

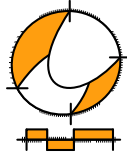
Wiskunde / PGA

2 HAVO / VWO

Lineair en hyperbolisch

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je werkt dan onder begeleiding van je docent in kleine groepjes aan wiskundige problemen en samen bouw je de theorie op en maak je er een overzicht van.

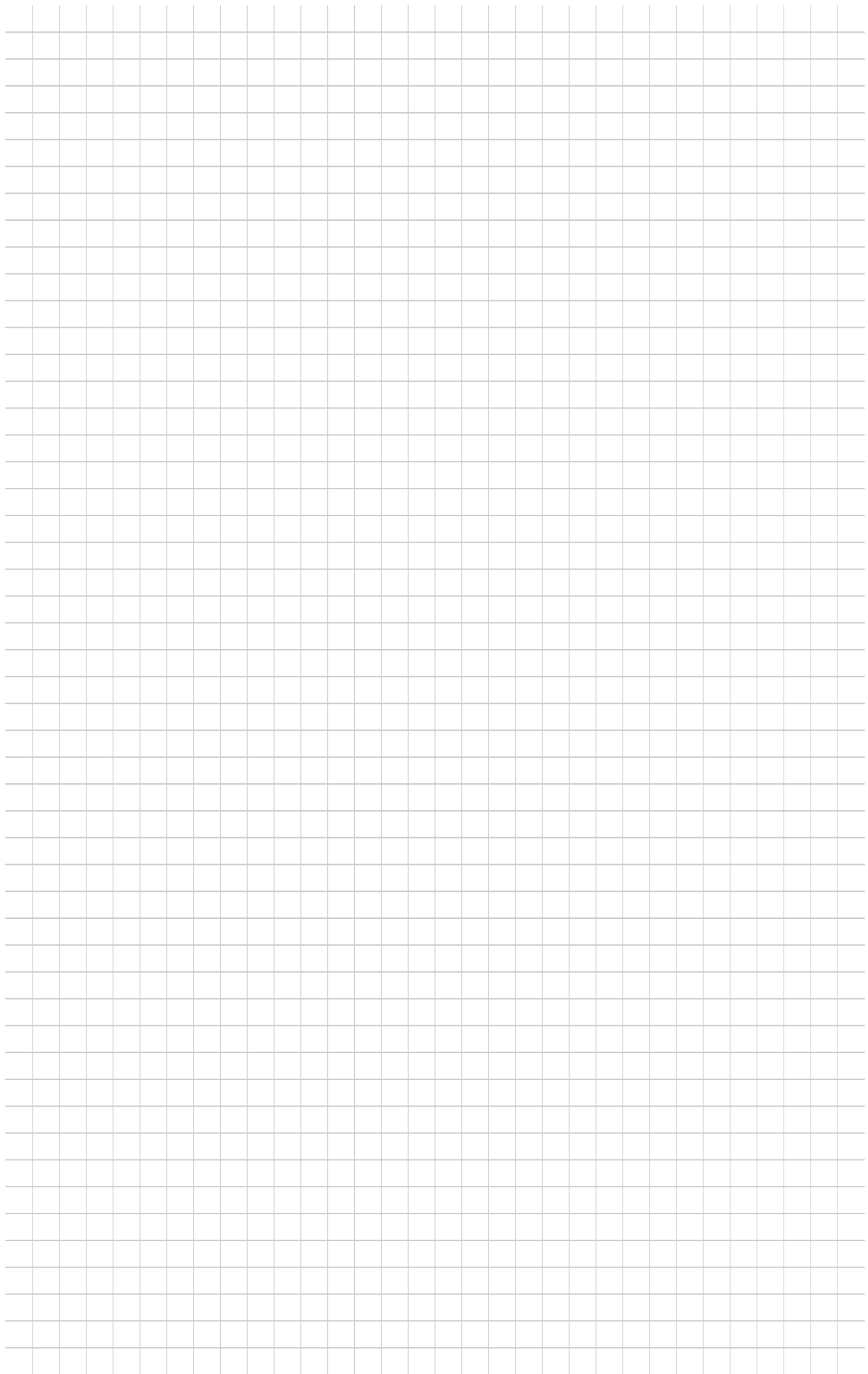
De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee je kunt nagaan of je de stof beheerst. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding vind je terug in de marge.

