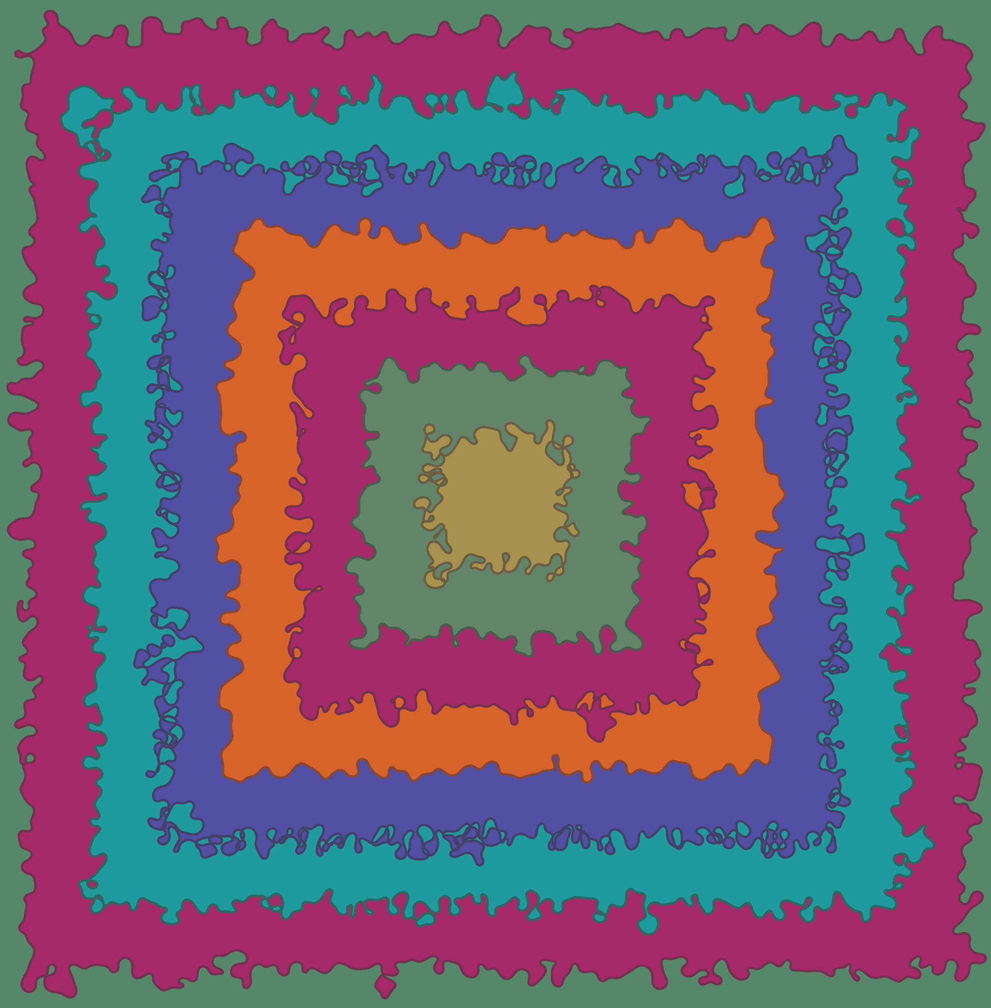
Wiskunde / PGA

2 HAVO / VWO / docentmateriaal

Meetkundige berekeningen

ConTeXt College



Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je begeleidt dan als docent de leerlingen die in kleine groepjes aan wiskundige problemen werken en op die manier een eigen theoretisch kader opstellen. Dit gebeurt voornamelijk op de wijze die wordt beschreven in het boek *Building Thinking Classrooms in Mathematics* van Peter Liljedahl. Dit boek is ook in het Nederlands beschikbaar. Het is verstandig om dit boek vooraf door te werken, maar je kunt ook beginnen met deze **beknopte handleiding**.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee de leerling kan nagaan of de stof wordt beheersd. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding staat in de marge naast de opgave.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die de leerling alleen hoeft te maken als er genoeg tijd voor is
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die een leerling alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk was

In de bijlage staat een “**Leerdoelentabel**” waarin staat aangegeven door welke opgave het specifieke leerdoel wordt afgedekt en op welk niveau dit gebeurt. Als je deze tabel aan de leerlingen uitreikt, kunnen ze hun eigen vorderingen bijhouden.
Opgaven uit de samenvattende paragraaf *Totaalbeeld* worden voorafgegaan door een T.

1

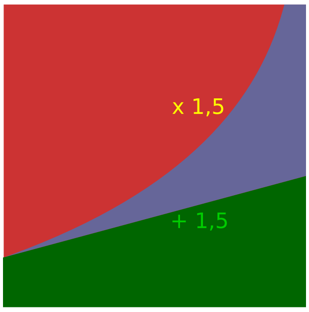
Exponentiële verbanden

1.1 Groeifactoren

Inleiding

Soms nemen hoeveelheden gelijkmatig toe of af. Dat heet lineaire groei.

Maar soms neemt een hoeveelheid met de tijd steeds sterker toe of steeds langzamer af. Een bekend voorbeeld is de groei van het aantal mensen op aarde. Die groei lijkt nog wel steeds sneller te gaan.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei de groeifactor per tijdseenheid afleiden uit de gegevens en daarmee verder rekenen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Voor de docent

Bij het onderdeel 'Groeifactoren' maken de leerlingen kennis met het groeien van een hoeveelheid door elke vaste periode met een vast getal, de 'groeifactor' te vermenigvuldigen. Daarbij is het ook de bedoeling dat ze met machten gaan werken. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal en roosterpapier voor op de verticale werkvlakken.
- Bij de tweede en derde opdracht zijn informatiebladen beschikbaar om uit te delen.

Opdracht 1.1

Stel, je stopt een bedrag van € 1000 in een oude sok en je doet elk jaar € 40 bij. Verder kom je er niet aan.

Stel, je zet een bedrag van € 1000 op een spaarrekening tegen een rente van 4% per jaar en je er doet verder niks mee. Neem ook aan dat die rente de komende jaren niet verandert.

Laat met een berekening in beide situaties zien hoe groot dit bedrag 10 jaar later zou zijn.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Eventuele hulpvragen: “Hoe bereken je het bedrag van één jaar later?”, “En hoe bereken je het bedrag van weer een jaar later?”, (voor de tweede situatie) “Met welk getal kun je elk jaar het getal van het jaar ervoor vermenigvuldigen?” en “Kun je met die vermenigvuldigingsfactor per jaar snel naar het eindantwoord?”.

Bespreek na afloop (hopelijk heeft minstens één groepje een berekening met machten op de werkplek staan, die heb je dan wel even aangeduid als belangrijk) hoe je dit in de tweede situatie snel kunt berekenen door machten te gebruiken en benoem de termen ‘exponentiële groei’ en ‘groeifactor’. Laat ze dan bijvoorbeeld nog even berekenen hoe hoog de bedragen na 20 jaar zouden zijn.

Uitwerking

$1000 + 10 \cdot 40 \approx 1400$ euro.

$1000 \cdot 1{,}04^{10} \approx 1480{,}24$ euro.

Opdracht 1.2

Bekijk de tabel met het aantal konijnen a in een natuurgebied afhankelijk van de tijd t in jaren.

Stel dat $t = 0$ overeenkomt met 1 januari 2012 en er éénmaal per jaar wordt gemeten.

tijd t (jaar)	0	1	2	3	4
aantal konijnen a	122	134	147	162	178

Tabel 1.1

Laat zien dat jaarlijks het aantal konijnen met een vaste groeifactor toeneemt en dit aantal dus exponentieel groeit. Bereken die groeifactor per jaar op twee decimalen nauwkeurig.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling. Deel het **Informatieblad** met de gegevens uit. Eventueel kun je deze overslaan, de volgende opdracht gaat in feite over hetzelfde, maar lijkt wat lastiger.

Eventuele hulpvragen: “Hoe kun je uit deze tabel halen met welke groeifactor het aantal konijnen jaarlijks verandert?”, “Zijn die groeifactoren elk jaar hetzelfde?” en “Welke conclusie kun je trekken?”.

Benoem na afloop de termen ‘exponentiële groei’ en ‘groeifactor’ nog eens.

Uitwerking

De vermenigvuldigingsfactor voor het eerste jaar (periode $t = 0$ tot $t = 1$):
aantal konijnen op $t = 1$: 134
aantal konijnen op $t = 0$: 122

vermenigvuldigingsfactor eerste jaar $= \frac{134}{122} \approx 1{,}10$.

Voor alle volgende jaren blijft de vermenigvuldigingsfactor ongeveer gelijk:

$\frac{134}{122} \approx \frac{147}{134} \approx \frac{162}{147} \approx \frac{178}{162} \approx 1{,}10$.

Omdat er jaarlijks met dezelfde factor van 1,10 wordt vermenigvuldigd, is er van exponentiële groei sprake met groeifactor 1,10.

Opdracht 1.3

Thomas Robert Malthus (1766—1834) beschouwde de toename van de wereldbevolking als exponentiële groei. Dit klopt niet helemaal want de groeifactoren tussen verschillende decennia verschillen een beetje. Ga hier toch, net als Malthus, uit van exponentiële groei.

Figuur 1.2

In de tabel staan gegevens over de bevolkingsgroei in de negentiende eeuw.

tijd (jaar)	*bevolking* (miljoen)
1800	1000
1810	1050
1820	1102
1830	1158
1840	1216
1850	1276
1860	1340
1870	1407
1880	1477

Tabel 1.2

Bereken de groeifactor per decennium (10 jaar) voor de periode tussen 1800 en 1880.
Bereken daarmee de grootte van de wereldbevolking in 1900 en in 2000. Rond af op miljoenen mensen. Komt je antwoord overeen met de werkelijkheid?

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en/of deel het **Informatieblad** uit.

Hulpvragen zijn hopelijk niet nodig, deze opdracht gaat eigenlijk over hetzelfde als de vorige. Alleen spreekt het 'probleem' wellicht wat meer aan. Als je de vorige opdracht hebt overgeslagen zijn mogelijke hulpvragen daar te vinden.

