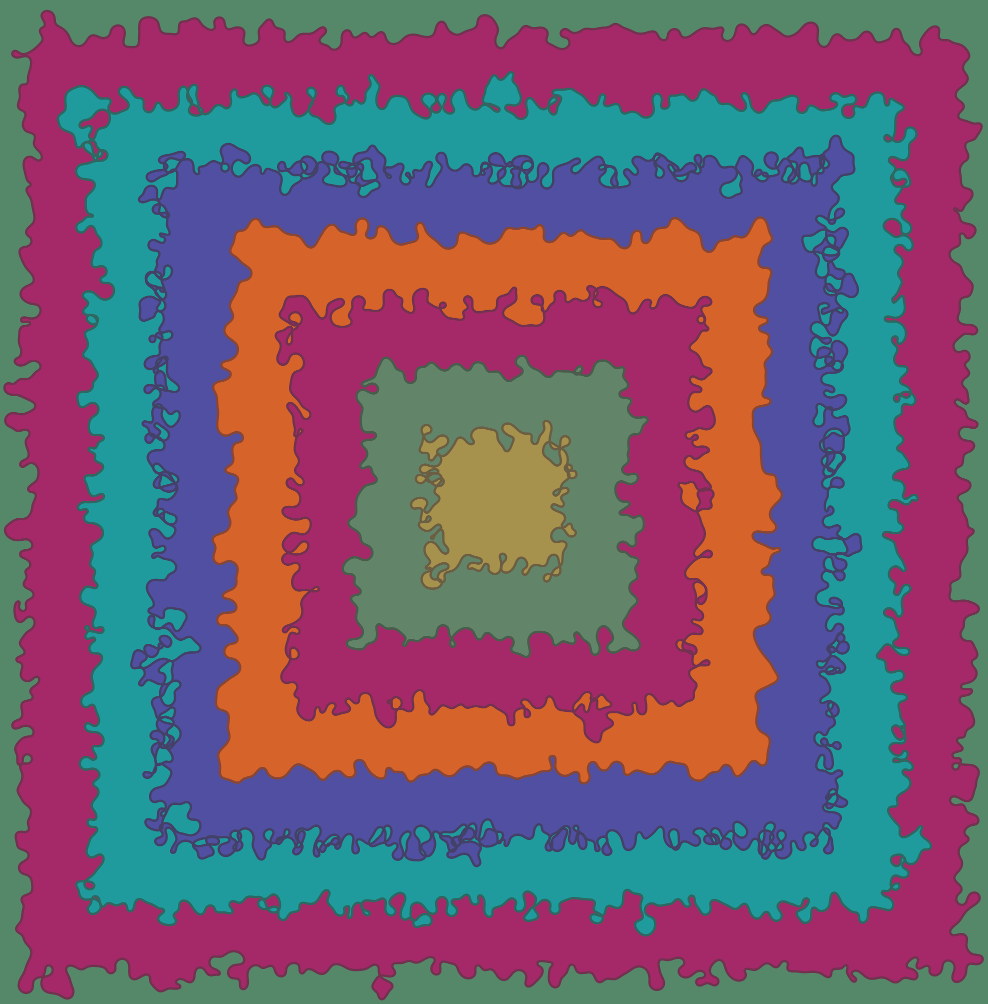
Wiskunde / PGA

2 HAVO / VWO

Meetkundige berekeningen

ConTeXt College



Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je werkt dan onder begeleiding van je docent in kleine groepjes aan wiskundige problemen en samen bouw je de theorie op en maak je er een overzicht van.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee je kunt nagaan of je de stof beheerst. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding vind je terug in de marge.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die je alleen hoeft te maken als je er genoeg tijd voor hebt
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die je alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk voor je was

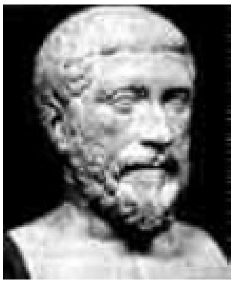
1

Meetkundige berekeningen

1.1 Pythagoras

Inleiding

Vanuit de oppervlakte van een vierkant kun je met behulp van worteltrekken berekenen hoe lang de zijden ervan zijn. Al eeuwen geleden ontdekte de mens dat je dit kunt toepassen op het berekenen van lengtes. Er ontstond een regel die later de stelling van Pythagoras is genoemd, naar de beroemde wijsgeer **Pythagoras** uit de Griekse oudheid.



Figuur 1.1 Pythagoras

Je leert in dit onderwerp

- de stelling van Pythagoras kennen en bewijzen;
- lengtes berekenen met de stelling van Pythagoras;
- met de stelling van Pythagoras nagaan of een driehoek rechthoekig is.

Voorkennis

- vanuit de oppervlakte van een vierkant de lengte van de zijden berekenen door worteltrekken;
- de oppervlakte van roosterfiguren bepalen;
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- werken met coördinaten.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het ontdekken van en het werken met de stelling van Pythagoras. Je gebruikt die stelling om lengtes van zijden te berekenen in rechthoekige driehoeken en in driehoeken waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn. Ook werk je met de omgekeerde stelling om aan te tonen of een driehoek een rechte hoek heeft.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

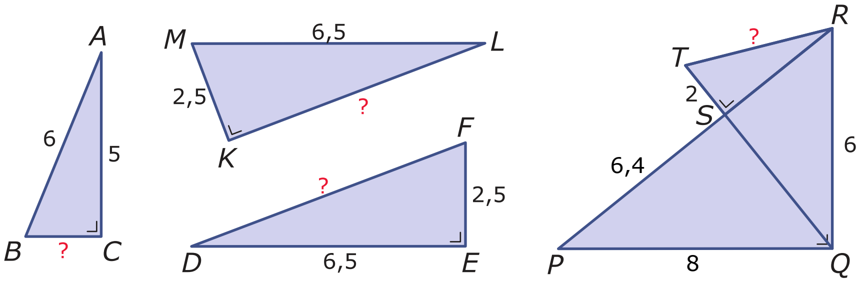
Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 1.1**

Hier zie je vier figuren met rechthoekige driehoeken.

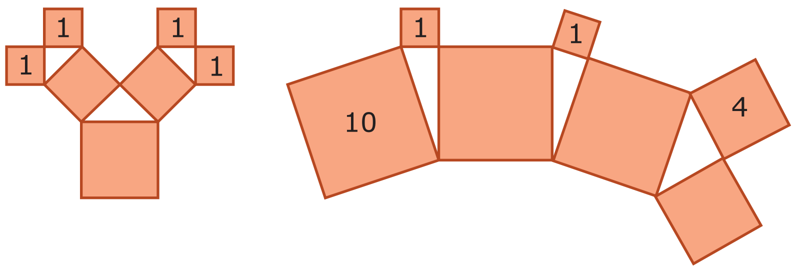


Figuur 1.2

Bereken in elke figuur de exacte lengte van de zijde met het vraagteken.

★ **Opgave 1.2**

Deze twee figuren bestaan uit vierkanten die zo tegen elkaar zijn gelegd dat de tussenruimtes rechthoekige driehoeken vormen. Van sommige vierkanten is de oppervlakte gegeven.



Figuur 1.3

Bereken ook de oppervlakte van de andere vierkanten.

★ **Opgave 1.3**

Een glazenwasser moet een raam op de tweede verdieping wassen. De ladder moet daarvoor op 8 m boven de begane grond tegen de muur komen. De voet van de ladder moet op 2 m van het huis af staan.

Maak een schets van de situatie. Bereken hoe lang zijn ladder moet zijn.

★ **Opgave 1.4**

Een computer heeft een 17 inch monitor. Dit betekent dat de diagonaal van het zuiver rechthoekige beeldscherm 17 inch is. De hoogte van het beeld is dan 10 inch. 1 inch = 2,54 cm.

Maak een schets van de situatie. Bereken de afmetingen van het beeldscherm. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

★ **Opgave 1.5**

Op een zuiver vierkante tafel met een zijde van 1,60 m wil iemand een zuiver rond tafelkleed leggen.

Hoe groot moet de diameter van dit tafelkleed minstens zijn om de hele tafel te kunnen bedekken? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

★ **Opgave 1.6**

Welke van deze driehoeken zijn rechthoekig? Welke hoek is dan recht?

a Driehoek ABC met $AB = 10$, $BC = 7{,}5$ en $AC = 12{,}5$.

b Driehoek DEF met $DE = 2$, $DF = 2$ en $EF = 3$.

c Driehoek GHI met $GH = 10$, $GI = 26$ en $HI = 24$.

d Driehoek KLM met $KL = 5$, $KM = 5$ en $LM = \sqrt{50}$.

★ ★ **Opgave 1.7**

Je ziet hier een Zweeds huis. Let op de rode dakpannen van het huis, niet die van de uitbouw aan de voorkant. Stel dat de bovenste verdieping 6 m breed en 10 m lang is. (Die 10 m is de lengte van één dakgoot.) Stel verder dat de nok van het dak 3 m boven het midden van de vloer van de bovenste verdieping zit. Van de gebruikte dakpannen zijn er ongeveer 17,5 nodig per m^2 dak.

Hoeveel rode dakpannen zijn er voor dit huis ongeveer nodig?

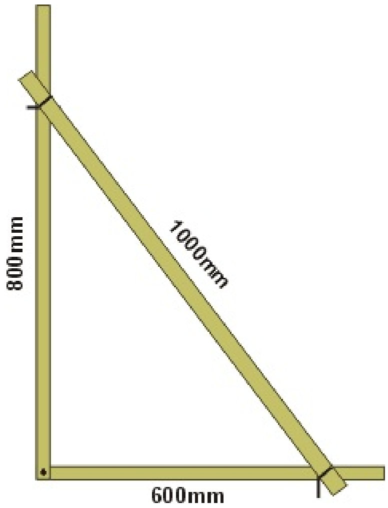
Figuur 1.4

Toepassen

In de bouw wordt voor het maken van rechte hoeken soms een bouwhaak gebruikt. Hier zie je er één. Je maakt hem met de zogenaamde 3,4,5-steek.

- Bevestig twee latten met de uiteinden als een hoek aan elkaar. Maak ze vast met bout en moer, zodat je de latten nog kunt draaien ten opzichte van elkaar.
- Meet op de éne lat 600 mm af ($3 \cdot 200$) en op de andere 800 mm ($4 \cdot 200$).
- Meet op een derde langere lat 1000 mm af ($5 \cdot 200$).
- Schuif de langste lat over de gemaakte hoek tot de maatstrepen precies op elkaar liggen. Nagel de schuine lat vast met 1 of 2 nagels en sla nog een nagel in de haakse hoek.