- ★ het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
- ★ ★ een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die je alleen hoeft te maken als je er genoeg tijd voor hebt
- ★ ★ ★ een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die je alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk voor je was

1

Lineair en hyperbolisch

- 1.1 Recht evenredig 6
- 1.2 Lineaire verbanden 13
- 1.3 Lineaire vergelijkingen 22
- 1.4 Omgekeerd evenredig 28
- 1.5 Hyperbolische verbanden 37
- 1.6 Totaalbeeld 46





Theorie

Om te onthouden

A large grid of graph paper with 20 columns and 30 rows, intended for taking notes on the theory of linear and hyperbolic functions.

Verwerken

★ Opgave 1.1

Mevrouw Willems krijgt een kilometervergoeding K voor de kilometers die ze voor haar werk met de auto aflegt. Ze krijgt € 0,19 per km. Noem het aantal werkkilometers per maand q .

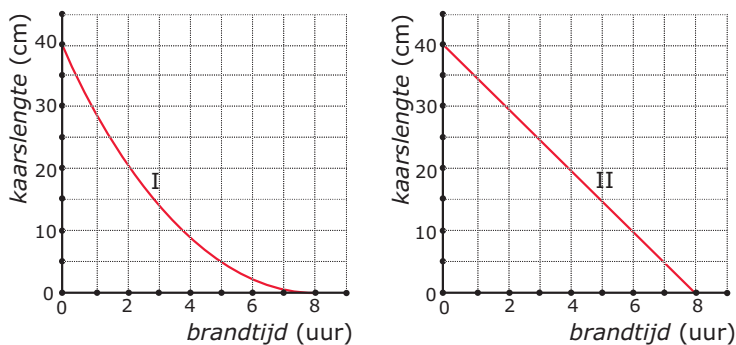
- Stel de formule op voor K .
- Is K recht evenredig met q ? Waarom wel/niet?
- Hoe ziet de grafiek van K er uit?

Mevrouw Willems heeft berekend dat iedere gereden kilometer 12,5 cent aan brandstof kost.

- Zijn de brandstofkosten voor het werk ook recht evenredig met q ?

★ Opgave 1.2

Zuiver cilindervormige kaarsen branden gelijkmatig op: elk uur verdwijnt er (in theorie) evenveel kaarslengte. Hier zie je twee grafieken bij opbrandende kaarsen.



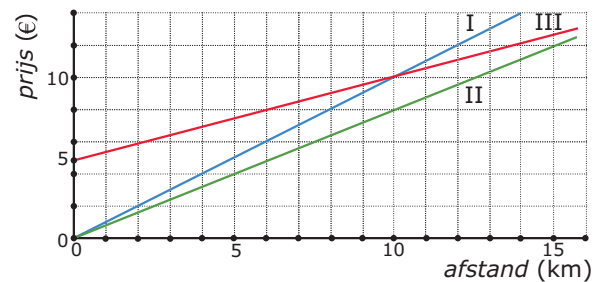
Figuur 1.2

- Welke van deze twee grafieken hoort bij een cilindervormige kaars en waarom?
- Is de kaarslengte recht evenredig met de brandtijd?
- Met hoeveel centimeter per uur brandt de cilindervormige kaars op?

★ Opgave 1.3

De prijs die je voor een rit met een taxi betaalt, hangt af van de afstand die je rijdt. Je ziet hieronder van drie taxibedrijven de grafiek van het verband tussen prijs p (in €) en gereden afstand s (in km).

- Bij welke firma's betaal je alleen een bedrag per gereden km?
- Geef bij die twee taxibedrijven een formule voor p afhankelijk van s .



Figuur 1.3

- Ook bij het derde taxibedrijf betaal je een vast bedrag per gereden km. Alleen berekenen zij ook nog voorrijkosten. Hoeveel bedragen die voorrijkosten?
- Stel ook voor die derde firma een formule op voor p .
- Hoe kun je aan de grafiek en de formule zien dat bij die derde firma de prijs p niet recht evenredig is met het aantal gereden km s ?

**★ Opgave 1.4**

De volgende formules beschrijven een verband tussen x en y :

- formule I: $y = 0,85x$
- formule II: $y = 0,85 + x$
- formule III: $y = 8,5x$
- formule IV: $y = 8,5 - 1,5x$

- Bij welke van deze formules is y recht evenredig met x ?
- Bereken bij elk van deze formules de waarde van x waarvoor $y = 5$.

