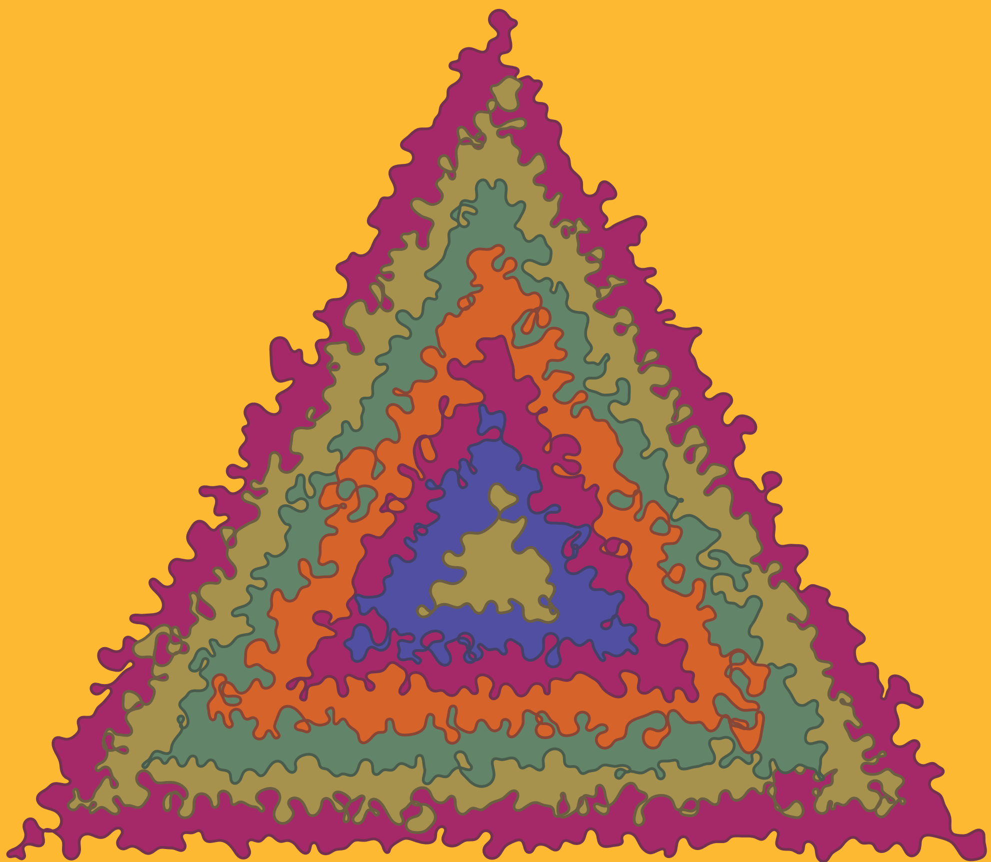
Wiskunde / PGA

2 HAVO / VWO / docentmateriaal

Kwadratische verbanden

ConTeXt College



Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je begeleidt dan als docent de leerlingen die in kleine groepjes aan wiskundige problemen werken en op die manier een eigen theoretisch kader opstellen. Dit gebeurt voornamelijk op de wijze die wordt beschreven in het boek *Building Thinking Classrooms in Mathematics* van Peter Liljedahl. Dit boek is ook in het Nederlands beschikbaar. Het is verstandig om dit boek vooraf door te werken, maar je kunt ook beginnen met deze **beknopte handleiding**.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee de leerling kan nagaan of de stof wordt beheersd. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding staat in de marge naast de opgave.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die de leerling alleen hoeft te maken als er genoeg tijd voor is
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die een leerling alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk was

In de bijlage staat een “**Leerdoelentabel**” waarin staat aangegeven door welke opgave het specifieke leerdoel wordt afgedekt en op welk niveau dit gebeurt. Als je deze tabel aan de leerlingen uitreikt, kunnen ze hun eigen vorderingen bijhouden.
Opgaven uit de samenvattende paragraaf *Totaalbeeld* worden voorafgegaan door een T.

1

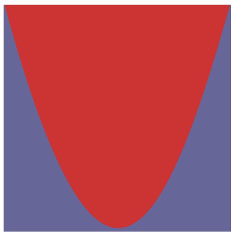
Kwadratische verbanden

1.1 Kwadratische verbanden

Inleiding

Dit is een kenmerkende gebogen vorm. In sommige bouwwerken kom je dergelijke bogen tegen. Je spreekt van een parabool, van het Griekse παραβολή, wat ‘vergelijking’ betekent.

Ook in de sport kom je (bij benadering, vanwege de luchtweerstand) parabolen tegen in de banen van voorwerpen die worden geworpen, getrapt, of afgeschoten. Maar dan meestal ondersteboven...



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- herkennen dat een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband beschrijft en daaruit de top en de vorm van grafiek van de bijbehorende parabool (berg- of dalparabool) afleiden;
- grafieken bij kwadratische verbanden tekenen en die gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- formules en grafieken bij recht evenredige, lineaire, omgekeerd evenredige en hyperbolische verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Kwadratische verbanden’ maken de leerlingen kennis met de grafieken die horen bij een kwadratisch verband. Zo'n ‘parabool’ heeft een top die uit de formule is af te lezen als die de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ heeft. De waarde van a bepaalt of het een dalparabool of een bergparabool betreft. Je geeft de opdrachten mondeling.

Het volgende onderdeel ‘Kwadratische vergelijkingen’ kan worden gekoppeld aan dit onderdeel als er groepjes zijn die al proberen om de derde opdracht op te lossen met een vergelijking. De eerste opdracht van het volgende onderdeel sluit daar naadloos op aan.

Gewenste materialen:

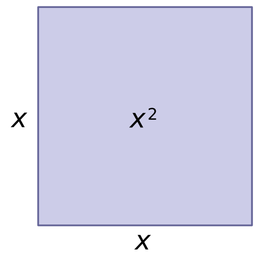
- Schrijfmateriaal en roosterpapier voor op de verticale werkvlakken.
- Bij de tweede en desgewenst de derde opdracht is een digibord nodig waarop je de applet kunt laten zien. Vanuit de docent-pdf is die applet de activeren.

Opdracht 1.1

Een voorbeeld van een kwadraat is de oppervlakte van een vierkant. Als de zijde een lengte x heeft, is de oppervlakte y gegeven door $y = x^2$.

Teken een grafiek bij deze formule. Neem voor x ook negatieve getallen (al kan dat voor de zijde van een vierkant natuurlijk niet). De grafiek die je krijgt heet ‘parabool’. Laat met voorbeelden zien dat de grafiek echt overal krom is.

Laat met een berekening zien bij welke waarden voor x de y-waarden groter dan 50 zijn.



Figuur 1.2

Toelichting

Geef de opdracht mondeling, eventueel in twee stappen.

Eventuele hulpvragen: “Hoe bereken je een kwadraat?” en “Is het kwadraat van een negatief getal negatief of positief?”. Bij het uitleggen dat de grafiek krom is kun je als hulpvragen stellen: “Welk punt van de grafiek krijg je als $x = 2{,}5$?” en “Klopt dit met een recht lijnstukje tussen de punten op de grafiek voor $x = 2$ en $x = 3$?”. En bij het oplossen van $y > 50$: “Hoe reken je terug vanuit een kwadraat?” en “Hoe houd je daarbij rekening met negatieve getallen?”.

Bespreek dat na afloop (hopelijk heeft minstens één groepje een echte redenering op de werkplek staan, die heb je dan wel even aangeduid als belangrijk). Laat verder de termen ‘kwadratisch verband’, ‘parabool’, ‘symmetrieas’ en ‘kwadratische vergelijking’ vallen.

Uitwerking

Neem in $y = x^2$ voor x de waarden -5, -4, ..., 5 en bereken de y-waarden. Maak een nette tabel en teken de parabool.

Hopelijk vragen de groepjes zichzelf af waarom je hier niet gewoon de punten uit de tabel door (rechte) lijnstukjes met elkaar verbindt.

Je kunt nagaan dat dit niet klopt met de waarden voor de tussenpunten. Bijvoorbeeld bij $x = 2{,}5$ hoort $y = 2{,}5^2 = 6{,}25$. Trek je een recht lijnstukje tussen (2,4) en (3,9), dan zit halverwege het punt (2,5; 6,5) en klopt bij $x = 2{,}5$ de waarde van y (namelijk 6,5) niet met de waarde volgens de formule.

Dit kun je voor veel meer punten in de grafieken uitrekenen en vergelijken!

$y = x^2 = 50$ geeft $x = \pm\sqrt{50}$. De grafiek laat zien: $x < -\sqrt{50}$ en/of $x > \sqrt{50}$.

Opdracht 1.2

Bekijk de applet

Laat met deze applet op je digibord zien wat er met de parabool gebeurt als je a, p en q aanpast. Benoem de woorden ‘top’, ‘dalparabool’ en ‘bergparabool’, maar ga niet uitleggen wat dit voor a, p en q betekent, laat ze dit zelf uitpluizen.

1. $y = -x^2$
2. $y = 0{,}5x^2$
3. $y = 0{,}5(x-3)^2$
4. $y = -0{,}5(x-3)^2$
5. $y = 0{,}5(x-3)^2 + 1$
6. $y = -0{,}5(x-3)^2 + 8$
7. Leg uit, hoe je uit de kwadratische formule de top van de parabool afleest, hoe je ziet of het een dal- of een bergparabool is en hoe je dan de grafiek maakt.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en vervolgens in zeven stappen. Meld vooraf dat ze hun grafieken allemaal moeten laten staan om ze na afloop te kunnen vergelijken.