Je hebt nu een rechte hoek gekregen, want in de driehoek die ontstaat geldt de stelling van Pythagoras. **Bekijk deze videoclip over een rechte hoek uitzetten.**



Figuur 1.5

★ ★ **Opgave 1.8: 3,4,5-steek**

Bekijk hierboven wat de 3,4,5-steek is en hoe die in de bouw wordt gebruikt. Bekijk ook de videoclip over het maken van een rechte hoek in de praktijk.

a Laat zien, dat een 3,4,5-driehoek een rechte hoek oplevert.

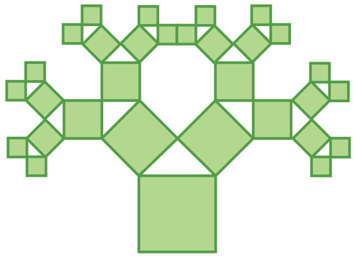
Vroeger werd voor de 3,4,5-steek een aaneengesloten touw met twaalf knopen gebruikt. Die twaalf knopen zaten op onderling gelijke afstand van elkaar.

b Laat met een figuur zien hoe je daarmee een 3,4,5-steek maakt. Leg ook uit waarom het niet uit maakt hoe lang dit twaalfknopentouw is.

★ ★ ★

Opgave 1.9: Pythagorasbomen

Je ziet hier het begin van een Pythagorasboom. Hij bestaat uit vierkanten die steeds gelijkbenige rechthoekige driehoeken insluiten. Hij is in 1942 bedacht door de Nederlandse ingenieur en wiskundeleraar Albert Bosman.



Figuur 1.6

a Teken zelf zo'n Pythagorasboom als deze hiernaast. Begin met een grootste vierkant van 4 bij 4 cm. Hoe groot zijn de kleinste vierkanten?

b Je kunt je Pythagorasboom nog met volgende stappen uitbreiden, alleen in het midden van de figuur ontstaat een probleem. Welk probleem?

c Teken de Pythagorasboom verder tot je vierkantjes hebt van 0,5 bij 0,5 cm.

d Het lijkt wel of de totale boom steeds breder en hoger wordt. Is dat ook zo? Of past de hele boom binnen een rechthoek? En welke afmetingen is die rechthoek dan?

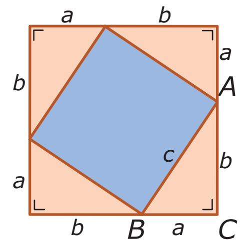
★ ★ ★

Opgave 1.10: Stelling van Pythagoras bewijzen

Een bewijs is een redenering waaruit blijkt dat een bewering altijd waar is. En een bewering waar een bewijs voor bestaat heet dan een stelling.

Als het goed is, heb je al een bewijs van de stelling van Pythagoras gezien.

Maar er bestaan nogal wat bewijzen van de stelling van Pythagoras. Uit de figuur hiernaast kun je ook een bewijs afleiden.



Figuur 1.7

a Leg uit dat het grote vierkant een oppervlakte van $A = (a + b)^2$ heeft.

b De oppervlakte van het grote vierkant is ook de som van de oppervlaktes van het kleine vierkant en vier rechthoekige driehoeken. Schrijf hierbij een formule op voor A afhankelijk van a, b en c.

c Laat zien (door haakjes uitwerken) dat uit c en d volgt $a^2 + b^2 = c^2$.

d Is dit een waterdicht bewijs van de stelling van Pythagoras?

Practicum

In deze applet kun je de punten A, B en C verplaatsen. Als je twee zijden van ΔABC een gehele waarde geeft, krijgt de derde zijde vaak geen gehele waarde.

- Controleer de benadering van de lengte van die derde zijde met de stelling van Pythagoras.
- Wanneer hebben alle drie de zijden een gehele lengte?

Bekijk de applet: stelling van Pythagoras gebruiken

Antwoorden

1.1 $BC = \sqrt{11}$.

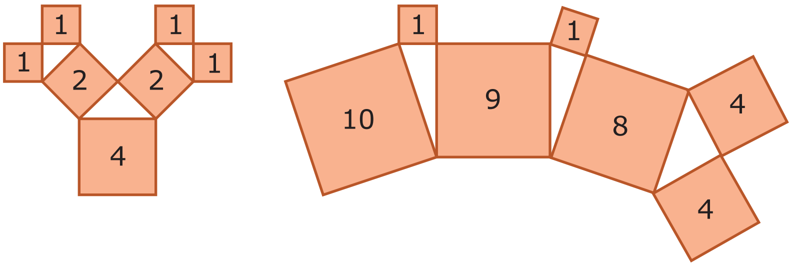
$KL = \sqrt{36} = 6$.

$DF = \sqrt{48{,}5}$.

$PR = \sqrt{100} = 10$.

$TR = \sqrt{16{,}96}$.

1.2 Zie de figuur.



1.3 De ladder moet $\sqrt{68} \approx 8{,}25$ m lang zijn.

1.4 Een lengte van 349 mm en een breedte van 254 mm.

1.5 227 cm.

1.6 a Rechthoekig met $\angle B$ als rechte hoek.

b $2^2 + 2^2 \neq 3^2$, dus deze driehoek is niet rechthoekig.

c Rechthoekig met $\angle H$ als rechte hoek.

d Rechthoekig met $\angle K$ als rechte hoek.

1.7 Ongeveer 1484 dakpannen (naar beneden afronden kan vanwege de schoorsteen).

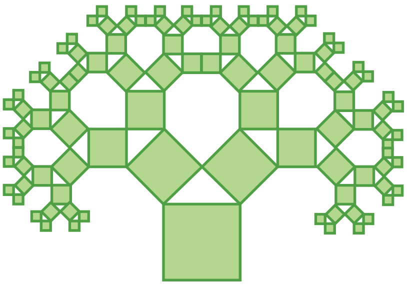
1.8 a Laat zien, in zo'n driehoek de stelling van Pythagoras geldt.

b Maak een driehoek maken met zijden van $3x$, $4x$ en $5x$, controleer de stelling van Pythagoras.

1.9 a Teken de figuur na; de kleinste vierkanten zijn 1 bij 1 cm.

b In het midden vallen de vierkantjes over elkaar heen.

c Zie de figuur.



d Hij past altijd in een rechthoek die 6 keer zo lang en 4 keer zo breed is als het beginvierkant.

1.10 a De zijden ervan zijn $a + b$. Dus $(a + b) \cdot (a + b)$ is gelijk aan de oppervlakte.

b $A = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

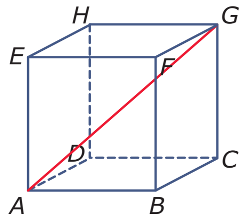
c Uit c volgt: $A = a^2 + 2ab + b^2$ en uit d volgt: $A = c^2 + 2ab$.
Beide uitdrukkingen zijn gelijk geeft $a^2 + b^2 = c^2$.

d Het ziet er mooi uit, maar je moet eigenlijk ook nog aantonen dat het blauwe gebied echt een vierkant is als de hele figuur een vierkant is. Dat gaat met behulp van hoeken...

1.2 Lengtes berekenen

Inleiding

Je kent nu de stelling van Pythagoras. Die gebruik je voor het berekenen van lengtes. Dat kun je toepassen in allerlei situaties in twee dimensies, in het platte vlak. Maar je kunt die stelling ook gebruiken in ruimtelijke figuren, in drie dimensies. Vaak moet je dan wel goed zoeken naar geschikte rechthoekige driehoeken. Bekijk deze kubus maar eens. Hoe zou je de lengte van een lichaamsdiagonaal berekenen?



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- de stelling van Pythagoras toepassen in berekeningen, onder andere ook in ruimtelijke figuren.

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- werken met coördinaten.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het toepassen van de stelling van Pythagoras om lengtes van zijden in 3D (dus in ruimtelijke figuren) en om de oppervlakte van driehoeken en vierhoeken te berekenen. Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

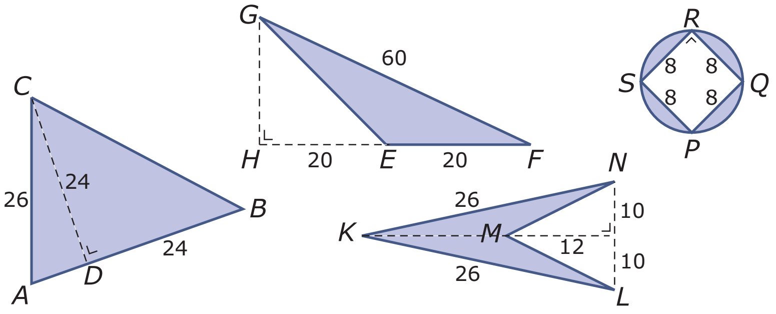
Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 2.1**

Bereken van elk van deze figuren de exacte oppervlakte en de exacte omtrek.



Figuur 2.2

★ **Opgave 2.2**

Van ΔPQR is $PQ = 4$ cm en $QR = 6$ cm. De oppervlakte van deze driehoek is 6 cm^2.

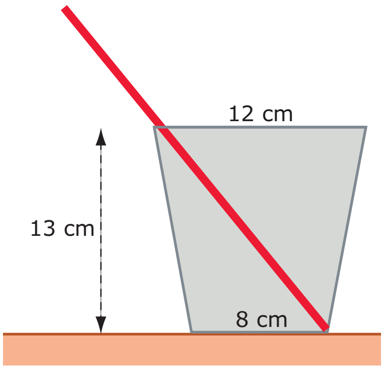
a Neem QR als basis en bereken de bijbehorende hoogte PS van deze driehoek.

b Bereken nu de lengte van PR in twee decimalen nauwkeurig.

★ **Opgave 2.3**

In een glas staat een rietje van 24 cm lengte dat tegen de bovenrand van het glas rust, zie figuur. De diameter van de cirkelvormige bovenrand van het glas is 12 cm en die van de cirkelvormige onderrand is 8 cm. De hoogte van het glas is 13 cm.

Hoe lang is het deel van het rietje dat buiten het glas steekt?



Figuur 2.3

★ **Opgave 2.4**

De kooi van een lift heeft de vorm van een balk met een breedte van 1,5 m, een diepte van 2 m en een hoogte van 2,5 m.

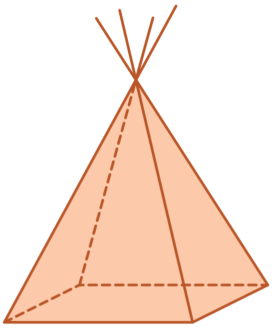
a Hoe lang is de langste onbuigzame paal die je in die lift kunt vervoeren? Geef je antwoord in meters op één decimaal nauwkeurig.

b Je hebt een vlak rechthoekig paneel met een breedte van 1,45 m en een lengte van 3,15 m. Kan dat in de lift?

