éne driehoek is rechthoekig en gelijkbenig en heeft daarom dezelfde vorm als je geodriehoek. Je hebt al eerder laten zien dat de zijden van die driehoek a , a en $a\sqrt{2}$ zijn.

De andere tekendriehoek is ook rechthoekig en is de helft van een gelijkzijdige driehoek. Daarvan heb je laten zien dat de zijden a , $2a$ en $a\sqrt{3}$ zijn.

Werk in de volgende opgaven met die tekendriehoeken.

**Opgave 14: Tekendriehoeken**

Bekijk de twee tekendriehoeken in **Toepassen**. Je ziet hoe lang hun zijden zijn als de kleinste een lengte van a cm heeft. Neem eerst de geodriehoek.

- a** Hoe lang zijn alle zijden als de kortste zijde 8 cm is?
 - b** Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 16 cm is?
 - c** Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 1 cm is?
- Neem nu de andere tekendriehoek.
- d** Hoe lang zijn alle zijden als de kortste zijde 4 cm is?
 - e** Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 10 cm is?
 - f** Hoe lang zijn alle zijden als de langste zijde 1 cm is?
 - g** Hoe lang zijn alle zijden als de langste rechthoekszijde 6 cm is?

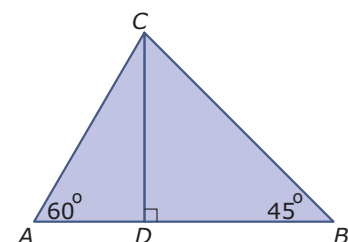
Opgave 15: Tekendriehoeken tegen elkaar

De driehoek hiernaast bestaat uit twee tekendriehoeken tegen elkaar.

- a** Hoe groot is de omtrek als de langste zijde 8 cm is?
- b** Bereken de oppervlakte van deze driehoek.

Nu is BC geen 8, maar juist onbekend. De oppervlakte van de driehoek is $9 + 3\sqrt{3}$.

- c** Bereken de lengte van BC .





Practicum: Oefenen: werken met wortels

Met *AlgebraKIT* kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met machten en wortels**.

Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je vooral vaardigheden op het gebied van de algebra (het rekenen met variabelen) geleerd. Hopelijk heb je deze vaardigheden zo goed geoefend dat je ze de komende jaren echt ‘in de vingers hebt’. Bij veel van de onderwerpen die je al dit jaar tegenkomt zul je ze nodig hebben, maar in de toekomst zul je (zeker als je wiskunde B gaat kiezen) merken dat ze onontbeerlijk zijn.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Algebra** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- ▶ gelijksoortige termen — ongelijksoortige termen — wisseleigenschap;
- ▶ gelijknamig maken — kleinste gemeenschappelijke veelvoud — KGV;
- ▶ tweeterm — vierterm — verdeeleigenschap — distributieve eigenschap — haakjes uitwerken — ontbinden in factoren — grootste gemeenschappelijke deler — GGD — buiten haakjes halen;
- ▶ macht — exponent — wetenschappelijke notatie;
- ▶ wortel — worteltrekken — n de machtswortel trekken.

Activiteiten

- ▶ rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met variabelen, formules en uitdrukkingen herleiden, gelijksoortige termen;
- ▶ breuken vereenvoudigen, gelijknamig maken, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, het KGV;
- ▶ haakjes uitwerken en ontbinden in factoren, de GGD en de som-en-productmethode;
- ▶ rekenen met machten met gehele exponenten, de wetenschappelijke notatie van getallen;
- ▶ rekenen met (hogere machts) wortels, wortelvormen herleiden.

Opgave 1

Een belangrijke algebraïsche vaardigheid is het herleiden van uitdrukkingen met het doel ze eenvoudiger te maken. Een eenvoudiger uitdrukking betekent meestal dat je er minder tekens, minder symbolen voor nodig hebt. Dat kunnen ook uitdrukkingen met haakjes, breuken, machten en wortels zijn.

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen en schrijf ze (waar breuken voorkomen) als één breuk.

a $5a + 2b - 3a - b$

b $5a \cdot 2b - 3a \cdot -b$

c $\frac{1}{2p} + \frac{2}{q}$



d $(x + 2)(x + 1) - x(x + 1)$

e $4 - (x + 2)^2$

f $p^2 \cdot (2p)^3 - 2p^2 \cdot 4p^3$

Opgave 2

Wanneer je in bepaalde uitdrukkingen getallen wilt invullen voor de variabelen, is het verstandig om ze eerst zo eenvoudig mogelijk te schrijven. Bereken de volgende uitdrukkingen voor $a = 4$ en $b = -6$.

a $\frac{4ab^3}{3ab}$

b $2a(b - 1) - 2b(a - 1)$

c $\frac{1}{2ab} + \frac{3}{ab}$

d $(a + b)^2 - (a - b)^2$

Opgave 3

Schrijf de volgende formules zo, dat y is uitgedrukt in x , dus in de vorm $y = \dots$

a $4x - 2y = 7$

b $x(y - 2) = 5$

c $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$

d $\frac{2y}{x+1} = 4$

Opgave 4

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

a $12p^3q - 16pq^2$

b $12a^3 - 4a$

c $k^2 - 2k - 80$

d $32 + k^2 + 12k$

e $84 - 2x - 2x^2$

f $4m^2 - 1$

Opgave 5

Gegeven zijn de getallen $p = 5,4 \cdot 10^9$, $q = 3,1 \cdot 10^8$ en $r = 1,4 \cdot 10^{-5}$. Schrijf bij de volgende berekeningen het antwoord ook in de wetenschappelijke notatie.

a Bereken $p + q$.

b Bereken $p \cdot q$.

c Bereken $p \cdot r$.

d Bereken $1/p$.

**Opgave 6**

Het vereenvoudigen en samennemen van wortelvormen is ook een nuttige vaardigheid. Vereenvoudig:

a $2\sqrt{21} + 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{7}$

b $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$

c $\sqrt{96} - \sqrt{24}$

d $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

e $\sqrt[5]{10^2 - 7^3}$

Toepassen

In de volgende opgaven leer je de som-en-productmethode voor het ontbinden in factoren toepassen in situaties met hogere machten. Vooral als je later wiskunde B wilt kiezen kun je dat af en toe tegenkomen.

En tenslotte tref je nog een opgave aan die gaat over het rekenen met getallen in de wetenschappelijke notatie. Daarmee zul je bij alle wiskundevakken in de bovenbouw gaan werken.

Opgave 7: Bijzondere ontbindingen

Bekijk de uitdrukking $x^6 + 5x^3 + 6$.

a Leg uit waarom je deze uitdrukking kunt schrijven als $p^2 + 5p + 6$.

b Ontbind $p^2 + 5p + 6$ met de som-en-productmethode.

c Schrijf nu de juiste ontbinding op voor $x^6 + 5x^3 + 6$.

d Waarom kun je $x^5 + 5x^3 + 6$ niet op deze manier ontbinden in factoren?

Je kunt deze manier van ontbinden in factoren af en toe toepassen. Ontbind:

e $x^4 - 3x^2 - 18$

f $x^{10} - 12x^5 + 32$

g $2 - x^3 - x^6$

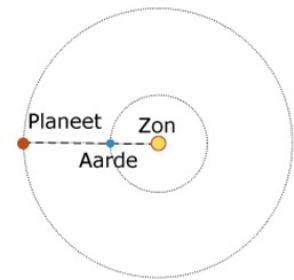
h $x^{12} - 13x^6$



Opgave 8: Oppositie van planeten

Wanneer een planeet gezien vanuit de zon met de Aarde op één lijn ligt, zeg je dat deze planeet in oppositie staat. Oppositie komt bij elke planeet met vaste tussenpozen voor. De tijd T (in dagen) tussen twee opposities hangt af van de omlooptijd van de Aarde T_A (in dagen) om de zon en de omlooptijd van de planeet T_P (in dagen) om de zon.

Er geldt: $\frac{1}{T_P} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T}$.



- a** Hoe verder een planeet van de zon af staat hoe groter T_P . Betekent dit dat dan ook T groter wordt?
- b** Tussen twee opposities van Jupiter zitten 398,6 dagen. Bereken de omlooptijd van Jupiter in dagen nauwkeurig. De omlooptijd van de Aarde is 365,25 dagen.
- c** De omlooptijd van Mars is 1,88 jaar. Bereken de tijd tussen twee opposities in dagen nauwkeurig.

Alle planeten van ons zonnestelsel voldoen aan de wet van Kepler die zegt dat $T_P^2 = 3,95 \cdot 10^{-20} \cdot r^3$ waarin r de gemiddelde afstand van de planeet tot de zon in km is.

- d** Voor Saturnus geldt $r \approx 1,43 \cdot 10^9$ km. Bereken de tijd tussen twee opposities van Saturnus in dagen nauwkeurig.

Begrippen

- ▶ overeenkomstige hoeken — overeenkomstige zijden — congruentie — gelijkvormigheid — vergrotingsfactor;
- ▶ congruentie — gelijkvormigheid van driehoeken;
- ▶ middelloodlijn — deellijn (bissectrice) — zwaartelijn — hoogtelijn — omgeschreven cirkel — ingeschreven cirkel;
- ▶ regelmatige veelhoek — omgeschreven cirkel;
- ▶ lengtevergrotingsfactor — oppervlaktevergrotingsfactor.

Activiteiten

- ▶ de begrippen gelijkvormig en congruent leren gebruiken;
- ▶ herkennen wanneer driehoeken gelijkvormig zijn en behulp daarvan berekeningen in driehoeken uitvoeren;
- ▶ bijzondere lijnen in driehoeken — ingeschreven en omgeschreven cirkel van een driehoek tekenen;
- ▶ rekenen in vierhoeken, vijfhoeken, etc, met behulp van congruentie en gelijkvormigheid;
- ▶ werken met de lengtevergrotingsfactor en de bijbehorende oppervlaktevergrotingsfactor.

Jacobsstaf



Domein

Meetkunde

Hoofdstuk

Vlakke meetkunde

Inhoud

2.1	Gelijk of gelijkvormig	44
2.2	Rekenen in driehoeken	49
2.3	Bijzondere lijnen	54
2.4	Vlakke figuren	58
2.5	Vergrotingsfactoren	62
2.6	Totaalbeeld	66

2

2.1 Gelijk of gelijkvormig

Verkennen

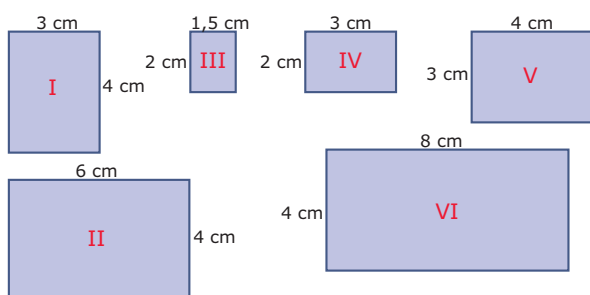
Opgave V1

Je wilt een poster op A4-formaat vergroten tot A3-formaat. De afmetingen van het A4-tje zijn 210 mm bij 297 mm. Een vel A3-papier heeft een twee keer zo grote oppervlakte.

Met hoeveel procent moet je de lengte en de breedte van het A4-tje vergroten?

Opgave V2

Je ziet hier een aantal rechthoeken.



Welke rechthoeken zijn gelijk? En welke rechthoeken zijn niet gelijk maar hebben dezelfde verhoudingen van lengte en breedte?

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je wat het verschil is tussen gelijke (dus congruente) driehoeken en gelijkvormige driehoeken.

Bekijk eerst de bovenste figuur.

- a** Waaraan zie je dat de overeenkomstige zijden van beide figuren gelijk zijn?
- b** Je ziet dat er twee paren gelijke hoeken zijn in de bovenste figuur. Waarom is dan automatisch het derde paar hoeken ook gelijk?
- c** Je ziet dat $\triangle ABC \cong \triangle LMK$. Waarom wordt bij de tweede driehoek de lettervolgorde zo gekozen?

Bekijk nu de tweede figuur. Je ziet dat evenwijdige lijnstukken worden aangeduid door pijltjes in de lijnstukken.

- d** Waarom weet je nu zeker dat $\angle ABC = \angle ADE$?
- e** Wordt er bij het opschrijven van de gelijkvormige driehoeken ook op de volgorde van de letters gelet?
- f** Hoeveel bedraagt de vergrotingsfactor als je $\triangle ABC$ opvat als 'vergroting' van $\triangle ADE$?



- g** Stel de vergrotingsfactor van $\triangle ABC$ naar $\triangle ADE$ is 2,5. Zijn beide driehoeken dan nog steeds gelijkvormig?

Opgave 2

Het herkennen van gelijkvormige figuren of congruente figuren is vaak lastig.

- a** Waarom zijn alle vierkanten gelijkvormig en/of congruent?
- b** Waarom zijn niet alle rechthoeken gelijkvormig en/of congruent?
- c** Zijn alle gelijkzijdige driehoeken gelijkvormig en/of congruent?
- d** Zijn alle gelijkbenige driehoeken gelijkvormig en/of congruent?
- e** Waarom zijn alle congruente figuren ook gelijkvormig? Van welke vergrotingsfactor is er dan sprake?

Opgave 3

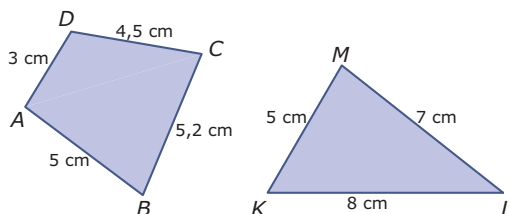
Jurre heeft twee rechthoekige afbeeldingen van een verschillend formaat op zijn computer. Afbeelding A is 20 mm bij 16 mm en afbeelding B is 36 mm bij 24 mm.

Hij wil ze op een groot rechthoekig scherm van 1,65 m breedte en 1,10 m hoogte laten zien. Ze worden daarom vergroot.