Uitwerking

De groeifactor per tien jaar over de hele periode bereken je als volgt:

vermenigvuldigingsfactor periode 1800—1810: $\frac{1050}{1000} = 1{,}05$

vermenigvuldigingsfactor periode 1810—1820: $\frac{1102}{1050} \approx 1{,}05$

etc.

De groeifactor per tien jaar voor de periode tussen 1800—1880 is ongeveer 1,05.

Met deze groeifactor bereken je de wereldbevolking in 1900: $1477 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \approx 1709{,}8$.

In 1900 waren er ongeveer 1710 miljoen mensen op de wereld.

Als je zo door gaat met vermenigvuldigen met 1,05 kom je in 2000 uit op ongeveer 2652 miljoen mensen. Dat is echter veel minder dan echt het geval was. De groei is in werkelijkheid nog sneller gegaan.

Opdracht 1.4

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over ‘exponentiële groei’. Het gaat om het herkennen van exponentiële groei (tegenover lineaire groei) en het kunnen bepalen van de ‘groeifactor’ vanuit relevante gegevens. Ook het werken met machten hierbij moet worden benoemd.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Als bij een hoeveelheid H per tijdseenheid een vast bedrag bij wordt opgeteld, spreek je van **lineaire groei**.

Hierbij hoort de formule: $H = b + a \cdot t$ waarin b de starthoeveelheid op $t = 0$ is en a de vaste hoeveelheid die er elke tijdseenheid bijkomt.
De grafiek bij het verband is een rechte lijn.

Als een hoeveelheid H per tijdseenheid met een vast bedrag wordt vermenigvuldigd, spreek je van **exponentiële groei**, de hoeveelheid groeit dan steeds sterker.

De grafiek bij dit verband is geen rechte lijn, maar loopt steeds steiler omhoog of steeds minder steil omlaag.

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid telkens per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Dit getal heet de **groeifactor** per tijdseenheid.

Verwerken

★ **Opgave 1.1**

Er is een duidelijk verschil tussen lineaire en exponentiële groei.

a Wat blijft bij lineaire groei gelijk?

b Wat blijft bij exponentiële groei gelijk?

★ **Opgave 1.2**

Bedenk van de volgende situaties of sprake is van lineaire of exponentiële groei.

a Het aantal vlinders neemt jaarlijks met 0,4% toe.

A. Lineaire groei
B. Exponentiële groei

b De afstand van een boot tot de kust neemt toe met 25 mijl per uur.

A. Lineaire groei
B. Exponentiële groei

c Het weefsel van een wever groeit in een uur met 3 cm.

A. Lineaire groei
B. Exponentiële groei

d Van een fruitboom worden elk jaar van elke tak twee nieuwe takken behouden. Tel het aantal eind-takken.

A. Lineaire groei
B. Exponentiële groei

★ **Opgave 1.3**

Bekijk de tabel.

tijd t in dagen	0	1	2	3	4	5	6	7
aantal a	483	532	591	660	732	811	903	1002

Tabel 1.3

a Laat met berekeningen zien dat hier (bij benadering) sprake is van exponentiële groei.

b Welk groeipercentage hoort er bij de tabel?

c Welk aantal verwacht je als $t = 9$?

d Wanneer komt het aantal voor het eerst boven de 2000?

★ **Opgave 1.4**

De prijzen van levensmiddelen en luxe artikelen stijgen voortdurend. Daardoor wordt geld steeds minder waard. Het percentage waarmee de prijzen stijgen heet de prijsindex. Economen proberen de prijsindex laag te houden.

a Hoeveel kost een artikel van €1000,00 na 1 jaar als de prijsindex 2,4% bedraagt?

b En hoeveel na 2 jaar met een gelijkblijvende prijsindex?

c Wanneer zal de prijs over twee jaar hoger zijn: als de prijsindex per jaar 2,4% is of als de prijsindex per twee jaar 4,8% is?

d Hoeveel jaar zal het duren voor het artikel dat € 1000,00 kost, boven de € 1100,00 gaat kosten? Ga ervan uit dat de prijsindex 2,4% blijft.

★ **Opgave 1.5**

De bevolking van een stad Z bedraagt nu ongeveer 20000 mensen. Dat aantal groeit met 4% per jaar.

a Maak een bijbehorende tabel van het aantal mensen in Z met als tijd $t = 0$, 1, 2 en 3 jaren.

b Vul aan: Of er in een tabel sprake is van exponentiële groei kun je nagaan door ...

c Teken de grafiek die hoort bij de tabel bij a.

★ **Opgave 1.6**

Jan neemt een vel papier van het formaat A4. Hij scheurt het doormidden en legt de beide helften op elkaar. Hij scheurt de lagen nogmaals doormidden en legt de beide helften op elkaar. Dat doet hij nog vier maal. Als hij dan de helften op elkaar heeft gelegd, krijgt hij de lagen niet meer doormidden gescheurd.

a Hoeveel lagen papier heeft hij inmiddels op elkaar?

b Leg uit dat het aantal lagen papier exponentieel groeit.

c Hoeveel bedraagt het vaste groeipercentage?

Toepassen

★ ★ **Opgave 1.7: Groei wereldbevolking in de 20e eeuw**

In de tabel en de grafiek is de bevolkingsgroei van de wereldbevolking in de 20^{e} eeuw en het begin van de 21^{e} eeuw weergegeven.

tijd (jaar)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
bevolking (mld)	1,65	1,75	1,86	2,07	2,30	2,54	3,03	3,70	4,45	5,29	6,12	6,91

Tabel 1.4

a Teken een bijpassende grafiek. Geeft de grafiek een lineair of een exponentieel verband weer? Licht je antwoord toe.

b Bereken de toename vanaf 1970 per tien jaar. Rond af op één decimaal.

c Laat zien, dat de toename van 1900 tot 1950 per tien jaar exponentieel is. Licht je antwoord toe met een berekening en rond de groeifactor af op één decimaal.

d Klopt de bij c berekende groeifactor per tien jaar in één decimaal ook voor de periode 1950—1970?

e Beantwoord vraag a nog eens met de berekeningen bij b en c.

f Hoe groot is de wereldbevolking in 2030 als de groei in hetzelfde tempo doorgaat? Rond af op tientallen miljoen mensen.

★ ★ ★ **Opgave 1.8: Kettingbrief**

Iemand stuurt een brief naar 5 andere personen. In de brief staat de opdracht een kopie van de brief binnen een week weer naar 5 andere personen te sturen. Dus wordt het versturen van de brief telkens herhaald. Je noemt dit een kettingbrief. Als iedereen blijft meedoen en verschillende mensen niet naar dezelfde personen een brief sturen, groeit het aantal deelnemers aan een kettingbrief explosief. Ga daar in deze opgave van uit.

a Leg uit dat hier sprake is van exponentiële groei van het aantal personen dat per keer een brief krijgt.

b Hoe groot is de groeifactor?

c De personen die een brief ontvangen van de vijf personen die de initiatiefnemer van de kettingbrief heeft aangeschreven, horen bij de tweede ronde.

Hoeveel mensen zitten er in de tweede ronde?

d In welke ronde worden er 625 brieven verstuurd?

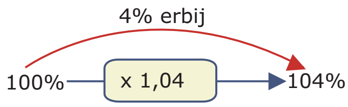
e Hoeveel brieven zijn er dan totaal verstuurd?

f Leg uit waarom zo'n kettingbrief op den duur niet langer kan worden voortgezet, zelfs niet als iedereen wel een keer zou willen meedoen.

1.2 Groeipercentages

Inleiding

Tussen groeifactoren en groeipercentages kun je heen en weer rekenen.
Eigenlijk zegt dit plaatje alles.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- de groeifactor bepalen bij een procentuele toename en omgekeerd;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdstappen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken;
- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei de groeifactor per tijdseenheid afleiden uit de gegevens en daarmee verder rekenen.

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Groeipercentages’ is het de bedoeling dat duidelijk wordt, ook bij terugrekenen in de tijd, dat er moet worden gewerkt met de ‘groeifactor’ en vermenigvuldigen en delen en niet met percentages erbij tellen of eraf halen. Ook worden groeifactoren over grotere tijdstappen berekend. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken.
- Bij de eerste en de tweede opdracht zijn informatiebladen beschikbaar om uit te delen.

Opdracht 2.1

Reken de groeifactor per tijdseenheid om naar het groeipercentage per diezelfde tijdseenheid en omgekeerd.

- Groeipercentage 6% geeft groeifactor ...
- Groeifactor 1,13% geeft groeipercentage ...
- Groeipercentage 0,6% geeft groeifactor ...
- Groeifactor 1,003% geeft groeipercentage ...
- Groeipercentage 60% geeft groeifactor ...
- Groeifactor 1,35% geeft groeipercentage ...
- Groeipercentage 100% geeft groeifactor ...
- Groeifactor 3% geeft groeipercentage ...

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en deel het **Werkblad** uit.

Eventuele hulpvragen: “Hebben jullie de figuur in de Inleiding van dit onderdeel goed bekeken?” en “Zie je wat die figuur betekent?”.

Uitwerking

- Groeipercentage 6% geeft groeifactor 1,06
- Groeifactor 1,13% geeft groeipercentage 13
- Groeipercentage 0,6% geeft groeifactor 1,006
- Groeifactor 1,003% geeft groeipercentage 0,3
- Groeipercentage 60% geeft groeifactor 1,6
- Groeifactor 1,35% geeft groeipercentage 35
- Groeipercentage 100% geeft groeifactor 2
- Groeifactor 3% geeft groeipercentage 200

Opdracht 2.2

In 1972 verschijnt het ‘Rapport van de Club van Rome’. De meeste mensen trekken zich echter weinig van de sombere toekomstvoorspellingen aan. Malthus heeft een eeuw eerder immers ook geen gelijk gekregen! Daarom brengt de Club in 1992 een nieuw rapport uit, waarin de eerste voorspellingen worden vergeleken met de werkelijke bevolkingsgroei. De wereldbevolking blijkt in 1992 met 1,7% per jaar toe te nemen. Die groei is niet in alle delen van de wereld gelijk.