★ **Opgave 2.5**

Deze figuur stelt een wigwam voor die de vorm heeft van een regelmatige vierzijdige piramide. Het grondvlak is een vierkant met een oppervlakte van 50 m^2. De vier opstaande stokken waarover het tentdoek is gespannen hebben alle vier een lengte van 12 m, waarvan telkens 2 m buiten de wigwam steekt.

Hoe hoog is deze wigwam?



Figuur 2.4

★ **Opgave 2.6**

Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 200$, $BC = 80$ en $CG = 60$ mm. Punt P is het midden van ribbe AB.

Onderzoek of driehoek HPG rechthoekig is.

★ ★ **Opgave 2.7**

Van een driehoek ABC is $AB = 6$ cm, $AC = 3$ cm en $BC = 4$ cm.

Bereken de oppervlakte van driehoek ABC in mm^2 nauwkeurig.

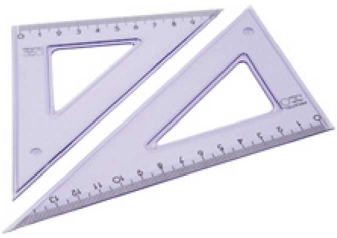
Toepassen

Je ziet hier de twee klassieke tekendriehoeken.

De éne driehoek heeft hoeken van 45°, 45° en 90° en is daarom een gelijkbenige rechthoekige driehoek.
Deze driehoek heeft bij rechthoekszijden van 1 een hypotenusa van $\sqrt{2}$.

De andere driehoek heeft hoeken van 30°, 60° en 90°.
Deze driehoek is een halve gelijkzijdige driehoek en heeft bij een kleinste rechthoekszijde van 1 een lange zijde van 2 en een grootste rechthoekszijde van $\sqrt{3}$.

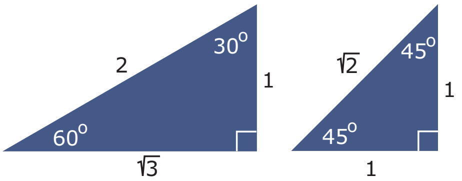
Dit is allemaal te beredeneren met de stelling van Pythagoras...



Figuur 2.5

★ ★ **Opgave 2.8: Tekendriehoeken**

Hier zie je beide tekendriehoeken nog eens.



Figuur 2.6

De ene tekendriehoek heeft dezelfde vorm als een geodriehoek.

a Waarom is deze tekendriehoek gelijkbenig?

b Laat bij deze driehoek zien, dat bij rechthoekszijden van 1 de hypotenusa $\sqrt{2}$ is.

Een geodriehoek heeft een lange zijde van 16 cm.

c Hoe lang zijn dan de twee rechthoekszijden?

De tweede tekendriehoek is een halve gelijkzijdige driehoek.

d Waarom betekent dit dat de hypotenusa 2 is als de kleinste rechthoekszijde 1 is?

e Laat nu zien dat de langste rechthoekszijde van de tweede tekendriehoek een lengte van $\sqrt{3}$ heeft.

f Hoe groot zijn de zijden van deze tweede tekendriehoek als de kortste rechthoekszijde een lengte van 15 cm heeft.

★ ★ ★ Opgave 2.9: De bolling van de Aarde

De planeet Aarde is (ongeveer) bolvormig en heeft een omtrek van 40000 km. Vat de planeet op als een perfecte bol.

a Bereken de straal van de Aarde in km nauwkeurig.

In het dagelijks leven merk je niet veel van de bolling van de Aarde. Maar stel je eens voor dat je een kaarsrechte tunnel wilt boren van Groningen naar Maastricht met een lengte van 300 km.

b Bereken hoe diep de bovenkant van die tunnel in het midden onder het aardoppervlak zou zitten.

★ ★ ★ Opgave 2.10: Uitgebreide stelling van Pythagoras

Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = a$, $AD = b$ en $AE = c$.

a Bereken de lengte van lichaamsdiagonaal AG als $a = 5$, $b = 4$ en $c = 3$.

Waarschijnlijk heb je bij a twee keer de stelling van Pythagoras toegepast. Maar dat is niet nodig: je kunt deze stelling uitbreiden naar drie dimensies.

b Laat zien, dat $AG^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

c Bereken de lengte van lichaamsdiagonaal AG als $a = 5$, $b = 4$ en $c = 3$ door de stelling van Pythagoras in drie dimensies toe te passen.

Antwoorden

2.1 ΔABC: oppervlakte 408 en omtrek $60 + \sqrt{1152}$.

ΔEFG: oppervlakte $10\sqrt{2000}$ en omtrek $80 + \sqrt{2400}$.

Pijlpuntvlieger $KLMN$: oppervlakte $\left(\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 24\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 12\right) = 120$ en omtrek $52 + 2\sqrt{244}$.

Cirkel min vierkant: oppervlakte $32\pi - 64$ en omtrek $\sqrt{128} \cdot \pi + 32$.

2.2 a $PS = 2$ cm.

b $PR \approx 3{,}23$ cm.

2.3 Er steekt nog 7,6 cm van het rietje buiten het glas.

2.4 a Je vindt ongeveer 3,5 m.

b Ja.

2.5 De gevraagde hoogte $TS = \sqrt{75} \approx 8{,}67$ m.

2.6 Bereken alle drie de zijden van de driehoek en controleer of de stelling van Pythagoras hierin klopt.

2.7 De oppervlakte van ΔABC is: $\frac{1}{4}\sqrt{455} \approx 5{,}33$ cm^2.

2.8 a Omdat er twee gelijke hoeken zijn.

b $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

c $8\sqrt{2} \approx 11{,}3$ cm.

d Omdat twee van deze driehoeken een gelijkzijdige driehoek kunnen vormen.

e $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

f De hypotenusa is dan 30 cm en de langste rechthoekszijde is $15\sqrt{3}$ cm.

2.9 a Ongeveer 6366 km.

b Ongeveer 2 km diep!

2.10 a $AG = \sqrt{50} \approx 7{,}07$

b $AG^2 = AC^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

c Je krijgt weer $AG = \sqrt{50}$.

1.3 Oppervlakte ruimtefiguur

Inleiding

Als je zo'n nestkast wilt bouwen moet je weten hoeveel materiaal ervoor nodig is. Als je hout gebruikt dat overal even dik is, betekent dit dat je de oppervlakte aan hout wilt uitrekenen. Dat kun je vast al.
Je zult zien, dat hierbij af en toe de stelling van Pythagoras goed van pas komt.

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- de oppervlakte berekenen van een ruimtelijke figuur waarvan je een uitslag kunt tekenen.

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- werken met coördinaten.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het berekenen van de oppervlakte van ruimtelijke figuren waarbij je de stelling van Pythagoras en de oppervlakteformules van vlakke figuren gebruikt.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

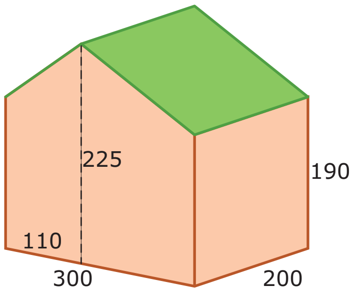
Om te onthouden

Verwerken

★ Opgave 3.1

Je ziet hier een vereenvoudigde tekening van een tuinhuisje. Het grondvlak is een rechthoek, evenals de twee opstaande zijwanden. De voorwand en de achterwand zijn vijfhoeken. Alle afmetingen in de figuur zijn in cm.

Bereken de oppervlakte van het dak van dit tuinhuisje en geef je antwoord in m^2 in twee decimalen nauwkeurig.

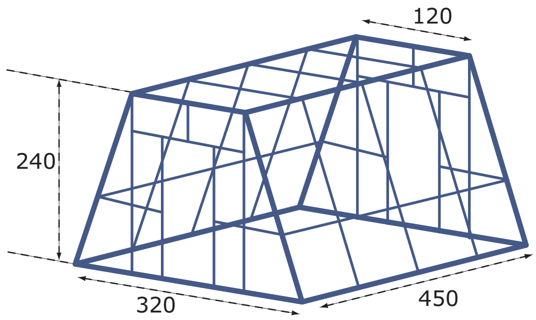


Figuur 3.2

★ Opgave 3.2

Je ziet hier een bijzondere plantenkas. De afmetingen zijn gegeven in cm. De kas heeft de vorm van een symmetrisch prisma en de bodem is uiteraard niet van glas.

Bereken de totale hoeveelheid glas in m^2 die voor deze plantenkas nodig is.



Figuur 3.3

★ Opgave 3.3

Je ziet hier een zogenaamde Romneyloods. Het is een loods in de vorm van een halve cilinder met een diameter van 11 m. De bodem is een rechthoek van 11 bij 20 m.

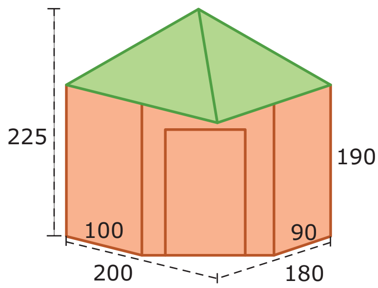
Je hebt zo'n loods laten plaatsen. De halve cilinder die het dak vormt wordt rood geschilderd, de voorkant en de achterkant worden wit gemaakt. Bereken hoeveel m^2 er rood moet worden geschilderd. Omdat het dak van golfplaat is gemaakt moet je er rekening mee houden dat je voor golfplaat ongeveer 1,5 keer zoveel verf nodig hebt per m^2.

Figuur 3.4

★ Opgave 3.4

Dit is een vereenvoudigde tekening van een hoekblokhut. Het dak van die blokhut is een vierzijdige piramide waarvan de top boven het midden van het grondvlak zit. De blokhut zelf is een balk waarvan een hoek is afgesneden om een toegangsdeur in te maken. De afmetingen bij de figuur zijn in cm.

Bereken de oppervlakte van het dak van de blokhut.



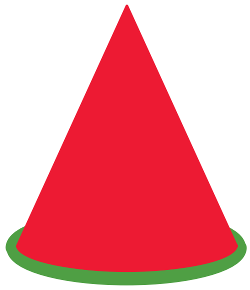
Figuur 3.5

★ ★

Opgave 3.5

Dit feesthoedje bestaat uit een kegel waarvan de grondcirkel een diameter van 20 cm heeft en de hoogte (de afstand van de top van de kegel naar het middelpunt van de grondcirkel) ook 20 cm is. Let verder niet op de groene sierrand.

Bereken de oppervlakte aan stevig papier die je voor dit feesthoedje nodig hebt.

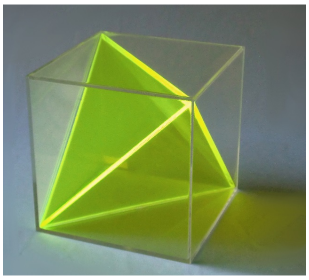


Figuur 3.6

★ ★

Opgave 3.6

In een kubus met ribben van 6 cm wordt een regelmatig viervlak geplaatst. Hoeveel mm^2 is de oppervlakte van dat tetraëder?