- a** Welke van deze twee afbeeldingen past na vergroting precies op het grote scherm?
De andere afbeelding vergroot Jurre zo dat hij alles kan zien.
- b** Blijft er op het scherm dan ruimte over in de breedte of de hoogte? Licht je antwoord toe.

Opgave 4

Hier zie je een vierhoek en een driehoek waarvan de lengtes van de zijden bekend zijn.



- a** Teken de driehoek na. Moet je daarvoor nog een hoek opmeten?
- b** Leg uit hoe je de vierhoek kunt natekenen. Moet je nu extra metingen doen?
- c** Leg uit hoe je een gelijkvormige vierhoek kunt tekenen met een vergrotingsfactor van 1,5.

Opgave 5

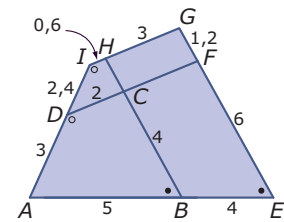
Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a** Laat met behulp van een tabel zien dat de vierhoeken $ABCD$ en $NKLM$ wel gelijkvormig zijn.
- b** De vierhoek $PQRS$ heeft zijden die allemaal precies 2 keer zo groot zijn als de overeenkomstige zijden van vierhoek $ABCD$. Zijn deze twee vierhoeken dus gelijkvormig? Gebruik eventueel de applet in het **Practicum**.

**Opgave 6**

In de figuur hiernaast tref je een heleboel vierhoeken aan.

- Hoeveel?
- Waarom hebben de vierhoeken $ABCD$ en $Aefd$ wel gelijke hoeken, maar zijn ze toch niet gelijkvormig?
- Waarom zijn de vierhoeken $ABCD$ en $AEGI$ gelijkvormig?

**Opgave 7**

De vierhoeken $ABCD$ en $PQRS$ zijn gelijkvormig. Verder is $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 3$, $AD = 4$ en $QR = 8$ cm.

Bereken de lengte van PQ . Werk bijvoorbeeld met een verhoudingstabel van overeenkomstige zijden en bepaal de vergrotingsfactor.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** worden driehoeken vergeleken.

- Teken de beschreven $\triangle ABC$ door te beginnen met zijde AB .
- Teken $\triangle ABC$ nog eens, maar begin nu met zijde BC . Krijg je dezelfde $\triangle ABC$?
- Als je van een vierhoek de lengtes van de zijden weet, kun je hem dan tekenen?
- Teken ook $\triangle DEF$. Ga na, dat de hoeken gelijk zijn aan die van $\triangle ABC$.
- Teken ook $\triangle KLM$ waarvan de overeenkomstige zijden de helft zijn van die van $\triangle ABC$. Ga na, dat ook nu beide driehoeken gelijkvormig zijn.

Opgave 9

Gegeven zijn $\triangle ABC$ met $AB = 4$ cm, $\angle A = 50^\circ$ en $\angle B = 60^\circ$ en $\triangle DEF$ met $DE = 6$ cm, $\angle D = 50^\circ$ en $\angle E = 60^\circ$.

- Teken de beschreven driehoeken.
- Waarom is $\angle C = \angle F$?
- Meet van beide driehoeken ook de overige zijden op. Ga na dat de overeenkomstige zijden met dezelfde factor worden vermenigvuldigd.

Uit het voorgaande kun je opmaken dat twee driehoeken gelijkvormig zijn als de overeenkomstige hoeken gelijk zijn.

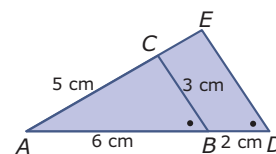
- Geldt dit ook voor vierhoeken? Licht je antwoord toe.



Opgave 10

Je ziet hier $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$. In de figuur vind je enkele afmetingen.

- Leg uit waarom $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.
- Bereken de lengte van de lijnstukken DE en CE .



Verwerken

Opgave 11

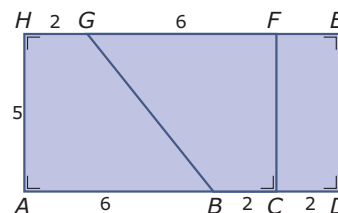
Een rechthoek heeft zijden van 18 cm en 30 cm. Van een verkleining van die rechthoek is één van de zijden 6 cm.

Welke afmetingen kan de verkleining hebben? Geef beide mogelijkheden.

Opgave 12

Bekijk de figuur hiernaast. Alle afmetingen zijn in cm.

- Licht toe waarom de vierhoeken $ABGH$ en $FGBC$ congruent zijn.
- Zijn de vierhoeken $ABGH$ en $EGBD$ gelijkvormig? Licht je antwoord toe.
- Zijn de rechthoeken $ADEH$ en $DEFC$ gelijkvormig? Licht je antwoord toe.



Opgave 13

$\triangle PQR \sim \triangle ABC$. Verder is gegeven $AC = 7,2$, $AB = 9$, $BC = 5$ en $PQ = 13$.

Maak een schets van de situatie, denk om de volgorde van de letters. Bereken de overige twee zijden van $\triangle PQR$.

Opgave 14

$\triangle KLM \sim \triangle ABC$. Verder is gegeven $AB = 7,4$, $BC = 5$, $KM = 2,8$ en $ML = 3,5$.

Maak een schets van de situatie en bereken de twee zijden van deze driehoeken die je nog niet weet.

Opgave 15

De lengte van een vrachtwagen is 5,04 meter. De lengte van een schaalmodel van deze vrachtwagen is 18 cm. Op een foto lijken ze even groot. De afstand tussen de fotograaf en het schaalmodel is 35 cm.

Bereken hoeveel de vrachtwagen verder van de fotograaf staat dan het schaalmodel.



Opgave 16

Willem heeft een poster van 50 bij 80 cm. Hij heeft een lijst voor de poster van 60 bij 100 cm. Willem ontdekt dat de poster daar niet mooi inpast en wil de poster zo bijsnijden dat hij gelijkvormig is met de lijst.

Hoe moet hij de poster bijsnijden opdat er zo min mogelijk van verloren gaat?

Toepassen

Applet

In de applet zie je een rechthoek met daarin een vierkant met een kleinere rechthoek ernaast. Is die kleinere rechthoek gelijkvormig met de grote rechthoek? Is het mogelijk om de rechthoek zo aan te passen dat dit het geval is?

Deze vraag leidt tot de bekende **Gulden Snede**. Dat is een al uit de Oudheid bekende manier om een lijnstuk zoals AE in twee delen te verdelen.

De vergrotingsfactor van AB naar AE waarbij de rechthoeken gelijkvormig zijn is de **Gulden Snede**.

Opgave 17: Gulden Snede

Hierboven wordt de vraag gesteld of het mogelijk is om een rechthoek te verdelen in een vierkant en een kleinere rechthoek die met de gegeven rechthoek gelijkvormig is.

Met de applet kun je de lengte van de rechthoek wat aanpassen.

Probeer met de applet te bepalen welke afmetingen de rechthoek $A E F D$ moet hebben om ervoor te zorgen dat hij gelijkvormig is met rechthoek $E F C B$. Bepaal ook de vergrotingsfactor van AB naar AE , de Gulden Snede dus.

Practicum: Gelijkvormige vierhoeken en driehoeken

Applet

Met deze applets kun je een vierhoek met gegeven zijden en een driehoek met gegeven zijden vergroten. Ga na dat je van de vierhoeken de vorm nog kunt veranderen (zonder de lengtes van de zijden te veranderen) door de punten C en H te bewegen. Van de driehoeken kun je de vorm niet meer veranderen als de zijden vast liggen.

Applet

2.2 Rekenen in driehoeken

Verkennen

Opgave V1

Om een driehoek te kunnen tekenen moet je er iets van weten. Bijvoorbeeld hoe lang de drie zijden zijn. Of hoe groot een hoek is en hoe lang de twee zijden op de benen van die hoek zijn.

- a Teken $\triangle ABC$ met $\angle A = 55^\circ$, $AB = 5$ cm en $AC = 4$ cm. Krijgt iedereen die dit doet dezelfde driehoek?
- b Teken $\triangle ABC$ met $\angle A = 55^\circ$, $AB = 5$ cm en $BC = 4$ cm. Is er nu maar één driehoek mogelijk?

Opgave V2

Je weet van $\triangle ABC$ alleen de twee hoeken $\angle A = 55^\circ$ en $\angle B = 80^\circ$.

- a Teken twee van die driehoeken.
- b Wat valt op als je beide driehoeken vergelijkt?

Theorie

Opgave 1

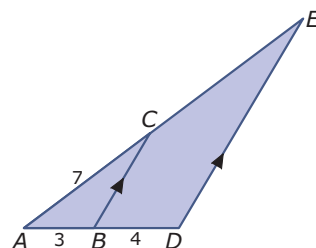
Bekijk de figuur in de **Uitleg**.

- a Waarom is $\angle ASB = \angle CSD$?
- b Waarom is $\angle ABS = \angle CDS$?
- c In de tekst wordt uitgelegd dat $\triangle ABS \sim \triangle CDS$. Staan de letters hierbij in de juiste volgorde?
- d Hoeveel bedraagt de vergrotingsfactor van $\triangle ABS$ naar $\triangle CDS$?
- e Bereken de lengtes van CD en DS .

Opgave 2

Je ziet hier ook twee driehoeken, namelijk $\triangle ABC$ en $\triangle ADE$.

- a Waarom is $\angle ABC = \angle ADE$?
- b Waarom is $\angle ACB = \angle AED$?
- c Schrijf de twee gelijkvormige driehoeken op met de letters in de juiste volgorde.
- d Hoeveel bedraagt de vergrotingsfactor van $\triangle ABC$ naar $\triangle ADE$?
- e Bereken de lengte van AE en CE .



**Opgave 3**

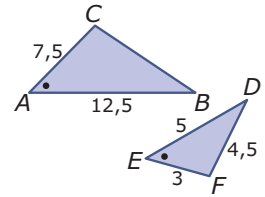
Bekijk **Voorbeeld 1**. De twee driehoeken zijn gelijkvormig omdat ze twee paren gelijke hoeken hebben.

- a Waarom betekent dit automatisch dat er drie paren gelijke hoeken zijn?
- b Zijde EF wordt berekend met de vergrotingsfactor $\frac{2}{3}$. Kun je die zijde ook berekenen met de omgekeerde vergrotingsfactor $\frac{3}{2}$? Licht je antwoord toe.

Opgave 4

Hier zie je twee gelijkvormige driehoeken.

- a Waarom zijn ze gelijkvormig?
- b Vul aan (denk om de juiste volgorde van de letters): $\triangle ABC \sim \dots$
- c Bereken de lengte van BC .

**Opgave 5**

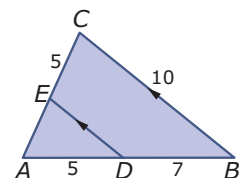
Bekijk **Voorbeeld 2**. Je ziet hoe je in situaties waarin sprake is van evenwijdige lijnen gelijkvormige driehoeken kunt vinden en met behulp daarvan lengtes van lijnstukken berekenen.

- a Waarom is $\triangle ABE \sim \triangle DCE$?
- b Leg uit waarom $DE = 8$.
- c Laat zien, dat inderdaad $CE = 6$.

Opgave 6

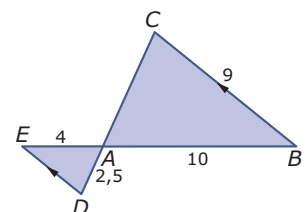
In deze figuur is $BC \parallel DE$. De gegeven lengtes zijn in cm.

- a Waarom is $\triangle ABC \sim \triangle ADE$?
- b Bereken de lengte van DE en van AE .

**Opgave 7**

In deze figuur is $BC \parallel DE$. De gegeven lengtes zijn in cm.

- a Vul aan $\triangle ABC \sim \dots$ en leg uit waarom deze driehoeken gelijkvormig zijn.
- b Bereken de lengte van DE en van AC .





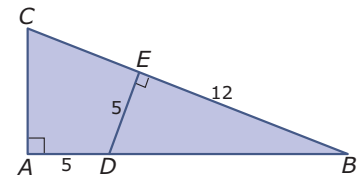
Opgave 8

In **Voorbeeld 3** gaat het om het herkennen van gelijkvormige rechthoekige driehoeken.

- Waarom is $\triangle ABC \sim \triangle DAC$?
- Voer zelf de berekening van AD uit.
- Bereken de lengte van BD in één decimaal nauwkeurig. Doe dit een keer met behulp van de stelling van Pythagoras en ook een keer met behulp van gelijkvormigheid.

Opgave 9

Bereken AC .

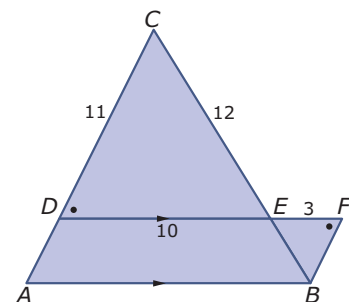


Verwerken

Opgave 10

Bekijk de figuur hiernaast. Alle afmetingen zijn in cm.

- Licht toe waarom de driehoeken DEC en FEB gelijkvormig zijn.
- Bereken de lengte van EB .
Je wilt de lengte van AB berekenen.
- Welke gelijkvormige driehoeken gebruik je? Schrijf de gelijkvormigheid op de juiste wijze op.
- Bereken de lengte van AB .



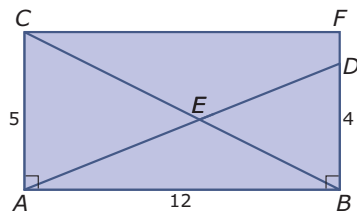
Opgave 11

Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm en $AC = 7$. Op zijde AC ligt punt D zo, dat $\angle DBC = \angle A$.

- Teken de driehoek met lijnstuk BD er in. Welke twee gelijkvormige driehoeken zijn er? Leg uit waarom ze gelijkvormig zijn.
- Punt D verdeelt de zijde AC in de twee stukken AD en DC . Bereken de lengte van die twee lijnstukken.