Figuur 2.2

werelddeel	groei per jaar	aantal inwoners in 1992
Amerika	1,4%	741481000
Europa	0,2%	794023000
Azië	1,5%	3239530000
Afrika	2,7%	664439000
Oceanië	1,4%	124233000

Tabel 2.1

Bekijk de groei van de bevolking in Amerika (of (eventueel per groepje) een ander werelddeel). Ga er van uit dat het gegeven groeipercentage steeds zo blijft en ook is geweest.

1. Bereken het aantal inwoners van Amerika in 2000 en in 1990 in duizendtallen nauwkeurig.
2. Bereken het groeipercentage van Amerika per 10 jaar in twee decimalen nauwkeurig.
3. Bereken het aantal inwoners van Amerika in 1900 en in 2050 in duizendtallen nauwkeurig.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in drie stappen. Deel het **Informatieblad** met de gegevens uit als je met meerdere werelddelen wilt werken. Je kunt ook de gegevens van alleen Amerika even op je eigen werkplek opschrijven.

Eventuele hulpvragen: “Waarom kun je beter met groeifactoren werken?”, “Hoe kun je met groeifactoren terug in de tijd rekenen?” en “Hoe bereken je de groeifactor per 10 jaar?”.

Opmerking: Het zou kunnen zijn dat één of meer groepjes bij het terugrekenen in de tijd met percentages eraf gaan werken. Als dat zo is, markeer dat dan even en laat een ander groepje uitleggen waarom dat fout is. Eventueel kun je die strategie ook zelf inbrengen en bespreken waarom het niet goed is.

Uitwerking

Voor Amerika is de groeifactor per jaar 1,014.

1. In 2000: $741481000 \cdot 1{,}014^8 \approx 828712000$ inwoners; in 1990: $741481000/1{,}014^2 \approx 721148000$ inwoners.
2. De groeifactor per 10 jaar is $1{,}014^{10} \approx 1{,}1492$ dus het groeipercentage per 10 jaar is ongeveer 14,92.
3. In 1900: $721148000/1{,}1492^9 \approx 206283000$ inwoners; in 2050: $828712000 \cdot 1{,}1492^5 \approx 1661046000$ inwoners (onafgeronde antwoorden van de eerste vraag gebruikt).

Opdracht 2.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het werken met ‘groeipercentages’. Het gaat erom dat nu echt duidelijk wordt dat bij exponentiële groei moet worden vermenigvuldigd met de groeifactor, of - als je terug gaat in de tijd - gedeeld door de groeifactor. Verder worden groeifactoren over grotere tijdstappen besproken.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

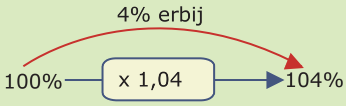
Theorie

Om te onthouden

Tussen procenten en groeifactoren kun je heen en weer rekenen.

Bij een vaste procentuele toename kun je een **groeifactor** bepalen.
Als een hoeveelheid ieder jaar met 4% toeneemt, gaat dat als volgt:
$100\,\% + 4\% = 104\%$

De groeifactor is $\frac{104}{100} = 1{,}04$.



Figuur 2.3

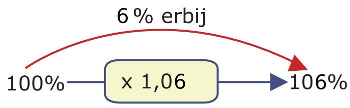
En weet je de groeifactor, dan kun je omgekeerd het **groeipercentage** bepalen.
Als een hoeveelheid per jaar groeit met een groeifactor van 1,04, gaat dat als volgt:
$1{,}04 = 104\% = 100\,\% + 4\%$.
De hoeveelheid groeit met 4% per jaar.

En als een hoeveelheid met een groeifactor van 1,04 per jaar groeit, dan is de groeifactor per tien jaar: $1{,}04^{10} \approx 1{,}48$. Dus groeit de hoeveelheid elke tien jaar met 48% (meer dus dan $10 \cdot 4 = 40\%$).

Verwerken

★ **Opgave 2.1**

Bekijk de figuur.



Figuur 2.4

a Hoe bereken je de groeifactor vanuit het groeipercentage?

b Hoe bereken je vanuit de groeifactor het groeipercentage?

c Je vermenigvuldigt met de groeifactor om de waarde een tijdseenheid verder te berekenen. Wat moet je doen als je een tijdseenheid teruggaat?

★ **Opgave 2.2**

Bepaal in de volgende gevallen groeifactor en/of groeipercentage.

a Een kapitaal van € 1000,00 groeit met 4% per jaar.

b Het aantal vogels van een bepaalde soort is in een natuurgebied in de afgelopen tien jaar wel 1,5 keer zo groot geworden.

★ **Opgave 2.3**

In een weide staan ongeveer 600 paardenbloemen. Vorig jaar waren er ongeveer 500. Verondersteld wordt dat het aantal met een vast percentage groeit.

a Hoe groot is de groeifactor per jaar?

b Hoe groot is het groeipercentage?

c Hoeveel paardenbloemen zullen er over twee jaar zijn?

d Hoeveel paardenbloemen waren er drie jaar geleden?

★ **Opgave 2.4**

In het begin van een griepepidemie groeit het aantal ziektegevallen exponentieel. In een dichtbevolkte stad worden in de eerste week van februari 2346 ziektegevallen gemeld. De groeifactor per week is 1,45.

a Hoeveel bedraagt het groeipercentage per week?

b Bereken het aantal ziektegevallen een week later.

c Bereken het aantal ziektegevallen in de eerste week van maart als de ziekte zich in dit tempo blijft uitbreiden.

★★ **Opgave 2.5**

Het aantal personenauto's groeit exponentieel met de groei van de wereldbevolking mee. Het groeipercentage per drie jaar is 15%.

a Hoeveel bedraagt de groeifactor per drie jaar?

b Is de groei per jaar groter dan, kleiner dan of gelijk aan 5%? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

c Maak een schatting van het percentage per jaar in tienden van procenten nauwkeurig.

★★ **Opgave 2.6**

Iemand betaalt voor een studie € 3000,00 en sluit daarvoor een lening af. De rente is 0,5% per maand. De studieschuld wordt vier jaar na het afsluiten van de lening vastgesteld.

a Hoe groot is de groeifactor per maand?

b Bereken het bedrag dat na een jaar verschuldigd is.

c Hoeveel procent is de schuld in een jaar gestegen?

d Bereken de uiteindelijke studieschuld na vier jaar.

e Hoeveel procent rente betaal je dus over die vier jaar?

Toepassen

★ ★ **Opgave 2.7: Het Aziatisch lieveheersbeestje**

Het Aziatisch veelkleurig lieveheersbeestje is bezig met een gigantische opmars. Nederland is al geheel gekoloniseerd en de soort rukt nog verder naar het noorden op. In gebieden waar de soort nieuw opduikt, zien we het voor kolonisatie gebruikelijke verloop. Aanvankelijk neemt de soort langzaam toe, om plotseling exponentieel te groeien. Deze groei is eindig, meestal daalt de stand weer om vervolgens op een lager pitje door te lopen.

Figuur 2.5 bron: Wikipedia

Op dit moment groeit het aantal lieveheersbeestjes in gebied A exponentieel met 5% per maand. Een maand geleden waren er in gebied A 250 lieveheersbeestjes.

a Hoe groot is de groeifactor per maand?

b Hoeveel lieveheersbeestjes zijn er op dit moment?

c Hoeveel lieveheersbeestjes waren er 2 maanden geleden?

d Wanneer komt het aantal lieveheersbeestjes voor het eerst boven de 500?

e Hoe groot is de groeifactor per jaar?

f Met hoeveel procent neemt het aantal lieveheersbeestjes in een jaar toe?

★ ★ ★ **Opgave 2.8: Hypotheek**

De meeste mensen die een huis kopen, lenen daarvoor geld bij een bank. Zo'n lening wordt een hypotheek genoemd. Er zijn verschillende hypotheekvormen. In deze opgave gaat het over een aflossingsvrije hypotheek. Je leent bij een bank voor 30 jaar een bedrag. Over dat bedrag betaal je elk jaar hypotheekrente aan de bank, maar je betaalt niets terug van het geleende bedrag. Na afloop van de 30 jaar betaal je het bedrag in één keer terug. Daar moet je dus voor sparen in die 30 jaar.

Mevrouw Everts heeft lang geleden een huis van € 250.000 gekocht. Ze heeft een aflossingsvrije hypotheek van € 250.000 met een looptijd van 30 jaar tegen een rentepercentage van 5,4% per jaar.

Van de belastingdienst krijgt ze elk jaar een deel van de betaalde hypotheekrente terug. Hoeveel je terugkrijgt, hangt af van je inkomen. Mevrouw Everts krijgt 30% van de betaalde hypotheekrente terug.

a Bereken voor mevrouw Everts hoeveel euro de jaarlijkse hypotheekrente na belastingteruggave bedraagt.

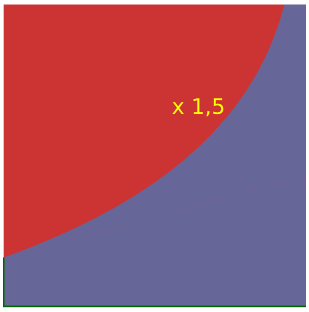
Voordat zij het huis kocht, had ze € 40.000 gespaard. Dit bedrag heeft ze in een (belastingvrij) beleggingsfonds gestort. Zij hoopt dat dit bedrag na 30 jaar tot € 250.000 is gegroeid, zodat ze in één keer het geleende bedrag kan aflossen.

b Maak een schatting van het percentage waarmee de € 40.000 dan per jaar moet toenemen, uitgaande van exponentiële groei. Geef je antwoord in tienden van procenten nauwkeurig.

1.3 Exponentiële groei

Inleiding

Bij exponentiële groei horen grafieken die er steeds ongeveer hetzelfde uitzien. En bij die grafieken passen dan weer formules die erg op elkaar lijken. Daar ga je nu mee werken.