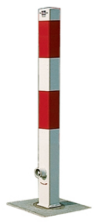


Figuur 3.7

Toepassen

De gemeente D heeft 240 van deze palen op zijn grondgebied. Ze hebben een vierkant profiel van 70 mm bij 70 mm en zijn 90 cm hoog. De bovenkant is een kunststof kapje. De rood geverfde gedeeltes zijn 20 cm hoog.
Deze palen worden dit jaar van nieuwe witte en rode verf voorzien. Er is 5 liter verf nodig voor 40 m^2.

Hoeveel liter witte verf en hoeveel liter rode verf is nodig om alle paaltjes in deze gemeente te verven?



Figuur 3.8

★ ★

Opgave 3.7: Paaltjes verven

Bekijk het probleem van het verven van de paaltjes.

a Hoeveel oppervlakte witte verf heeft één paal? Hoeveel liter witte verf is er dus nodig?

b Hoeveel oppervlakte rode verf heeft één paal? Hoeveel liter rode verf is er dus nodig?

★ ★ ★

Opgave 3.8: Zouttoren

Vroeger werd in Twente naar zout geboord met boortorens die er zo uitzagen als je op deze oude foto ziet. Ze werden gemaakt van hout. Om te berekenen hoeveel hout ervoor nodig is, is nog een behoorlijke klus.

Daarom let je maar beter niet op de twee bijgebouwtjes op de grond, maar alleen op de toren zelf. Het grondvlak daarvan is een vierkant van 6 bij 6 m, het bovenvlak een vierkant van 2 bij 2 m. De vier opstaande zijvlakken zijn symmetrische trapezia. De hoogte van dit deel van de toren is 20 m. Daar bovenop staat een balk van 2 bij 2 bij 1,5 m.

Figuur 3.9

a Bereken oppervlakte aan hout van de toren zoals die hierboven wordt beschreven.

Je hebt nu een redelijke schatting van de oppervlakte aan hout van het hele bouwwerk, inclusief de voorkanten van de twee bijgebouwtjes. Alleen hun vier zijvlakken ontbreken nog.

b Hoe zou je daarvan nog een goede schatting kunnen maken? Maak een redelijke schatting van de totale oppervlakte aan hout nodig voor zo'n boortoren.

Antwoorden

3.1 Ongeveer 6,16 m^2.

3.2 393600 cm^2 en dat is ongeveer 39,4 m^2.

3.3 Je hebt voor ongeveer $165\pi \approx 518{,}4$ m^2 verf nodig.

3.4 $200 \cdot \sqrt{9325} + 180 \cdot \sqrt{11225} \approx 38384$ cm^2.

3.5 $10\pi \cdot \sqrt{500} \approx 702{,}5$ cm^2.

3.6 Ongeveer 12472 mm^2.

3.7 a Er is ongeveer 7,5 liter witte verf nodig.

b Er is ongeveer 6,25 liter witte verf nodig.

3.8 a In totaal 333,6 m^2 aan hout.

b Eigen antwoord.

1.4 Inhoud ruimtefiguur

Inleiding

Als je zo'n nestkast wilt ophangen, moet hij groot genoeg zijn voor een koolmezengezin. De inhoud ervan is dus belangrijk voor het dierenwelzijn.
Je zult zien, dat hierbij af en toe de stelling van Pythagoras goed van pas komt.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- de inhoud berekenen van de volgende ruimtelijke figuren: balk, prisma, cilinder, piramide, kegel.

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- de oppervlakte berekenen van een ruimtelijke figuur waarvan je een uitslag kunt tekenen.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het berekenen van de inhoud, het volume, van ruimtelijke figuren waarbij je soms de stelling van Pythagoras en de oppervlakteformules van vlakke figuren gebruikt. Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

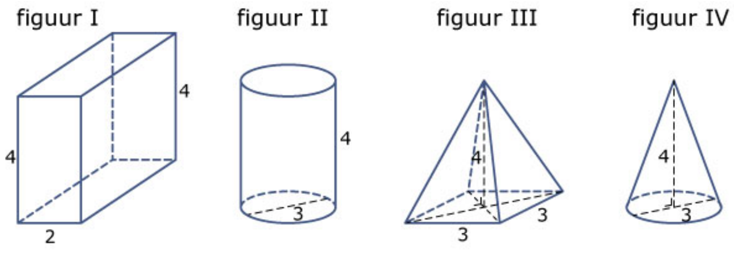
Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 4.1**

Bereken de inhoud van deze vier figuren, waar nodig in twee decimalen nauwkeurig.



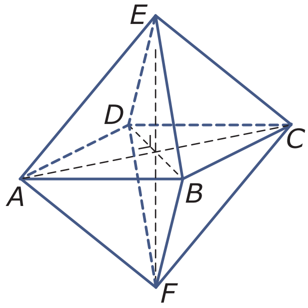
Figuur 4.2

★ **Opgave 4.2**

Een octaëder bestaat uit twee regelmatige vierzijdige piramides die een gemeenschappelijk grondvlak hebben maar verschillende top, zie figuur. Alle ribben van het octaëder zijn 8 cm.

a Bereken de inhoud van het octaëder.

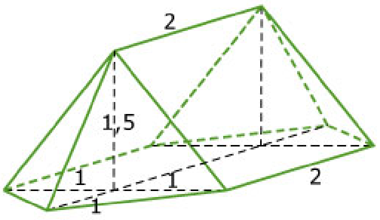
b Bereken de oppervlakte van het octaëder.



Figuur 4.3

★ **Opgave 4.3**

Hier zie je een tent. De afmetingen zijn in de figuur in meter gegeven. Bereken de inhoud van deze tent.



Figuur 4.4

★ **Opgave 4.4**

Neem aan dat dit blikje tomatenblokjes zuiver cilindrisch is. De binnenmaten zijn: hoogte 10,4 cm en diameter 7,3 cm. Je ziet dat er 425 milliliter in moet kunnen.

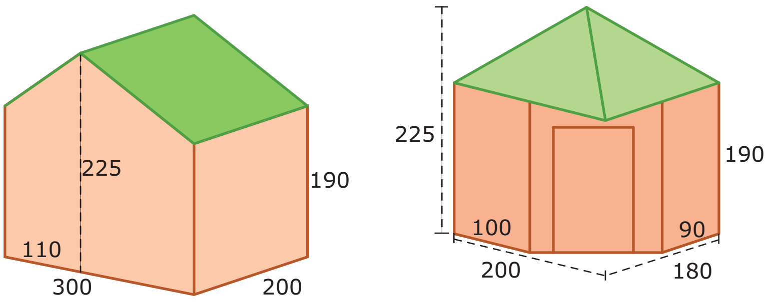
a Bereken de inhoud van dit blik en ga na of er echt 425 milliliter in kan.

b Bereken de oppervlakte van het etiket op het blik.

Figuur 4.5

★ **Opgave 4.5**

Bereken de inhoud van elk van deze twee tuinhuisjes in m^3 in één decimaal nauwkeurig. Het linker tuinhuisje is een prisma, het rechter tuinhuisje is een hoekblokhut waarvan de onderkant een vijfzijdig prisma is en het dak een vierzijdige piramide met een rechthoekig grondvlak. De afmetingen zijn in centimeter.



Figuur 4.6

★ **Opgave 4.6**

Stel je moet een miljoen briefjes van € 100 in één keer meenemen. De afmeting van zo'n briefje is 147 bij 82 mm met een dikte van ongeveer 0,05 mm. Het papier weegt 1,2 gram/cm^3.

Hoe ga je dat vervoer regelen? Neem je een schoenendoos, een flinke koffer of een grote vrachtwagen? Licht je antwoord toe.

★ ★ **Opgave 4.7**

Een moderne stoel bestaat uit een gebogen frame waarop een zitting en een rugleuning zijn gemonteerd. Het frame is een gebogen ronde buis met een totale lengte van 8 m. Deze buis heeft een buitendiameter van 20 mm en een binnendiameter van 16 mm. Hij is gemaakt van staal van 7,6 gram per cm^3 en daarna verchroomd.

Hoeveel kg staal is er voor deze stoel nodig?

★ ★ **Opgave 4.8**

Dit ijshoorntje is kegelvormig. Het heeft een hoogte van 13 cm en de fabrikant beweert dat het ijsje een volume van 125 milliliter heeft.

a Hoe groot is dan de diameter van de bovenkant van zo'n ijsje? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

b Hoeveel ijsjes passen er theoretisch in een doos van 6,1 bij 13 bij 24,4 cm? En hoeveel passen er in de praktijk in als alle ijsjes netjes heel moeten blijven?

Figuur 4.7

Toepassen

Een silo is een opslagplaats voor stort- of bulkgoederen in de vorm van poeders of korrelvormige producten zoals graan, kolen, cement, veevoer, zand, grint, kunstmest, enz. Hier zie je er één in de vorm van een stalen cilinder met een kegelvormige onderkant waar ook de uitstroomopening zit. het geheel staat op vier poten.

De cilinder is (inclusief poten) 3,00 m hoog. De uitstroomopening zit 1,67 m boven de grond en de onderrand van de cilinder zit op 3,07 m boven de grond. De diameter van de cilinder is 1,48 m.

Je kunt berekenen dat er ongeveer 6 m^3 graan in deze silo kan.

Figuur 4.8

★ ★ **Opgave 4.9: Graansilo**

Bekijk de graansilo hierboven. Je kunt de inhoud ervan berekenen.

a Laat zien dat de inhoud inderdaad ongeveer 6 m^3 is.

b Je wilt de silo zelf (dus zonder de poten) rood schilderen. Hoeveel bedraagt de oppervlakte die je moet schilderen?

★ ★ ★ **Opgave 4.10: Zouttoren**

Vroeger werd in Twente naar zout geboord met boortorens die er zo uitzagen als je op deze oude foto ziet. Ze werden gemaakt van hout.

Let niet op de twee bijgebouwtjes op de grond, maar alleen op de toren zelf. Het grondvlak daarvan is een vierkant van 6 bij 6 m, het bovenvlak een vierkant van 2 bij 2 m. De vier opstaande zijvlakken zijn symmetrische trapezia. De hoogte van dit deel van de toren is 20 m. Daar bovenop staat een balk van 2 bij 2 bij 1,5 m.

Bereken de inhoud van de toren zoals die hierboven wordt beschreven.

Figuur 4.9

Antwoorden

4.1 Inhoud figuur I: 128.
Inhoud figuur II: $\approx 28{,}27$.
Inhoud figuur III: 12.
Inhoud figuur IV: $\approx 9{,}42$.