Eventuele hulpvragen bij de laatste opdracht: “Wat valt op als je de grafieken vergelijkt?”, “Heb je bij elke grafiek de top al opgeschreven?” en “Waaraan zie je dat er sprake is van een bergparabool?”.

Bespreek nog even na afloop hoe je nu bij een gegeven kwadratisch verband $y = a(x-p)^2 + q$ een grafiek maakt (eerst top aflezen en dal/bergparabool bepalen, dan tabel maken rond de top). En bespreek ook hoe die grafiek door verschuiven en vermenigvuldigen kan ontstaan uit die van $y = x^2$.

Uitwerking

De grafiek van het kwadratische verband $y = a(x-p)^2 + q$ is een dalparabool als $a > 0$, een bergparabool als $a < 0$ en heeft als top (p,q). De grafiek krijg je door een tabel te maken rond de top.

Opdracht 1.3

Bekijk de applet: tennisbal

Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies over de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog. Door in de applet de groene punt te bewegen zie je de baan van de bal ontstaan.

De tennisser slaat de bal terug via een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule $h = -0{,}01 \cdot (x - 10)^2 + 1{,}5$. Hierin is x de horizontale afstand die de bal heeft afgelegd ten opzichte van het tenniskanon en h de hoogte van de tennisbal, beide in meter.

Teken de baan van de bal en bepaal met de grafiek waar de bal hoger dan 1 m boven de grond zit.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en werk met de applet op je digibord. Schrijf de formule eventueel op.

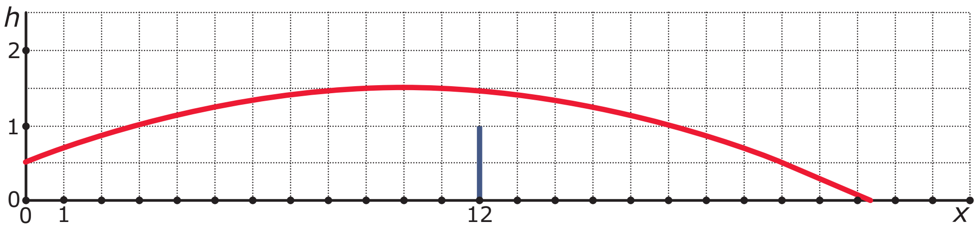
Mogelijke hulpvragen: “Heb je de top van de parabool uit de formule afgelezen?”, “Is het een dal- of een bergparabool?”, “Hoe maak je nu een handige tabel?” en “Hoe bepaal je welke punten 1 m boven de grond zitten?”.

Wellicht zijn er groepjes die werken met de vergelijking $-0{,}01 \cdot (x - 10)^2 + 1{,}5 = 1$ en al bedenken dat je die kunt oplossen door terugrekenen. Dat is onderwerp van het volgende onderdeel. Eventueel kun je dat tweede onderdeel dus al meteen hieraan koppelen.

Uitwerking

De top van de bergparabool is $(10; 1{,}5)$.

Maak een tabel en je vindt deze grafiek.



Figuur 1.3

Teken in de grafiek van h een lijn op hoogte van $h = 1$.

Je ziet dat beide grafieken elkaar op twee plaatsen snijden. De x-coördinaten van deze snijpunten zijn de oplossingen van deze vergelijking.

Ga na dat de oplossingen zijn: $x \approx 3$ en $x \approx 17$.

Opdracht 1.4

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over ‘kwadratische verbanden’. Het gaat om het tekenen van grafieken bij formules van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$, die grafieken heten dal/bergparabolen. Je leert uit deze formule de top van de parabool af te lezen opdat je er een handige tabel bij kunt maken.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

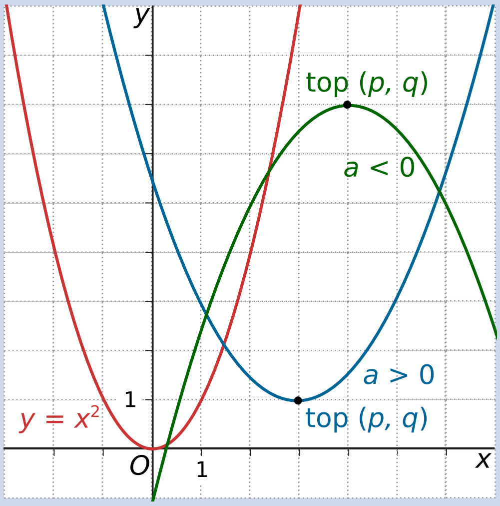
Bekijk de applet

In het algemeen beschrijft een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband en is de bijbehorende grafiek een **parabool** met **top** (p, q). De waarde van a bepaalt of er sprake is van een bergparabool of een dalparabool: als $a > 0$ dan is de grafiek een **dalparabool**, als $a < 0$ dan is de grafiek een **bergparabool**.

Deze formule heet een **kwadratisch verband**, omdat de onbekende x wordt gekwadrateerd.

Alle grafieken van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ kunnen ontstaan uit die van $y = x^2$.

Daarvoor moet de grafiek eerst p horizontaal (evenwijdig aan de x-as) verschuiven, daarna moeten de uitkomsten allemaal met a vermenigvuldigd worden en ten slotte wordt de grafiek q omhoog (evenwijdig aan de y-as) verschoven.



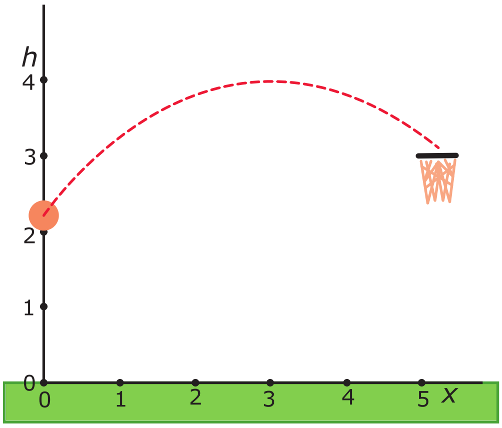
Figuur 1.4

Verwerken

★ Opgave 1.1

Een basketballer gooit de bal precies in de basket. De baan van het middelpunt van de bal is (bij benadering) een deel van een parabool.

Je ziet in de figuur dit deel van de parabool in een assenstelsel. Zowel x als h worden in meter uitgedrukt. Bij de parabool hoort de formule: $h = -0{,}2 \cdot (x - 3)^2 + 4$



Figuur 1.5

a Op het moment dat de speler de bal loslaat, is $x = 0$. Je kunt in de figuur de hoogte die daarbij hoort schatten. Bereken met behulp van de formule de precieze hoogte waarop de bal wordt losgelaten. Het gaat daarbij om het middelpunt van de bal.

b Bereken de coördinaten van het hoogste punt van de parabool.

c Teken nu zelf de baan van (het middelpunt van) de bal. Maak eerst een geschikte tabel. De ring van de basket hangt op 3 m boven de grond. De speler scoort, want het middelpunt van de bal gaat door het midden van deze ring. Laat de baan stoppen bij het middelpunt van de ring.

d Op hoeveel meter voor de basket laat deze speler de bal los?

★ Opgave 1.2

Je ziet een aantal kwadratische formules.

Geef bij elke formule:

- de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool;
- de symmetrieas;
- of het een dalparabool of een bergparabool is;
- hoe de grafiek ontstaat uit die van $y = x^2$.

a $y = (x - 6)^2 + 1$

b $y = -2(x + 1)^2$

c $y = 100 - 0{,}01(x - 10)^2$

d $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$

★ Opgave 1.3

Een vuistregel voor de remweg van een motor is $R = \frac{v^2}{16}$. Hierin is R de remweg in m en v de rijsnelheid in m/s.

a Boris rijdt op een motor met een snelheid van 90 km/uur. Hoe lang is zijn remweg?

b Teken een grafiek bij deze formule. Maak eerst een tabel met voor v de waarden 0, 10, 40.

c Even later moet Boris remmen, zijn remweg is 65 m. Je wilt weten hoe hoog zijn snelheid was. Welke vergelijking moet je dan oplossen?

d Los de in c bedoelde vergelijking op met behulp van de grafiek. Hoe hoog was Boris' snelheid in km/uur?

e Je kunt de in c bedoelde vergelijking ook oplossen zonder de grafiek te gebruiken. Laat zien hoe.

★ **Opgave 1.4**

Bekijk de formule $y = 0{,}5(x + 1{,}5)^2 - 3$.

a Er bestaat een kwadratisch verband tussen x en y. Waaraan zie je dat?

b Maak een geschikte tabel en teken de grafiek die bij deze formule hoort. Hoe heet zo'n grafiek?

c Welke symmetrieas heeft de grafiek?

d Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $0{,}5(x + 1{,}5)^2 - 3 = 1{,}5$? Bepaal de oplossing(en) met behulp van je grafiek.

e Controleer de oplossing(en).

f Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $0{,}5(x + 1{,}5)^2 - 3 = -5$?

★ **Opgave 1.5**

Je wilt de vergelijking $(x - 2)^2 = 7{,}25 - 1{,}75x$ oplossen.

a Teken een grafiek waaruit je de oplossing(en) kunt aflezen.

b Bepaal de oplossing(en) van de gegeven vergelijking.

c Controleer je antwoord door invullen.

★ ★ **Opgave 1.6**

Een bergparabool heeft in een xy-assenstelsel het punt (4,10) als top en gaat door het punt (0,6).

Stel voor deze parabool een formule op.