★★ Opgave 1.5

Bij constante snelheid geldt: $s = vt$, waarin

- s de afgelegde weg in m is;
- v de snelheid in m/s is;
- t de tijd in s is.

- Leg uit waarom de afgelegde weg bij constante snelheid recht evenredig is met de tijd.
- Een voorwerp beweegt 20 s met een snelheid van 40 m/s. Hoeveel bedraagt zijn afgelegde weg?
- Een voorwerp beweegt 20 s en legt daarin 700 m af. Met welke snelheid bewoog dit voorwerp?
- Een voorwerp beweegt 1500 m met een snelheid van 60 m/s af. Hoe lang doet het daar over?
- Je kunt de gegeven formule ook in de vorm $v = \dots$ schrijven. Hoe ziet de formule er dan uit?
- Schrijf de gegeven formule in de vorm $t = \dots$

★★ Opgave 1.6

Twee wielrenners rijden een ronde van 178 km. De eerste wielrenner fietst met een constante snelheid van 42 km/h. De tweede komt 3 minuten later binnen dan de eerste wielrenner.

- Hoelang doet de eerste wielrenner over de ronde? Geef je antwoord in seconden nauwkeurig.
- Wat is de constante snelheid van de tweede renner in kilometers per uur? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Veel volwassenen bezitten een auto om zich te verplaatsen. Dat kost geld, met name aan brandstofkosten. Je kunt vrij eenvoudig een schatting maken van het bedrag dat je daar jaarlijks aan kwijt bent.

Neem eens aan dat je dat wilt doen voor een auto die op benzine rijdt. Je maakt dan een lijst met de kilometerstanden (aflezen op de km-teller in de auto) en de hoeveelheid benzine die je tankt op dat moment. En dat houd je een tijdje vol. Daarmee bereken je hoeveel liter benzine de auto gemiddeld per km verbruikt. Verder houd je in dezelfde periode de benzineprijs bij. Op grond daarvan maak je een schatting van de gemiddelde benzineprijs (in euro per liter) voor het jaar waarvoor je de brandstofkosten wilt schatten.

**★★ Opgave 1.7: Auto op benzine**

Deze tabel is gemaakt door de bestuurder van een auto die op benzine rijdt. De kilometerstand en de hoeveelheid getankte benzine is steeds op hetzelfde moment opgeschreven. (Je kunt misschien zelf ook wel dergelijke gegevens bemachtigen. Dan heb je nog wat aan het rekenwerk!)

- a** Laat zien dat deze bestuurder gemiddeld ongeveer 0,08 liter benzine per gereden km verbruikte.
- b** De gemiddelde benzineprijs was in die periode € 1,75 per liter. Hoeveel bedragen zijn brandstofkosten per kilometer?

Voor een schatting van de totale brandstofkosten per jaar (K in euro) neem je aan dat die recht evenredig met het aantal gereden kilometers per jaar (a in km) zijn.

- c** Waarom is dat een aanname?
- d** Stel een formule op bij het verband tussen K en a en bereken hiermee de brandstofkosten voor een jaar waarin deze auto ongeveer 18000 km rijdt.
- e** Is een onkostenvergoeding van € 0,19 per km voor de kilometers die iemand voor zijn werk rijdt dus zonder meer voordelig voor de automobilist? Licht je antwoord toe.

benzinekosten auto	
km-teller	getankt
kilometerstand	aantal L
12115	45
12678	50
13328	50
13477	40
13997	45
14652	50
15301	50
15984	40
16524	50
17264	45
17925	48

Figuur 1.4

★★★

Opgave 1.8: Auto op benzine, op diesel, op gas, of elektrisch?

Er zijn ook auto's die niet op benzine rijden, zelfs in dezelfde prijsklasse. Ook daarvan kun je de brandstofkosten per jaar schatten. Wat is het voordeligst?

Houd een vergelijkend onderzoek naar de jaarlijkse brandstofkosten van auto's uit dezelfde prijsklasse die op verschillende brandstoffen rijden. Zoek zoveel mogelijk echte gegevens en/of zoek op internet. Kies zelf een prijsklasse.