4.2 a $\frac{128}{3}\sqrt{32}$.

b $32\sqrt{48}$.

4.3 4 m^3.

4.4 a Ongeveer 435 mL. Dus het kan.

b $\approx 238{,}5$ cm^2.

4.5 Het linker tuinhuisje: ongeveer 12,5 m^3.

Het rechter tuinhuisje: ongeveer 6,4 m^3.

4.6 Het volume is 0,6072 m^3 dus een ruime auto.

4.7 Iets minder dan 6,9 kg.

4.8 a Ongeveer 6,1 cm.

b Er zouden ≈ 15 ijsjes in moeten gaan.

4.9 a Kegel $\approx 0{,}803$ m^3 en cilinder $\approx 5{,}161$ m^3 samen ≈ 6 m^3.

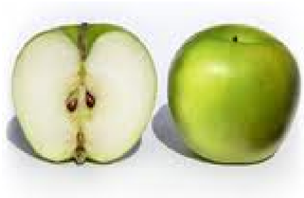
b $\approx 18{,}92$ m^2.

4.10 $346\frac{2}{3}$ m^3.

1.5 Doorsneden

Inleiding

Je ziet hier een doorsnede van een appel. Zo'n doorsnede is bedoeld om te laten zien hoe de appel er van binnen uitziet.
Van allerlei (massieve) ruimtelijke figuren kun je doorsneden maken, een goede zaag is voldoende...



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- doorsneden van ruimtelijke figuren tekenen;
- doorsneden van ruimtelijke figuren op ware grootte tekenen;

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- de oppervlakte en de inhoud berekenen van de volgende ruimtelijke figuren: balk, prisma, cilinder, piramide, kegel.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat over de doorsnede van een vlak en een ruimtelijke figuur. Bedenk vooral wanneer een doorsnede correct is getekend en hoe je een doorsnede zelf kunt tekenen. Vervolgens moet je een doorsnede ook nog op ware grootte (en in de juiste vorm) kunnen tekenen.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

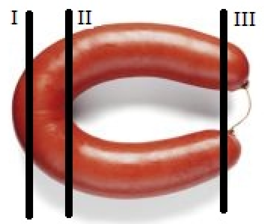
Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 5.1**

Dit is een rookworst. De zwarte lijnen geven aan waar hij wordt doorgesneden.

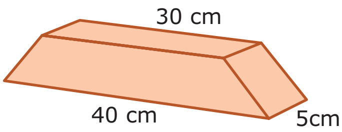
Maak een schets van die drie verschillende doorsneden.



Figuur 5.2

★ **Opgave 5.2**

Van een balkje van 200 bij 5 bij 5 cm wordt een vierkant schilderijlijstje gemaakt. Uit het balkje worden daartoe vier van deze afgeschuinde lijstdelen gezaagd.



Figuur 5.3

a Hoe groot kan het schilderijtje maximaal zijn?

b Je hebt niet de volle 2 m van de lengte van de balk nodig. Hoeveel houd je maximaal over?

c De schuine kanten van de lijstdelen worden aan elkaar verbonden, onder andere door ze aan elkaar te lijmen. Welke vorm heeft zo'n schuine kant? Bereken de afmetingen ervan.

d Hoeveel cm^2 moet met lijm worden ingesmeerd? Geef je antwoord in gehele cm^2 nauwkeurig.

★ **Opgave 5.3**

Een balk $ABCD.EFGH$ heeft een lengte van 20 cm, een breedte van 6 cm en een hoogte van 8 cm.

a Bereken de oppervlakte van het grootste diagonaalvlak.

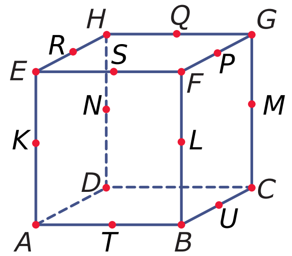
Punt P is het midden van ribbe BF en punt Q is het midden van ribbe DH.

b Teken de doorsnede van het vlak door A, P en Q met de balk.

c Teken de doorsnede $APGQ$ op ware grootte.

★ **Opgave 5.4**

Hier zie je kubus $ABCD.EFGH$ met een aantal punten die telkens het midden vormen van de ribbe waar ze op liggen. Alle ribben zijn 4 cm lang.



Figuur 5.4

a Teken de doorsnede van het vlak door S, T en U en bereken er de oppervlakte van in één decimaal nauwkeurig.

b Teken de doorsnede van het vlak door A, B en M en bereken er de oppervlakte van in één decimaal nauwkeurig.

c Teken de doorsnede van het vlak door P, S en L en bereken er de oppervlakte van in één decimaal nauwkeurig.

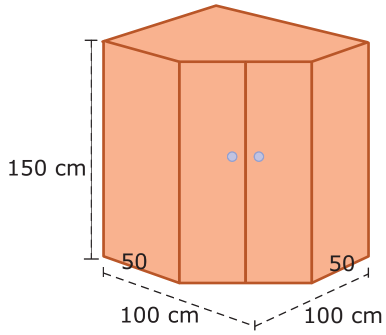
d Teken de doorsnede van het vlak door B, K en M en bereken er de oppervlakte van in één decimaal nauwkeurig.

e Teken de doorsnede van het vlak door T, U en M en bereken er de oppervlakte van in één decimaal nauwkeurig.

★ **Opgave 5.5**

Je ziet hier een houten hoekkast. Hij heeft de vorm van een balk waarvan een driehoekig prisma is afgezaagd. Alle afmetingen zijn in cm. In de kast zit onder andere een verticale plank tussen de achterste ribbe en het midden van de twee deurtjes.

Teken deze houten kastplank op schaal 1 : 20.



Figuur 5.5

★ ★ **Opgave 5.6**

Een zuiver ronde boomstam heeft een doorsnede van 52 cm. Er moet een balk van 10 cm dikte uit worden gezaagd.

Hoe breed kan deze balk maximaal zijn?

★ ★ **Opgave 5.7**

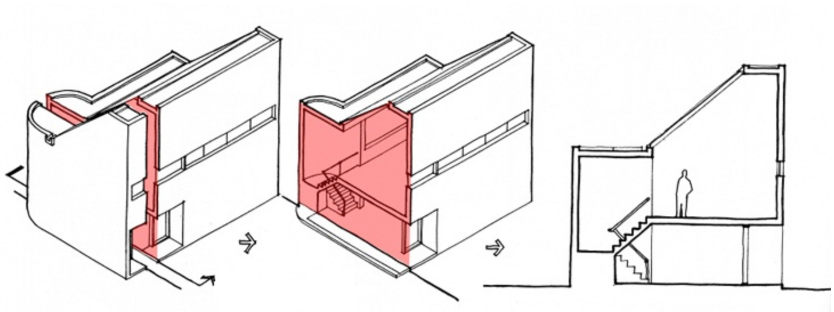
Een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ heeft een vierkant grondvlak van 4 bij 4 cm en een hoogte $TS = 6$ cm. Punt P is het midden van ribbe AT.

a Teken de piramide met daarin doorsnede $BCQP$.

b Teken deze doorsnede op ware grootte en bereken er de oppervlakte van.

Toepassen

Hier zie je hoe een doorsnede van een huis wordt getekend.



Figuur 5.6

Ook in de biologie en de instrumentmakerij wordt regelmatig gebruik gemaakt van een doorsnede. Het gaat er dan vooral om te laten zien hoe objecten er van binnen uitzien.

★ ★

Opgave 5.8: Doorsnede van een huis

Je ziet in **Toepassen** de doorsnede van een huis.

a Welke informatie geeft een doorsnede die een aanzicht niet geeft?

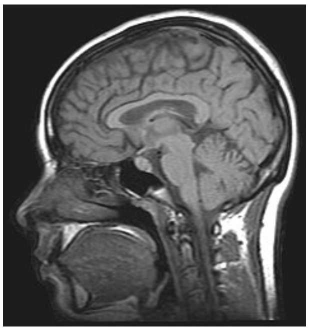
b Je ziet hier een 'huis' met een dakkapel. Teken zelf een dwarsdoorsnede van dit huis, kies geschikte afmetingen en een passende indeling.

Figuur 5.7

★ ★ ★

Opgave 5.9: MRI scanner

Een **MRI scanner** maakt een doorsnede foto van (delen van) levend weefsel, zoals het menselijk lichaam, met behulp van een techniek die 'magnetic resonance imaging' heet. Dit wordt veel toegepast in de medische wetenschap. Zo'n doorsnede foto heet een 'mri-scan'.



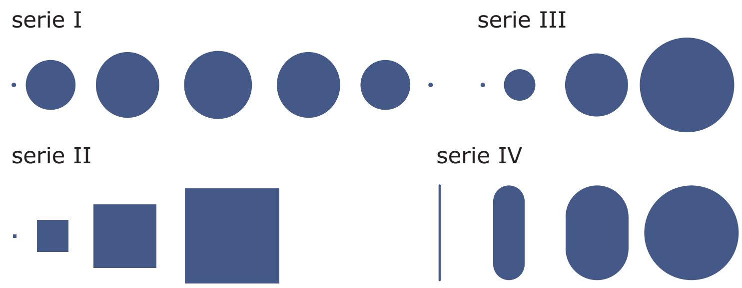
Figuur 5.8

a Welke informatie geeft zo'n doorsnede zoals je die hiernaast ziet? En welk nut heeft die informatie?

In het artikel uit de Wikipedia (juni 2012) waar dit plaatje uit komt vind je ook een animatie van een serie mri-scans na elkaar.

b Waarom wordt er vaak een serie evenwijdige doorsneden gemaakt?

Hier zie je vier series evenwijdige doorsneden van ruimtelijke objecten. De doorsneden zijn op gelijke afstanden van elkaar gemaakt.



Figuur 5.9

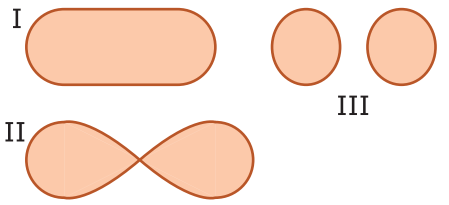
c Beschrijf bij elke serie doorsneden om welk voorwerp het (waarschijnlijk) gaat. Leg ook uit waarom je nooit absoluut zeker kunt zijn van je antwoord.

d Hoe ziet een serie evenwijdige doorsneden van een kubus met ribben van 6 cm er uit als alle doorsneden evenwijdig zijn aan een grensvlak?

e Hoe ziet een serie van vijf evenwijdige doorsneden van een kubus met ribben van 6 cm er uit als ze loodrecht op een lichaamsdiagonaal worden gemaakt?

Antwoorden

5.1 Zie de figuur.



5.2 a 30 cm bij 30 cm.

b Maximaal 55 cm.

c Een rechthoek van 5 cm bij $\sqrt{50}$ cm.

d ≈ 283 cm^2.