**Opgave 12**

Bekijk de figuur hieronder.



Bereken CE en ED in één decimaal nauwkeurig.

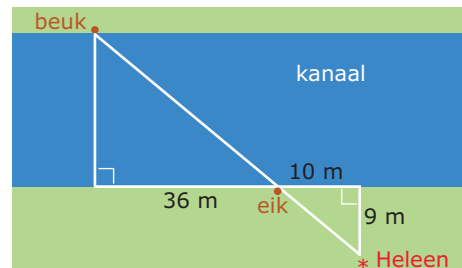
Opgave 13

De hoogte van een boom kun je bepalen door de lengte van zijn schaduw te meten. Boris meet dat een boom een schaduw heeft van 25 m. Hijzelf heeft een schaduw van 1,40 m. Nu is Boris 1,80 m lang.

Bereken de hoogte van de boom in m nauwkeurig.

Opgave 14

Heleen wil de breedte van een kanaal schatten. Ze gebruikt daarbij twee bomen die aan de oevers van het kanaal staan. Eerst bepaalt ze dat de afstand tussen beide bomen gemeten langs de oever 36 m is. Ze loopt dan nog 10 m door en bepaalt dan de afstand tot de oever van het punt waar ze beide bomen op één lijn ziet staan. In de figuur zie je een schets van de situatie.

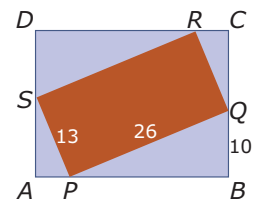


Bereken de breedte van het kanaal in m nauwkeurig.

Opgave 15

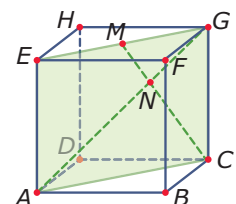
Je ziet hier hoe rechthoek $PQRS$ precies past in rechthoek $ABCD$. Alle afmetingen zijn in mm.

Bereken de lengte en de breedte van rechthoek $ABCD$.

**Toepassen**

Ook in ruimtelijke figuren komen congruente of gelijkvormige vlakke figuren voor. Je kunt daarvan bij het berekenen van lengtes van lijnstukken goed gebruik maken.

Bekijk de kubus hiernaast maar eens. Alle ribben zijn 4 cm lang. Punt M is het midden van EG . Met behulp van gelijkvormigheid en de stelling van Pythagoras kun je de lengtes van AN en CN berekenen.





Opgave 16: Lijnstukken in een kubus

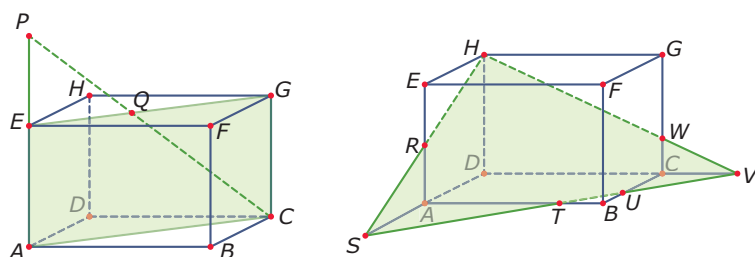
Hierboven wordt verteld dat je gelijkvormigheid ook goed kunt toepassen in ruimtelijke figuren, zoals een kubus.

Bekijk de figuur. Bedenk dat diagonaalvlak $ACGE$ een rechthoek is.

Teken dit diagonaalvlak op ware grootte en bereken met behulp van gelijkvormigheid de lengtes van AN en CN .

Opgave 17: Lijnstukken in een balk

Hier zie je twee keer de balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is $AB = 8$, $AD = 4$ en $AE = 4$ cm. Punt P ligt op het verlengde van AE en $EP = 3$ cm. Verder is punt R het midden van AE , ligt punt S op het verlengde van DA en ligt punt V op het verlengde van DC met $CV = 2$ cm.



Bereken de lengtes van EQ , AS , CW en TU .

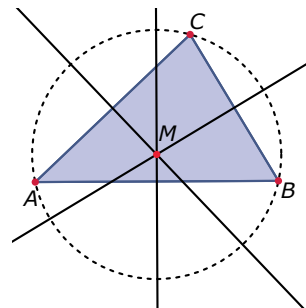
2.3 Bijzondere lijnen

Verkennen

Opgave V1

Applet

Gegeven is een driehoek ABC . Van elke zijde is een middelloodlijn getekend. Deze middelloodlijnen lijken door één punt te gaan.



- a Wat is een middelloodlijn eigenlijk precies?
- b Het lijkt er op dat deze middelloodlijnen door één punt gaan. Teken zelf een driehoek met de drie middelloodlijnen en ga na dat ze alle drie door één punt gaan.
- c De getekende cirkel heet de omgeschreven cirkel van deze driehoek. Teken zo'n cirkel in jouw driehoek.

Theorie

Opgave 1

De deellijn of bissectrice van een hoek is een lijn die deze hoek in twee gelijke delen verdeelt.

- a Teken een (niet al te kleine) driehoek ABC . Teken daarin de deellijnen van elk van de drie hoeken van de driehoek.
- b Gaan de drie deellijnen door één punt D ?
- c Je kunt een cirkel tekenen die precies binnen de driehoek past en D als middelpunt heeft. Ga dat in je figuur na, dit is de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Opgave 2

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en het midden van de zijde tegenover dat hoekpunt.

- a Teken een (niet al te kleine) driehoek ABC . Teken daarin de drie zwaartelijnen CP , AQ en BR van de driehoek.
- b Gaan de drie zwaartelijnen door één punt Z ?

Opgave 3

Bekijk de hoogtelijnen in **Voorbeeld 1**.

- a Teken zelf een driehoek met drie scherpe hoeken.
- b Teken in je driehoek de drie hoogtelijnen.
- c Gaan de drie hoogtelijnen door één punt?

**Opgave 4**

Bekijk de hoogtelijnen in **Voorbeeld 1**.

- a** Teken zelf een driehoek met één stompe hoek.
- b** Teken in je driehoek de drie hoogtelijnen. Je moet daartoe twee zijden verlengen.
- c** Gaan de drie hoogtelijnen door één punt?

Opgave 5

In elke driehoek ABC gaan de drie bissectrices door één punt.

Teken de ingeschreven cirkel van een $\triangle ABC$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a** Teken zelf $\triangle ABC$ met de zwaartelijnen AE en BF en teken lijnstuk EF .
Waarom zijn de driehoeken ABC en FEC gelijkvormig?
- b** Leg uit, dat dit betekent dat $EF \parallel AB$ en $EF = \frac{1}{2} \cdot AB$.
- c** Leg uit, dat uit het voorgaande volgt dat $\triangle ABZ \sim \triangle EFZ$.
- d** Hoe kom je aan de vergrotingsfactor van $\triangle ABZ$ naar $\triangle EFZ$?

Opgave 7

De stelling dat de zwaartelijnen in een driehoek elkaar verdelen in stukken die zich verhouden als 2 : 1 kun je gebruiken bij meetkundige berekeningen.

Van een gelijkbenige driehoek ABC is $AB = AC = 6$ en $BC = 4$ cm. De drie zwaartelijnen snijden elkaar in punt Z .

Bereken de lengte van lijnstuk AZ .

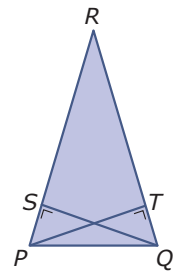
Verwerken**Opgave 8**

Teken een gelijkbenige driehoek ABC met $AB = AC$.

- a** Teken de hoogtelijn AD .
- b** Welke twee congruente driehoeken vind je nu in je figuur?
- c** Waarom volgt uit die congruentie dat AD ook deellijn van $\angle A$ is? En ook dat AD ook zwaartelijn en middelloodlijn is?

**Opgave 9**

Je ziet hier een gelijkbenige driehoek PQR met de hoogtelijnen PT en QS . Verder is $PQ = 4$ en $PR = QR = 8$ cm.



- a Teken deze driehoek en teken er de derde hoogtelijn RU bij in.
- b Waarom is $\triangle PQS \sim \triangle PRU$?
- c Bereken de lengte van alle drie de hoogtelijnen.

Opgave 10

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van 6 cm.

Teken van deze driehoek zowel de omgeschreven cirkel als de ingeschreven cirkel.

Opgave 11

In een rechthoekige driehoek PQR is $\angle Q = 90^\circ$, $PQ = 24$. Verder is de zwaartelijn $PT = 26$ cm. De zwaartelijnen PT en RU snijden elkaar in Z .

- a Maak een schets van de situatie.
- b Bereken de lengte van QR en UR .
- c Bereken de lengte van lijnstuk UZ .

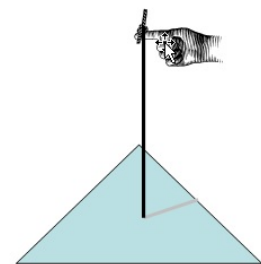
Opgave 12

Teken drie punten die niet op één lijn liggen.

Teken de cirkel waar al deze drie punten op liggen. (Bedenk hoe je de omgeschreven cirkel van een driehoek tekent.)

Toepassen

Het woord 'zwaartelijn' heeft alles te maken met de **zwaartekracht**. Neem maar eens een hele grote driehoek en een touwtje met een gewicht er aan. Houd die driehoek en het touwtje in één punt van die driehoek losjes vast. De zwaartekracht laat dan het touwtje loodrecht naar beneden hangen. Dit touwtje verdeelt de driehoek in twee even zware delen, dus (als de driehoek overal even dik is) in twee delen met dezelfde oppervlakte. Je kunt op de driehoek een lijn tekenen die precies onder het touwtje ligt, dat is een zwaartelijn van de driehoek.



Doe dit met de drie hoekpunten van de driehoek en je hebt de drie zwaartelijnen. Het zwaartepunt is het snijpunt van de zwaartelijnen, als je je driehoek daaraan ophangt, hangt hij in evenwicht.



Opgave 13: Zwaartepunt en zwaartekracht

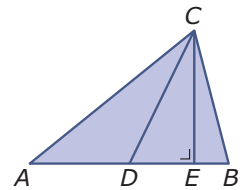
Hierboven wordt verteld dat de zwaartelijnen van een driehoek met de zwaartekracht samenhangen.

- a** Voer zelf dit experiment uit. Maak eerst bijvoorbeeld van karton een willekeurige driehoek die niet te klein en/of te licht is.
- b** Markeer het zwaartepunt van de driehoek. Laat zien dat de driehoek in evenwicht blijft als je hem in het zwaartepunt op een vinger balanceert.

Opgave 14: Verdelen in gelijke oppervlaktes

Een zwaartelijns verdeelt een driehoek in twee delen met dezelfde oppervlakte. Bekijk de figuur hiernaast. CD is een zwaartelijns en CE een hoogtelijns in $\triangle ABC$.

- a** Hoe bereken je ook weer de oppervlakte van een driehoek?
- b** Laat nu zien dat de oppervlaktes van $\triangle ADC$ en $\triangle DBC$ even groot zijn.

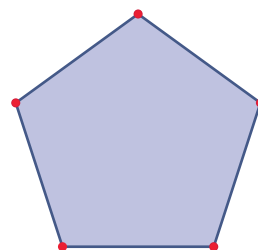


2.4 Vlakke figuren

Verkennen

Opgave V1

Hiernaast zie je een regelmatige vijfhoek. In zo'n vijfhoek zijn alle zijden even lang en alle hoeken even groot.



- a** Verdeel de vijfhoek in gedachten in drie driehoeken. Hoeveel graden zijn de hoeken van vijfhoek samen? Hoeveel graden is daarom elke hoek van deze regelmatige vijfhoek?
- b** Hoe teken je een regelmatige vijfhoek?
- c** Teken een regelmatige vijfhoek met zijn omgeschreven cirkel, een cirkel die door alle hoekpunten gaat.

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt verteld hoe je een regelmatige zevenhoek kunt tekenen.

- a** Teken een regelmatige zevenhoek met zijden van 2 cm.
- b** Geldt de hoekensom van 900° ook voor niet-regelmatige zevenhoeken? Licht je antwoord toe.

Als van een driehoek de drie zijden gelijk zijn, dan geldt dit ook voor de hoeken.

- c** Als van een zevenhoek alle zijden gelijk zijn, geldt dit dan automatisch ook voor de hoeken?
- Door de hoekpunten van een regelmatige zevenhoek gaat een cirkel.
- d** Hoe kun je die omgeschreven cirkel tekenen?

Opgave 2

Van een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ zijn alle zijden 4 cm.

- a** Hoe groot zijn de hoeken van een regelmatige zeshoek?
- b** Teken deze regelmatige zeshoek.
- c** Teken de omgeschreven cirkel van deze zeshoek.
- d** Bij een regelmatige zeshoek is de straal van de omgeschreven cirkel gelijk aan de lengte van een zijde. Leg uit waarom dit zo is.

**Opgave 3**

Van een vierhoek $ABCD$ zijn alle zijden 4 cm.

- a** Hoe noem je zo'n vierhoek? Kun je hem tekenen?
- b** Neem $\angle A = 60^\circ$. Kun je nu de vierhoek tekenen?
- c** Is dit een regelmatige vierhoek?
- d** Heeft deze vierhoek een omgeschreven cirkel?

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Een rechthoekige driehoek met hoeken van 60° en 30° blijkt een bijzondere driehoek te zijn. Als je één zijde weet, kun je de andere twee berekenen.

- a** Laat zien, dat $BC = \sqrt{3}$ cm.
- b** Teken de omgeschreven cirkel van deze driehoek en bereken de straal ervan.
- c** Teken in deze driehoek hoogtelijn BD en bereken de lengte ervan.