Toepassen

Een beroemde hangbrug is de **Golden Gate Bridge** in San Francisco. De rijbanen zijn met tuidraden opgehangen aan twee staalkabels die tussen de twee torens van de brug hangen. Die staalkabels (met een diameter van 92,7 cm) hangen in de vorm van een parabool.

Figuur 1.6

De afstand tussen beide torens bedraagt 1280 m en de staalkabels zijn ongeveer 152 m boven het wegdek bevestigd. Neem aan dat het wegdek recht is. Kies je de y-as midden tussen de torens en de x-as op het wegdek, dan geldt voor de paraboolvorm van de staalkabels de formule

$$y = \frac{149}{409600}x^2 + 3$$

Hierin is x in m en y de hoogte van de staalkabel boven de x-as.

★ ★ **Opgave 1.7: Golden Gate Bridge**

Je ziet in **Toepassen** welke formule je kunt opstellen voor de staalkabels waaraan een brug als de Golden Gate Bridge hangt.

Ga er in deze opgave van uit dat de dikte van de staalkabels verwaarloosbaar is.

a Laat door berekening zien dat de hoogte waarop de staalkabels zijn opgehangen volgens de formule inderdaad 152 m boven het wegdek is.

b Hoe hoog boven de x-as zit het laagste punt van deze kabel?

Je kunt nu met behulp van de formule voor de parabool de lengtes berekenen van alle tuidraden van één staalkabel tussen beide torens. Deze 84 tuidraden zitten op 15 m afstand van elkaar aan het wegdek vast. De dikte van deze tuidraden wordt buiten beschouwing gelaten. De twee kortste tuidraden zijn even lang.

c Bereken de lengte van de twee kortste tuidraden in het midden in twee decimalen nauwkeurig.

d Bereken de lengte van de twee langste tuidraden in m nauwkeurig.

★ ★ ★ Opgave 1.8: Eerste en tweede verandering

Bij een lineair verband zie je per eenheid waarmee de x-waarde oploopt ook de y-waarde met steeds hetzelfde getal groter of kleiner worden: er is een constante verandering per eenheid (de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende lijn).

a Vul bij de lineaire formule $y = 2x + 5$ deze tabel in en ga na dat de verandering constant is.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y							
verandering							

Tabel 1.1

Bij een kwadratisch verband moet je naar de verandering der veranderingen kijken om net zo'n regelmaat te vinden. Je noemt dit wel de tweede verandering. Bij elk kwadratisch verband is de tweede verandering constant.

b Vul bij de kwadratische formule $y = 2x^2 + 5$ deze tabel in en ga na dat de verandering der veranderingen constant is.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y							
verandering							
tweede verandering							

Tabel 1.2

c Ga nu met behulp van de tweede verandering na dat $y = (x + 2)(x - 3)$ een kwadratisch verband beschrijft.

Practicum

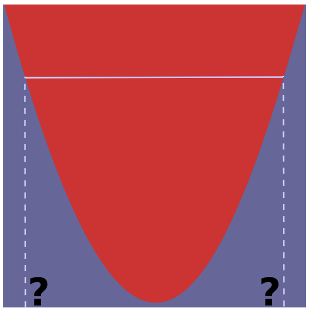
Gebruik de applet.

Bedenk een kwadratisch verband zoals $y = -0{,}5(x - 3)^2 + 4$.
Bepaal eerst zelf de top en de symmetrieas en maak een goede tabel en grafiek. Controleer met de applet.

1.2 Terugrekenen

Inleiding

Ook bij kwadratische verbanden wil je vaak weten welke invoerwaarden er bij bepaalde uitkomsten horen. Tot nu toe deed je dat met behulp van grafieken. Maar er bestaan ook rekentechnieken voor. Je hebt daar al eerder kennis mee gemaakt.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen van de vorm $a \cdot (x-p)^2 + q = c$ oplossen door terugrekenen of de balansmethode;
- kwadratische vergelijkingen gebruiken om (een) snijpunt(en) te bepalen.

Voorkennis

- herkennen dat een formule van de vorm $y = a \cdot (x-p)^2 + q$ een kwadratisch verband beschrijft en daaruit de top en de vorm van grafiek van de bijbehorende parabool (berg- of dalparabool) afleiden;
- grafieken bij kwadratische verbanden tekenen en die gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode en terugrekenen (dus ook worteltrekken).

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Kwadratische vergelijkingen’ maken de leerlingen kennis met het oplossen van vergelijkingen met kwadratische verbanden erin. Vooralsnog gaat het alleen om vergelijkingen die zijn op te lossen met behulp van terugrekenen en/of de balansmethode. Het bedenken dat bij terugrekenen vanuit een kwadraat (worteltrekken) nul, één, of twee mogelijke antwoorden tevoorschijn komen is daarbij belangrijk. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal en roosterpapier voor op de verticale werkvlakken.
- Bij de eerste opdracht is een digibord nodig waarop je de applet kunt laten zien. Vanuit de docent-pdf is die applet de activeren.

Opdracht 2.1

Bekijk de applet: tennisbal

Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies over de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog. Door in de applet de groene punt te bewegen zie je de baan van de bal ontstaan.

De tennisser slaat de bal terug via een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule $h = -0{,}01 \cdot (x-10)^2 + 1{,}5$. Hierin is x de horizontale afstand die de bal heeft afgelegd ten opzichte van het tenniskanon en h de hoogte van de tennisbal, beide in meter.

Bereken met behulp van een vergelijking waar de bal hoger dan 1 m boven de grond zit. Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Bereken met behulp van een vergelijking waar de bal op de grond komt, het ‘nulpunt van de formule’. Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in twee stappen werk met de applet op je digibord. Schrijf de formule eventueel op.

Mogelijke hulpvragen: “Welke vergelijking hoort er bij de vraag?”, “Hoe kun je de balansmethode (die je eerder hebt geleerd) gebruiken?”, “Kun je ook terugrekenen?” en “Hoe reken je terug uit een kwadraat?”.

Koppel deze opdracht aan de laatste opdracht van het voorgaande onderdeel. Bespreek na afloop het terugrekenen vanuit een kwadraat en het terugrekenen in het algemeen en zet dit naast het gebruik van de balansmethode. Laat groepjes benoemen wat ze wanneer gebruikt hebben. Bespreek bij de tweede opdracht de term ‘nulpunt’.

Uitwerking

Bij de eerste opdracht is de vergelijking: $-0{,}01 \cdot (x-10)^2 + 1{,}5 = 1$.

Dit kan met terugrekenen en/of de balansmethode.

$$\begin{aligned}
-0{,}01 \cdot (x-10)^2 + 1{,}5 &= 1 && \text{beide zijden } -1{,}5\\
-0{,}01 \cdot (x-10)^2 &= -0{,}5 && \text{beide zijden delen door } -0{,}01\\
(x-10)^2 &= 50 && \text{beide zijden worteltrekken}\\
x-10 &= \pm\sqrt{50} && \text{beide zijden } +10\\
x &= 10 \pm \sqrt{50}
\end{aligned}$$

De exacte oplossing is $x = 10 - \sqrt{50} \vee x = 10 + \sqrt{50}$. Het teken $\vee$ wordt gebruikt voor ‘en/of’.

In cm nauwkeurig: $x \approx 2{,}93 \vee x \approx 17{,}07$.

Bij de tweede opdracht is de vergelijking: $-0{,}01 \cdot (x-10)^2 + 1{,}5 = 0$.

Ook dit kan met terugrekenen en/of de balansmethode.

$$\begin{aligned}
-0{,}01 \cdot (x-10)^2 + 1{,}5 &= 0 && \text{beide zijden } -1{,}5\\
-0{,}01 \cdot (x-10)^2 &= -1{,}5 && \text{beide zijden delen door } -0{,}01\\
(x-10)^2 &= 150 && \text{beide zijden worteltrekken}\\
x-10 &= \pm\sqrt{150} && \text{beide zijden } +10\\
x &= 10 \pm \sqrt{150}
\end{aligned}$$

De exacte oplossing is $x = 10 - \sqrt{150} \vee x = 10 + \sqrt{150}$. Het teken $\vee$ wordt gebruikt voor ‘en/of’.

In cm nauwkeurig: $x \approx -2{,}25 \vee x \approx 22{,}25$ (het eerste antwoord vervalt, bij het tweede zie je dat de bal nog net ‘in’ is).

Opdracht 2.2

Los de volgende kwadratische vergelijkingen op de handigste manier op:

1. $1{,}5(x-4)^2 - 4 = 5$
2. $0{,}5x^2 + 1 = 5{,}5$
3. $8 - x^2 = 3$
4. $4{,}5x^2 = 50 - 0{,}5x^2$
5. $0{,}5 \cdot (x-4)^2 + 3 = 11$

6. $6 - (x + 2)^2 = 0$
7. $2{,}5(x + 1)^2 + 5 = 5$
8. $2{,}5(x + 1)^2 + 5 = 0$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en vervolgens in acht stappen.

Bespreek nog even na afloop het gebruik van het teken $\vee$ en waarom er soms maar één of helemaal geen oplossingen zijn. Mooi is om dit bij de laatste twee opdrachten te koppelen aan de grafiek van $y = 2{,}5(x + 1)^2 + 5$ (een schets is genoeg).