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- formules opstellen bij exponentiële groei en daarmee rekenen;
- grafieken maken bij exponentiële groei en er conclusies uit trekken.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei de groeifactor en het groeipercentage per tijdseenheid afleiden uit de gegevens en daarmee verder rekenen.

Voor de docent

Bij het onderdeel 'Exponentiële groei' gaat het om formules opstellen van exponentiële verbanden en daarbij grafieken maken om het verloop te kunnen zien. Ook kun je daarmee verschillende exponentiële verbanden vergelijken. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal en roosterpapier voor op de verticale werkvlakken.

Opdracht 3.1

Een bepaalde soort bacteriën deelt zich elk uur. Dus elk uur wordt de hoeveelheid bacteriën 2 keer zo groot. Je begint op $t = 0$ met 6 bacteriën.

Stel een formule op voor het aantal bacteriën A afhankelijk van de tijd t in uren en maak een bijpassende grafiek. Bereken het aantal bacteriën na één dag.

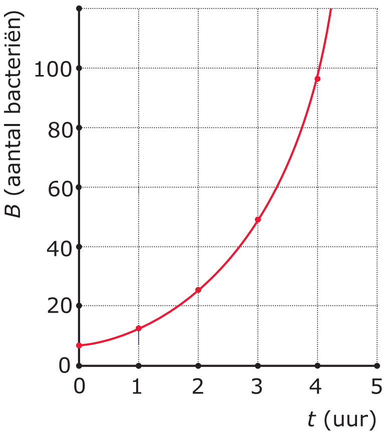
Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Eventuele hulpvragen: "Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur?" en "Waarom trek je een kromme lijn door de berekende punten?".

Uitwerking

Je kunt de bacteriegroei beschrijven met de formule: $A = 6 \cdot 2^t$ met t de tijd in uren en A het aantal bacteriën op tijdstip t.



Figuur 3.2

Na één dag is het aantal bacteriën: $A = 6 \cdot 2^{24} = 100.663.296$.

Opdracht 3.2

Een Nederlandse stad heeft op 1 januari 2010 500000 inwoners. Een Congolese stad heeft op dat moment ongeveer 200000 inwoners. De Nederlandse stad groeit met 0,5% per jaar. De Congolese stad groeit jaarlijks met 5,0%.

Vergelijk de bevolkingsgroei van de steden in een grafiek. Stel eerst bijpassende formules op. Trek een conclusie.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling. Zet de gegevens van beide steden op je eigen werkplek.

Eventuele hulpvragen: “Waarom moet je nu met groeifactoren werken?”, “Hoe maak je hierbij een grafiek?” en “Hoe vergelijk je van beide steden de bevolkingsgroei?”.

Als er groepjes zijn die al denken aan het oplossen van de vergelijking $500000 \cdot 1{,}005^t = 200000 \cdot 1{,}05^t$, dan is dat al een mooie voorbereiding op het vervolg. Ze moeten dan wellicht op het idee van ‘inklemmen’ worden gebracht.

Uitwerking

Noem de Nederlandse stad N en de Congolese stad C.

Voor N krijg je de formule $H_N = 500000 \cdot 1{,}005^t$.

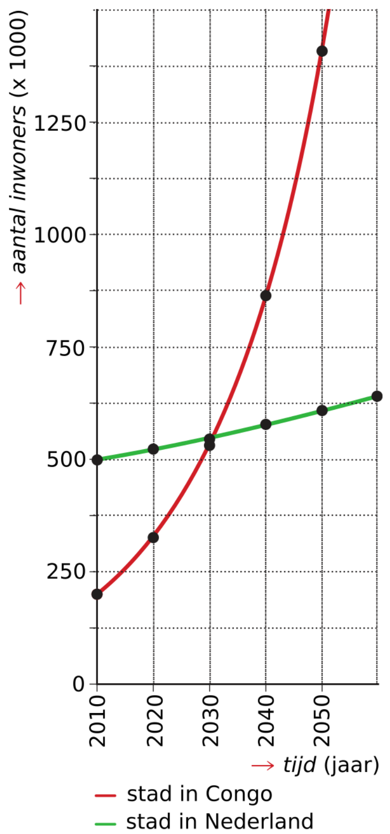
Voor C krijg je de formule $H_C = 200000 \cdot 1{,}05^t$.

Hierin is H het aantal inwoners in de stad en t de tijd in jaar na 01-01-2010.

Maak tabellen om de grafieken te kunnen maken.

t (jaar)	H_N (×1000)	H_C (×1000)
2010	500	200
2020	526	326
2030	552	531
2040	581	864
2050	610	1408
2060	641	2293

Tabel 3.1



Figuur 3.3

Conclusie: de Congolese stad groeit veel harder, in 2031/2032 is het aantal inwoners groter dan in N.

Opdracht 3.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het werken met formules voor ‘exponentiële groei’ en het maken van grafieken om exponentiële groei in beeld te krijgen om de groei van verschillende hoeveelheden te kunnen vergelijken.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

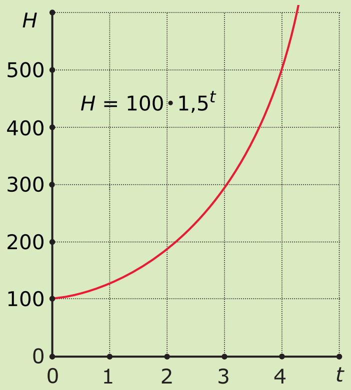
Om te onthouden

Bekijk de applet: exponentiële groei

De **formule bij exponentiële groei** heeft als vorm $H = b \cdot g^t$ met:

- b de beginhoeveelheid op $t = 0$;
- g de groeifactor met $g > 1$;
- t het aantal tijdseenheden dat verlopen is;
- H de hoeveelheid op tijdstip t.

De bijbehorende grafiek zie je als $g > 1$ in de figuur. Hij loopt steeds steiler omhoog.



Figuur 3.4

Verwerken

★ **Opgave 3.1**

Het aantal inwoners groeit exponentieel met de formule $A = b \cdot g^t$.
Hierin is A het aantal inwoners en t de tijd in jaar.
Op $t = 0$ zijn er 7000 inwoners. Het groeipercentage is 3% per jaar.
Kies het juiste antwoord.

a Hoe groot is het begingetal b?

A. 1,03
B. 3
C. 7000

b Hoe groot is de groeifactor g?

A. 1,0
B. 1,03
C. 1,07

c Welke formule hoort bij dit exponentiële verband?

A. $A = 7000 \cdot 1{,}03^t$ met A het aantal inwoners en t de tijd in jaar.
B. $A = 1{,}03 \cdot 7000^t$ met A het aantal inwoners en t de tijd in jaar.
C. $A = 7000 \cdot 1{,}03^t$ met A het aantal inwoners en t de tijd in maanden.

d Hoe groot is het aantal inwoners op $t = 2$?

A. 7210
B. 7426
C. 14420

★ **Opgave 3.2**

Als dieren uit andere streken in het wild worden losgelaten, kunnen ze een plaag worden, omdat ze geen natuurlijke vijanden hebben. Zo is op een eiland een konijnenplaag ontstaan. Vijf jaar geleden waren er 9000 konijnen geteld, nu zijn er 12600. Het aantal konijnen K groeit exponentieel.

a Stel de formule op voor K met als tijdseenheid vijf jaar. Neem aan dat vijf jaar geleden $t = 0$, dan is nu $t = 1$.

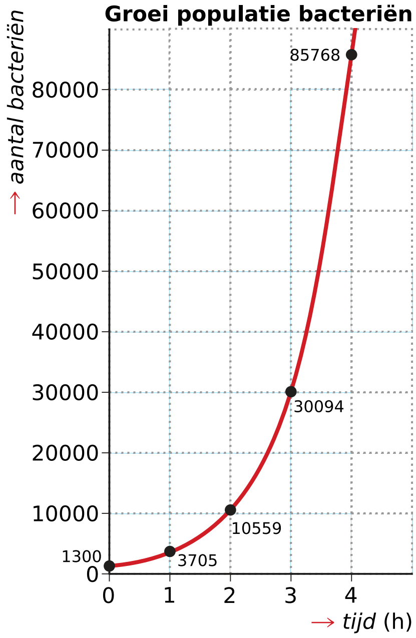
b Maak een tabel bij deze formule vanaf $t = 0$ tot en met 25 jaar daarna en teken de bijbehorende grafiek.

c Hoeveel jaar na de eerste telling zijn er meer dan 100.000 konijnen op dit eiland?

★ **Opgave 3.3**

De grafiek geeft een exponentieel verband weer van de groei van een populatie bacteriën per uur.

Stel de formule op die bij de grafiek hoort, met A het aantal bacteriën.



Figuur 3.5

★ **Opgave 3.4**

Duizenden ratten eten in een gebied in Afrika alles op wat ze tegenkomen. De ratten eten ook de verbouwde gewassen op, zodat de inwoners vrezen voor een gebrek aan voedsel. Op 1 januari 2000 heeft men geschat dat er in een bepaald gebied in Afrika ongeveer 5000 ratten leven. Het aantal ratten neemt elk half jaar met 30% toe.

a Geef de formule voor het aantal ratten R en de tijd t in halve jaren na 1 januari 2000.

b Bereken het aantal ratten op 1 juli 2016. Rond af op duizendtallen.

c Bereken met hoeveel procent het aantal ratten is toegenomen op 1 januari 2001 in vergelijking met 1 januari 2000.

d Bereken in welk jaar het aantal ratten voor het eerst meer dan 1 miljard is als er niets tegen de exponentiële groei ondernomen wordt.

★ **Opgave 3.5**

Een schip heeft olie op zee geloosd. De olievlek groeit elk uur ongeveer met een kwart van zijn oppervlakte. Als hij wordt ontdekt is de vlek 50000 m^2 groot.

a Stel de formule op voor het olieoppervlak O afhankelijk van de tijd t in uren.

b Maak een grafiek van de groei van de olievlek gedurende een periode vanaf 3 uur vóór tot 3 uur na het ontdekken van de ramp.

c Hoe groot zal de vlek 12 uur na het ontdekken ervan zijn geworden? Rond af op honderdtallen.

d De olie werd 10 uur geleden geloosd. Hoe groot was de vlek toen? Rond af op tientallen.