5.3 a 200 cm^2.

b Het wordt parallellogram $APGQ$.

c Parallellogram $APGQ$ heeft zijden $\sqrt{409}$ en $\sqrt{73}$ en diagonaal $PQ = \sqrt{464}$.

5.4 a Rechthoek $STUP$ van 4 bij $\sqrt{8}$; oppervlakte $\approx 11{,}3$ cm^2.

b Rechthoek $ABMN$ van 4 bij $\sqrt{20}$; oppervlakte $\approx 17{,}9$ cm^2.

c Driehoek PSL met zijden van $\sqrt{8}$; oppervlakte $\approx 3{,}5$ cm^2.

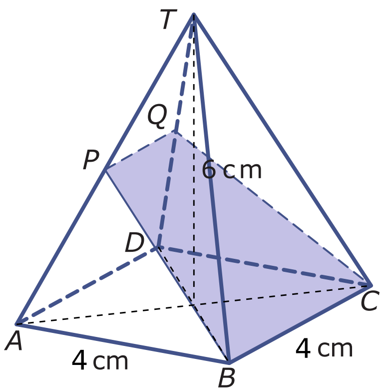
d Ruit $BMHK$ met zijden van $\sqrt{20}$; oppervlakte van $\approx 19{,}6$ cm^2.

e Regelmatige zeshoek $TUMQRK$ met zijden van $\sqrt{8}$; oppervlakte $\approx 20{,}8$ cm^2.

5.5 Een rechthoek van 7,5 bij 5,4 cm.

5.6 De breedte van de balk is ≈ 51 cm.

5.7 a De doorsnede wordt een symmetrisch trapezium omdat $BC // PQ$ en $BP = CQ$.



b Trapezium $BCQP$ met $BC = 4$, $PQ = 2$ cm en hoogte $\sqrt{18}$ cm.

5.8 a Een doorsnede laat zien hoe een object er van binnen uitziet.

b Eigen antwoord.

5.9 a Je kunt ermee binnen het hoofd kijken. Botbreuken, tumoren, en dergelijke worden zichtbaar.

b Dan kun je de vorm van de botbreuk, de tumor, afleiden.

c Serie I: een bol.
Serie II: een regelmatige vierzijdige piramide.
Serie III: een kegel.
Serie IV: iets als een koffiefilter.

d Een serie gelijke vierkanten van 6 bij 6.

e Eerst een punt, dan een gelijkzijdige driehoek met zijden van $\sqrt{6^2+6^2} = \sqrt{72}$, dan een regelmatige zeshoek met zijden van $\sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18}$, dan weer een gelijkzijdige driehoek met zijden van $\sqrt{6^2+6^2} = \sqrt{72}$ en tenslotte een punt.

1.6 Vergroten

Inleiding

Dit is een model van een Smart ForTwo, schaal 1 : 18.

Alle afmetingen zijn dus $\frac{1}{18}$ deel van de werkelijke afmetingen.

Maar wat gebeurt er dan met de oppervlakte en de inhoud?

Figuur 6.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met vergrotingen en verkleiningen van figuren en daarbij de begrippen lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor gebruiken.

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- de oppervlakte en de inhoud berekenen van de volgende ruimtelijke figuren: balk, prisma, cilinder, piramide, kegel.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat over het verband tussen lengtevergroting, oppervlaktevergroting en inhouds(volume)vergroting. Ga ook na hoe je hiermee kunt werken bij voorwerpen die op schaal zijn getekend/gemaakt.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 6.1**

Een voetbalveld is getekend op schaal 1 : 1000. In de tekening is het 12 cm lang en 7,5 cm breed.

a Hoe groot is dit voetbalveld in werkelijkheid?

b Met welk getal moet je de afmetingen van dit veld vermenigvuldigen om de werkelijke afmetingen te krijgen?

c Hoe groot is de oppervlakte van het voetbalveld op de tekening?

d Met welk getal moet je de oppervlakte van dit veld vermenigvuldigen om de werkelijke oppervlakte te krijgen?

e Hoeveel m^2 is de oppervlakte van het voetbalveld in werkelijkheid?

★ **Opgave 6.2**

Op een kaart met een schaal van 1 : 200 heeft een bouwkavel een oppervlakte van 32 cm^2.

Hoeveel m^2 is de oppervlakte van dit kavel in werkelijkheid?

★ **Opgave 6.3**

Een raam heeft een oppervlakte van 1,2 m^2. Een tweede raam heeft afmetingen die precies 2,5 keer zo groot zijn als het eerste.

a Hoeveel m^2 is de oppervlakte van dit tweede raam?

Een derde raam heeft een oppervlakte van 4,80 m^2.

b Hoeveel keer zo groot zijn de afmetingen van dit derde raam ten opzichte van het eerste?

c Hoeveel keer zo groot zijn de afmetingen van dit derde raam ten opzichte van het tweede raam?

★ **Opgave 6.4**

Er lopen drie koeien in de wei. Ze zitten elk aan een touw dat met een pin in de grond vast zit. Het touw van koe Antje is 10 m lang.

a Hoeveel m^2 gras kan zij eten?

Het touw van Bertha is twee maal zo lang.

b Hoeveel m^2 gras kan zij meer eten dan Antje?

Carrie kan vijf maal zoveel gras eten als Antje.

c Hoeveel keer zo lang is het touw van Carrie als dat van Antje?

★ **Opgave 6.5**

Bij een schaalmodel van een voorwerp worden alle lengtes met een vaste vergrotingsfactor verkleind. Dit model van een Smart ForTwo heeft een schaal van 1 : 18.
De afmetingen van een echte Smart ForTwo van deze versie zijn: lengte 250 cm, breedte 152 cm en hoogte 155 cm. De cilinderinhoud van de motor is 698 cc (1 cc = 1 cm^3) en er past 33 L benzine in de tank. De totale glasoppervlakte is ongeveer 3,2 m^2.

Figuur 6.2

a Bereken de lengte, de breedte en de hoogte van het schaalmodel in cm nauwkeurig.

b Bereken de glasoppervlakte van het schaalmodel in mm^2 nauwkeurig.

c Bereken de cilinderinhoud van het schaalmodel in mm^3 nauwkeurig.

d Bereken hoeveel mm^3 benzine er in de tank van het schaalmodel past.

★ **Opgave 6.6**

De spoorlijn van Arnhem naar Leeuwarden was in september 1868 geheel klaar. De lengte van deze spoorlijn is 166 km.
Op een kaart is deze lijn 16,6 cm lang.

Hoeveel bedraagt de schaal van die kaart?

★ **Opgave 6.7**

Tandpasta kun je in tubes van 25 mL en 150 mL kopen. Deze tubes zijn gelijkvormig.

a Hoeveel keer zo lang is de grote tube ten opzichte van de kleinere?

b De kleinste tube is 12 cm lang. Hoe lang is de grootste tube?

c De tubes zijn van plastic cilinders gemaakt. Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de grote tube vergeleken met de kleine tube?

★ **Opgave 6.8**

Een ringslang met lengte van 1 m heeft een gewicht van 240 gram en een huidoppervlakte van 483 cm^2. Een boa constrictor is een slang die veel groter is. Een bepaalde boa weegt 51,84 kg.

Hoe groot is de huidoppervlakte van deze boa?

Figuur 6.3

Toepassen

Onze planeet **Aarde** heeft een omtrek van ongeveer 40.000 km, een oppervlakte van ongeveer $5{,}11 \cdot 10^8$ km^2 en een inhoud van ongeveer $1{,}087 \cdot 10^{12}$ km^3. Je maakt een schaalmodel op schaal 1 : 10.000.000.

Je kunt dan de omtrek, de diameter, de oppervlakte en de inhoud van het schaalmodel berekenen.

Figuur 6.4

★ ★ **Opgave 6.9: Schaalmodel van de Aarde**

Je ziet in **Toepassen** enkele gegevens van de Aarde.

a Over welke vergrotingsfactor gaat het in de tekst, uitgaande van de planeet Aarde?

b Bereken de omtrek en de diameter van je schaalmodel.

c Bereken de oppervlakte en de inhoud van je schaalmodel.

★ ★ **Opgave 6.10: Maan en Aarde**

De maan past ongeveer 64 keer in de aarde. (Het volume van de aarde is dus ongeveer 64 keer dat van de maan.)

Hoeveel keer zo groot is de diameter van de aarde als die van de maan?

Antwoorden

6.1 a 120 m lang en 75 m breed.

b Met 1000.

c 90 cm^2.

d Met 1.000.000.

e 9000 m^2.

6.2 128 m^2.

6.3 a 7,50 m^2.

b 2 keer zo groot.

c 0,8 keer zo groot.

6.4 a $100\pi \approx 314$ m^2.

b Ongeveer 942 m^2 meer.

c $\approx$ 2,24 keer zo lang.

6.5 a Ongeveer 14 cm, 18 cm, 9 cm.

b Ongeveer 9877 mm^2.

c Ongeveer 120 mm^3.

d Ongeveer 5658 mm^3.

6.6 1 : 1000000.

6.7 a $\approx$ 1,82 keer.

b Ongeveer 21,84 cm.

c Ongeveer 3,30 keer zo groot.

6.8 17388 cm^2.

6.9 a $\frac{1}{10.000.000} = 1 \cdot 10^{-7}$

b De omtrek is 400 cm en de diameter $\approx$ 127,3 cm.

c De oppervlakte is $\approx$ 5,11 m^2 en de inhoud is $\approx$ 1,087 m^3.

6.10 Een volumevergrotingsfactor van 64 betekent een lengtevergrotingsfactor van $\sqrt[3]{64} = 4$. Dus de diameter van de aarde is ongeveer 4 keer die van de maan.

1.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

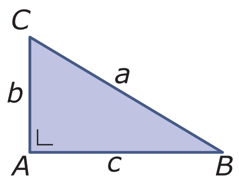
- stelling van Pythagoras — rechthoekszijden, hypotenusa (langste zijde)
- hulplijn
- oppervlakte van ruimtelijke figuren
- inhoud (volume) van ruimtelijke figuren
- doorsnede — op ware grootte
- lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor — gelijkvormige figuren

Activiteitenlijst

- werken met de stelling van Pythagoras om lengtes te berekenen;
- lengtes in het platte vlak en in ruimtelijke figuren berekenen;
- de oppervlakte van ruimtelijke figuren berekenen;
- het volume (de inhoud) van ruimtelijke figuren berekenen;
- eenvoudige doorsnijdingen van ruimtelijke figuren tekenen, ook op ware grootte;
- ruimtelijke figuren vergroten (verkleinen) — vergrotingsfactoren omrekenen.

Opgave 7.1

Je ziet hier een rechthoekige driehoek ABC. In zo'n driehoek geldt de stelling van Pythagoras.