Uitwerking

1. $1{,}5(x - 4)^2 - 4 = 5$ geeft $(x - 4)^2 = 6$ en dus $x = 4 - \sqrt{6} \vee x = 4 - \sqrt{6}$.
2. $0{,}5x^2 + 1 = 5{,}5$ geeft $x^2 = 9$ en dus $x = -3 \vee x = 3$.
3. $8 - x^2 = 3$ geeft $x^2 = 5$ en dus $x = \pm\sqrt{5}$.
4. $4{,}5x^2 = 50 - 0{,}5x^2$ geeft $x^2 = 10$ en dus $x = \pm\sqrt{10}$.
5. $0{,}5 \cdot (x - 4)^2 + 3 = 11$ geeft $(x - 4)^2 = 16$ en dus $x = 0 \vee x = 8$.
6. $6 - (x + 2)^2 = 0$ geeft $(x + 2)^2 = 6$ en dus $x = -2 + \sqrt{6} \vee x = -2 - \sqrt{6}$.
7. $2{,}5(x + 1)^2 + 5 = 5$ geeft $(x + 1)^2 = 0$ en dus $x = -1$.
8. $2{,}5(x + 1)^2 + 5 = 0$ geeft $(x + 1)^2 = -2$ en dus geen reële oplossingen.

Opdracht 2.3

Met de vergelijking $x^2 = (x + 3)^2$ bereken je het snijpunt van twee parabolen.

Laat dat zien en bereken dit snijpunt door de vergelijking op te lossen.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling. Schrijf de vergelijking eventueel op.

Mogelijke hulpvragen: “Welk kwadratisch verband staat er aan de linkerkant van het isgelijkteken? En aan de rechterkant?”, “Kun je daar grafieken van tekenen/schetsen?”, “Waarom kun je deze vergelijking niet oplossen door terugrekenen?” en “Hoe kun je de balansmethode toepassen?”.

Er is een fraaie alternatieve oplossingsmethode:

$x^2 = (x + 3)^2$ geeft $x = x + 3 \vee x = -(x + 3)$.

De eerste vergelijking heeft geen oplossing, maar de tweede wel: $x = -x - 3$ geeft $2x = -3$ en $x = -1{,}5$.
(Heel mooi als die oplossing voorbij komt, of wil je zelf even laten zien hoe briljant je bent?)

Uitwerking

Het gaat om het berekenen van het snijpunt van $y_1 = x^2$ en $y_2 = (x + 3)^2$.

Maak de grafieken van beide functies en je ziet het snijpunt.

Gebruik daarna de balansmethode en werk eerst de haakjes weg:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= (x + 3)^2 && \text{haakjes wegwerken} \\
x^2 &= x^2 + 6x + 9 && \text{beide zijden } -x^2 \\
0 &= 6x + 9 && \text{beide zijden omwisselen en } -9 \\
6x &= -9 && \text{beide zijden delen door 6} \\
x &= -\frac{9}{6} = -1{,}5
\end{aligned}
$$

Controleer je oplossing door invullen. $x = -1{,}5$ geeft:

$(-1{,}5)^2 = (-1{,}5 + 3)^2$ en dus $2{,}25 = 2{,}25$.

Opdracht 2.4

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over ‘kwadratische vergelijkingen’. Het gaat om een eerste kennismaking met het oplossen van vergelijkingen met kwadratische verbanden en het gebruik van terugrekenen en/of de balansmethode daarbij.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Een **kwadratische vergelijking** van de vorm $a(x-p)^2+q=c$ kun je systematisch oplossen door **terugrekenen** (of met de balansmethode). Terugrekenen vanuit een kwadraat doe je met worteltrekken.
Zie **Voorbeeld 3**.

De oplossing bestaat vaak uit twee x-waarden. Je gebruikt dan het teken $\vee$ om aan te duiden dat de éne x-waarde en/of de andere x-waarde juist is.

De x-waarde van een punt van de parabool waarvoor geldt dat $y=0$ is heet een **nulpunt** van de parabool. Let op! Een nulpunt is een getal en dus geen punt met coördinaten.

Verwerken

★ Opgave 2.1

Bekijk de kwadratische formule $y = 0{,}5(x - 2)^2 + 3$.

a Bepaal de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool. Gaat het om een dal- of een bergparabool?

b Hoeveel nulpunten heeft deze parabool?

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oplossing van de vergelijking: $0{,}5(x - 2)^2 + 3 = 7$.

★ Opgave 2.2

Los de volgende vergelijkingen op. Geef exacte antwoorden.

a $(x + 15)^2 - 20 = 5$

b $4 - 2x^2 = 0$

c $2(x - 7)^2 + 15 = 21$

d $6 + 5x^2 = 3x^2 + 18$

e $8 - (x + 1)^2 = -8$

f $-0{,}05(x - 20)^2 + 100 = 0$

★ Opgave 2.3

De baan van een afgeschoten vuurpijl wordt bij benadering gegeven door $h = 33{,}5 - 0{,}5(x - 8)^2$. Hierin is h de hoogte in meter boven de begane grond en x de afstand van de plek waar de pijl werd afgeschoten tot het punt op de grond dat recht onder de vuurpijl zit. De vuurpijl spat nadat hij op zijn hoogste punt is geweest op 30 m hoogte uit elkaar.

a Op welke hoogte wordt de vuurpijl afgeschoten?

b Hoe hoog komt de vuurpijl maximaal? En bij welke waarde van x is dat?

c Bij welke waarde van x spat de vuurpijl uiteen? Geef je antwoord exact en in twee decimalen nauwkeurig.

★ Opgave 2.4

Los de vergelijkingen op. Geef exacte antwoorden.

a $(x + 5)^2 = x^2$

b $x^2 = 12x^2$

c $(x - 4)^2 = (x - 5)^2$

d $2x^2 + 5 = 1 - x^2$

★ Opgave 2.5

Een bioscoop heeft twee zalen met evenveel stoelen. In zaal I zijn er evenveel rijen stoelen als er stoelen in een rij zitten. In zaal II zijn er 8 rijen stoelen meer dan in zaal I, maar elke rij heeft 6 stoelen minder dan in zaal I. Hoeveel stoelen heeft elke zaal?

a Stel hierbij een passende vergelijking op.

b Los deze vergelijking op en geef antwoord op de vraag.

★ ★ **Opgave 2.6**

Acapulco in Mexico is onder andere beroemd om zijn 'cliff divers'. Dat zijn mensen die vanaf hoge kliffen het water in duiken. Het verband tussen de hoogte boven het water h en het aantal meters vooruit m kun je weergeven met de formule:

$h = 88 - 0{,}12m^2$

a Als je een bijpassende grafiek tekent, wat stelt dan het nulpunt (snijpunt met de m-as) voor?

b Vanaf welke hoogte springt de duiker vanaf de klif?

Je wilt weten hoeveel meter de duiker in totaal vooruit springt tot de plaats waar hij het water raakt. Dat is nuttig omdat zo'n klif vaak niet echt loodrecht naar beneden gaat.

c Welke vergelijking moet je oplossen?

d Los die vergelijking op en bereken hoeveel meter de duiker vooruit springt. Geef je antwoord in meters.

Figuur 2.2

Een andere duiker springt van een rots die 96 m hoog is en is op het moment dat hij het water raakt ongeveer 30 m vooruit gesprongen.

e Welke formule kun je voor zijn sprong opstellen als je ook nu van een kwadratisch verband tussen h en m uitgaat?

Toepassen

Je ziet weer de beroemde hangbrug de Golden Gate Bridge in San Francisco. De rijbanen zijn met tuidraden opgehangen aan twee staalkabels die tussen de twee torens van de brug hangen. Die staalkabels (met een diameter van 92,7 cm) hangen in de vorm van een parabool.

Figuur 2.3

De afstand tussen beide torens is 1280 m. En de afstand van het wegdek tot de bovenkant van de torens is ongeveer 152 m.

Neem aan dat het wegdek recht is. Kies je de y-as midden tussen de torens en de x-as op het wegdek, dan geldt voor de paraboolvorm van de staalkabels de formule:

$y = \frac{149}{409600}x^2 + 3$

Hierin is x de afstand tot het midden van de torens en y de hoogte van de staalkabel boven het wegdek, beide in meters.

Ga ervan uit dat de dikte van de staalkabels verwaarloosbaar is.

★ ★ **Opgave 2.7: Golden Gate Bridge**

Je ziet in **Toepassen** welke formule je kunt opstellen voor de staalkabels waaraan een brug als de Golden Gate Bridge hangt.

a Er zijn twee even lange tuidraden die 615 m uit elkaar aan de brug zijn bevestigd. Hoe lang zijn die tuidraden?

b Er zijn twee tuidraden die 111,2 m lang zijn. Hoe ver zitten die twee tuidraden uit elkaar aan de brug bevestigd? Bepaal het antwoord door een bijpassende vergelijking op de lossen.

Practicum

Een vergelijking van de vorm $a(x-p)^2+q=r$ heet een **kwadratische vergelijking**.
Zo'n vergelijking heeft soms twee, soms één en soms geen oplossingen.

De vergelijking $1{,}5(x-1)^2-4=2$ bijvoorbeeld heeft als oplossing $x=-1 \vee x=3$.

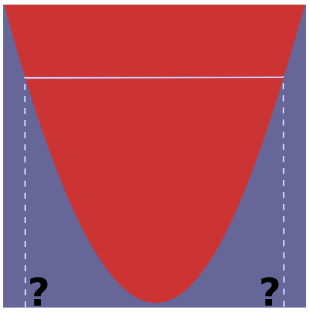
In deze applet kun je die oplossing controleren.

Gebruik de applet.