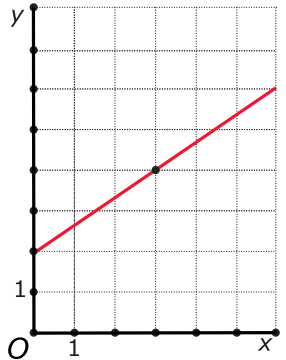
Antwoorden

- 1.1 a** $K = 0,19 \cdot q$
- b** Ja, want als q verdubbelt, dan verdubbelt ook K .
- c** Een rechte lijn door de oorsprong van het assenstelsel en bijvoorbeeld (100,19).
- d** Ja, de brandstofkosten zijn recht evenredig met q .
- 1.2 a** Grafiek II, want daar wordt de kaarslengte gelijkmatig (elk uur evenveel) minder.
- b** Nee, want de grafieken van de kaarslengte gaan niet door de oorsprong van het assenstelsel.
- c** Met 5 centimeter per uur.
- 1.3 a** Bij de firma's I en II.
- b** Firma I: $p = 1,20 \cdot s$ en firma II: $p = 0,60 \cdot s$.
- c** € 6,00
- d** $p = 6 + 0,50 \cdot s$
- e** Als je twee keer zoveel kilometer aflegt, betaal je niet twee keer zoveel.
- 1.4 a** Bij de formules I en III, want bij die formules gaat de rechte lijn door de oorsprong.
- b** Bij formule I: $x = \frac{100}{17}$.
Bij formule II: $x = 4,15$.
Bij formule III: $x = \frac{10}{17}$.
Bij formule IV: $x = \frac{7}{3}$.
- 1.5 a** Omdat v een constante is.
- b** $s = 800$ m.
- c** $v = 35$ m/s.
- d** $t = 25$ s.
- e** $v = \frac{s}{t}$
- f** $t = \frac{s}{v}$
- 1.6 a** 4 uur, 14 minuten en 17 seconden.
- b** $\frac{178}{4,29} \approx 41,49$ km/h.
- 1.7 a** Bereken eerst hoeveel km er tussen de eerste en de laatste kilometerstanden zit. Daarvoor had hij 465 liter benzine nodig. Opm: de laatste 48 liter benzine telt niet meer mee En nu nog even delen...
- b** $0,08 \cdot 1,75 = 0,14$, dus € 0,14.
- c** Omdat je er van uit gaat dat deze berekende gemiddelde kosten per km het hele jaar ongeveer hetzelfde blijven, maar dat hoeft niet. De benzineprijs kan omhoog gaan, je rijgedrag kan veranderen (meer in de stad rijden of juist niet, etc.).
- d** $K = 0,14a$ en deze formule geeft $0,14 \cdot 18000 = 2520$ euro voor dat jaar.
- e** Nee, want er zijn meer kosten om rekening mee te houden, zoals wegenbelasting, onderhoud van de auto, verzekering, enz.
- 1.8** Eigen antwoord.

1.2 Lineaire verbanden

Inleiding

Er zijn natuurlijk ook situaties waarbij rechte lijn grafieken niet door de oorsprong van het assenstelsel gaan. Je gaat nu zien wanneer dat het geval is. Rechte lijn grafieken horen bij lineaire verbanden.