Toepassen

★ ★ **Opgave 3.6: Radioactief uranium**

Bij radioactief uranium komen bij splijting van de kern twee kleine deeltjes vrij, die in staat zijn om bij botsingen met een uraniumkern een nieuwe splijting te veroorzaken. Dat is het principe van de eerste atoombom. Bij de splijting komt namelijk heel veel energie vrij.

a Van elke tien kernen die splijten zullen zeventien deeltjes binnen 0,01 microseconde een nieuwe kern splijten. Ga uit van tien kernen op $t = 0$ en stel de formule op voor het aantal splijtende kernen R met als tijdseenheid 0,01 microseconde.

b Hoeveel kernen zullen na 1 microseconde splijten?

★ ★ **Opgave 3.7: Reuzenpadden in Australië**

In 1935 werden 102 reuzenpadden uit Hawaï overgebracht naar Australië. In 2021 waren de dieren verspreid over een gebied van 0,5 miljoen km^2 met gemiddeld 2000 exemplaren per hectare (hm^2).

Figuur 3.6 **Bron: Wikipedia**

a Bereken het aantal reuzenpadden in 2021 in Australië in miljoen.

De populatie reuzenpadden is exponentieel gegroeid van 1935 tot 2021.

b Controleer dat het groeipercentage per jaar van het aantal reuzenpadden in Australië ongeveer 27,2 is.

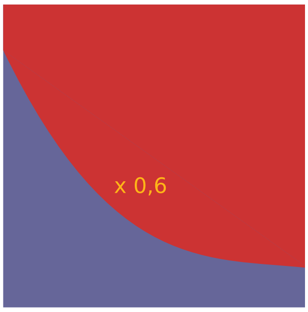
c Geef de formule voor de groei van het aantal reuzenpadden in Australië in de periode 1935 tot 2021.

d De exponentiële groei zet op deze manier door. Het aantal reuzenpadden per hectare blijft echter ongeveer gelijk. Wanneer zullen de reuzenpadden zich over een oppervlakte van 2 miljoen km^2 verspreid hebben?

1.4 Exponentieel verval

Inleiding

Behalve exponentiële groei bestaat er ook exponentiële afname, ofwel exponentieel verval. Ook de grafieken daarbij zien er steeds ongeveer hetzelfde uit. Maar de groeifactoren bij nu kleiner dan 1, omdat de uitkomsten steeds kleiner worden. Daar ga je nu mee werken.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- formules opstellen bij exponentieel verval en daarmee rekenen;
- grafieken maken bij exponentieel verval en er conclusies uit trekken.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei de groeifactor en het groeipercentage per tijdseenheid afleiden uit de gegevens;
- formules en grafieken opstellen bij exponentiële groei en daarmee rekenen.

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Exponentieel verval’ gaat het om exponentiële verbanden waarbij er van een verval/afname sprake is met een vaste ‘groei’factor en daarbij formules en grafieken maken om het verloop te kunnen zien. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal en roosterpapier voor op de verticale werkvlakken.
- Bij de eerste opdracht hoort een informatieblad.

Opdracht 4.1

Bekijk de volgende tabel over het aantal dieren van een bepaalde soort in het wild.

Jaar	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Aantal dieren	4450	3961	3525	3137	2792	2485	2212	1968	1752

Tabel 4.1

Stel een formule op voor het aantal dieren A afhankelijk van de tijd t in jaren. Met hoeveel procent per jaar neemt het aantal van deze dieren af? Bereken hun aantal in 2040. Sterven ze ooit uit?

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en deel het **Informatieblad** uit.

Eventuele hulpvragen: “Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?”, “Welk jaar neem je als $t = 0$?” en “Hoe bepaal je het afnamepercentage, hoeveel blijft er steeds over van 100%?”.

Bespreek na afloop het verschijnsel ‘exponentieel verval’ en dat dan de groeifactor onder de 1 zit. Misschien goed om het ook vast te hebben over het nooit onder 0 komen van de uitkomsten van zo'n formule.

Uitwerking

$\frac{3961}{4450} \approx \frac{3525}{3961} \approx \frac{3137}{3525} \approx \ldots \approx 0{,}89$.

De groeifactor is steeds ongeveer 0,89. Wat opvalt is dat dit minder dan 1 is, er is sprake van exponentiële afname, van exponentieel verval. Elk jaar neemt het aantal dieren met $100 - 89 = 11\%$ af.

Formule: $A = 4450 \cdot 0{,}89^t$ met $t = 0$ in 2007 en t in jaren.

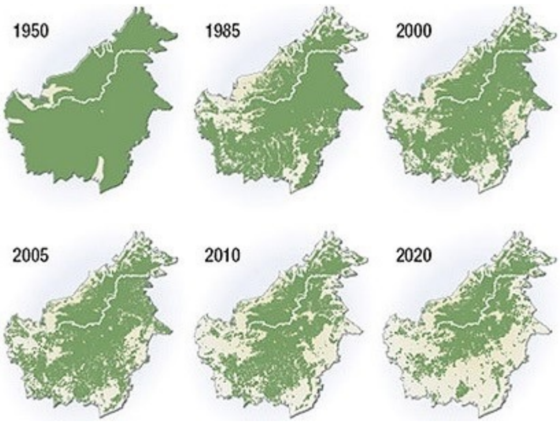
In 2040 zullen er nog ongeveer $4450 \cdot 0{,}89^{33} \approx 95$ van deze dieren zijn als hun afname zo door gaat.

Ze sterven uit als er minder dan 1 dier over is. Dat is 73 jaar na 2007 het geval, dus in 2080.

Opdracht 4.2

De oppervlakte A van het regenwoud op Borneo is tussen 1950 en 2005 gehalveerd. (Eventueel noemen: die halvering betekent een afname van 1,3% per jaar.)
In 2005 bedroeg de oppervlakte nog ongeveer 360000 km^2.

Stel de formule op voor de afname van de oppervlakte van het regenwoud vanaf 2005 en teken een bijpassende grafiek. Hoeveel is er (als het verval zo door gaat) in 2050 nog over van dit regenwoud?



Figuur 4.2 bron: https://ontbossingedo.weebly.com/

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Eventuele hulpvragen (afhankelijk van het wel of niet noemen van de procentuele afname van 1,3% per jaar): “Hoe kun je uit die halvering de groeifactor halen?”, of “Hoe kun je uit het afnamepercentage de groeifactor halen?” en “Hoe stel je nu een formule op?”.

Uitwerking

De beginwaarde is $b = 360000$ km^2.

In 55 jaar is de hoeveelheid gehalveerd, dus $g^{55} = 0{,}5$, zodat $g = \sqrt[55]{0{,}5} \approx 0{,}987$. (Dit kan ook met behulp van inklemmen. Als dit te moeilijk lijkt, kun je ook noemen dat die halvering betekent een afname van 1,3% per jaar.)

De formule is daarom: $A = 360000 \cdot 0{,}987^t$.
Hierin is A de oppervlakte in km^2 en t de tijd in jaren.

In 2050 is er nog $360000 \cdot 0{,}987^{45} \approx 199790$ km^2 over (nog net iets meer dan de helft).

Opdracht 4.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over ‘exponentieel verval’, het opstellen van groeifactoren erbij, het bepalen van het afnamepercentage en het maken van grafieken om exponentieel verval in beeld te krijgen.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

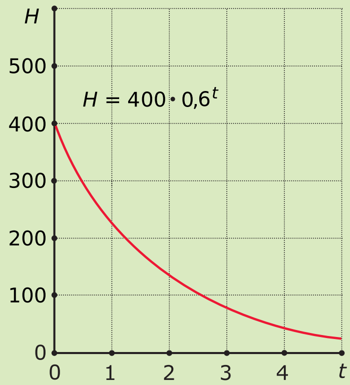
Om te onthouden

Bekijk de applet: exponentiële groei

De **formule bij exponentieel verval** heeft als vorm $H = b \cdot g^t$ met:

- b de beginhoeveelheid op $t = 0$;
- g de groeifactor met $0 < g < 1$;
- t het aantal tijdseenheden dat verlopen is;
- H de hoeveelheid op tijdstip t.

De bijbehorende grafiek zie je als $0 < g < 1$ in de figuur. Hij loopt steeds minder steil omlaag, maar de uitkomsten blijven boven 0 al komen ze er steeds dichter bij.

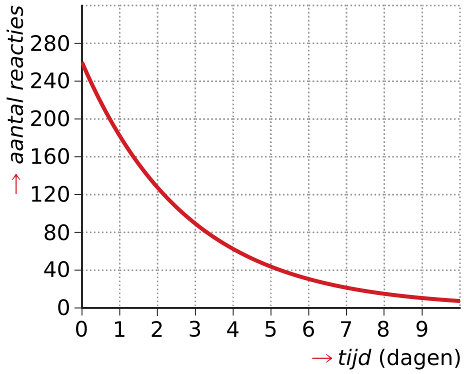


Figuur 4.3

Verwerken

★ Opgave 4.1

Bekijk de grafiek met het aantal reacties op een blog op internet.



Figuur 4.4

Welke uitspraken zijn waar?

A. Er is sprake van een exponentiële toename.
B. Er is sprake van een exponentiële afname.
C. Er is sprake van exponentieel verval.
D. Er is sprake van een lineaire afname.

★ Opgave 4.2

Het aantal inwoners van een dorp op $t = 0$ is 7000. Dit dorp heeft te maken met procentuele afname van het aantal inwoners van ongeveer 0,5% per jaar. Je kunt bij dit verval een formule opstellen van de vorm $A = b \cdot g^t$.

a Welk getal is b?

A. 0
B. 0,5
C. 7000

b Welk getal is g?

A. 0,5
B. 0,995
C. 1,005

c Welke formule is de juiste?

A. $A = 0{,}5^t$
B. $A = 7000 \cdot 0{,}995^t$
C. $A = 1{,}05 \cdot 7000^t$

d Bereken A voor $t = 2$ afgerond op een geheel getal.