Opgave 5

Een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ bestaat uit zes gelijkzijdige driehoeken met zijden van 2 cm die allemaal het hoekpunt M gemeen hebben. Punt M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

- a** Teken deze zeshoek.
- b** Laat zien dat deze zeshoek bestaat uit twaalf driehoeken zoals die in **Voorbeeld 1**. Bereken daarmee de oppervlakte van de regelmatige zeshoek.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a** Teken zelf enkele mogelijke vierhoeken $ABCD$ zoals in het voorbeeld beschreven.
- b** Teken de vierhoek die een omgeschreven cirkel heeft en aan de beschrijving voldoet.
- c** Neem aan dat de vierhoek geen omgeschreven cirkel heeft. Hoe groot is dan de kortste lengte die CD kan hebben?

Opgave 7

Van een gelijkbenig trapezium $ABCD$ zijn de zijden AB en DC evenwijdig, $AD = BC$ en $AB \neq DC$. Gegeven is verder $\angle A = 60^\circ$, $AB = 6$ cm en $AD = 4$ cm.

- a** Construeer dit trapezium.
- b** Bereken de lengte van DC .
- c** Bereken de hoogte en de oppervlakte van dit trapezium.
- d** In dit trapezium kun je de diagonalen AC en BD tekenen. Deze diagonalen snijden elkaar in punt S . Bereken de lengte van BS .



Verwerken

Opgave 8

Een regelmatige twaalfhoek heeft zijden met een lengte van 2 cm.

- a Bereken de grootte van de hoeken van deze twaalfhoek.
- b Teken deze twaalfhoek. Beschrijf hoe je te werk gaat.
- c Teken de omschreven cirkel van deze twaalfhoek. Beschrijf hoe je te werk gaat.

Opgave 9

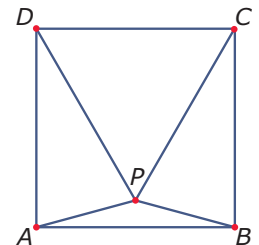
Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van 6 cm.

Bereken de straal van de ingeschreven cirkel van deze driehoek.

Opgave 10

Je ziet hier een vierkant $ABCD$ met daarin een gelijkzijdige driehoek PCD .

Bereken de grootte van $\angle APB$.
(Denk er aan dat ook $PC = BC$.)



Opgave 11

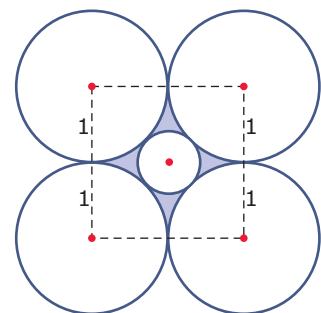
Een vlieger is een vierhoek waarvan één van de diagonalen de symmetrieas is. Van vlieger $ABCD$ is dat de diagonaal AC . De andere diagonaal staat loodrecht op AC . Uit de symmetrie volgt $AB = AD$ en $BC = DC$.

- a Kun je vlieger $ABCD$ tekenen als je weet dat $AB = 6$ en $BC = 4$ cm?
- b Teken vlieger $ABCD$ als je weet dat $AB = 6$, $BC = 4$ cm en $\angle DAB = 60^\circ$.
- c Bereken de lengte van diagonaal AC .
- d Heeft deze vlieger een omschreven cirkel? Waarom wel/niet?

Opgave 12

Op de hoekpunten van een vierkant met zijden van 2 cm liggen cirkels met een straal van 1 cm. Binnen deze cirkels ligt midden op het vierkant een kleinere cirkel die met elk van die cirkels precies één punt gemeen heeft.

Bereken de straal van die kleinere cirkel.



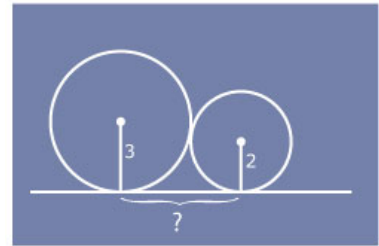


Toepassen

Een **sangaku** () is een Japanse ‘wiskunde-plank’, waarop een meetkundige stelling is uitgebeeld.

De originelen dateren uit de Edo-periode (1603—1867) toen Japan in volledig isolement leefde ten opzichte van de Westerse wereld. Ze werden gemaakt door geleerden uit alle lagen van de bevolking. Ze zijn te vinden in oude Shinto-heiligdommen en soms in Boeddhistische tempels waarin ze werden opgehangen uit dankbaarheid voor het vinden van de stelling. Maar meestal werd het bewijs van de stelling achterwege gelaten als uitdaging voor andere meetkundigen. Ook nu kun je ze nog als uitdaging, als puzzel opvatten...

Kun je deze oplossen?



Opgave 13: Sangaku

Je ziet hierboven een zogenaamde ‘sangaku’. Een mooie puzzel om op te lossen.

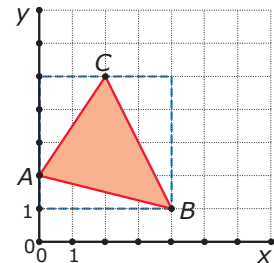
Los deze puzzel op.

2.5 Vergrotingsfactoren

Verkennen

Opgave V1

In een assenstelsel is $\triangle ABC$ gegeven door $A(0,2)$, $B(4,1)$ en $C(2,4)$



- a Bereken de omtrek en de oppervlakte van $\triangle ABC$.
Van $\triangle ADE$ zijn alle zijden 2 keer zo groot.
- b Teken $\triangle ADE$ en bereken de omtrek en de oppervlakte ervan.
Van $\triangle AFG$ zijn alle zijden 5 keer zo groot.
- c Bereken de omtrek en de oppervlakte ervan.

Theorie

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je dat de oppervlakte van een rechthoek 6^2 keer zo groot wordt als alle zijden 6 keer zo groot worden.

- a Teken de rechthoek van 24 bij 36 mm en laat zien, dat de rechthoek van 4 bij 6 mm er inderdaad 36 keer op past.
- b Stel dat de zijden van de kleine rechthoek met vergrotingsfactor 4 worden vermenigvuldigd. Hoeveel keer zo groot wordt dan de oppervlakte?
- c En hoeveel bedraagt de oppervlaktevergrotingsfactor als de lengtevergrotingsfactor 0,5 bedraagt?

De kleine rechthoek wordt vergroot tot zijn oppervlakte 9 keer zo groot is geworden.

- d Hoeveel bedraagt de lengtevergrotingsfactor dan?

Opgave 2

Gegeven is een parallellogram $ABCD$ met $AB \parallel CD$. $AB = 10$ cm en $AD = 5$ cm. De hoogte $DE = 4$ cm.

- a Teken het parallellogram en bereken de omtrek en de oppervlakte ervan.
- b Het parallellogram wordt verkleind met lengtevergrotingsfactor 0,2. Bereken de oppervlakte en de omtrek van het kleinere trapezium.



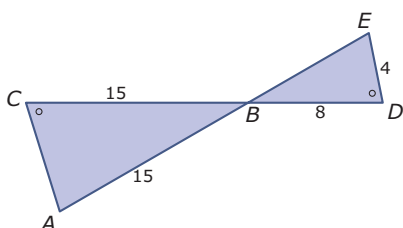
Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a Waarom is $\triangle PQR \sim \triangle STR$?
- b Laat zien dat de hoogte van driehoek PQR gelijk is aan $\sqrt{153}$.
- c Loop de berekening van de oppervlakte van $\triangle STR$ zelf na.

Opgave 4

Deze figuur bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken.

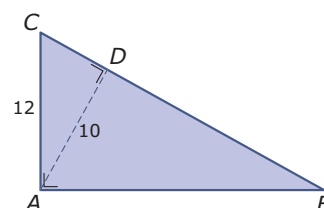


- a Laat zien dat deze twee driehoeken gelijkvormig zijn.
- b Bereken de totale oppervlakte van deze twee driehoeken samen.

Opgave 5

Je ziet hier een rechthoekige driehoek ABC met enkele afmetingen erbij.

Bereken de oppervlakte van deze driehoek.



Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a Waarom is de oppervlaktevergrotingsfactor 12?
- b Waarom is de lengtevergrotingsfactor dan $\sqrt{12}$?

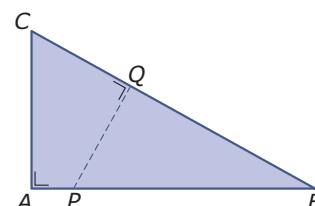
Van een blad papier op A4-formaat is de oppervlakte de helft van een blad papier op A3-formaat. Een blad A4 is 297 mm bij 210 mm.

- c Welke afmetingen heeft een blad A3?

Opgave 7

Je ziet hier een rechthoekige driehoek ABC met $AC = 5$ en $AB = 10$ cm. Lijnstuk PQ staat loodrecht op BC en verdeelt de driehoek in twee stukken met gelijke oppervlaktes.

Bereken de lengte van AP .

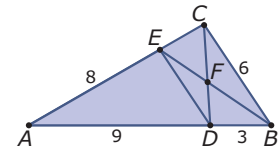




Verwerken

Opgave 8

Je ziet hier $\triangle ABC$ met enkele afmetingen. De lijnstukken DE en BC zijn evenwijdig.



- Waarom zijn de driehoeken ADE en ABC gelijkvormig? Bepaal ook de lengtevergrotingsfactor van $\triangle ABC$ naar $\triangle ADE$.
- Welke twee gelijkvormige driehoeken zitten er nog meer in deze figuur? Hoe verhouden zich de oppervlaktes van deze twee driehoeken?

Opgave 9

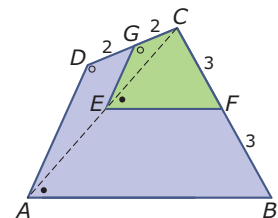
Marian heeft van een vakantiefoto van 7 cm hoog en 10 cm breed een vergroting laten maken. De vergroting is 24 cm breed.

- Hoe hoog wordt de vergroting? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.
Op deze foto staat een vuurtoren. Op de vergroting is deze toren 15 cm hoog.
- Hoe hoog is deze toren op de originele vakantiefoto?
Op de originele foto staat een reclamebord met een oppervlakte van 6 cm^2 .
- Welke oppervlakte heeft dit reclamebord op de vergroting? Geef je antwoord in mm^2 nauwkeurig.

Opgave 10

Bekijk de twee vierhoeken $ABCD$ en $EFCG$.

- Waarom zijn deze vierhoeken gelijkvormig?
- Hoe groot is de oppervlaktevergrotingsfactor van de grote vierhoek naar de kleinere?



Opgave 11

In **Madurodam** is een deel van Nederland op schaal 1 : 25 nagebouwd.

- De Dom in Utrecht is in Madurodam 448 cm hoog. Hoe groot is de toren in werkelijkheid?
- De oppervlakte van Paleistuin Het Loo is 1,1 ha. Hoe groot zou dit dan in Madurodam zijn? ($1 \text{ ha} = 1 \text{ hm}^2$)

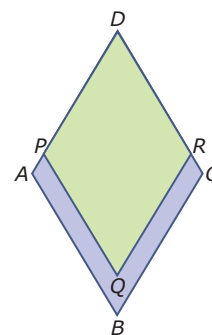


Opgave 12

De ruit $ABCD$ heeft zijden van 6 cm en twee hoeken van 60° .

De ruit $PQRD$ is gelijkvormig met $ABCD$ en de oppervlakte van ruit $PQRD$ is $\frac{3}{4}$ van de oppervlakte van ruit $ABCD$.

Bereken de lengte van BQ .

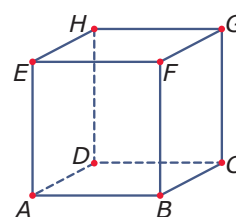


Toepassen

Met lengtevergroting en oppervlaktevergroting heb je ook in ruimtelijke figuren te maken. Neem bijvoorbeeld deze kubus met ribben van 4 cm. De **oppervlakte** van deze kubus (en van elke ruimtelijke figuur) is de totale oppervlakte van alle grensvlakken samen.

Bij deze kubus is dat de oppervlakte van zes gelijke vierkanten met afmetingen van 4 bij 4 cm.

Als de lengte van de ribben 3 keer zo groot wordt, wordt de oppervlakte $3^2 = 9$ keer zo groot. Dat kun je eenvoudig zelf nagaan.



Opgave 13: Kubus vergroten

Je ziet hierboven een kubus met ribben van 4 cm.

- Bereken de oppervlakte van deze kubus.
- Laat zien, dat een kubus waarvan de ribben 3 keer zo groot zijn ook inderdaad een 9 keer zo grote oppervlakte heeft.
- Laat zien, dat een kubus waarvan de ribben k keer zo groot zijn ook inderdaad een k^2 keer zo grote oppervlakte heeft.

Opgave 14: Verfblikken

Verfblikken zijn er in allerlei maten. In deze opgave ga je uit van een wiskundig model van een verfblik: een cilinder met een cirkel als bodem en een cirkel als deksel. Je houdt geen rekening met de dikte van het blik.

- Bereken de oppervlakte van een verfblik met een hoogte van 14 cm en een straal van 8 cm.
- Bereken de oppervlakte van een verfblik waarvan zowel de hoogte als de diameter 2 keer zo groot is.
- Als je de straal van een blik verdubbelt en de hoogte halveert, blijft de oppervlakte van het blik dan hetzelfde? Licht je antwoord toe.