Figuur 7.1

a Teken zelf zo'n figuur en geef er bij aan welke hoek de rechte hoek is, welke zijden de rechthoekszijden zijn en welke zijde de hypotenusa (of lange zijde) is. Zet ook de stelling van Pythagoras in deze driehoek ernaast.

b Laat met een voorbeelduitwerking zien hoe je a berekent als $b = 4$ en $c = 7$. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Laat met een voorbeelduitwerking zien hoe je b berekent als $a = 9$ en $c = 7$. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 7.2

Ten opzichte van een xy-assenstelsel zijn de punten $A(-2,5)$, $B(1,0)$ en $C(8,5)$ gegeven.

a Teken deze punten in het assenstelsel en teken ΔABC.

b Laat met een voorbeelduitwerking zien hoe je kunt nagaan of ΔABC rechthoekig is.

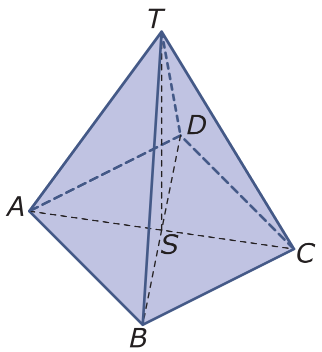
c Wat voor soort hoek is $\angle B$? En waarom?

★ Opgave 7.3

Van deze regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ heeft vierkant $ABCD$ zijden met een lengte van 4 cm en is $ST = 6$ cm.

a Laat zien hoe je de lengte van AT berekent.

b Punt M is het midden van ribbe CT. Laat zien hoe je de lengte van AM berekent.



Figuur 7.2

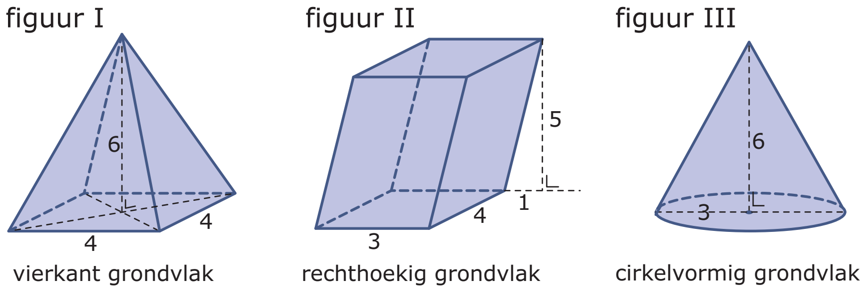
Opgave 7.4

Bekijk de regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ van de vorige opgave.

Laat zien hoe je de oppervlakte van deze piramide (inclusief het grondvlak) berekent.

Opgave 7.5

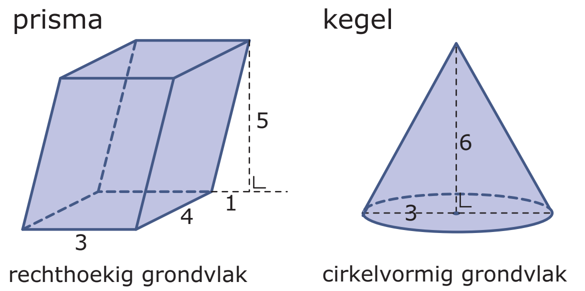
Laat zien hoe je de inhoud van elk van deze lichamen berekent.



Figuur 7.3

Opgave 7.6

Laat zien hoe je de oppervlakte van elk van deze lichamen berekent.

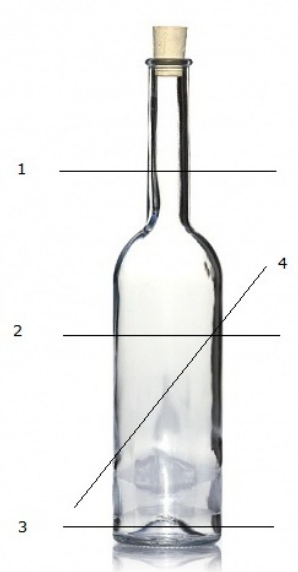


Figuur 7.4

Opgave 7.7

Je ziet hier een fles waarvan de bodem in het midden een uitstulping kent, de 'ziel' van de fles. Door middel van een streep is een viertal doorsneden door deze fles aangegeven.

Maak een schets van die vier doorsneden.



Figuur 7.5

Opgave 7.8

Kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribben van 6 cm. Punt P is het midden van AE.

a Teken de kubus met daarin de doorsnede van het vlak door P, F en G met de kubus.

b Teken deze doorsnede op ware grootte.

De figuur die je nu hebt gekregen is een schaalmodel van een veel grotere kubus met dezelfde doorsnede er in. De gebruikte schaal is 1 : 50.

c Hoeveel bedraagt de lengtevergrotingsfactor van dit schaalmodel naar de werkelijke kubus?

d Hoeveel keer zo groot worden de oppervlakte en de inhoud van de werkelijke kubus?

e Wat van de doorsnede $PFGQ$ verandert wel en wat verandert niet door deze vergroting?

Testen

★ Opgave 7.9

Van ΔPQR is $PQ = 8$ cm en $QR = 15$ cm.

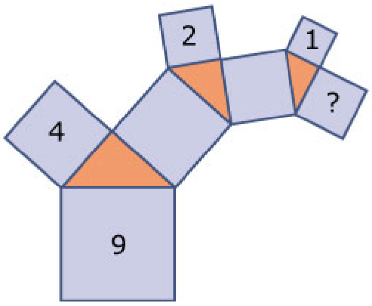
a Laat zien dat $\angle Q$ een rechte hoek is als $PR = 17$ cm.

b Als $PR = 16$ cm, is $\angle Q$ dan scherphoekig of stomphoekig?

★ Opgave 7.10

In deze figuur sluiten vierkanten drie rechthoekige driehoeken in.
In een aantal vierkanten staat de oppervlakte ervan gegeven.

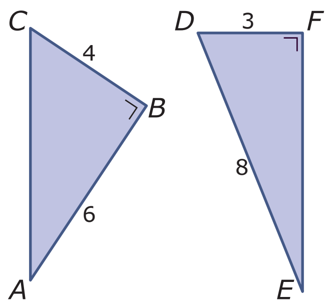
Bereken de oppervlakte van het vierkant met het vraagteken er in.



Figuur 7.6

★ Opgave 7.11

Dit zijn twee rechthoekige driehoeken.

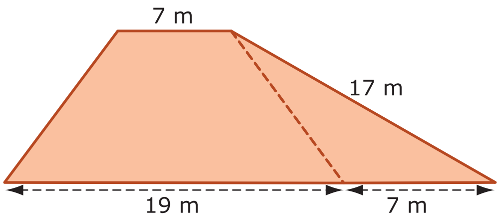


Figuur 7.7

Bereken de lengte van AC en de lengte van EF.

★ **Opgave 7.12**

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een rivierdijk. Deze dwarsdoorsnede bestaat uit een symmetrisch trapezium waartegen een stomphoekige driehoek is gelegd. Die driehoek is ontstaan door dijkversteviging aan de rivierzijde.



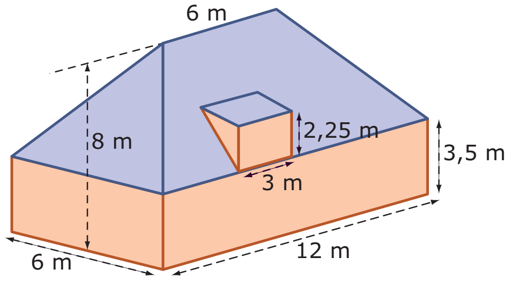
Figuur 7.8

a Bereken de hoogte van deze dijk in cm nauwkeurig.

b Dit verstevigde stuk dijk is 12 km lang. Bereken hoeveel m^3 grond er nodig is voor de dijk plus de versteviging en geef je antwoord in miljoenen m^3 in één decimaal nauwkeurig.

★ **Opgave 7.13**

Dit is een vereenvoudigde weergave van een huisje. Alle ramen en deuren zijn weggelaten. De vloer en de vloer van de verdieping zijn rechthoeken van 6 bij 12 m. Het dak bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische trapezia. Het is bedekt met dakpannen. De dakkapel is een halve balk. De dakkapel is niet bedekt met dakpannen.



Figuur 7.9

a Teken een dwarsdoorsnede van dit huis die precies door het midden van de dakkapel gaat en evenwijdig is met de 6 m lange voorgevel.

b Bereken de lengte van de vier opstaande schuine dakranden in dm nauwkeurig.

c Hoeveel m^2 aan dakpannen ligt er op dit dak?

★ **Opgave 7.14**

Uit een zuiver ronde boomstam van 4 m lengte en een diameter van 60 cm wordt een zo dik mogelijke vierkante balk gezaagd. Deze paal is uiteraard ook 4 m lang.

a Hoe breed kan die balk maximaal zijn?

b Hoeveel dm^3 hout houd je van deze boomstam over?

c Eén uiteinde van deze balk wordt zoveel hout weggezaagd, dat er een piramidevormige punt ontstaat met een hoogte van 30 cm. Hoeveel cm^3 hout moet er worden weggezaagd?

★ **Opgave 7.15**

De **Kocatepe-moskee** in Ankara heeft vier ronde minaretten die 88 m hoog zijn. Dat is inclusief de kegelvormige spits van zo'n minaret, die 10 m hoog is en een diameter van 4 m heeft. Op een andere foto is zo'n minaret nog 8 cm hoog.

a Hoe hoog is de spits van de minaret op die foto?

b Bereken de inhoud van de kegelvormige spits.

c Hoeveel keer zo klein is het volume van de spits zoals die op de foto is te zien?

Figuur 7.10

★ **Opgave 7.16**

De **Eiffeltoren** in Parijs is (inclusief de antenne) 324 m hoog en bestaat voornamelijk uit staal. Het totale gewicht is ongeveer 7300 ton. Een schaalmodel van de Eiffeltoren is ook van staal en weegt (ook met antenne) 365 g.

a Hoe hoog zou dit schaalmodel moeten zijn?

Op 115 meter boven de grond bevindt zich de tweede verdieping met een oppervlakte van 1650 m^2.

b Hoeveel cm^2 is deze verdieping in het schaalmodel?

Toepassen

★ ★ **Opgave 7.17: Piramide van Cheops**

De **piramide van Cheops** is het enige van de zeven klassieke wereldwonderen dat tot op de dag van vandaag bewaard is gebleven. De piramide is ongeveer 230 meter breed en 147 meter hoog en bevat circa 2,3 miljoen stenen met een gemiddeld gewicht van 2500 kilogram.