Figuur 2.1

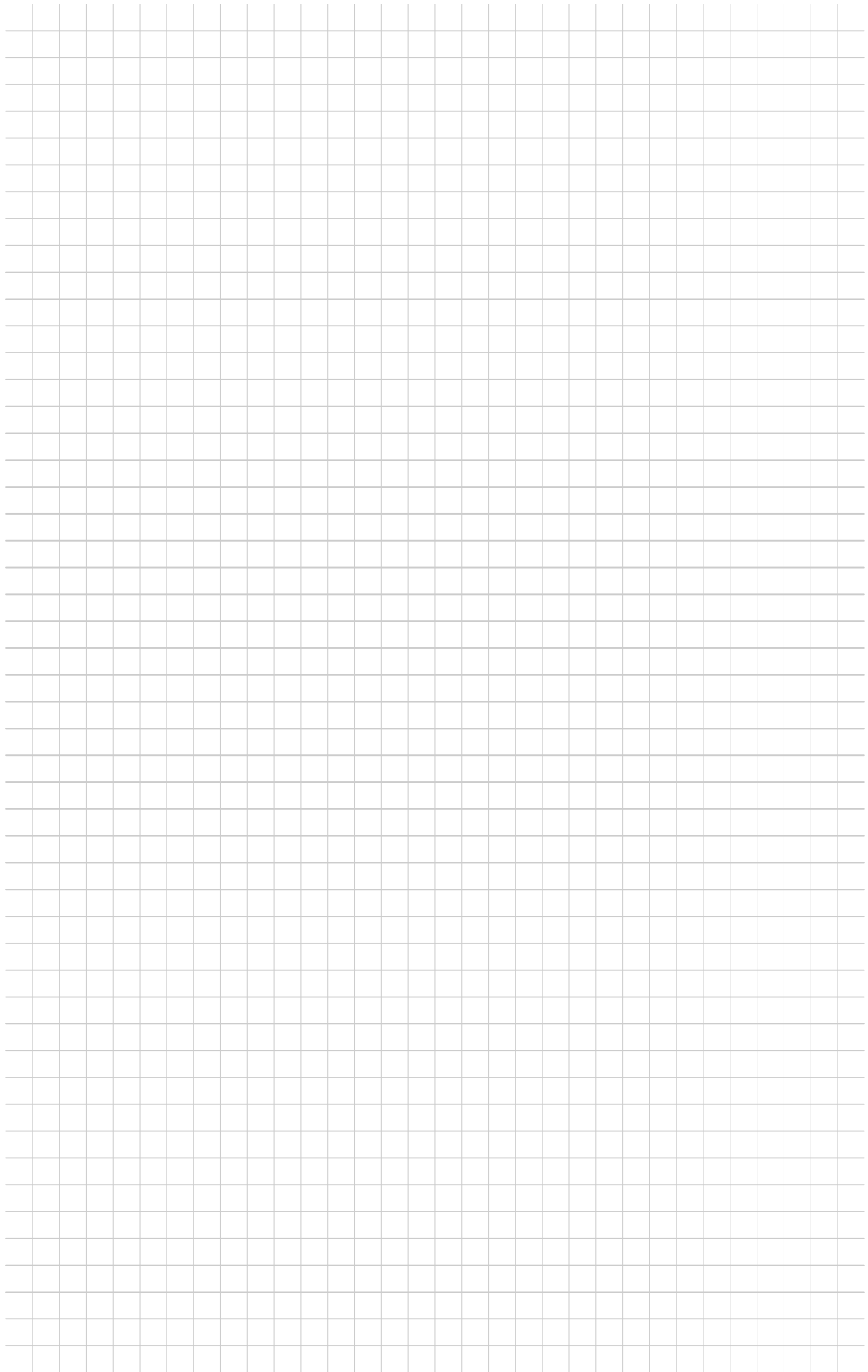
- Je leert in dit onderwerp**
- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken;
 - de begrippen hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) en startgetal;
 - bij een lineaire grafiek een formule opstellen.

- Voorkennis**
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
 - recht evenredige verbanden herkennen en de evenredigheidsconstante, het hellingsgetal, bepalen;
 - formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken;
 - grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode gebruiken.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het begrip 'lineair verband'. Je gaat na of er een lineair verband tussen twee variabelen is en je stelt een bijpassende formule op en tekent de grafiek daarvan. Ook de begrippen 'richtingscoëfficiënt/hellingsgetal' en 'startgetal/begingetal' komen aan de orde. Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen





Theorie

Om te onthouden

A large grid of graph paper with a light gray background and a fine grid of lines, intended for taking notes or drawing graphs.

Verwerken

Opgave 2.1

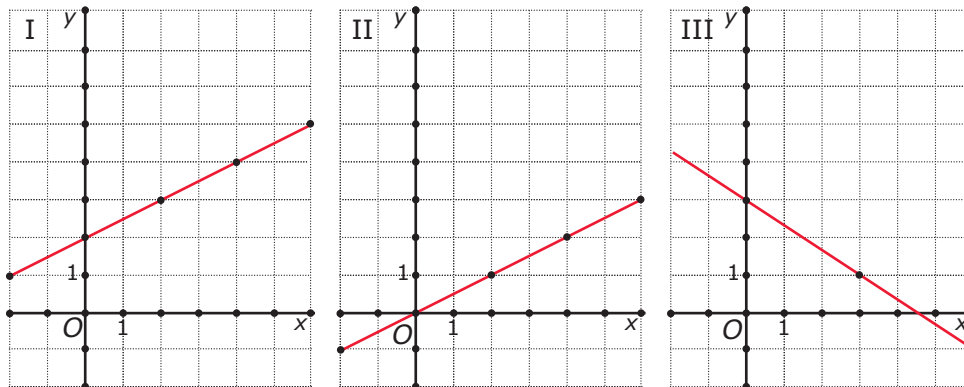
Tegenwoordig hebben veel mensen een smartphone met internet. Voor een telefoonabonnement betaal je daarom naast abonnementskosten en belkosten ook de kosten voor een internetbundel.