1.3 Kwadraat afsplitsen

Inleiding

Ook bij kwadratische verbanden wil je vaak weten welke invoerwaarden er bij bepaalde uitkomsten horen. Je hebt met enkele rekentechnieken eerder kennisgemaakt. Nu ga je leren een kwadraat af te splitsen.



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- bij formules van de vorm $y = x^2 + 2kx$ een kwadraat afsplitsen;
- de top van een parabool bepalen door in de bijbehorende formule een kwadraat af te splitsen.

Voorkennis

- herkennen dat een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband beschrijft en daaruit de top en de vorm van grafiek van de bijbehorende parabool (berg- of dalparabool) afleiden;
- vergelijkingen van de vorm $a \cdot (x - p)^2 + q = c$ oplossen door terugrekenen of de balansmethode;
- kwadratische vergelijkingen gebruiken om (een) snijpunt(en) te bepalen.

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Kwadraat afsplitsen’ leren de leerlingen kwadratische verbanden te schrijven in de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ en vergelijkingen met kwadratische verbanden erin oplossen. Hiermee kunnen ze elke kwadratische vergelijking oplossen. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal en roosterpapier voor op de verticale werkvlakken.
- Bij de eerste opdracht hoort een informatieblad om af te drukken en in stroken (van steeds twee invulregels) uit te delen.

Opdracht 3.1

Je kunt al haakjes wegwerken, bijvoorbeeld $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$.

Vul nu de volgende uitdrukkingen in:

1. $(x + 4)^2 = x^2 + \ldots x + \ldots$
2. $(x - 4)^2 = \ldots$
3. $(x + 8)^2 = \ldots$
4. $(x - 8)^2 = \ldots$
5. $(x + \ldots)^2 = x^2 + 12x + 36$
6. $(x - \ldots)^2 = x^2 - 12x + 36$
7. $x^2 + 10x + 25 = (x + \ldots)^2$
8. $x^2 - 10x + 25 = (x - \ldots)^2$

9. $x^2 + 4x + 4 = (x + ...)^2$
10. $x^2 + 4x + 6 = (x + ...)^2 + ...$
11. $x^2 + 6x + 8 = (x + ...)^2 - ...$
12. $x^2 + 6x = (x + ...)^2 - ...$
13. $x^2 - 6x = (x - ...)^2 - ...$
14. $x^2 + 5x = (x + ...)^2 - ...$
15. $x^2 + 2kx = (x + ...)^2 - ...$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in strookjes van twee. Kopieer eerst het **Informatieblad**.

Mogelijke hulpvragen: “Wat valt je op aan het getal voor de term met alleen x die niet binnen de haakjes staat?” en vanaf de vijfde uitdrukking “Hoe kun je hiermee de vorm tussen de haakjes vinden?”.

Benoem na afloop de term ‘kwadraat afsplitsen’.

Uitwerking

1. $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$
2. $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$
3. $(x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64$
4. $(x - 8)^2 = x^2 - 16x + 64$
5. $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$
6. $(x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36$
7. $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
8. $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$
9. $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$
10. $x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2$
11. $x^2 + 6x + 8 = (x + 3)^2 - 1$
12. $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$
13. $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$
14. $x^2 + 5x = (x + 2{,}5)^2 - 6{,}25$
15. $x^2 + 2kx = (x + k)^2 - k^2$

Opdracht 3.2

Laat zien dat de formule $y = x^2 - 6x + 8$ een kwadratisch verband beschrijft.
Bereken ook de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool en bereken de nulpunten.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling, schrijf de formule op je eigen werkplek op.

Mogelijke hulpvragen: “Hoe zag de formule voor een kwadratisch verband er tot nu toe steeds uit?”, “Hoe kun je deze formule in die vorm schrijven? (Denk aan de vorige opdracht.)”, “Wat voor parabool krijg je en welke top heeft hij?” en “Hoe bereken je nu de nulpunten met behulp van een vergelijking?”.

Uitwerking

Splits een kwadraat af van de vorm $x^2 - 6x$.

Je krijgt: $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$.

De formule kun je daarmee herleiden tot: $y = (x-3)^2 - 1$.

Nu zie je dat er sprake is van een dalparabool met top $(3, \text{-}1)$.

Voor de snijpunten met de x-as moet je $y = 0$ oplossen.

Door kwadraat afsplitsen kun je dit schrijven als $(x-3)^2 - 1 = 0$.

En die vergelijking kun je oplossen door terugrekenen.
Ga na, dat je krijgt: $x = 2 \vee x = 4$.

Opdracht 3.3

Bereken de top van de parabool die wordt gegeven door de formule $y = \text{-}2x^2 - 16x + 2$.

Gebruik $\text{-}2x^2 - 16x + 2 = \text{-}2 \cdot \left(x^2 + 8x - 1\right)$ en kwadraat afsplitsen.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling. Schrijf de vergelijking eventueel op.

Mogelijke hulpvragen: “Hoe vind je $\text{-}2x^2 - 16x + 2 = \text{-}2 \cdot \left(x^2 + 8x - 1\right)$? En waarom is dit nodig?”, “Kun je nagaan dat dit klopt?”, “Hoe kun je binnen de haakjes een kwadraat afsplitsen?” en “Hoe schrijf je de formule nu in de juiste vorm?”.

Uitwerking

Je wilt de formule in de vorm $y = a(x-p)^2 + q$ brengen, dan kun je de top uit de formule aflezen. Daarvoor moet je een kwadraat afsplitsen.

Gebruik $\text{-}2x^2 - 16x + 2 = \text{-}2 \cdot \left(x^2 + 8x - 1\right)$ en kwadraat afsplitsen.

Je herleidt de formule dan zo:

$$
\begin{aligned}
y &= \text{-}2x^2 - 16x + 2 \\
y &= \text{-}2\left(x^2 + 8x - 1\right) \\
y &= \text{-}2\left((x+4)^2 - 16 - 1\right) \\
y &= \text{-}2(x+4)^2 + 34
\end{aligned}
$$

Nu kun je de top aflezen en daarmee een geschikte tabel maken om de parabool te tekenen.

Opdracht 3.4

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over ‘kwadraat afsplitsen’. Het gaat om het leren schrijven van een kwadratisch verband in de vorm $y = a(x-p)^2 + q$ zodat je gemakkelijk de top kunt aflezen en de grafiek kunt tekenen en bijbehorende vergelijkingen kunt oplossen.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Een formule van de vorm $y = x^2 + 2kx$ kun je herleiden tot $y = (x+k)^2 - k^2$.

Dit heet **kwadraat afsplitsen**: $x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$.

Omdat $y = x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$, kun je zien dat er sprake is van een kwadratisch verband. De grafiek ontstaat door de grafiek van $y = x^2$ te verschuiven: k naar links en k^2 naar beneden. De grafiek is een dalparabool met top $\left(-k, -k^2\right)$.

Je kunt dit heel goed gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen waarin kwadraten voorkomen.

Bij formules van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ kun je ook een kwadraat afsplitsen.

Je begint dan met het schrijven van de formule als $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

Dit heet **een factor buiten haakjes halen**.
Vervolgens splits je op de vorm binnen de haakjes een kwadraat af. Zie **Voorbeeld 2**.

Verwerken

★ **Opgave 3.1**

Gegeven is de formule $y = x^2 - 10x + 5$.

Laat zien dat er een kwadratisch verband bestaat tussen y en x en bereken de top van de bijbehorende parabool.

★ **Opgave 3.2**

Splits een kwadraat af.

a $x^2 + 12x$

b $x^2 + 13x$

c $x^2 - 12x + 46$

d $5x + x^2$

e $2x^2 - 14x - 24$

★ **Opgave 3.3**

Gegeven is de formule $y = 0{,}1x^2 - 10x + 5$.

Laat zien dat er een kwadratisch verband bestaat tussen y en x en bereken de top van de bijbehorende parabool.

★ **Opgave 3.4**

Los de volgende vergelijkingen op door eerst een kwadraat af te splitsen.

a $x^2 + 4x = 0$

b $2x^2 - 6x + 4 = 0$

★ ★ **Opgave 3.5**

Als je een tennistoernooi organiseert waarbij alle spelers één keer tegen elkaar moeten spelen, dan kun je berekenen hoeveel wedstrijden er nodig zijn afhankelijk van het aantal spelers.

a Er zijn n spelers. Leg uit dat het aantal wedstrijden w afhankelijk van n is volgens de formule: $w = \frac{1}{2}n(n - 1)$.

b Laat door haakjes wegwerken en kwadraat afsplitsen zien dat er sprake is van een kwadratisch verband tussen w en n.

c Er kunnen maximaal 300 wedstrijden in deze competitie worden gespeeld. Hoeveel deelnemers kunnen er dan maximaal zijn?

★ **Opgave 3.6**

Een kogelstootster stoot haar kogel volgens een mooie parabolische baan. Die baan is door haar coach gefilmd en hij heeft er een formule van op laten stellen. Bij deze baan past de formule $h = -0{,}026x^2 + 0{,}52x + 1{,}80$.
Hierin is h de hoogte van het midden van de kogel boven een punt op de grond dat x m verwijderd is van het punt recht onder het midden van de kogel op het moment van loslaten.

a Op welke hoogte werd de kogel losgelaten?

b Bereken het hoogste punt van de baan van de kogel.

c Bereken de afstand die deze kogelstootster haalt.

Toepassen

★ ★ **Opgave 3.7: Portieken**

Deze twee portieken zijn ontworpen door een architect die hoorde tot de Amsterdamse School. Er wordt beweerd dat ze een mooie paraboolvorm hebben. Je zou die vorm van de rand van het metselwerk langs beide kozijnen moeten kunnen beschrijven met formules. Neem je in het midden tussen beide portieken een verticale h-as en verder de horizontale x-as precies over de stoep, dan vind je $h_1 = -5x^2 + 11x - 2{,}85$ en $h_2 = -5x^2 - 11x - 2{,}85$.