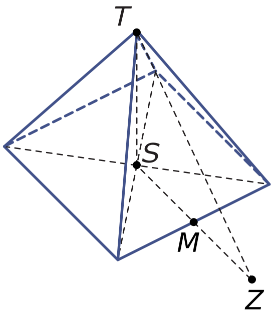
a Bereken het volume van de piramide.

b Bereken de oppervlakte van de piramide.

Hoe zou men in de Egyptische Oudheid de hoogte van de piramide hebben berekend? Welnu, dat gebeurde met de zon. Je wacht gewoon tot de schaduw van de top van de piramide midden voor de piramide op de grond komt en meet dan hoe ver het is naar de piramide. Daarnaast zet je een stok en je meet ook daarvan de schaduw.

In deze figuur is Z het schaduwpunt van T, midden voor de piramide. Je wilt nu TS berekenen, je weet SM en je hebt MZ gemeten.

c Je zet de stok zo in de grond dat hij verticaal staat en precies 1 m boven de grond uitsteekt. Stel dat de schaduw van de stok 0,90 m is en MZ = 17,3 m, klopt dan de opgegeven hoogte van deze piramide?

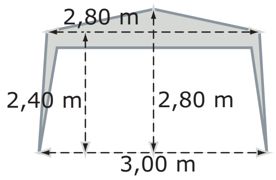


Figuur 7.11

★ ★

Opgave 7.18: Partytent

Deze partytent bestrijkt een vloeroppervlak van 3,00 bij 3,00 m. De grootste hoogte is 2,80 m. In dit vooraanzicht zie je nog een paar afmetingen.



Figuur 7.13

Figuur 7.12

a Bereken de totale lengte aan tentstokken die er voor nodig is.

Neem aan dat de vier uitgesneden lappen stof de vorm hebben van een symmetrisch trapezium met een onderkant van 3,00 m en een bovenkant van 2,60 m. De breedte van de rand stof boven die uitsnedes is 20 cm.

b Bereken de totale hoeveelheid tentdoek die voor deze partytent nodig is.

★ ★ ★

Opgave 7.19: Pythagoreïsche tripels

Een Pythagoreïsch tripel is een drietal gehele getallen dat aan de stelling van Pythagoras voldoet. Een voorbeeld is het tripel 3, 4, 5. Voor deze drie getallen geldt $3^2 + 4^2 = 5^2$.

a Ga na dat ook 5, 12, 13 een Pythagoreïsch tripel is.

b Zoek zelf nog een stuk of wat Pythagoreïsche tripels.

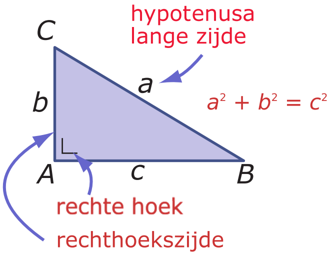
c Laat zien dat als $m > n$ geldt dat $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ een Pythagoreïsch tripel is.

d Welk Pythagoreïsch drietal krijg je als $m = 3$ en $n = 2$? En voor $m = 5$ en $n = 3$?

e Probeer nog enkele Pythagoreïsch tripels te vinden die niet eenvoudig een veelvoud zijn van de al gevonden tripels.

Antwoorden

7.1 a Zie de figuur.



b $a^2 = 4^2 + 7^2 = 65$ geeft $a = \sqrt{65} \approx 8{,}06$.

c $b^2 + 7^2 = 9^2 = 65$ geeft $b^2 = 9^2 - 7^2 = 32$ en dus $b = \sqrt{32} \approx 5{,}66$.

7.2 a Doen.

b $\left(\sqrt{34}\right)^2 + \left(\sqrt{74}\right)^2 \neq 10^2$, dus de driehoek is niet rechthoekig.

c Een scherpe hoek, want $\left(\sqrt{34}\right)^2 + \left(\sqrt{74}\right)^2 > 10^2$.

7.3 a $AT^2 = AS^2 + ST^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 + 6^2 = 44$ en dus $AT = \sqrt{44}$.

b $AM = \sqrt{\left(\sqrt{18}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{27}$.

7.4 Als P het midden van AB is, dan is TP de hoogte van een driehoekig grensvlak. Je berekent deze hoogte met de stelling van Pythagoras in bijvoorbeeld ΔPST: $PT = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$.

Vervolgens is de oppervlakte van de piramide $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{40} + 4 \cdot 4 = 16 + 8\sqrt{40}$.

7.5 Lichaam I: $\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 32$

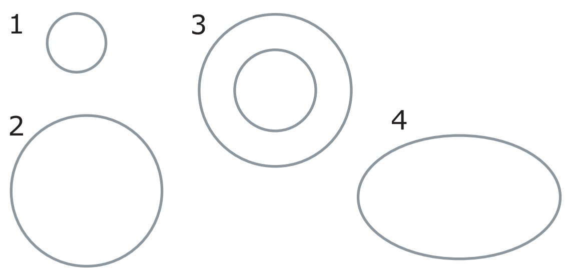
Lichaam II: $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

Lichaam III: $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 18\pi$

7.6 Prisma: $54 + 8\sqrt{26}$.

Kegel: $3\pi\sqrt{45} + 9\pi$.

7.7 Zie de figuur.



7.8 a De doorsnede is vierhoek $PFGQ$ met Q het midden van DH.

b De doorsnede wordt een rechthoek met $PQ = FG = 6$ en $PF = GQ = \sqrt{45}$.

c 50.

d De oppervlakte wordt $50^2 = 2500$ en de inhoud wordt $50^3 = 125000$ keer zo groot.

e De vorm blijft hetzelfde, de hoeken dus ook, het blijft een rechthoek. De lengtes worden met 50 vermenigvuldigd en dus wordt oppervlakte $50^2 = 2500$ keer zo groot.

7.9 a $8^2 + 15^2 = 17^2$

b Scherphoekig.

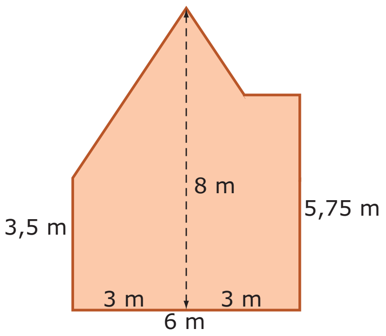
7.10 2

7.11 $AC = \sqrt{52}$ en $EF = \sqrt{55}$.

7.12 a $\approx 10{,}95$ m.

b Ongeveer 2,2 miljoen m^3 grond.

7.13 a Zie de figuur.



b $\sqrt{38{,}25} \approx 6{,}2$ m.

c Ongeveer 122 m^2.

7.14 a $\approx 42{,}2$ cm.

b Ongeveer 411 dm^3.

c 72000 cm^3.

7.15 a Ongeveer 0,91 cm.

b ≈ 42 m^3.

c $\left(\frac{1}{1100}\right)^3 \approx 7{,}5 \cdot 10^{-10}$ keer.

7.16 a Ongeveer 1,19 m.

b ≈ 224 cm^2.

7.17 a ≈ 2592100 m^3.

b ≈ 85854 m^2.

c De hoogte van de piramide moet 147 keer de lengte van de stok zijn, dat klopt.

7.18 a Ongeveer 30,50 m.

b Ongeveer 11,54 m^2.

7.19 a $5^2 + 12^2 = 13^2$.

b Bijvoorbeeld 8, 15, 17, maar natuurlijk ook alle veelvouden van 5, 12, 13 en 3, 4, 5, enzovoorts.

c Ga door haakjes uitwerken na dat $\left(m^2 - n^2\right)^2 + (2mn)^2 = \left(m^2 + n^2\right)^2$.

d 5, 12, 13 en 16, 30, 34.

e Bijvoorbeeld: 7, 24, 25 en 9, 40, 41.

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		★	★ ★	★ ★ ★
1	**Pythagoras**	★	★ ★	★ ★ ★
	De stelling van Pythagoras kennen en bewijzen.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ 1.5 ☐ 1.6 ☐ **T** 7.9 ☐ **T** 7.10 ☐ **T** 7.11 ☐ **T** 7.12 ☐ **T** 7.13 ☐ **T** 7.14 ☐	1.7 ☐ 1.8 ☐	1.9 ☐ 1.10 ☐ **T** 7.19 ☐
	Lengtes berekenen met de stelling van Pythagoras.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ 1.5 ☐ **T** 7.9 ☐ **T** 7.10 ☐	1.7 ☐	1.9 ☐ 1.10 ☐
	Met de stelling van Pythagoras nagaan of een driehoek rechthoekig is.	1.6 ☐	1.8 ☐	
2	**Lengtes berekenen**	★	★ ★	★ ★ ★
	De stelling van Pythagoras toepassen in berekeningen, onder andere ook in ruimtelijke figuren.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ 2.4 ☐ 2.5 ☐ 2.6 ☐ **T** 7.12 ☐ **T** 7.13 ☐ **T** 7.14 ☐	2.7 ☐ 2.8 ☐ **T** 7.18 ☐	2.9 ☐ 2.10 ☐
3	**Oppervlakte ruimtefiguur**	★	★ ★	★ ★ ★
	De oppervlakte berekenen van een ruimtelijke figuur waarvan je een uitslag kunt tekenen.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ **T** 7.13 ☐	3.5 ☐ 3.6 ☐ 3.7 ☐ **T** 7.17 ☐ **T** 7.18 ☐	3.8 ☐
4	**Inhoud ruimtefiguur**	★	★ ★	★ ★ ★
	De inhoud berekenen van de volgende ruimtelijke figuren: balk, prisma, cilinder, piramide, kegel.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ 4.5 ☐ 4.6 ☐ **T** 7.12 ☐ **T** 7.14 ☐ **T** 7.15 ☐	4.7 ☐ 4.8 ☐ 4.9 ☐ **T** 7.17 ☐	4.10 ☐
5	**Doorsneden**	★	★ ★	★ ★ ★
	Doorsneden van ruimtelijke figuren tekenen.	5.1 ☐ 5.3 ☐ 5.4 ☐ **T** 7.12 ☐ **T** 7.13 ☐	5.6 ☐ 5.7 ☐ 5.8 ☐	5.9 ☐
	Doorsneden van ruimtelijke figuren op ware grootte tekenen.	5.2 ☐ 5.3 ☐ 5.4 ☐ 5.5 ☐	5.7 ☐ 5.8 ☐	5.9 ☐
6	**Vergroten**	★	★ ★	★ ★ ★
	Werken met vergrotingen en verkleiningen van figuren en daarbij de begrippen lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor gebruiken.	6.1 ☐ 6.2 ☐ 6.3 ☐ 6.4 ☐ 6.5 ☐ 6.6 ☐ 6.7 ☐ 6.8 ☐ **T** 7.15 ☐ **T** 7.16 ☐	6.9 ☐ 6.10 ☐	

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Math4all

www.math4all.nl