2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je leren werken met gelijkvormigheid en congruentie. Je hebt gezien wanneer twee figuren congruent en wanneer ze gelijkvormig zijn. Met behulp van gelijkvormige driehoeken kun je berekeningen uitvoeren in figuren in het platte vlak. Vaak heb je daarbij ook de stelling van Pythagoras nodig. Je zult dit in de bovenbouw vooral bij wiskunde B en D veel tegenkomen.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **'Vlakke meetkunde'** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

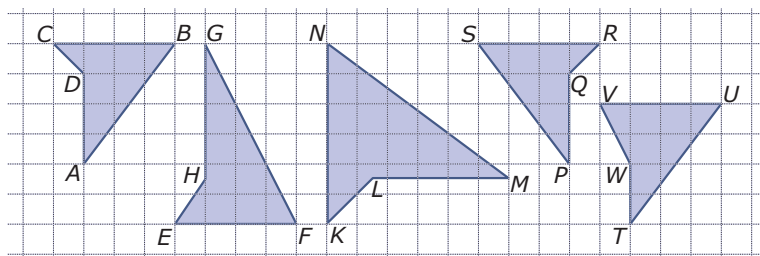
- ▶ overeenkomstige hoeken — overeenkomstige zijden — congruentie — gelijkvormigheid — vergrotingsfactor;
- ▶ congruentie — gelijkvormigheid van driehoeken;
- ▶ middelloodlijn — deellijn (bissectrice) — zwaartelijn — hoogtelijn — omgeschreven cirkel — ingeschreven cirkel;
- ▶ regelmatige veelhoek — omgeschreven cirkel;
- ▶ lengtevergrotingsfactor — oppervlaktevergrotingsfactor.

Activiteiten

- ▶ de begrippen gelijkvormig en congruent leren gebruiken;
- ▶ herkennen wanneer driehoeken gelijkvormig zijn en behulp daarvan berekeningen in driehoeken uitvoeren;
- ▶ bijzondere lijnen in driehoeken — ingeschreven en omgeschreven cirkel van een driehoek tekenen;
- ▶ rekenen in vierhoeken, vijfhoeken, etc, met behulp van congruentie en gelijkvormigheid;
- ▶ werken met de lengtevergrotingsfactor en de bijbehorende oppervlaktevergrotingsfactor.

Opgave 1

Je ziet hier vijf vierhoeken op een rooster.



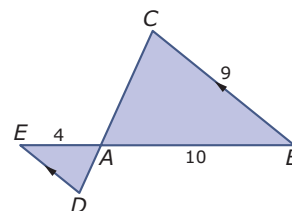
Welke van deze vierhoeken zijn congruent? Welke zijn gelijkvormig? Licht je antwoorden toe.



Opgave 2

Bekijk de figuur hiernaast.

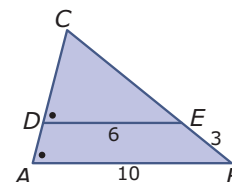
- Welke twee driehoeken zijn gelijkvormig en waarom?
- Welke zijde van $\triangle AED$ kun je berekenen? Laat zien, hoe je die zijde berekent.



Opgave 3

Bekijk de figuur hiernaast.

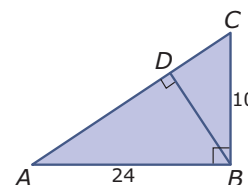
- Welke twee driehoeken zijn gelijkvormig en waarom?
- Welke zijde van $\triangle DEC$ kun je berekenen? Laat zien, hoe je die zijde berekent.



Opgave 4

Hier zie je een rechthoekige driehoek ABC met daarin de hoogtelijn BD .

- Welke gelijkvormige driehoeken zie je in deze figuur?
- Waarom weet je van $\triangle ABC$ eigenlijk alle drie de zijden?
- Bereken de lengte van BD . Geef een duidelijke uitwerking en het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.



Opgave 5

Teken drie keer een driehoek ABC met $AB = 6$, $BC = 4$ en $AC = 3$ cm.

Laat in de eerste driehoek zien hoe je hierin een zwaartelijn, een hoogtelijn, een bissectrice en een middelloodlijn van een zijde tekent. Laat in de andere twee driehoeken zien hoe je de ingeschreven en de omgeschreven cirkel ervan construeert.

Opgave 6

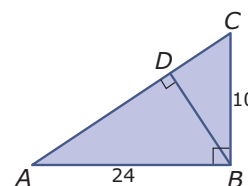
Een regelmatige negenhoek heeft zijden van 4 cm.

- Hoe groot zijn de hoeken van een regelmatige negenhoek?
- Teken de regelmatige negenhoek.

Opgave 7

Hier zie je een rechthoekige driehoek ABC met daarin de hoogtelijn BD .

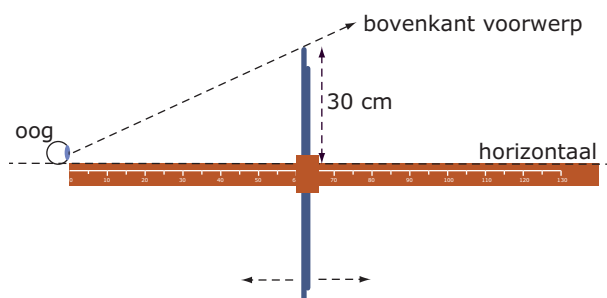
Bereken de oppervlaktevergrotingsfactor van driehoek ABD naar BCD .



Toepassen

Je ziet hier een **Jacobsstaf**, een oud instrument om de hoogte of de breedte van een bouwwerk te bepalen, maar ook de hoek van de zon ten opzichte van de horizon. Hiermee kun je op zee de breedtegraad vaststellen waarop je je bevindt. De jacobsstaf is de voorloper van de sextant.

Hij bestaat uit een lat met daarop een schaalverdeling die je vlak onder je oog kon houden. Loodrecht daarop kun je een andere lat (soms meerdere latten) verschuiven. Je houdt de schaalverdeling horizontaal en kijkt langs de bovenkant van die loodrechte lat. Je verschuift hem tot je het hoogste punt van het bouwwerk nog precies ziet. Nu kun je op de schaalverdeling de horizontale afstand tot je oog aflezen.



Opgave 8: Hoogte meten met de Jacobsstaf

Je kunt hierboven nalezen wat een Jacobsstaf is.

Stel je voor dat je met zo'n Jacobsstaf de hoogte wilt bepalen van een kerktoeren. Je gaat dan ongeveer 100 m van die toren af staan en houdt de Jacobsstaf op ooghoogte horizontaal tegen je gezicht. Je verschuift de verticale lat totdat je langs de bovenkant nog net de torenspits kunt zien. Je ziet in de figuur dat die verticale lat 30 cm boven de horizontale lat uitsteekt.

- a** Maak een schets van de situatie.
- b** Je leest op de schaalverdeling af dat de verticale lat bij 65 cm staat. Bereken nu de hoogte van de toren als jouw ooghoogte 1,70 m boven de grond is.

Opgave 9: Practicum Jacobsstaf

Je kunt zelf een Jacobsstaf maken en dan de hoogte van allerlei voorwerpen in jouw buurt bepalen.

- a** Maak een Jacobsstaf. Zoek op internet naar ontwerpen.
- b** Bepaal met behulp van jouw eigen Jacobsstaf de hoogte van enkele objecten in de omgeving. Vergelijk je resultaten met die van medeleerlingen.



Begrippen

- ▶ vergelijking — snijpunt — nulpunt;
- ▶ terugrekenen — rekenschema — terugrekenschema;
- ▶ balansmethode — oplossen van vergelijkingen;
- ▶ ontbinden in factoren — buiten haakjes halen — som product methode — vergelijkingen splitsen — op 0 herleiden;
- ▶ gebroken vergelijking oplossen — analogierekenen.

Activiteiten

- ▶ het begrip vergelijking en een vergelijking grafisch (en met inklemmen) oplossen;
- ▶ vergelijkingen algebraïsch oplossen door terugrekenen;
- ▶ vergelijkingen algebraïsch oplossen door de balansmethode te gebruiken;
- ▶ vergelijkingen algebraïsch oplossen door ontbinden in factoren;
- ▶ vergelijkingen waarin de onbekende in de noemer van een breuk voorkomt algebraïsch oplossen.

Wikken en wegen



Domein

Rekenen en algebra

Hoofdstuk

Vergelijkingen

Inhoud

3.1	Basishandelingen	72
3.2	Terugrekenen	76
3.3	De balansmethode	81
3.4	Ontbinden in factoren	86
3.5	Breuken in vergelijkingen	91
3.6	Totaalbeeld	95

3

3.1 Basishandelingen

Verkennen

Opgave V1

Je hebt twee cilindervormige kaarsen. De éne kaars is blauwig en 27 cm lang, de andere is gelig en 17 cm lang. De blauwe kaars wordt 4,5 cm per uur korter en de gele kaars wordt elk uur 2 cm korter.

- a** Hoeveel verschil zit er in de tijd waarin beide kaarsen opbranden?
- b** Op welk tijdstip zijn beide kaarsen even lang?
- c** Hoe lang is de gele kaars langer dan de blauwe?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de [Uitleg](#).

- a** Waaraan zie je dat de kaarsen opbranden? Welke kaars brandt het snelst op en hoe zie je dat aan de grafiek?
- b** Hoe zie je aan de formules welke kaars het snelst opbrandt?
- c** Hoe lang zijn deze kaarsen op het moment van aansteken?
- d** Geef de coördinaten van het nulpunt van de blauwe grafiek. Welke vergelijking hoort hierbij? Laat zien hoe je met deze vergelijking het antwoord kunt controleren.
- e** Hoeveel tijd zit er tussen het opbranden van de blauwe en de groene kaars?

Opgave 2

Bekijk de [Uitleg](#).

- a** Hoe lang is de groene kaars na 1 uur? En de blauwe kaars?
- b** Hoe groot is het verschil in lengte op $t = 1$? En welke kaars is dan het langst?
- c** Bepaal met de grafieken op welk tijdstip het verschil tussen de lengtes van beide kaarsen 0 is. Wat betekent dit?
- d** Hoe zou je dit tijdstip met behulp van de vergelijking in de uitleg kunnen controleren? Waarom klopt dit niet precies?
- e** Hoe zou je een nauwkeuriger tijdstip kunnen vinden?

**Opgave 3**

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

- a** Waarom zijn de kosten per kopie voor de leerling constant? Welke formule hoort daar bij?
- b** Waarom zijn de kosten per kopie voor de school niet constant?
- c** Bereken de kosten per kopie voor de school als er 1000 kopieën worden gemaakt. Hoeveel zijn deze kosten bij 2000 kopieën? En bij 3000 kopieën?
- d** Welke formule beschrijft dus de kosten per kopie voor de school?
- e** Onderzoek bij welk aantal kopieën de kosten per kopie onder de 15 cent komen. Probeer dit met de applet tot op de kopie nauwkeurig te bepalen. Welk probleem kom je tegen?

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

- a** In hoeveel decimalen nauwkeurig kun je de kosten per kopie aflezen?
- b** Onderzoek opnieuw bij welk aantal kopieën de kosten onder de 15 cent komen. Probeer dit met de applet tot op de kopie nauwkeurig te bepalen. Hoeveel antwoorden zijn er nu nog mogelijk?
- c** Hoe kun je nu bepalen welke van deze antwoorden het juiste is?
- d** Laat zien hoe dit met een tabel door inklemmen kan.

Opgave 5

Bekijk de oplossing die in **Voorbeeld 2** wordt gegeven.

- a** Waarom past de gegeven vergelijking bij het gestelde probleem?
- b** Bij een vergelijking moeten de linkerkant en de rechterkant van het isgelijktteken dezelfde waarde hebben. Leg uit hoe hieruit volgt dat $\frac{152}{a} = 0,09$.
- c** En hoe is hieruit afgeleid dat $a = \frac{152}{0,09}$?
- d** Komt je antwoord overeen met het voorgaande voorbeeld? Vanaf hoeveel kopieën gaat de school verdienen?

Opgave 6

Los nu de volgende vergelijkingen op met behulp van analogierekenen:

- a** $\frac{600}{x} = 0,05$
- b** $20 + \frac{40}{g} = 23$
- c** $\frac{200-x}{20} = 0,4$
- d** $\frac{20}{200-x} = 0,4$



Verwerken

Opgave 7

De tarieven voor drinkwater verschillen nogal per regio:

- Regio A: € 78,00 per jaar en 1,30 euro per m³.
- Regio B: € 60,00 per jaar en 1,66 euro per m³.

De bedragen zijn inclusief belastingen.

- Stel een formule op voor de jaarlijkse kosten voor water in regio A.
- Doe hetzelfde voor regio B.
- Bij welk aantal kubieke meter is men in regio A duurder uit dan in regio B? En bij welk aantal is juist regio B duurder?
- De familie Geurts verbruikt gemiddeld 125 m³ water per jaar en woont in regio A. Zijn ze goedkoper of duurder uit dan wanneer ze in regio B zouden wonen?

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen op in twee decimalen nauwkeurig:

- $x^3 = 6 - x$
- $\frac{750}{2x+1} = 300$
- $2^x = 12$
- $2 - \frac{1}{x} = 0,5$

Opgave 9

Bekijk hoe je de vergelijkingen in de voorgaande opgave hebt opgelost.

In welke gevallen kon je het analogierekenen toepassen?

Opgave 10

Een winkel huurt een kopieerapparaat speciaal voor haar klanten. Dit kost maandelijks 180 euro en het maken van een kopie met dit apparaat kost de winkelier 6,5 cent. De klanten betalen 10 cent per kopie. Hoeveel kopieën moeten er worden gemaakt wil de winkelier er niet bij inschieten?

- Welke vergelijking kun je nu opstellen om het probleem op te lossen?
- De winkelier schat dat hij vanaf 6000 kopieën per maand uit de kosten komt. Klopt dit met de vergelijking die je hebt gevonden?
- Kun je een nauwkeurigere oplossing vinden met behulp van de vergelijking?



Opgave 11

Van Apeldoorn naar Deventer is met de auto 16 km over de snelweg. Hoe sneller je rijdt, hoe korter je over die 16 km doet. Je gebruikt onderweg 5 minuten voor het tanken van brandstof. Je doet over deze rit 14 minuten, hoeveel is de gemiddelde snelheid?