A. 1750
B. 3500
C. 6930

★ Opgave 4.3

Emke blaast een ballon op. De inhoud V is na het opblazen 9,2 liter. De ballon loopt daarna langzaam leeg. Er is sprake van exponentieel verval met formule
$V = 9{,}2 \cdot 0{,}975^t$.
Hierin is V de inhoud van de ballon in liter en t de tijd in uur.

a Geef het begingetal b en de groeifactor g.

b Hoe zie je aan de formule dat er sprake is van exponentieel verval?

c Bereken hoeveel liter lucht er na drie uur nog in de ballon zit. Rond af op één decimaal.

d Met hoeveel procent neemt de inhoud per uur af?

e Om te voorkomen dat de inhoud minder wordt dan 7,5 liter, moet de ballon weer op tijd worden opgeblazen. Na hoeveel uur moet de ballon weer opgeblazen worden?

De ballon heeft na enige tijd een inhoud van 7,5 liter. Op dat moment blaast Emke de ballon weer op. Met iedere ademstoot komt er ongeveer 0,3 liter lucht bij. De ballon knalt kapot als de inhoud groter wordt dan 10 liter.

f Bereken bij welke ademstoot van Emke de ballon kapot knalt.

★ Opgave 4.4

Kirsten koopt een huis voor € 200.000 en sluit een hypotheek af. Zij lost elk jaar 10% van de hypotheek af.

a Geef de formule voor het verloop van de hypotheekschuld H afhankelijk van de tijd t in jaar na het afsluiten van de hypotheek.

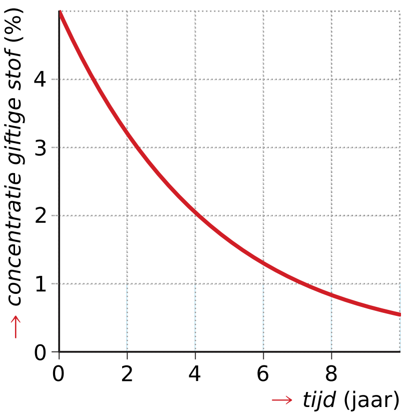
b Teken de grafiek voor het verloop van de hypotheekschuld gedurende de eerste negen jaar.

c Lees uit de grafiek af na hoeveel jaar de hypotheekschuld is gehalveerd.

d Bereken de hypotheekschuld na 25 jaar.

★ Opgave 4.5

Met water wordt een giftige stof uit verontreinigde grond gewassen. Een detector houdt de concentratie van de stof in het waswater bij. Die concentratie neemt exponentieel af. Bekijk de grafiek.



Figuur 4.5

Stel een formule op voor de concentratie C van deze stof. Neem als tijdseenheid het aantal jaar nadat met het wassen is begonnen.

★ Opgave 4.6

De stof ^{253}Fm (Fermium) wordt kunstmatig gemaakt. Per dag verdwijnt 20% van deze stof vanzelf. Daarom komt de stof niet in de natuur voor.

a Hoe groot is de groeifactor g per dag?

b Stel de formule op voor de overblijvende stof m als er 100 g Fermium wordt gemaakt.
Neem de tijd t in dagen.

c Hoeveel gram Fermium is er na 20 dagen over? Rond af op één decimaal.

d Na hoeveel dagen is het overgebleven Fermium uit b gedaald naar minder dan 0,5 gram?

Toepassen

★ ★ **Opgave 4.7: Opslag kernafval**

In 2003 is in Zeeland een gebouw geopend waarin kernafval uit Borssele wordt opgeslagen. Dit afval bestaat uit zes glasblokken met hoogradioactief afval.
In het begin geeft één blok evenveel warmte W af als een kachel van 1800 Watt. Na 100 jaar is de warmteafgifte verminderd tot 180 Watt. De warmteafgifte neemt exponentieel af.

Figuur 4.6

a Laat zien, dat dit betekent dat de groeifactor per jaar ongeveer 0,977 is.

b Geef de formule waarmee je de warmteafgifte per jaar berekent.

c Met hoeveel procent neemt de warmteafgifte per jaar af?

Het gebouw is knaloranje geverfd. In grote groene letters zijn er beroemde formules van Einstein en Planck op aangebracht. Elke tien jaar wordt het gebouw in een iets lichtere tint geschilderd om met de kleurtint de afname van de warmteafgifte aan te geven.

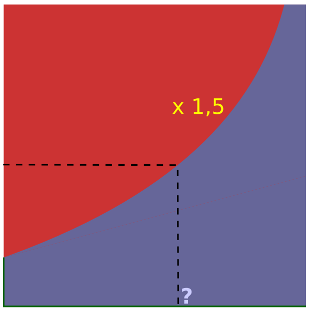
d Bereken het percentage waarmee de warmteafgifte in een periode van tien jaar afneemt. Rond af op twee decimalen.

e Na hoeveel jaar is de warmteafgifte voor het eerst minder dan de helft van de oorspronkelijke warmteafgifte?

1.5 Exponentiële vergelijkingen

Inleiding

Vaak kun je door aflezen van de grafiek de tijd schatten die hoort bij een bepaalde waarde. Maar soms wil je nauwkeuriger antwoorden. Bij het oplossen van een exponentiële vergelijking kun je gebruik maken van de inklemmethode.



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen met exponentiële verbanden oplossen met behulp van inklemmen.

Voorkennis

- een vergelijking oplossen met behulp van de inklemmethode;
- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei/verval de groeifactor en het groeipercentage per tijdseenheid afleiden uit de gegevens;
- formules en grafieken opstellen bij exponentiële groei/verval en daarmee rekenen.

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Exponentiële vergelijkingen’ gaat het om het oplossen van vergelijkingen waarin (ook) exponentiële verbanden voorkomen. Er wordt gewerkt met grafieken voor eerste schattingen en met inklemmen. Dit onderdeel kan desgewenst worden ingepast in het onderdeel ‘Exponentiële groei’. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal en roosterpapier voor op de verticale werkvlakken.

Opdracht 5.1

In 1900 was de gebruikte landbouwgrond L in de wereld 0,45 miljard ha. Deze hoeveelheid nam jaarlijks met 1,4% toe.

Wanneer was de hoeveelheid gebruikte landbouwgrond gelijk aan 2 miljard hectare?

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Eventuele hulpvragen: “Welke formule kun je voor de hoeveelheid landbouwgrond per jaar opstellen?”, “Welke vergelijking moet je oplossen?”, “Hoe kun je een eerste schatting maken?” en “Hoe kun je de vergelijking nauwkeuriger oplossen?”.

Uitwerking

De bijbehorende formule is $L = 0{,}45 \cdot 1{,}014^t$.
Hierin is L de gebruikte landbouwgrond, t de tijd in jaar en $t = 0$ in 1900.

Gevraagd wordt wanneer L gelijk is aan 2 miljard hectare landbouwgrond.

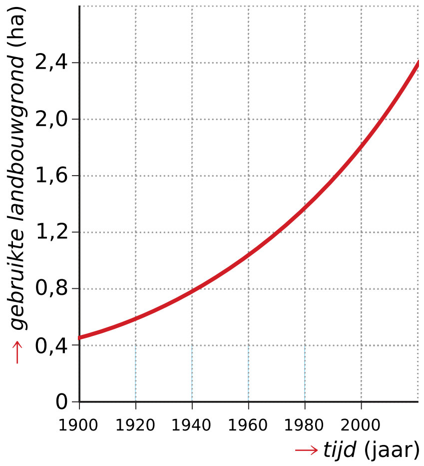
Dit geeft de vergelijking: $0{,}45 \cdot 1{,}014^t = 2$.

Eerst schat je met een grafiek dat ongeveer in 2008 de vergelijking klopt. Daarbij hoort $t = 108$.

Maak vervolgens een inklemtabel met t-waarden in de buurt van 108. Bereken het verschil steeds in vier decimalen.

t	L	$L - 2{,}00$
2005: $t = 105$	1,9373	-0,0627
2006: $t = 106$	1,9644	-0,0356
2007: $t = 107$	1,9919	-0,0081
2008: $t = 108$	2,0198	0,0198
2009: $t = 109$	2,0481	0,0481

Tabel 5.1



Figuur 5.2

Bij $t = 107$ is het verschil het kleinst.
Dus in 2007 is de hoeveelheid gebruikte landbouwgrond ongeveer gelijk aan 2 miljard hectare.

Opdracht 5.2

Van 2000 tot 2050 groeit de gebruikte landbouwgrond volgens voorspellingen met 1,4% per jaar. Neem $t = 0$ in 2000. In 2000 is de gebruikte landbouwgrond 1,81 miljard hectare.

De hoeveelheid beschikbare landbouwgrond is in 2000 gelijk aan 2 miljard hectare. Voorspeld wordt dat de hoeveelheid beschikbare grond met 30 miljoen hectare per jaar kan groeien.

Schat met behulp van een grafiek en een inklemtabel het jaar waarin de benodigde hoeveelheid landbouwgrond L de beschikbare hoeveelheid B heeft ingehaald als deze voorspellingen kloppen. Rond L en B steeds af op twee decimalen.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Eventuele hulpvragen: “Hoe kun je voor de gebruikte landbouwgrond een formule opstellen?”, “Hoe kun je voor de beschikbare landbouwgrond een formule opstellen?”, “Welke vergelijking moet je oplossen?”, “Hoe kun je een eerste schatting maken?” en “Hoe kun je de vergelijking nauwkeuriger oplossen?”.

Uitwerking

Formule voor de benodigde grond vanaf het jaar 2000 ($t = 0$): $L = 1{,}81 \cdot 1{,}014^t$
Hierin is L de grootte van de beschikbare landbouwgrond en t in jaar met $t = 0$ in 2000.

Er komt jaarlijks 30 miljoen hectare bij de in 2000 aanwezige 2 miljard hectare, dat is 0,03 miljard hectare.
Formule voor de beschikbare landbouwgrond B vanaf 2000: $B = 2 + 0{,}03t$.
Hierin is B de grootte van de beschikbare landbouwgrond en t in jaar met $t = 0$ in 2000.