Figuur 3.2

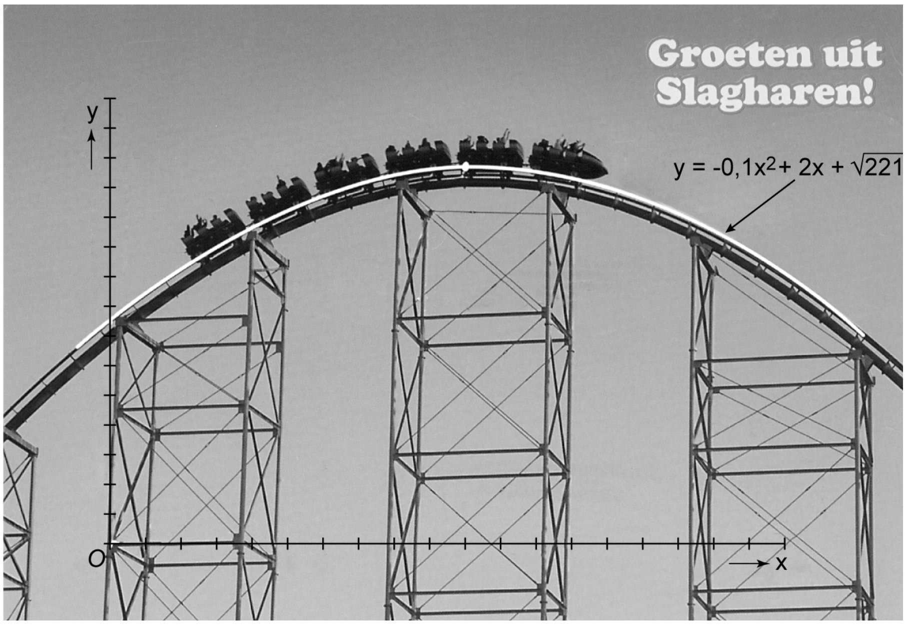
a Van welke hoogte van de kozijnen is daarbij uitgegaan?

b Hoe breed is dan de opening van elk portiek op de grond?

c Teken beide portieken als deze formules kloppen. Is er werkelijk sprake van een paraboolvorm?

★ ★ **Opgave 3.8: Groeten uit Slagharen**

Een fabrikant van practicummateriaal voor natuurkunde heeft in 2009 als reclame deze ansichtkaart verstuurd aan alle scholen in Nederland.



Figuur 3.3

De formule die hoort bij de vorm van de achtbaan is: $H = -0{,}1a^2 + 2a + \sqrt{221}$.

a Hoe hoog is de achtbaan bij een horizontale afstand van 0 m?

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de hoogte van het hoogste punt van dit deel van de achtbaan.

c Welke nulpunten heeft deze grafiek? Rond je antwoorden af op een decimaal.

(naar: examen wiskunde vmbo-tl in 2011, tweede tijdvak)

Practicum

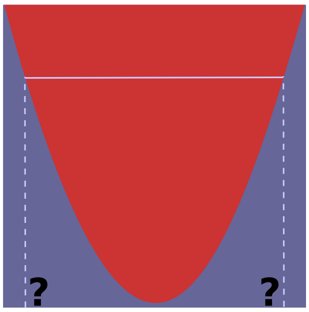
Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **kwadraat afsplitsen en vergelijkingen daarmee oplossen**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.4 Kwadratische vergelijkingen

Inleiding

Ook bij kwadratische verbanden wil je vaak weten welke invoerwaarden er bij bepaalde uitkomsten horen. Je hebt met enkele rekentechnieken eerder kennisgemaakt. Nu ga je deze technieken gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- kwadratische vergelijkingen opstellen en systematisch oplossen.

Voorkennis

- herkennen dat een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband beschrijft en daaruit de top en de vorm van grafiek van de bijbehorende parabool (berg- of dalparabool) afleiden;
- bij formules van de vorm $y = x^2 + 2kx$ een kwadraat afsplitsen;
- kwadratische vergelijkingen oplossen door kwadraat afsplitsen en terugrekenen of de balansmethode;
- kwadratische vergelijkingen gebruiken om (een) snijpunt(en) te bepalen.

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Vergelijkingen’ gaat het om het leren opstellen van een kwadratische vergelijking en die vervolgens oplossen. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal en roosterpapier voor op de verticale werkvlakken.
- Bij de tweede opdracht hoort een informatieblad om af te drukken en desgewenst in stroken uit te delen.

Opdracht 4.1

Twee getallen zijn opgeteld 21 en vermenigvuldigd 108.
Om welke getallen gaat dit?

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Wellicht gaan leerlingen gewoon aan het proberen en komen ze daar ook snel uit. Laat dat rustig gebeuren. Als er resultaten zijn, geef dan de suggestie dat het de bedoeling is om dit met behulp van een vergelijking te doen, omdat die aanpak in het algemeen (zeker als de uitkomsten geen mooie gehele getallen zijn) handiger en sneller is.

Mogelijke hulpvragen: “Als je één van beide getallen x noemt, wat weet je dan van het andere getal als ze samen 21 zijn?” (dit laatste om te voorkomen dat iemand er $\frac{108}{x}$ van maakt en de vergelijking $x + \frac{108}{x} = 21$ wordt, hoewel dat op zich ook wel kan maar nu waarschijnlijk als lastig wordt gezien), “Hoe kun je hiermee een vergelijking opstellen, wat heb je nog niet gebruikt?” en “Hoe kun je elke kwadratische vergelijking oplossen?”.

Uitwerking

Stel dat het ene getal x is, dan is het andere getal $21 - x$.

Als je deze twee met elkaar vermenigvuldigd moet er 108 uit komen.

Dus je krijgt de vergelijking: $x(21 - x) = 108$.

Haakjes wegwerken geeft $21x - x^2 = 108$ en dus $x^2 - 21x + 108 = 0$.

Vervolgens kwadraat afsplitsen: $(x - 10{,}5)^2 - 110{,}25 + 108 = 0$ geeft $(x - 10{,}5)^2 = 2{,}25$.
Dus $x - 10{,}5 = \pm\sqrt{2{,}25} = \pm 1{,}5$, zodat $x = 12 \vee x = 9$.

Opdracht 4.2

Los de volgende vergelijkingen op:

1. $2x^2 - 8x = 12$
2. $x^2 - 5x = 7x$
3. $2x^2 - 10x = 2x - 3$
4. $0{,}5x^2 - x = 2x + 3$
5. $4 - x^2 = 3x$
6. $(x - 2)(x - 6) = x(x - 2)$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in stappen, deel hem desgewenst in stroken uit, zie het **Informatieblad**.

Mogelijke hulpvragen: “Hoe kun je de vergelijking zo schrijven dat je een kwadraat kunt afsplitsen?” en “Wat doe je als kwadraat afsplitsen niet mogelijk is?”.

Uitwerking

1. $2x^2 - 8x = 12$ geeft $x^2 - 4x = 12$ en $(x - 2)^2 = 16$, zodat $x - 2 = \pm 4$ en $x = -2 \vee x = 6$.
2. $x^2 - 5x = 7x$ geeft $x^2 - 12x = 0$ en $(x - 6)^2 = 36$, zodat $x - 6 = \pm 6$ en $x = 0 \vee x = 12$.
3. $2x^2 - 10x = 2x - 3$ geeft $x^2 - 6x = -1{,}5$ en $(x - 3)^2 = 7{,}5$, zodat $x = 3 \pm \sqrt{7{,}5}$.
4. $0{,}5x^2 - x = 2x + 3$ geeft $x^2 - 6x = 6$ en $(x - 3)^2 = 15$, zodat $x = 3 \pm \sqrt{15}$.
5. $4 - x^2 = 3x$ geeft $x^2 + 3x = 4$ en $(x - 1{,}5)^2 = 6{,}25$, zodat $x - 1{,}5 = \pm 2{,}5$ en $x = -1 \vee x = 4$.
6. $(x - 2)(x - 6) = x(x - 2)$ geeft $x^2 - 8x + 12 = x^2 - 2x$ en $6x = 12$, zodat $x = 2$.

Opdracht 4.3

Boer Klein Harmelink heeft een rechthoekig weiland van 190 m bij 110 m. De smalle kant ligt tegen de weg en bevat het toegangshek. Aan de andere drie kanten moet een boswal op zijn land komen, die wordt overal even breed. De boer wil de breedte van de boswal zo bepalen dat hij nog 90% van de oppervlakte van het weiland overhoudt.
Hoe breed moet deze boswal worden?

Toelichting

Geef de opdracht mondeling. Maak eventueel een schets met afmetingen op je eigen werkplek.

Mogelijke hulpvragen: “Hoe kun je hierbij een vergelijking opstellen? En welke onbekende neem je?”, “Hoe kun je de vergelijking zo schrijven dat je een kwadraat kunt afsplitsen?”.

Uitwerking

Maak eventueel een schets van de situatie.

De lengte wordt: $l = 190 - x$.
De breedte wordt: $b = 110 - 2x$.