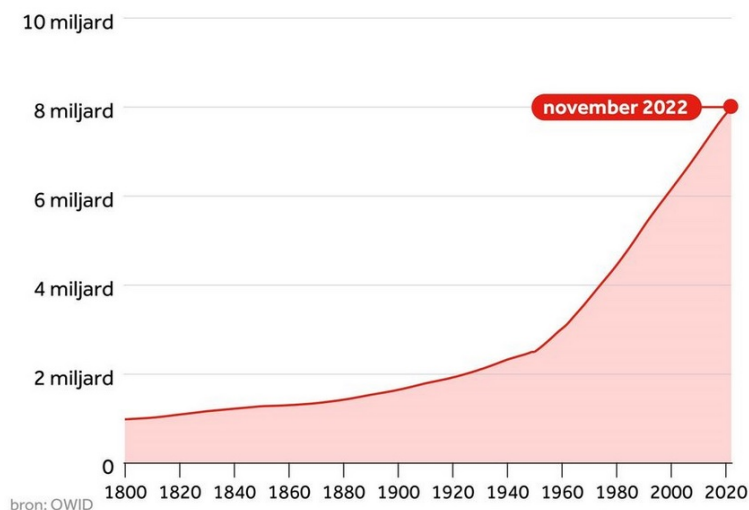
Toepassen

In gevallen van vergelijkingen met exponentiële groei is op dit moment het inklemmen nog onvermijdelijk.

De NOS liet op 15 november 2022 deze grafiek over de groei van de wereldbevolking zien. In 1999 bereikte de bevolking de 6 miljard, in 2011 de 7 miljard mensen. Toen nam de wereldbevolking nog toen met 1,3% per jaar.

Voor het eerst 8 miljard mensen op de wereld

Totale wereldbevolking vanaf 1800



Opgave 12: Wereldbevolking

Bekijk het verhaal van het verloop van de wereldbevolking hierboven.

- Controleer de toename van 1,3% per jaar met de gegevens voor 1999 en 2011.
- Ga na of de wereldbevolking met dit groeipercentage in november 2022 de 8 miljard zou halen.
Kun je iets zeggen over het groeipercentage op dit moment?
- Maak jij nog mee dat de 10 miljardste mens op Aarde mag worden begroet?
- Welke onderbouwde kritiek kun je op deze berekeningen hebben?

3.2 Terugrekenen

Verkennen

Opgave V1

Laat een medeleerling een begingetal in gedachten nemen zonder het je te vertellen. Laat hem nu de volgende berekeningen doen:

- Doe het begingetal maal 2. Onthoud de uitkomst.
- Tel bij de uitkomst 6 op. Onthoud het resultaat.
- Haal van het resultaat van de vorige berekening 12 af. Onthoud weer het resultaat.
- Deel het resultaat door 6.

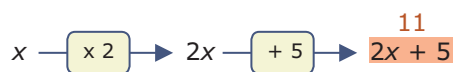
Als je nu het eindresultaat te horen krijgt, weet je zijn begingetal?

- a** Hoe kun je het begingetal vinden als je het eindresultaat van deze berekeningen hoort?
- b** Leg uit hoe dit werkt.

Opgave V2

Gegeven is de vergelijking $2x + 5 = 11$.

- a** Je ziet hier een bijpassend rekenschema. Maak er een terugrekenchema bij.



- b** Gebruik dit terugrekenchema om de vergelijking op te lossen.
- c** Maak zelf een rekenschema en een terugrekenchema bij $2(x + 5) = 11$ en los zo deze vergelijking op.

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** het rekenschema voor de vergelijking $3x + 5 = 20$.

- a** Waarom is $x \xrightarrow{+5} \dots \xrightarrow{\times 3} 20$ geen juist rekenschema?
- b** Bij welke vergelijking is dit wel een juist rekenschema? Welke oplossing heeft die vergelijking?
- c** Waarom heeft het bij de vergelijking $3x + 5 = 2x$ geen zin om een rekenschema te maken?
- d** Waarom heeft het bij de vergelijking $x + \frac{1}{x} = 2$ geen zin om een rekenschema maken?

**Opgave 2**

Je wilt de vergelijking $2(x - 5) + 3 = 16$ oplossen.

- a** Doe dit met behulp van terugrekenen en zonder eerst de haakjes uit te werken.
- b** Je kunt ook eerst de haakjes uitwerken en dan terugrekenen. Laat zien dat je dan hetzelfde antwoord krijgt.

Opgave 3

Je wilt de vergelijking $0,5(x - 1)^2 = 8$ oplossen.

- a** Maak hierbij een passend rekenschema.
- b** Bij het maken van een terugrekenenschema moet je vanuit een kwadraat terugrekenen. Hoe doe je dat? En waar moet je dan om denken?
- c** Los de vergelijking op met behulp van terugrekenen.

Opgave 4

Gegeven is de vergelijking $3x^2 + 2 = 17$.

- a** Maak bij deze vergelijking een rekenschema.
- b** Hieronder zie je een terugrekenenschema dat iemand bij deze vergelijking heeft gemaakt. Wat is er fout aan? Maak zelf het juiste terugrekenenschema.

$$17 \xrightarrow{-2} \dots \xrightarrow{\sqrt{\dots}} \dots \xrightarrow{/3} x$$

- c** Schrijf nu de oplossing van deze vergelijking op.

Opgave 5

Gegeven is de vergelijking $3(x^2 + 2) = 15$.

- a** Maak bij deze vergelijking een rekenschema.
- b** Maak een terugrekenenschema.
- c** Schrijf nu de oplossing van deze vergelijking op.

Opgave 6

Bekijk de vergelijking $0,5x^3 + 2 = 8$ uit **Voorbeeld 2**.

- a** Maak bij deze vergelijking een rekenschema.
- b** Maak een bijpassend terugrekenenschema en schrijf de oplossing op.

Opgave 7

Bekijk de vergelijking $\sqrt{2x - 3} = 5$ uit **Voorbeeld 2**.

- a** Maak bij deze vergelijking een rekenschema.
- b** Maak een bijpassend terugrekenenschema en schrijf de oplossing op.

**Opgave 8**

De vergelijking $0,5x^3 + 2x = 8$ uit **Voorbeeld 2** kun je niet oplossen met behulp van terugrekenen.

- a** Vul deze tabel voor $y = 0,5x^3 + 2x$ in.

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

- b** Kun je nu uit de tabel de oplossing van deze vergelijking aflezen?

Verwerken**Opgave 9**

Los de volgende vergelijkingen op met behulp van terugrekenen. Schrijf de antwoorden van de vergelijking exact op. Niet afronden dus!

- a** $5(x - 3) = -3$
b $2(x - 3)^2 = 50$
c $-0,2(-0,2x - 0,2) = -0,2$
d $2(x - 5)^3 = 31,25$

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen op. Kies zelf de handigste manier van werken.

- a** $4\sqrt{x-2} = 2$
b $4\sqrt{x} - 2 = 2$
c $\frac{2}{x^2-1} = 1$
d $\sqrt{(x+2)^2 - 1} = 0$

Opgave 11

Janet lost de vergelijking $2(x - 1)^2 = 50$ zo op:

- Rekenschema: $x \xrightarrow{-1} \dots \xrightarrow{(\dots)^2} \dots \xrightarrow{\times 2} 50$
- Terugrekenschema: $50 \xrightarrow{/2} \dots \xrightarrow{\sqrt{\dots}} \dots \xrightarrow{+1} x$

Dus het antwoord is $x = 6$. Bij controle blijkt dit antwoord ook te kloppen.

Leg uit wat er fout gaat en verbeter haar uitwerking.



Opgave 12

Het Empire State Building is 381 m hoog vanaf de begane grond tot het topje van het gebouw. Iemand laat vanuit een raam op 371 m hoogte een steentje naar beneden vallen. De hoogte h in m boven de grond van dit steentje is afhankelijk van de valtijd t in seconden.

Er geldt (als er geen luchtweerstand zou zijn): $h = 371 - 4,9t^2$.

Op $t = 0$ wordt het steentje losgelaten.

- a** Na hoeveel seconden landt het steentje op de grond? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

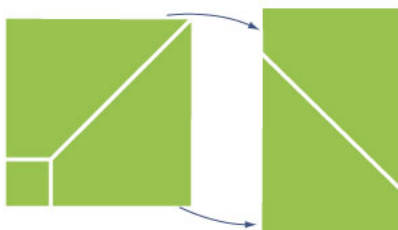
Voor de snelheid van het steentje geldt $v = 9,8t$, met v in m/s.

- b** Met welke snelheid landt dit steentje? Geef het antwoord in km/uur in één decimaal nauwkeurig.



Opgave 13

Een vierkant papiertje van 10 bij 10 cm wordt tot een rechthoek gemaakt door er een vierkantje uit te knippen en het dan diagonaal door te knippen. Zie figuur.



De oppervlakte van de rechthoek is 60 cm^2 . Hoe groot moet het uitgeknipte vierkantje zijn? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Toepassen

Getallenraadsels zijn altijd weer aardig. Hier zie je er ééntje:

Bedenk een getal zonder het me te vertellen. Vermenigvuldig het getal met 4. Tel bij het antwoord 20 op. Trek van de uitkomst twee keer het getal waarmee je begon af. Neem nu de helft van wat je hebt gevonden. Als je me de uitkomst vertelt, weet ik je begingetal.

De vraag is natuurlijk: Hoe kan dat?

**Opgave 14: Getallenraadsels (1)**

Bekijk het getallenraadsel in [Toepassen](#).

- a** Kies een aantal van die geheime getallen. Wat is telkens de uitkomst van het getallenraadsel?
- b** Neem g voor het geheime getal. Wat is dan de uitkomst van het getallenraadsel?
- c** Hoe kun je dus gemakkelijk het getal raden?

Opgave 15: Getallenraadsels (2)

Neem een getal in gedachten en tel er 2 bij op. Vermenigvuldig de uitkomst met 4 en deel dan door 2. Haal nu twee maal jouw getal er weer van af. De uitkomst is altijd 4.

- a** Laat met een rekenschema zien hoe dat komt.
- b** Maak zelf zo'n getallenraadsel.

Opgave 16: Getallenraadsels (3)

Mascha wil graag weten wanneer haar vriendin Jodka jarig is. Ze geeft haar het volgende raadsel op:

Schrijf het nummer op van de maand waarin je jarig bent, maar laat het me niet zien. Vermenigvuldig dit getal met 5. Tel er 6 bij op en vermenigvuldig het resultaat met 4. Tel er 1 bij op en vermenigvuldig de uitkomst met 5. Tel daar tenslotte het nummer van de dag bij waarop je jarig bent en trek er nog 125 van af. Als je mij nu de einduitkomst vertelt, weet ik op welke datum je jarig bent.

Laat met een rekenschema zien hoe dat komt.

3.3 De balansmethode

Verkennen

Opgave V1

De titel van dit onderdeel is balansmethode.

- a Wat is een balans? Wat is het verschil met een weegschaal?
- b Wat heeft dit te maken met vergelijkingen?

Opgave V2

Stel je eens voor dat je een aantal blikjes voor je hebt liggen met een onbekend gewicht g . Je geeft een vriend van jou twee blikjes en 21 losse gewichtjes van 1 gram. Zelf pak je zes blikjes en 5 losse gewichtjes van 1 gram. Als je dit op een balans legt, merk je dat die in evenwicht is.

Hoe kun je nu te weten komen hoeveel gram een blikje weegt?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet een balans in evenwicht.

- a Op welke schaal liggen jouw blikjes en gewichten?
- b Bekijk de uitwerking. Wat betekent de eerste stap voor de weegschaal?
- c Bekijk de uitwerking. Wat betekent de tweede stap voor de weegschaal?
- d Waarom wordt in de laatste stap 16 door 4 gedeeld en niet 4 door 16?

Opgave 2

Nu heeft je vriend 6 blikjes en 2 losse gewichtjes van 1 gram. Zelf heb je één blikje en 12 losse gewichtjes van 1 gram.

Breng het oplossen in beeld.

Opgave 3

De balansmethode kun je ook toepassen als het niet over gewichten en een echte balans gaat. Je kunt altijd links en rechts van het isgelijktteken hetzelfde optellen en aftrekken en met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigen of door hetzelfde (behalve 0) delen.

Los de volgende vergelijkingen op.

- a $5g + 6 = 3g + 9$
- b $5g + 6 = 8g - 18$



c $-2,5g + 14 = 8g - 19$

d $-2,5g - 19 = 8g - 14$

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1** de oplossing van de gegeven vergelijking.

- a** Waarom wordt er niet gebruik gemaakt van terugrekenen?
- b** Waarom wordt er in de eerste stap met 6 vermenigvuldigd?
- c** Vul de gevonden oplossing in het linkerdeel van de vergelijking in en bereken het antwoord. Doe dit ook bij het rechterdeel van de vergelijking. Wat valt je op?
- d** Hoe kun je in het algemeen je oplossing controleren?

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $7x - 15 = 4x - 3$

b $0,7 - 0,2x = 1 - 0,6x$

c $\frac{1}{5}x + 2 = 0,3x - 3$

d $\frac{1}{3}x - 1 = \frac{x+4}{5}$

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** de gegeven vergelijking.

- a** Werk de haakjes uit en los zo eerst zelf de vergelijking algebraïsch op zonder naar de oplossing te kijken.
- b** Controleer je antwoord door substitutie.
- c** Vergelijk je manier van oplossen met die in het voorbeeld. Heb je precies hetzelfde gedaan?

Opgave 7

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $5(x + 2) = 2x + 15$

b $\frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{2}$

c $\frac{2}{5}x + 1 = \frac{1}{3}(x + 5)$

d $1 - \frac{2}{3}p = \frac{1}{7}(2 - p)$

e $x - \frac{1}{4}(x + 3) + \frac{3}{4} = 0$

**Opgave 8**

Bij het oplossen van vergelijkingen kun je bijzondere gevallen tegenkomen. Soms heeft een vergelijking helemaal geen oplossing en soms heeft hij juist oneindig veel oplossingen. In dat laatste geval kun je voor de onbekende elk denkbare getal invullen, altijd krijg je aan beide zijden van het isgelijktteken hetzelfde. Hier tref je een paar voorbeelden van vergelijkingen aan waar je dit tegenkomt. Probeer ze algebraïsch op te lossen.

a $2(x + 4) = x - (4 - x)$

b $2(x - 2) = x - (4 - x)$

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3** de gegeven vergelijking.

a Los eerst zelf de vergelijking algebraïsch op zonder naar de oplossing te kijken.

b Heb je gewerkt met terugrekenen of met de balansmethode? Als je hebt gewerkt met terugrekenen bekijk dan de oplossing die in het voorbeeld wordt gegeven nog eens goed.

c Bij de stap 'terugrekenen vanuit een kwadraat (beide zijden worteltrekken)' is meer aan de hand dan gewoon de balansmethode toepassen. Waar moet je rekening mee houden?

d Controleer je oplossing door substitutie.

Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op:

a $5(x + 10)^2 + 50 = 70$

b $10 - x^2 = 3x^2$

c $10 - (x - 1)^2 = 5$

Verwerken**Opgave 11**

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef exacte antwoorden en controleer ze door substitutie.

a $3x - 7 = -x + 10$

b $5x - 4 = 3(5 - x)$

c $0,2x + 10 = 310$

d $4\left(5 - \frac{3}{4}x\right) + 5x = -x + 10$

e $5x - (3 - 2x) = 11$

f $\frac{5-x}{3} = -\frac{1}{2}(x + 6)$

g $6 - 2(x - 5)^2 = 2$

h $(x - 5)^2 = 5 + x^2$

**Opgave 12**

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. In een aantal gevallen zul je op bijzondere situaties stuiten. Leg uit wat er dan aan de hand is.

- a $1 - (x - 3) = 2(3x - 7)$
- b $2x - 4 = 2(1 + x)$
- c $\frac{3x-5}{2} = 0,25(2x - 10) + x$
- d $6 + 2(x - 2)^2 = 4$
- e $6 - 2(x - 2)^2 = 4$

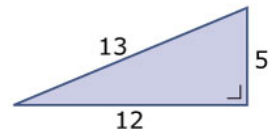
Opgave 13

Oefen het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode via het [Practicum](#).

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Opgave 14

In rechthoekige driehoeken geldt de stelling van Pythagoras. Soms zijn alle drie de zijden van een rechthoekige driehoek gehele getallen. Zo is er bijvoorbeeld een rechthoekige driehoek met een rechthoekszijde van 5 cm waarvan de twee andere zijden opeenvolgende gehele getallen zijn.

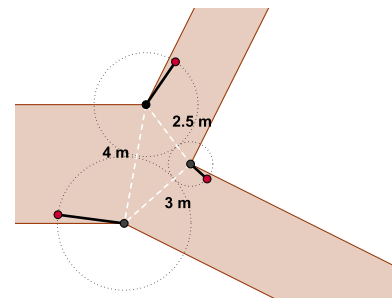


- a Laat zien dat dit klopt voor de rechthoekige driehoek die hiernaast is getekend.

De vraag is nu of dit de enige rechthoekige driehoek is met een rechthoekszijde van 5 waarvan de andere twee zijden opeenvolgende gehele getallen zijn. Om dit uit te zoeken kun je met onbekende zijden en een vergelijking werken.
- b Waarom kun je de lengtes van de twee onbekende zijden x en $x + 1$ noemen? Welke van beide is de hypotenusa van de driehoek?
- c Aan welke vergelijking moet x voldoen?
- d Laat zien dat deze vergelijking alleen $x = 12$ als oplossing heeft.

Toepassen**Applet**

Hier zie je hoe een brede weg zich splitst in twee smallere. Om de mogelijkheid te hebben telkens precies één van die drie wegen af te sluiten, worden drie draaibare hekken geplaatst. De af te sluiten openingen zijn 4 m, 3 m en 2,5 m. Met de rode punten kunnen de hekken worden gedraaid. Ga na, dat dan telkens één weg kan worden afgesloten. Dit komt omdat de breedtes van de hekken goed zijn berekend. Daarbij kun je een vergelijking gebruiken...





Opgave 15: Hekkenprobleem

Bekijk het hekkenprobleem in **Toepassen**.

Gebruik de applet om na te gaan dat elke weg is af te sluiten.

- a** Probeer eerst maar eens of je het gestelde probleem zelf kunt oplossen. Misschien kun je het wel zonder een vergelijking...
- b** Neem voor de lengte van het grootste hek x . Wat geldt dan voor het middelste hek? En het kleinste hek?
- c** Hoe lang moeten het middelste en het kleinste hek samen zijn? Welke vergelijking krijg je daarmee?
- d** Los je vergelijking en daarmee het probleem op.

Opgave 16: Leeftijdenprobleem

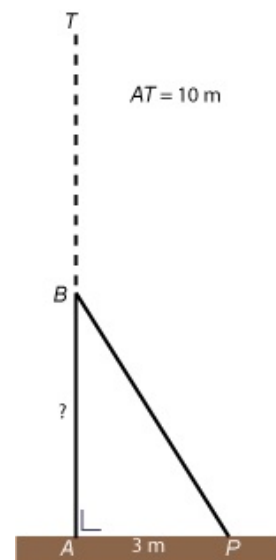
Joop en Myrthe zijn samen 91 jaar oud. Toen Joop even oud was als Myrthe nu is, was Myrthe 26 jaar.

- a** Stel Joop's leeftijd op x jaar. Wat geldt dan voor Myrthe's leeftijd?
- b** Hun leeftijdsverschil is niet veranderd. Welke vergelijking levert dit op?
- c** Los de vergelijking die je hebt gevonden op. Hoe oud zijn beiden nu?

Opgave 17: Gebroken mast

De vlaggenmast AT is 10 m hoog. Bij een hevige storm is deze mast geknakt. De top van de mast rust nu op de grond, 3 m van het punt A . Het onderste deel van de mast staat nog loodrecht op de grond. Zie de figuur hiernaast.

- a** Je wilt weten op welke hoogte het breekpunt B zit. Welk lijnstuk wordt je onbekende?
- b** Er zit een rechthoekige driehoek in je figuur. Welke vergelijking levert dit op?
- c** Los de gevonden vergelijking op en bereken hoe hoog punt B boven de grond zit.



Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode (of door terugrekenen)**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

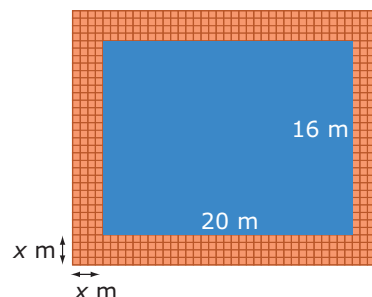
AlgebraKIT

3.4 Ontbinden in factoren

Verkennen

Opgave V1

Hiernaast zie je een plaatje van een zwembad en een tegelpad getekend. De afmetingen van dit zwembad zijn 20 bij 16 meter. Het tegelpad is x meter breed.



- a** Ga na dat de lengte van het zwembadterrein nu $20+2x$ meter is.
- b** Hoeveel is dan de breedte?
- c** Welke formule vind je zo voor de oppervlakte A van het hele zwembadterrein?

Het zwembadterrein heeft een totale oppervlakte van 480 m^2 . Hoe breed is het tegelpad?

- d** Welke vergelijking hoort er bij deze vraag?
- e** Hoe los je die vergelijking op?

Opgave V2

Vul op de stippeltjes een getal in:

- a** $2 \cdot \dots = 0$
- b** $\dots \cdot 6 = 0$
- c** $\dots \cdot \dots = 0$
- d** $\dots \cdot 0 = 0$
- e** Wat weet je van twee getallen waarvan het product 0 is?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je met ontbinden in factoren de vergelijking $3x^2 + 18x = 0$ oplost.

- a** Leg uit hoe de ontbinding in zijn werk gaat.
- b** Hoe kun je de ontbinding controleren?
- c** Waarom helpt de ontbinding bij het oplossen van de vergelijking?
- d** Los nu zelf de vergelijking $4x^2 - 12x = 0$ op door ontbinden in factoren.
- e** Je hebt nu twee getallen gevonden die de vergelijking bij d waar zouden moeten maken. Laat door invullen zien dat dit ook inderdaad zo is.

**Opgave 2**

Los de volgende vergelijkingen op.

- a** $x^2 + 4x = 0$
- b** $3b - 9b^2 = 0$
- c** $c(-2c - 4) = 0$
- d** $d^2 - 0,1d = 0$

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**. Je wilt de drieterm $x^2 + 5x + 6$ in factoren ontbinden.

- a** Welke twee gehele getallen hebben als product 6 en zijn opgeteld samen gelijk aan 5?
- b** Welke ontbinding vind je?
- c** Los hiermee de vergelijking $x^2 + 5x + 6 = 0$ op.
- d** Controleer je oplossing door substitutie.

Opgave 4

Je wilt de vergelijking $x^2 + 27x + 72 = 0$ oplossen.

- a** Welke ontbinding heeft de drieterm: $x^2 + 27x + 72$?
- b** Hoe los je nu met behulp van die ontbinding de gegeven vergelijking op?
- c** Controleer door invullen dat beide x -waarden die je als oplossing hebt gevonden ook inderdaad de vergelijking waar maken.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a** Leg uit waarom het belangrijk is om de vergelijking eerst op 0 te herleiden en dan de uitdrukking aan de linkerkant van het isgelijktteken te ontbinden.
- b** Leg uit hoe deze vergelijkingen worden opgelost.

Opgave 6

Je wilt de vergelijking $3x^2 = 5x$ oplossen.

- a** Je gaat de vergelijking eerst op 0 herleiden en dan de linkerkant ontbinden. Wat krijg je dan?
- b** Leg uit hoe de vergelijking wordt opgelost.

**Opgave 7**

Bekijk **Voorbeeld 2**. Neem nu de vergelijking $x^2 - 14x + 45 = 0$.

- a** Laat zien hoe je nu de linkerzijde kunt ontbinden in factoren.
- b** Laat zien hoe je nu verder deze vergelijking oplost.
- c** Controleer of de gevonden oplossingen de vergelijking ook inderdaad waar maken.

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen op:

- a** $x^2 + 12x - 45 = 0$
- b** $x^2 - 12x - 45 = 0$

Opgave 9

Beantwoord de volgende vragen.

- a** Leg uit wat het verschil is tussen een tweeterm en een drieterm. Geef bij elk een voorbeeld.
- b** Leg uit hoe je een tweeterm kunt ontbinden. Geef hierbij een voorbeeld.
- c** Leg uit hoe een drieterm kan worden ontbonden. Geef hierbij een voorbeeld.
- d** Kun je een drieterm altijd ontbinden in factoren?

Opgave 10

Bekijk de vergelijking van **Voorbeeld 3**.

- a** Los eerst zelf deze vergelijking op zonder naar het antwoord te kijken.
- b** Heb je in je oplossing dezelfde stappen in dezelfde volgorde gezet?
- c** Los nu op dezelfde manier op: $5x^2 - 10x = 15$.

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen op.

- a** $a^2 + 2a = 35$
- b** $(b - 2)(2b + 3) = 0$
- c** $x^2 - 15 = 2x$
- d** $3x^2 - 45 = -6x$



Verwerken

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen, indien mogelijk, op met behulp van ontbinden in factoren.

- a** $3x^2 - 36x = 0$
- b** $x^2 = x$
- c** $c^2 + 2c = 35$
- d** $k^2 - 9 = 7$
- e** $2x^2 - 4x - 16 = 0$
- f** $2x^2 - 4x - 17 = 0$

Opgave 13

Een boer wil een rechthoekig stuk grond afzetten van 1200 m^2 . De breedte is 10 meter korter dan de lengte.

- a** Neem voor de lengte x meter. Hoeveel bedraagt de breedte dan?
- b** Je kunt nu bij de oppervlakte van het land een vergelijking opschrijven. Welke?
- c** Los deze vergelijking op. Hoe lang en hoe breed wordt het stuk grond?

Opgave 14

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Kies zelf de handigste methode.

- a** $(x - 5)(2x - 6) = 0$
- b** $(x - 5)(2x - 6) = 30$
- c** $2(x - 3)^2 = 8x$
- d** $2(x - 3)^2 = 18$

Opgave 15

Oefen het oplossen van kwadratische vergelijkingen met ontbinden via het **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

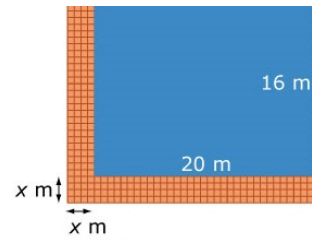
Opgave 16

Een vierkant heeft zijde x . Een rechthoek heeft zijden $5 - x$ en $8 - 2x$. Voor welke waarde van x zijn de oppervlakten van het vierkant en de rechthoek even groot?



Toepassen

Hiernaast zie je weer een plaatje van een zwembad van 16 bij 20 meter. Om de helft van het zwembad heen is een tegelpad aangelegd. De breedte van dit tegelpad is x cm. Een tegelzetter heeft 160 m^2 aan tegels nodig gehad om het tegelpad aan te leggen. Je kunt nu met behulp van ontbinden in factoren zelf uitrekenen hoeveel de breedte van dit tegelpad bedraagt.



Opgave 17: Zwembadprobleem

Bekijk het zwembadprobleem in [Toepassen](#).

- a Welke vergelijking vind je als je de oppervlakte van het totale terrein bekijkt?
- b Los deze vergelijking nu op met behulp van ontbinden in factoren. Bereken de breedte van het tegelpad.

Opgave 18: Landruil

Boer Harmsen heeft een groot vierkant stuk land. Aan de oostzijde van dit land wil het waterschap een afwateringskanaal van 12 m breed aanleggen. Dit betekent dat de breedte van deze sloot van het land van de boer afgaat. Hij wil daarvoor compensatie en krijgt aan de zuidzijde van zijn land een extra strook van 16 m breedte toegewezen.

De boer is tevreden, zijn land is 40 m^2 groter geworden.

Bereken hoe groot de oppervlakte van boer Harmsen's land nu geworden is. Stel zelf een geschikte vergelijking op.