Stel je voor dat je € 20,00 abonnementskosten per maand betaalt en dat de belkosten € 0,22 per minuut zijn. Daarnaast betaal je voor de internetbundel van 1000 MB € 10,00.

- Geef een formule voor het verband tussen de totale maandelijkse kosten K en het aantal belminuten m .
- Maak een tabel bij deze formule.
- Als je geen internetbundel afsluit, betaal je € 0,05 per verbruikte MB. Stel dat je in een bepaalde maand 240 MB verbruikt. Is het dan goedkoper om een internetbundel af te sluiten of om te betalen per verbruikte MB?
 - internetbundel
 - betalen per verbruikte MB

★ Opgave 2.2

Je ziet drie grafieken die elk een verband tussen de variabelen x en y weergeven.



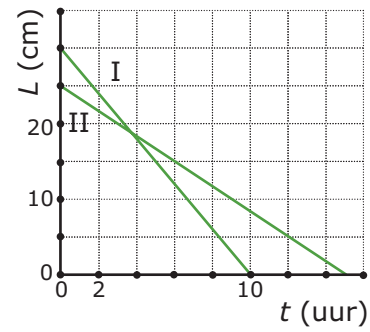
Figuur 2.2

- Bij welke van deze grafieken is y recht evenredig met x ?
 - grafiek I
 - grafiek II
 - grafiek III
- Wat is bij die grafiek het hellingsgetal?
- Bij welke van deze grafieken is het hellingsgetal negatief?
 - grafiek I
 - grafiek II
 - grafiek III
- Maak bij elke grafiek een formule voor y afhankelijk van x .

★ **Opgave 2.3**

Zuiver cilindervormige kaarsen branden gelijkmatig op. Je ziet de grafieken van de lengte L in centimeters van twee van die kaarsen afhankelijk van de brandtijd t in uren.

- a Welke grafiek hoort bij de dikste kaars? Licht je antwoord toe.
A. grafiek I
B. grafiek II
- b Waarom is er bij beide grafieken sprake van een lineair verband?
- c Stel formules op voor het verband tussen L en t .
- d Je steekt beide kaarsen tegelijk aan. Welke kaars is het langst na vier branduren?
A. kaars I
B. kaars II



Figuur 2.3

★ **Opgave 2.4**

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(5,12)$.

- a Stel een formule op voor y afhankelijk van x .
 De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $A(0,10)$ en $C(5,0)$.
- b Stel een formule op voor y afhankelijk van x .

★ **Opgave 2.5**

Voor het verbruik van water betaal je twee soorten kosten:

- een vast bedrag per jaar, het vastrecht
- een bedrag per m^3 water die je verbruikt

Die bedragen kunnen per gebied verschillend zijn, afhankelijk van de leverancier van het water. In de tabel worden twee gebieden vergeleken:

verbruik v (m^3)	0	50	100	150	200
kosten K in gebied A (euro)	36,00	126,00	216,00		
kosten K in gebied B (euro)	48,00	125,50	203,00		

Tabel 2.1

- a In beide gevallen is er sprake van een lineair verband tussen K en v . Leg uit waarom en vul de tabel verder in.
- b Uit de tabel kun je afleiden hoeveel je in beide gevallen per m^3 betaalt. Doe dat voor beide gebieden en stel formules op voor K afhankelijk van v .
- c Teken de grafieken van K voor beide gebieden in één figuur.
- d Bereken de kosten voor een waterverbruik van $120 m^3$ in beide gebieden.
- e Hoe kun je aan de twee hellingsgetallen zien in welk gebied je het goedkoopste uit bent als je veel water verbruikt?

**★★ Opgave 2.6**

Het gewicht van een kabelhaspel hangt af van de lengte van de kabel die er omheen gewonden is. Zo'n grote kabelhaspel bevat nieuw wel 1000 m kabel. Hij weegt dan 800 kg. Als er 200 m kabel af is, weegt de haspel met kabel nog 650 kg.

Hoeveel weegt een lege haspel?