$(190 - x)(110 - 2x) = 0{,}9 \cdot 190 \cdot 110$, ofwel $(190 - x)(110 - 2x) = 18810$.

$$\begin{aligned}
(190 - x)(110 - 2x) &= 0{,}9 \cdot 190 \cdot 110 \\
20900 - 110x - 380x + 2x^2 &= 18810 \\
2x^2 - 490x &= -2090 \\
x^2 - 245x &= -1045 \\
(x - 122{,}5)^2 - 15006{,}25 &= -1045 \\
(x - 122{,}5)^2 &= 13961{,}25 \\
x - 122{,}5 &= \pm\sqrt{13961{,}25} \\
x &= 122{,}5 \pm \sqrt{13961{,}25}
\end{aligned}$$

$x \approx 4{,}34 \vee x \approx 240{,}66$. De tweede oplossing voldoet niet.

De boswal is ongeveer 4,34 m breed.

Opdracht 4.4

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over ‘kwadratische vergelijkingen opstellen en oplossen’. Je zult nu het kwadraat afsplitsen goed kunnen gebruiken.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Een **kwadratische vergelijking** is een vergelijking die in de vorm $ax^2+bx = c$ is te schrijven. Hierin moet $a \neq 0$, want anders verdwijnt het kwadraat. Je kunt dergelijke vergelijkingen systematisch oplossen door:

- beide zijden door a te delen;
- de vergelijking door kwadraat afsplitsen te schrijven in de vorm $(x-p)^2 = q$;
- daarna terugrekenen of de balansmethode toepassen.

Op deze manier kun je elke kwadratische vergelijking oplossen, al is het soms wel een flink gereken.

Verwerken

★ **Opgave 4.1**

Los de kwadratische vergelijkingen op.

a $x^2 + 6x = 16$

b $x^2 - 5x - 8 = 0$

c $2x^2 = 8x + 1$

d $0{,}1x^2 + x = 4$

★ **Opgave 4.2**

Twee getallen verschillen 5 en hun product is 204. Je wilt deze getallen berekenen.

a Stel een passende vergelijking bij dit probleem op.

b Bereken deze getallen met behulp van de vergelijking die je hebt gevonden.

★ **Opgave 4.3**

Los op.

a $x - x^2 = 0{,}25$

b $x(x + 4) = 2x + 8$

c $2x(x - 4) = 3 - 8x$

d $0{,}01x^2 - x = 0$

★ **Opgave 4.4**

Een parabolische boog is gegeven door de formule: $y = -0{,}1x^2 + 5x + 1$

a Bereken de coördinaten van de top van deze parabool.

b Los de kwadratische vergelijking op: $-0{,}1x^2 + 5x + 1 = 53{,}5$.

c Waarom heeft de vergelijking $-0{,}1x^2 + 5x + 1 = 73{,}5$ geen oplossing?

d De vergelijking $-0{,}1x^2 + 5x + 1 = p$ heeft precies één oplossing. Welke waarde moet p dan hebben?

★ **Opgave 4.5**

Stel dat je een rechthoekig stuk land hebt van 50 m lengte en 30 m breedte. Je krijgt er in de lengte x meter bij als je in de breedte x meter inlevert.

a Schrijf een bijpassende formule op voor de oppervlakte van je nieuwe stuk land.

Je stuk land is nu 69 m^2 kleiner geworden.

b Bereken welke waarden x dan kan hebben.

c Is het ook mogelijk dat je stuk land even groot blijft? Zo ja, welke waarden kan x dan hebben?

Toepassen

★ ★ ★ **Opgave 4.6: De p,q-formule**

Het oplossen van een kwadratische vergelijking door het afsplitsen van een kwadraat gaat telkens op dezelfde manier.

a Los de vergelijking $x^2 + px = q$ op deze manier op.

b Laat zien hoe je het resultaat bij a kunt gebruiken om de vergelijking $x^2 + 6x = 20$ op te lossen.

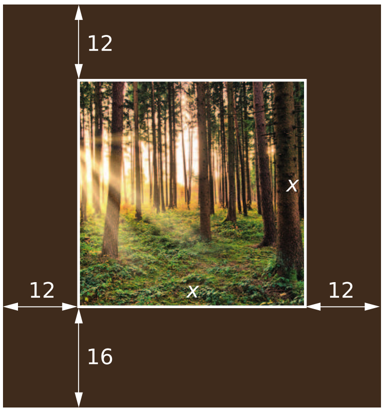
★ ★

Opgave 4.7: Fotolijst

Om een vierkante foto komt een brede rechthoekige lijst. De breedte van de lijst aan de onderkant van de foto is 16 cm. Aan de andere drie kanten is de lijst 12 cm breed. De foto met lijst krijgt daardoor een twee keer zo grote oppervlakte als de foto zonder lijst heeft.

a Schrijf een bijpassende formule op voor de oppervlakte van de foto met lijst. Noem de lengte en de breedte van de foto x.

b Bereken de waarde van x in mm nauwkeurig.



Figuur 4.2

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **kwadratische vergelijkingen oplossen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.5 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- kwadratisch verband — dal- of bergparabool — top, symmetrieas
- kwadratische vergelijking
- kwadraat afsplitsen
- kwadratische vergelijkingen systematisch oplossen

Activiteitenlijst

- bij een door de formule gegeven kwadratisch verband de top van de bijbehorende parabool bepalen en tabellen en grafieken maken;
- kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen;
- een kwadraat afsplitsen en daarmee de formule van een kwadratisch verband zo schrijven dat je de top van de parabool kunt aflezen;
- kwadratische vergelijkingen systematisch oplossen door een kwadraat af te splitsen — kwadratische vergelijkingen opstellen in situaties die zich daartoe lenen.

Opgave 5.1

Van een kwadratisch verband is de formule $y = 2(x - 0{,}5)^2 - 1{,}5$.

a Vul de tabel in en teken de bij de formule horende parabool.

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

Tabel 5.1

b Welke coördinaten heeft de top van de parabool?

c Met behulp van de grafiek kun je de vergelijking $2(x - 0{,}5)^2 - 1{,}5 = 4$ oplossen.
Bepaal beide oplossingen in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 5.2

Je kunt sommige kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen.

Bekijk de vergelijking $2(x - 0{,}5)^2 - 1{,}5 = 4$ uit de vorige opgave.

a Maak hierbij een rekenschema en een terugrekenschema.

b Welke exacte oplossingen heeft de vergelijking dus?

c Ga na, dat deze twee oplossingen overeenkomen met die uit de voorgaande opgave.

Opgave 5.3

Bekijk de formule $y = -x^2 - 8x + 3$.

a Laat zien dat hier van een kwadratisch verband sprake is door een kwadraat af te splitsen.

b De grafiek bij deze formule is dus een parabool. Welke top heeft deze parabool?

c Teken de parabool.

d Los op: $-x^2 - 8x + 3 = 18$.

Opgave 5.4

Los de volgende vergelijkingen op door een kwadraat af te splitsen.

a $x^2 - 12x = 36$

b $x^2 + 5x = 6$

c $x(x - 4) = 6x - 24$

d $(x - 4)^2 = 4x$

Opgave 5.5

Een rechthoekig terrein is anderhalf keer zo lang als het breed is. In de lengte gaat een strook van 3 m breedte af en in de breedte komt een strook van 4 m breedte bij. De oppervlakte van het terrein blijft daardoor even groot.

Bereken de afmetingen van dit terrein voordat deze stroken er af gaan en erbij komen.

Testen

★ Opgave 5.6

De formule $y = 0{,}5(x - 4)^2 + 3$ beschrijft een kwadratisch verband tussen x en y. De bijbehorende grafiek is dus een parabool.

a Welke symmetrieas heeft deze parabool?

b Welke coördinaten heeft de top van de parabool?

c Teken de parabool. Maak eerst een geschikte tabel.

d Voor welke waarden van x geldt $y = 10$? Bereken de exacte waarden en geef ook benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

★ Opgave 5.7

Los de volgende vergelijkingen op:

a $2{,}5x^2 = 50\frac{5}{8}$

b $2(x - 2)^2 - 2{,}5 = 0$

c $3(x - 1)^2 = 6$

d $0{,}1(4 - x)^2 = 1$

★ Opgave 5.8

Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 5$. De bijbehorende grafiek is een parabool.

a Bepaal door een kwadraat af te splitsen de top van deze parabool. Is het een dalparabool of een bergparabool?

b Teken de parabool.

c Los met behulp van de grafiek $-\frac{1}{2}x^2 - x + 5 = 4$ op. Geef de twee x-waarden in één decimaal nauwkeurig.

d Los de vergelijking $-\frac{1}{2}x^2 - x + 5 = 4$ ook op door gebruik te maken van het antwoord bij a.

★ Opgave 5.9

Los de volgende vergelijkingen op.

a $x^2 - 8x = 25$

b $x(x + 3) = 12$

c $x(x + 3) = 3x + 12$

d $x + 6 = x^2$

★★ Opgave 5.10

Van een rechthoekige driehoek is de hypotenusa (schuine zijde) 1 cm langer dan de langste rechthoekszijde. Deze rechthoekszijden verschillen 7 cm van elkaar.

a Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?

b Bereken de lengtes van de drie zijden van deze driehoek.

★ Opgave 5.11

Figuur 5.1

De Wilhelminabrug in Deventer is een boogbrug over de IJssel. De eerste versie van deze brug stamt uit 1943. Na de Tweede Wereldoorlog is hij herbouwd. De brug kent twee grote bogen waarvan de vorm parabolisch is.

Die paraboolvorm kan worden beschreven met de formule $h = -0{,}01x(x - 121)$.