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen door ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

3.5 Breuken in vergelijkingen

Verkennen

Opgave V1

Je rijdt met de auto 30 km over de snelweg. Je hebt een constante (gemiddelde) snelheid. Maar je moet onderweg wel even stoppen om te tanken en dat kost 5 minuten.

- a** Als je 30 km met 120 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord in minuten.

Noem de snelheid in km/uur v en de reistijd in minuten t .

- b** Waarom is hier geen sprake van een omgekeerd evenredig verband?
- c** Welke formule geeft het verband tussen t en v weer?
- d** Welke vergelijking krijg je als je v wilt berekenen voor $t = 25$ minuten?
- e** Probeer deze vergelijking op te lossen.

Theorie

Opgave 1

Je rijdt 32 km met een vrijwel constante snelheid v over de snelweg en je stopt onderweg 5 minuten om te tanken. Je totale reistijd is 25 minuten. Hoeveel bedraagt je snelheid?

- a** Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?
- b** Los deze vergelijking algebraïsch op.

Opgave 2

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daar bovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig laat drukken.

Noem het aantal folders dat je wilt laten drukken a en de kosten per folder k . Je wilt weten voor welke waarde van a de kosten per folder 6 cent bedragen.

- a** Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?
- b** Los deze vergelijking algebraïsch op.

Opgave 3

Bekijk hoe in **Voorbeeld 1** een gebroken vergelijking wordt opgelost met de balansmethode.

- a** Bij welke stap moet je rekening houden met het feit dat beide zijden van een vergelijking met 0 vermenigvuldigen niet mag?
- b** Waarom mag je beide zijden van een vergelijking niet met 0 vermenigvuldigen?



- c** Stel je nu voor dat je een afstand van 150 km aflegt met een constante snelheid en een tussentijdse pauze van 12 minuten. Je doet er 1:40 uur over. Hoe snel rijd je?

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Kies de handigste manier van werken.

a $12 - \frac{1}{x} = 8$

b $\frac{50}{2x-3} = 10$

Opgave 5

Ook de volgende vergelijking kun je met de balansmethode oplossen. Je begint door beide zijden van de vergelijking met x te vermenigvuldigen.

a $\frac{6}{x} + x = 5$

Bij de vergelijking hieronder ga je op een vergelijkbare wijze te werk.

b $\frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = 10$

Opgave 6

Bekijk hoe de vergelijking in **Voorbeeld 2** wordt opgelost.

- a** Leg uit, waarom $x = 0$ hier niet kan.
- b** Laat zien hoe de vergelijking verder kan worden opgelost.
- c** Ga na dat beide gevonden waarden de vergelijking kloppend maken.

Opgave 7

Los de vergelijking $\frac{5}{x} = x - \frac{3}{2x}$ algebraïsch op.

Verwerken

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a Analogierekenen: $\frac{200}{a} + 0,3 = 0,7$

b $x - \frac{8}{x} = 2$

c $20 - \frac{45}{p-2} = 5$

d $\frac{600}{p^2+4} = 50$

**Opgave 9**

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $\frac{3}{x} = 2 - \frac{4}{2x}$

b $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{10}{3}$

Opgave 10

Op veel scholen kunnen leerlingen kopieën maken. De kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 240,00 per maand;
- de kosten per kopie: € 0,06;

Noem het aantal kopieën per maand a .

- a** Welke vergelijking kun je opstellen als de school maandelijks uit de kosten wil komen en elke leerling € 0,10 per kopie betaalt?
- b** Los deze vergelijking op.
- c** Hoeveel kopieën moeten er maandelijks worden gemaakt als de school uit de kosten wil komen?

Opgave 11

Willem en zijn vriendin Arina leggen een afstand van 18 km af en komen gelijktijdig aan. Willem ging op de fiets en kreeg een voorsprong van 30 minuten op Arina die op haar scooter twee keer zo snel reed als Willem. Ga er van uit dat beiden een constante snelheid aanhielden.

Hoe snel reed Willem? Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

Opgave 12

Als er elektrische stroom loopt door een weerstand geldt de wet van Ohm: $V = I \cdot R$. Hierin is V het spanningsverschil in volt (V), I de stroomsterkte in ampère (A) en R de weerstand in ohm (Ω).

- a** Bereken het spanningsverschil ingeval $I = 2$ mA en $R = 1,5$ M Ω .

Ga uit van een constant spanningsverschil over een bepaalde stroomdraad van 24 V. Bij een stroomdraad waarvan de weerstand twee keer zo groot is wordt de stroomsterkte 10 mA kleiner.

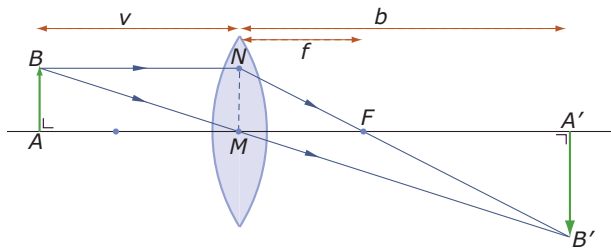
- b** Hoeveel bedraagt de weerstand van deze stroomdraden?

Toepassen

In bijvoorbeeld een fototoestel of een verrekijker zitten lenzen. De standaardlens is een **sferische lens**, dat is een lens waarvan beide kanten delen van een bol vormen. De lijn door het midden M van zo'n lens noem je de hoofdas. Lichtstralen die evenwijdig aan de hoofdas op de lens vallen gaan na de lichtbreking allemaal door het brandpunt F van de lens. Lichtstralen die door het midden M gaan worden niet gebroken. Deze eigenschappen



gelden alleen als de lens niet te dik en niet te groot is en als de beide boloppervlakken dezelfde straal hebben. In de figuur hieronder is dat zo. Het voorwerp AB krijgt aan de andere kant van een lens een beeld $A'B'$.



In deze figuur kun je met behulp van gelijkvormigheid de zogenaamde **lenzenformule** afleiden:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Hierin is v de afstand van het voorwerp tot het midden van de lens (de voorwerpsafstand), b de afstand van het beeld tot het midden van de lens (de beeldsafstand) en f de afstand van het brandpunt tot het midden van de lens (de brandpuntsafstand). Deze formule geldt ook voor holle lenzen, en voor holle en bolle spiegels.

Opgave 13: De lenzenformule

- a** Neem $v = 10$ cm en $f = 4$ cm. Welke (gebroken) vergelijking moet je oplossen om b te berekenen?
- b** Hoe kun je van deze vergelijking in één klap een vergelijking zonder breuken maken?
- c** Los nu de vergelijking bij a op.
- d** Neem $v = 6$ cm en $f = 4$ cm en bereken de beeldsafstand.
- e** Als je zo'n berekening veel moet uitvoeren, dan is het handig om de lenzenformule te herleiden tot de vorm $b = \dots$ Laat zien hoe je dat kunt doen.

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met breuken**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

3.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je meer technieken geleerd om vergelijkingen op te lossen. Het terugrekenen en de balansmethode zijn de twee krachtigste daarvan. Deze twee technieken kende je al uit voorgaande leerjaren, je oefent er mee in wat verdergaande situaties. Bij kwadratische vergelijkingen is soms ontbinden in factoren handig. Je zult het onderwerp 'Kwadratische functies' nog meer methoden leren voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen. En ook valt er nog wel meer te zeggen over vergelijkingen in het algemeen, maar dat gebeurt in een volgend onderwerp.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **'Vergelijkingen'** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- ▶ vergelijking — snijpunt — nulpunt;
- ▶ terugrekenen — rekenschema — terugrekenschema;
- ▶ balansmethode — oplossen van vergelijkingen;
- ▶ ontbinden in factoren — buiten haakjes halen — som product methode — vergelijkingen splitsen — op 0 herleiden;
- ▶ gebroken vergelijking oplossen — analogierekenen.

Activiteiten

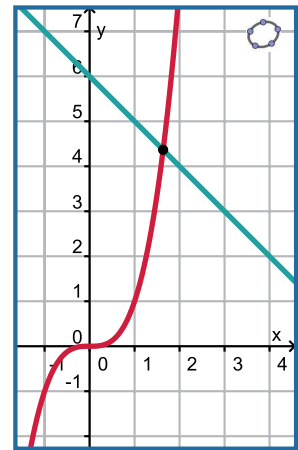
- ▶ het begrip vergelijking en een vergelijking grafisch (en met inklemmen) oplossen;
- ▶ vergelijkingen algebraïsch oplossen door terugrekenen;
- ▶ vergelijkingen algebraïsch oplossen door de balansmethode te gebruiken;
- ▶ vergelijkingen algebraïsch oplossen door ontbinden in factoren;
- ▶ vergelijkingen waarin de onbekende in de noemer van een breuk voorkomt algebraïsch oplossen.

**Opgave 1**

Bij een vergelijking vergelijk je twee formules met dezelfde invoervariabele met elkaar. Je probeert de waarde(n) voor die invoervariabele te vinden waarbij beide formules dezelfde uitkomst hebben.

Neem bijvoorbeeld de vergelijking $x^3 = 6 - x$.

- a** Om welke twee formules gaat het hier? En wat is de invoervariabele?
- b** Je ziet hier de grafieken van beide formules. Hoe kun je met behulp hiervan de oplossing van de gegeven vergelijking vinden?
- c** Geef een oplossing in twee decimalen nauwkeurig.
- d** Welke twee grote nadelen heeft deze manier van oplossen van een vergelijking?

**Opgave 2**

Bij een vergelijking waarin de invoervariabele maar op één plaats voor komt kun je gebruik maken van terugrekenen.

Neem bijvoorbeeld de vergelijking $-0,01(x - 40)^2 + 1,5 = 1$.

- a** Om welke twee formules gaat het hier? Maak een schets van de bijbehorende grafieken.
- b** Waarom weet je in dit geval uit hoeveel waarden de oplossing van de vergelijking bestaat?
- c** Los deze vergelijking exact op met behulp van terugrekenen.
- d** Kun je deze vergelijking ook oplossen door eerst de haakjes uit te werken?

Opgave 3

Bij veel vergelijkingen komt de onbekende op meerdere plaatsen voor en dan wil je toewerken naar $x = \dots$ door termen bij elkaar te nemen als dat kan en/of de balansmethode te gebruiken.

Neem bijvoorbeeld de vergelijking $(x - 20)(x - 30) = x^2 + 40$.

- a** Waarom is bij zo'n vergelijking de eerste stap het wegwerken van de haakjes?
- b** Los de vergelijking algebraïsch op.

Opgave 4

Bij sommige vergelijkingen kun je gebruik maken van ontbinden in factoren.

Neem bijvoorbeeld de vergelijking $(x - 20)(x - 30) = 0$.

- a** Waarom is bij zo'n vergelijking het wegwerken van de haakjes geen verstandige keuze?
- b** Los de vergelijking algebraïsch op.



Bekijk nu de vergelijking $(x - 20)(x - 30) = 600$.

- c** Waarom is bij zo'n vergelijking het wegwerken van de haakjes wel een verstandige keuze?
- d** Los de vergelijking algebraïsch op.

Opgave 5

Bij sommige vergelijkingen kun je gebruik maken van ontbinden in factoren. Soms gebruik je daarbij de som-product-methode.

Neem bijvoorbeeld de vergelijking $(x - 20)(x - 30) = 300 - x^2$.

Los de vergelijking algebraïsch op.

Opgave 6

Vergelijkingen waarin de onbekende voorkomt in de noemer van een breuk noem je wel gebroken vergelijkingen. De beste strategie is dan om zo snel mogelijk alle breuken weg te werken.

Neem bijvoorbeeld de vergelijking $\frac{4}{x} + x = 6 - x$.

- a** Hoe kun je hier meteen alle breuken wegwerken?
- b** Los de vergelijking algebraïsch op.
- c** Waarom moet je nu nog wel even kijken of alle waarden van je oplossing ook voldoen?

Toepassen

Waarschijnlijk ben je al eens eerder een opgave, een vraagstuk, een puzzel, tegengekomen waarvan je niet meteen de oplossing wist. Je moet dan gaan zoeken naar een manier om het probleem op te lossen. Je zoekt een **probleemaanpak**. En daarbij heb je soms kennis op allerlei terreinen nodig.

Bij de onderstaande problemen heb je behalve kennis op het gebied van vergelijkingen oplossen ook meetkundige kennis nodig. Denk aan gelijkvormigheid en de stelling van Pythagoras.

[Hier kun je meer lezen over probleemaanpak.](#)

Opgave 7: Rechthoekige driehoek

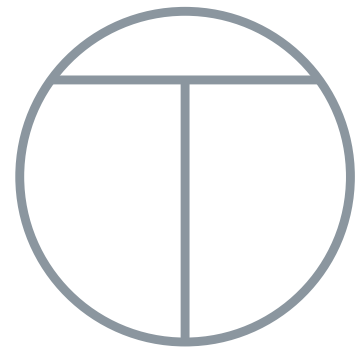
Van een rechthoekige driehoek is éne rechthoekszijde precies 1 groter dan de andere en precies 8 kleiner dan de hypotenusa.

Bereken met behulp van een vergelijking de drie zijden van deze driehoek.

**Opgave 8: Orhan-Teerenstra logo**

Dit is het lijnsymmetrische logo van transportbedrijf Orhan-Teerenstra. De twee lijnstukken die de T vormen zijn elk 6 dm lang en staan loodrecht op elkaar. Het logo wordt gemaakt van dunne stalen buizen en aan de gevel van hun bedrijfspand opgehangen.

Hoe groot moet de straal van de cirkel worden die de letter O voorstelt?



Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

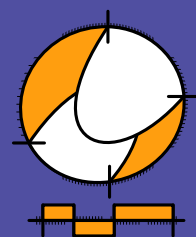
Stichting Math4All

Inhoud Katern 1

- 1. Algebra**
- 2. Vlakke meetkunde**
- 3. Vergelijkingen**



www.math4all.nl



Werkblad bij Opgave 5 op pagina 8.