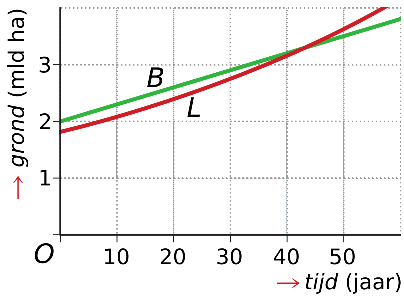
Je wilt uitrekenen op welk tijdstip de benodigde landbouwgrond gelijk is aan de beschikbare landbouwgrond:
$L = B$ geeft de vergelijking $1{,}81 \cdot 1{,}014^t = 2 + 0{,}03t$.

Schat de oplossing van deze vergelijking door het snijpunt in de grafiek af te lezen: $t \approx 42$, dus in 2042.

Maak vervolgens een inklemtabel.

t	L	B	$L - B$
$t = 40$	3,16	3,20	-0,04
$t = 41$	3,20	3,23	-0,03
$t = 42$	3,25	3,26	-0,01
$t = 43$	3,29	3,29	0,00
$t = 44$	3,34	3,32	0,02

Tabel 5.2



Figuur 5.3

Bij $t = 43$ is het verschil 0,00. In 2043 is de benodigde landbouwgrond gelijk aan de beschikbare landbouwgrond.

Opdracht 5.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over ‘exponentiële vergelijkingen’ en het oplossen ervan.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Een **vergelijking met een exponentieel verband** los je op met behulp van inklemmen, met de inklemmethode.

Je kunt daarmee de gevraagde waarde(n) zo nauwkeurig als je wilt benaderen.

Verwerken

★ **Opgave 5.1**

Los de vergelijking $4 \cdot 1{,}2^t = 12$ op met behulp van een inklemtabel. Rond t af op één decimaal.

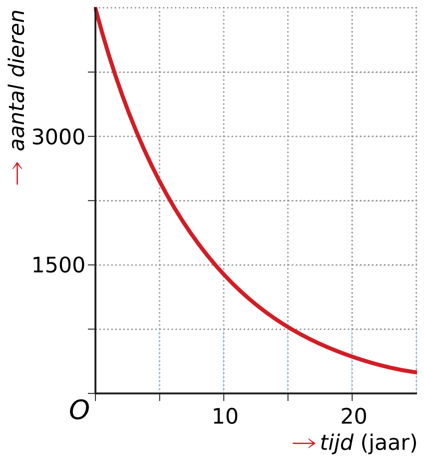
★ **Opgave 5.2**

Los op: $137 \cdot 1{,}27^t = 289 + 55 \cdot t$. Geef t in gehelen.

★ **Opgave 5.3**

Van een bedreigde diersoort in het wild is een formule gemaakt waarmee je per jaar t kunt berekenen hoeveel dieren D er nog zijn: $D = 4450 \cdot 0{,}89^t$ met $t = 0$ in 2007.

Hier zie je de bijbehorende grafiek.



Figuur 5.4

a Bepaal met de grafiek na hoeveel jaar het aantal dieren is gehalveerd.

b Na hoeveel jaar is er nog minder dan 25% van de dieren over?

Bekijk de vergelijking $4450 \cdot 0{,}89^t = 1235$.

c Op welke vraag geeft de oplossing van de vergelijking een antwoord?

d Wat is het antwoord op die vraag als je het op de maand nauwkeurig wilt weten?

e Is het zinvol om dit tot op de maand nauwkeurig te willen weten?

★ ★ **Opgave 5.4**

In een gebied wordt een diersoort met uitsterven bedreigd. Jaarlijks wordt de totale hoeveelheid dieren in dat gebied 12% kleiner.

Bepaal zo nauwkeurig mogelijk na hoeveel jaar nog 10% van deze diersoort in het gebied leeft.

★ ★ ★ **Opgave 5.5**

Stine heeft een salaris van € 2000 per maand. De komende vijf jaar krijgt ze geen loonsverhoging. Maandelijks is zij nu € 1500 aan levensonderhoud kwijt. De kosten voor levensonderhoud gaan per maand met 0,4% omhoog.

a Geef de formule voor het bedrag V dat Stine per maand overhoudt na aftrek van de kosten voor levensonderhoud. Neem $t = 0$ op het moment dat levensonderhoud haar € 1500 kost.

b Teken een grafiek bij V met t van 0 tot 60 maanden.

c In welk jaar houdt Stine minder dan € 150 per maand over? Schat met de grafiek in welk jaar dat zal zijn. Bepaal daarna met een tabel in welke maand precies.

Toepassen

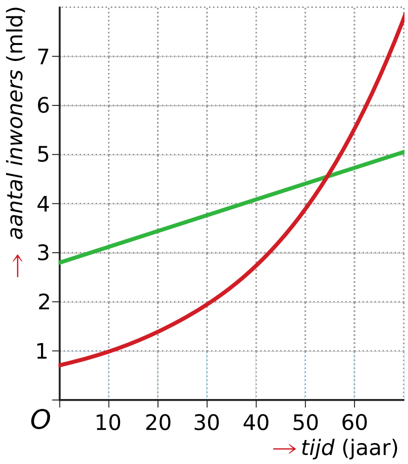
★ ★

Opgave 5.6: Wel- en niet-geïndustrialiseerde landen

In 1972 was het totaal aantal inwoners van alle steden in geïndustrialiseerde landen A_i gelijk aan het totaal aantal inwoners van alle steden in niet-geïndustrialiseerde landen A_n: beide 0,7 miljard inwoners.

De steden in de geïndustrialiseerde landen groeiden daarna met 8 miljoen inwoners per jaar. In niet-geïndustrialiseerde landen groeiden de steden met 3,5% per jaar.

Bekijk de grafiek van $A_n = 0{,}7 \cdot 1{,}035^t$ en $A_i = 4(0{,}7 + 0{,}008t)$.



Figuur 5.5

a Bekijk de vergelijking $0{,}7 \cdot 1{,}035^t = 4(0{,}7 + 0{,}008t)$.
Welke vraag hoort bij deze vergelijking?

b Lees de oplossing van deze vergelijking af uit de grafiek. Welk jaartal hoort bij deze oplossing?

c Bepaal met behulp inklemmen de juiste waarde van t in gehele jaren nauwkeurig en het bijbehorende jaartal.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- exponentieel verband — groeifactor
- groeipercentage
- formule voor exponentiële groei
- formule voor exponentieel verval
- exponentiële vergelijking

Activiteitenlijst

- groei met een vaste groeifactor leren kennen en die groeifactor bepalen vanuit een tabel;
- groeifactoren en groeipercentages naar elkaar omrekenen;
- formules voor exponentiële groei opstellen en daar grafieken bij tekenen;
- formules voor exponentieel verval opstellen en daar grafieken bij tekenen;
- exponentiële vergelijkingen oplossen door aflezen uit grafieken en inklemmen.

Opgave 6.1

Lineaire of exponentiële groei?

a Het aantal vlinders neemt jaarlijks met 1,01% toe.

A. lineaire groei
B. exponentiële groei

b De afstand van een vliegtuig tot de kust neemt toe met 1000 kilometer per uur.

A. lineaire groei
B. exponentiële groei

c Jeannette breit een sjaal. Elk uur komt er 10 centimeter bij.

A. lineaire groei
B. exponentiële groei

d Het aantal insecten neemt toe met 5% per dag.

A. lineaire groei
B. exponentiële groei

Opgave 6.2

Welke groeifactor hoort bij het groeipercentage of omgekeerd? Geef exacte antwoorden.

a groeipercentage 18,8%

b groeifactor 1,032

c groeipercentage 3,9%

d groeifactor 3,9

e groeipercentage 35%

f groeifactor 1,04

g groeipercentage 5,5%

h groeifactor 1,645

Opgave 6.3

In de beginperiode van een griepepidemie groeit het aantal ziektegevallen exponentieel. In een dichtbevolkte stad worden in de eerste week van februari 4623 ziektegevallen gemeld. Na een week zijn er 7166 ziektegevallen.

a Hoe groot is de groeifactor per week? Rond af op twee decimalen.

b Stel een bijpassende formule op voor het aantal ziektegevallen Z afhankelijk van de tijd t in weken. Neem $t = 0$ voor de eerste week van februari.

c Bereken het aantal ziektegevallen in de eerste week van maart als de ziekte zich in dit tempo uitbreidt.

d Bereken de groeifactor voor een tijdsperiode van vier weken. Rond af op twee decimalen.

Opgave 6.4

Levende planten nemen uit de atmosfeer radioactieve koolstof C14 op. Als een plant sterft, verdwijnt de C14 langzaam uit de plant. Van fossiele planten kan de ouderdom worden bepaald door te meten hoeveel procent radioactieve koolstof is overgebleven.

Stel een formule op voor C (het percentage C14 dat overgebleven is) afhankelijk van de tijd t in periodes van 1000 jaar. Per millennium verliest de plant 1,2% C14.

Opgave 6.5

Gegeven zijn de vergelijkingen $y_1 = 137 \cdot 1{,}27^t$ en $y_2 = 289 + 55 \cdot t$.

a Teken y_1 en y_2 in één assenstelsel en schat de oplossing van de vergelijking $y_1 = y_2$.

b Los de vergelijking op met een inklemtabel. Rond af op één decimaal.

Testen

★ Opgave 6.6

Op 1 januari 2000 leven er in een bepaald dorp in Afrika ongeveer 5000 ratten. Het aantal ratten neemt elk half jaar met 30% toe.

a Hoe groot is de groeifactor per half jaar?

b Geef een formule voor het aantal ratten A en de tijd t in halve jaren na 1 januari 2000.

c Bereken hoeveel ratten er waren op 1 januari 2001. Rond af op tientallen.

d Bereken met hoeveel procent het aantal ratten op 1 januari 2001 is toegenomen ten opzichte van 1 januari 2000.