In dat geval ligt het wegdek van de brug op de x-as en stelt h de hoogte van een punt van een boog boven het wegdek voor. Zowel x als h wordt in meter uitgedrukt. x kan alleen de waarden vanaf 0 tot en met 121 aannemen.

a Licht toe dat de waarden die x kan aannemen volgen uit het feit dat voor de beide bogen geldt $h > 0$.

b Toon door kwadraat afsplitsen aan dat hier sprake is van een kwadratisch verband.

c Hoe hoog zit het hoogste punt van de boog boven het wegdek?

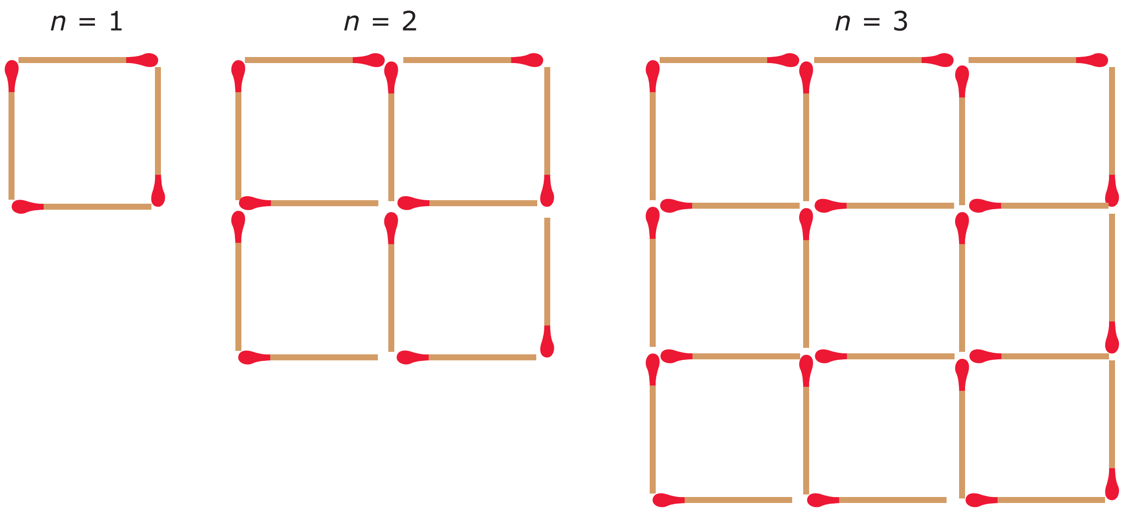
De bogen worden ondersteund door verticale stalen balken. Twee van die balken zijn 20 m lang.

d Hoe ver staan die twee balken van elkaar af?

Toepassen

★ ★ **Opgave 5.12: Luciferfiguren**

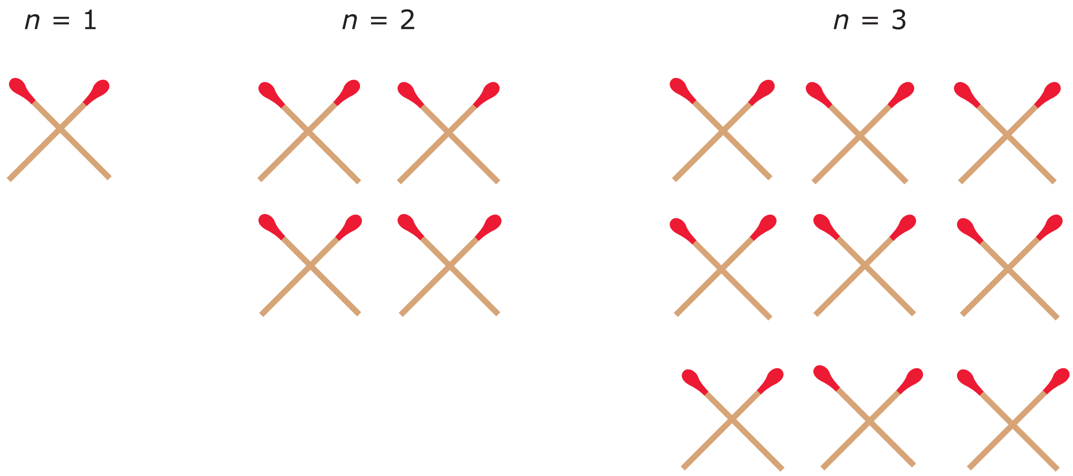
Bekijk deze drie luciferfiguren. Dit zijn de eerste drie figuren van een serie van luciferfiguren die op dezelfde manier zijn opgebouwd. Vanwege de regelmaat kun je het aantal lucifers uitrekenen als je het figuurnummer weet, en omgekeerd.



Figuur 5.2

a Het aantal lucifers l hangt af van het figuurnummer n. De formule die hierbij hoort, is $L = n(2n + 2)$. Bereken het aantal lucifers voor figuur 6.

Je ziet opnieuw de eerste drie van een serie luciferfiguren.



Figuur 5.3

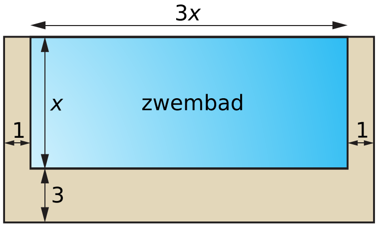
b Welk verband tussen l en n bestaat er bij deze tweede serie luciferfiguren?

c Bij welk figuurnummer zitten er 1,25 keer zo veel lucifers in de figuur uit serie 1 als in de figuur uit serie 2?

★ ★

Opgave 5.13: Zwembad

Kyra heeft een rechthoekig zwembad in haar tuin. De lengte van haar zwembad is drie keer zo lang als de breedte. Aan een lange kant van het zwembad staan bomen, dat laat ze zo. Aan de andere drie kanten laat ze tegels leggen. Aan de twee korte kanten van het zwembad komen de tegels 1 m breed te liggen, en aan de lange kant komen de tegels 3 m breed te liggen zodat ze daar ligstoelen neer kan zetten.



Figuur 5.4

De oppervlakte van het zwembad met de tegels erbij wordt anderhalf keer de oppervlakte van het zwembad zonder tegels.

Bereken de afmetingen van het zwembad in meters in twee decimalen nauwkeurig.

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		★	★★	★★★
1	**Kwadratische verbanden**	★	★★	★★★
	Herkennen dat een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband beschrijft en daaruit de top en de vorm van grafiek van de bijbehorende parabool (berg- of dalparabool) afleiden.	1.1☐ 1.2☐ 1.3☐ 1.4☐ 1.5☐ **T** 5.6☐	1.6☐ 1.7☐	1.8☐
	Grafieken bij kwadratische verbanden tekenen en die gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen.	1.1☐ 1.2☐ 1.3☐ 1.4☐ 1.5☐ **T** 5.6☐	1.6☐ 1.7☐	1.8☐
2	**Terugrekenen**	★	★★	★★★
	Vergelijkingen van de vorm $a \cdot (x - p)^2 + q = c$ oplossen door terugrekenen of de balansmethode.	2.1☐ 2.2☐ 2.3☐ 2.4☐ 2.5☐ **T** 5.7☐	2.6☐ 2.7☐	
	Kwadratische vergelijkingen opstellen om (een) snijpunt(en) te bepalen.	2.1☐ 2.3☐ 2.5☐	2.6☐ 2.7☐	
3	**Kwadraat afsplitsen**	★	★★	★★★
	Bij formules van de vorm $y = x^2 + 2kx$ een kwadraat afsplitsen.	3.1☐ 3.2☐ 3.3☐ 3.4☐ 3.6☐ **T** 5.8☐	3.5☐ 3.7☐ 3.8☐	
	De top van een parabool bepalen door in de bijbehorende formule een kwadraat af te splitsen.	3.1☐ 3.3☐ 3.6☐ **T** 5.8☐	3.5☐ 3.7☐ 3.8☐	
4	**Kwadratische vergelijkingen**	★	★★	★★★
	Kwadratische vergelijkingen opstellen en systematisch oplossen.	4.1☐ 4.2☐ 4.3☐ 4.4☐ 4.5☐ **T** 5.9☐ **T** 5.11☐	4.7☐ **T** 5.10☐ **T** 5.12☐ **T** 5.13☐	4.6☐

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Math4all

www.math4all.nl

Informatieblad bij Opdracht 3.1

1. $(x+4)^2 = x^2 + \ldots x + \ldots$
2. $(x-4)^2 = \ldots$
3. $(x+8)^2 = \ldots$
4. $(x-8)^2 = \ldots$
5. $(x+\ldots)^2 = x^2 + 12x + 36$
6. $(x-\ldots)^2 = x^2 - 12x + 36$
7. $x^2 + 10x + 25 = (x+\ldots)^2$
8. $x^2 - 10x + 25 = (x-\ldots)^2$
9. $x^2 + 4x + 4 = (x+\ldots)^2$
10. $x^2 + 4x + 6 = (x+\ldots)^2 + \ldots$
11. $x^2 + 6x + 8 = (x+\ldots)^2 - \ldots$
12. $x^2 + 6x = (x+\ldots)^2 - \ldots$
13. $x^2 - 6x = (x-\ldots)^2 - \ldots$
14. $x^2 + 5x = (x+\ldots)^2 - \ldots$
15. $x^2 + 2kx = (x+\ldots)^2 - \ldots$

Informatieblad bij Opdracht 4.2

1. $2x^2 - 8x = 12$
2. $x^2 - 5x = 7x$
3. $2x^2 - 10x = 2x - 3$
4. $0{,}5x^2 - x = 2x + 3$
5. $4 - x^2 = 3x$
6. $(x - 2)(x - 6) = x(x - 2)$