★ Opgave 6.7

Een fabrikant heeft van een nieuw product het eerste jaar 600 stuks verkocht en het tweede jaar 120 stuks meer. Neem S voor het aantal stuks dat verkocht wordt en t voor de tijd in jaren met $t = 0$ voor het eerste jaar.

a Hoeveel stuks zal hij in het derde jaar verkopen als deze groei zich voortzet?

b Geef de formule die bij deze groei hoort. Gaat het om lineaire of exponentiële groei?

c Met hoeveel procent is de verkoop in het tweede jaar toegenomen?

De verkoop van het nieuwe product blijkt exponentieel door te groeien met het percentage dat je bij c hebt gevonden.

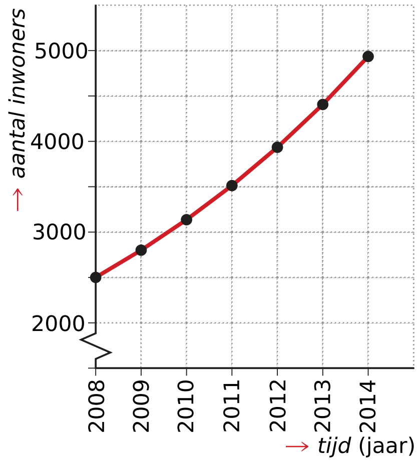
d Maak een bijpassende tabel en grafiek. Rond de uitkomsten af op een geheel getal.

e Schat met behulp van de grafiek op welk moment het aantal verkochte producten de 3000 overstijgt. Geef je antwoord in maanden nauwkeurig.

★ **Opgave 6.8**

Bekijk de grafiek van een exponentieel verband. De grafiek hoort bij de groei van het aantal inwoners van een dorpje een aantal jaren geleden.

Stel de formule op die bij de grafiek hoort.



Figuur 6.1

★ **Opgave 6.9**

De populatie van het bedreigde diersoort A bestond in 2008 nog uit 25000 exemplaren. De populatie nam vanaf dat moment met 8% per jaar af.

a Geef de formule voor het verloop van de populatie A afhankelijk van de tijd t in jaar na 2008.

b Teken de grafiek voor het verloop van de populatie gedurende de eerste twintig jaar.

c Lees uit de grafiek af na hoeveel jaar de populatie op deze manier is gehalveerd.

d Bepaal met een inklemtabel de gehele waarde van t waarin de populatie is gehalveerd.

★ **Opgave 6.10**

Natasja koopt een huis voor € 440000 en sluit een hypotheek af. Zij lost elk jaar 15% van deze hypotheek af.

a Geef de formule voor het verloop van de hypotheekschuld H afhankelijk van de tijd t in jaar na het afsluiten van de hypotheek.

b Bereken de hypotheekschuld na 25 jaar.

★ **Opgave 6.11**

Gegeven zijn $y_1 = 4 \cdot 1{,}15^t$ en $y_2 = 10$.
Los $y_1 = y_2$ op met inklemmen. Rond t af op één decimaal.

★ ★ **Opgave 6.12**

Tijdens het broedseizoen neemt het aantal vogels V wekelijks met 9,5% toe.

Bepaal na hoeveel weken het aantal vogels is verdubbeld.

Toepassen

★ ★ **Opgave 6.13: Noordpoolijs**

In de krant stond begin van deze eeuw het volgende artikel:

a Laat met een berekening zien dat tussen 1975 en 2005 de gemiddelde afname van het ijsoppervlak 0,055 miljoen vierkante kilometer per jaar was.

b Stel dat het ijsoppervlak tussen 1975 en 2005 lineair afnam en dat dit daarna zo zou blijven doorgaan. Bereken in welk jaar het ijsoppervlak dan verdwenen zou zijn. Schrijf je berekening op.

In werkelijkheid was de afname niet lineair, maar exponentieel. In een tweede artikel stond:

c Klopt dat ongeveer met de getallen in het eerste artikel? Laat met een berekening zien hoe je aan je antwoord komt.

Noordpoolijs
De ijskap op de Noordpool is in de afgelopen honderd jaar nog nooit zo klein geweest. Als er geen maatregelen worden genomen zal de komende jaren het ijsoppervlak steeds sneller afnemen. Volgens onderzoekers was op 1 september 1975 het ijsoppervlak 7 miljoen vierkante kilometer. Op 1 september 2005 was dit nog maar 5,35 miljoen vierkante kilometer.

Tussen 1975 en 2005 is het ijsoppervlak elke 10 jaar met 8% afgenomen.

De onderzoekers denken dat het ijsoppervlak vanaf 2005 afneemt volgens de volgende formule:

$N = 5{,}35 \cdot 0{,}975^t$

Hierbij is N het ijsoppervlak in miljoenen vierkante kilometers en t de tijd in jaren na 1 september 2005.

d Na 50 jaar zal het ijsoppervlak volgens deze formule ongeveer 1,5 miljoen vierkante kilometer zijn. Bereken na hoeveel jaar het ijsoppervlak volgens deze formule voor het eerst kleiner zal zijn dan 1 miljoen vierkante kilometer. Schrijf je berekening op.

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		★	★ ★	★ ★ ★
1	**Groeifactoren**	★	★ ★	★ ★ ★
	Herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ 1.5 ☐ 1.6 ☐ T 6.7 ☐	1.7 ☐	1.8 ☐
	Bij exponentiële groei de groeifactor per tijdseenheid afleiden uit de gegevens en daarmee verder rekenen.	1.3 ☐ 1.4 ☐ 1.5 ☐ 1.6 ☐ T 6.6 ☐ T 6.7 ☐	1.7 ☐	1.8 ☐
2	**Groeipercentages**	★	★ ★	★ ★ ★
	De groeifactor bepalen bij een procentuele toename en omgekeerd.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ 2.4 ☐ T 6.6 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐	2.5 ☐ 2.6 ☐ 2.7 ☐	2.8 ☐
	Groeifactoren omrekenen naar grotere tijdstappen.	2.1 ☐ 2.3 ☐ 2.4 ☐ T 6.10 ☐	2.5 ☐ 2.6 ☐ 2.7 ☐	2.8 ☐
3	**Exponentiële groei**	★	★ ★	★ ★ ★
	Formules opstellen bij exponentiële groei en daarmee rekenen.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ 3.5 ☐ T 6.6 ☐ T 6.7 ☐ T 6.8 ☐	3.6 ☐ 3.7 ☐	
	Grafieken tekenen bij exponentiële groei en daar conclusies uit trekken.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.4 ☐ 3.5 ☐ T 6.7 ☐	3.6 ☐ 3.7 ☐	
4	**Exponentieel verval**	★	★ ★	★ ★ ★
	Formules opstellen bij exponentieel verval en daarmee rekenen.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.4 ☐ 4.5 ☐ 4.6 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐	4.7 ☐ T 6.13 ☐	
	Grafieken maken bij exponentieel verval en er conclusies uit trekken.	4.3 ☐ 4.5 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐	4.7 ☐ T 6.13 ☐	
5	**Exponentiële vergelijkingen**	★	★ ★	★ ★ ★
	Vergelijkingen bij exponentiële verbanden oplossen door inklemmen.	5.1 ☐ 5.2 ☐ 5.3 ☐ T 6.11 ☐	5.4 ☐ 5.6 ☐ T 6.12 ☐ T 6.13 ☐	5.5 ☐

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

www.math4all.nl

Informatieblad bij Opdracht 1.2

Dit is een tabel met het aantal konijnen a in een natuurgebied afhankelijk van de tijd t in jaren.

Ga ervan uit dat $t = 0$ overeenkomt met 1 januari 2012 en er éénmaal per jaar wordt gemeten.

tijd t (jaar)	0	1	2	3	4
aantal konijnen a	122	134	147	162	178

Informatieblad bij Opdracht 1.3

Thomas Robert Malthus (1766—1834) beschouwde de toename van de wereldbevolking als exponentiële groei. Dit klopt niet helemaal want de groeifactoren tussen verschillende decennia verschillen een beetje. Ga hier toch, net als Malthus, uit van exponentiële groei.

In de tabel staan gegevens over de bevolkingsgroei in de negentiende eeuw.

tijd (jaar)	*bevolking* (miljoen)
1800	1000
1810	1050
1820	1102
1830	1158
1840	1216
1850	1276
1860	1340
1870	1407
1880	1477

Bereken de groeifactor per decennium (10 jaar) voor de periode tussen 1800 en 1880.
Bereken daarmee de grootte van de wereldbevolking in 1900 en in 2000. Rond af op miljoenen mensen. Komt je antwoord overeen met de werkelijkheid?

Informatieblad bij Opdracht 2.1

Reken de groeifactor per tijdseenheid om naar het groeipercentage per dezelfde tijdseenheid en omgekeerd.

- Groeipercentage 6% geeft groeifactor ...
- Groeifactor $1,13\%$ geeft groeipercentage ...
- Groeipercentage $0,6\%$ geeft groeifactor ...
- Groeifactor $1,003\%$ geeft groeipercentage ...
- Groeipercentage 60% geeft groeifactor ...
- Groeifactor $1,35\%$ geeft groeipercentage ...
- Groeipercentage 100% geeft groeifactor ...
- Groeifactor 3% geeft groeipercentage ...

Informatieblad bij Opdracht 2.2

In 1972 verschijnt het ‘Rapport van de Club van Rome’. De meeste mensen trekken zich echter weinig van de sombere toekomstvoorspellingen aan. Malthus heeft een eeuw eerder immers ook geen gelijk gekregen! Daarom brengt de Club in 1992 een nieuw rapport uit, waarin de eerste voorspellingen worden vergeleken met de werkelijke bevolkingsgroei. De wereldbevolking blijkt in 1992 met 1,7% per jaar toe te nemen. Die groei is niet in alle delen van de wereld gelijk.

werelddeel	groei per jaar	aantal inwoners in 1992
Amerika	1,4%	741481000
Europa	0,2%	794023000
Azië	1,5%	3239530000
Afrika	2,7%	664439000
Oceanië	1,4%	124233000

Informatieblad bij Opdracht 4.1

Deze tabel gaat over het aantal dieren van een bepaalde soort in het wild.

Jaar	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Aantal dieren	4450	3961	3525	3137	2792	2485	2212	1968	1752