**Figuur 2.4****★★ Opgave 2.7**

Op een vliegveld ligt een horizontale rollooptband die 500 meter lang is.

De rollooptband heeft een snelheid van 4 km/h. Emma en Daan stappen tegelijk op de rollooptband.

Emma loopt met een snelheid van 6 km/h op de band, Daan staat stil op de rollooptband.

Hoeveel meter ligt Emma voor op Daan als ze aan het einde van de rollooptband is?

- A. 100 m
- B. 160 m
- C. 200 m
- D. 250 m
- E. 300 m

Toepassen

Veel volwassenen bezitten een auto om zich te verplaatsen. Dat kost geld, niet alleen aan brandstofkosten, maar ook aan wegenbelasting, verzekering, onderhoud en afschrijving. Je wilt een schatting maken van het bedrag dat je daar jaarlijks aan kwijt bent. Gemakkelijk is dat niet want de bedragen voor de verschillende kostenposten veranderen nogal. Je moet daarom aannames doen die zijn gebaseerd op de gegevens van het moment waarop je de berekening gaat uitvoeren. Hier zie je een aantal schattingen op een bepaald moment voor een auto die op benzine rijdt:

- De prijs van een liter benzine is € 1,68 en je rijdt 12 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 300,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 1900,00 per jaar.

Maar rijdt de auto bijvoorbeeld op gas, of op diesel, of elektrisch, dan liggen deze bedragen anders. Voor een vergelijkbare elektrische auto zijn op hetzelfde moment dit de schattingen:

- De prijs van een kWh (kiloWattuur) elektriciteit is € 0,40 en je verbruikt 18 kWh per 100 km.
- De wegenbelasting is € 0 per jaar.
- De verzekering kost € 400,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 4200,00 per jaar.

Deze verschillen spelen een rol als je wilt kiezen tussen rijden op benzine of elektrisch rijden.

**Figuur 2.5****★★★ Opgave 2.8: Benzineauto of elektrische auto?**

In de tekst bij **Toepassen** zie je schattingen van de diverse kosten die je maakt als je in een eigen auto wilt rijden. Ga in deze opgave uit van die gegevens.

- a Welke van deze kosten zijn vaste kosten per jaar?
- b Hoeveel bedragen de energiekosten per kilometer voor de auto op benzine? En voor de elektrische auto?



- c Stel voor de auto op benzine een formule op van de totale kosten per jaar (K in euro) afhankelijk van het aantal gereden kilometers per jaar (a in km). Doe dit ook voor de elektrische auto.
- d Bereken hiermee de kosten voor een jaar waarin de auto ongeveer 18000 km rijdt. Doe dit zowel voor de auto op benzine als de elektrische auto.
- e Maak grafieken bij het verband tussen K en a en bepaal daarmee vanaf hoeveel km per jaar je goedkoper uit bent met een auto die op diesel rijdt.

★ ★ ★

Opgave 2.9: Auto op benzine, op gas, of elektrisch?

Je hebt in de voorgaande opgave het verschil in kosten bekeken van een auto die op benzine rijdt en een elektrische auto. Natuurlijk is het beter als je zelf actuele gegevens zoekt en gebruikt voor de berekening. Je kunt daarbij ook denken aan het vergelijken met een auto op gas.

Houd een vergelijkend onderzoek naar de jaarlijkse kosten van auto's uit dezelfde prijsklasse die op verschillende brandstoffen rijden. Zoek zoveel mogelijk echte gegevens en/of zoek op internet. Kies zelf een prijsklasse.

Practicum: Formule van een lineair verband opstellen

[Bekijk de applet.](#)

Verplaats de twee punten A en B en stel zelf de formule van y afhankelijk van x op. Ga uit van een lineair verband. De juiste formule staat bij de grafiek.

Antwoorden

2.1 a $k = 30,00 + 0,22m$

b Kies voor m tientallen minuten.

c A

2.2 a B

b 0,5

c C

d Grafiek I: $y = 0,5x + 2$.

Grafiek II: $y = 0,5x$.

Grafiek III: $y = 3 - \frac{2}{3}x$.

2.3 a B

b Beide grafieken vormen een rechte lijn, ieder uur brandt er evenveel van de kaars op.

c Grafiek I: $L = 30 - 3t$.

Grafiek II: $L = 25 - \frac{5}{3}t$.

d B

2.4 a $y = 10 + 0,4x$

b $y = 10 - 2x$

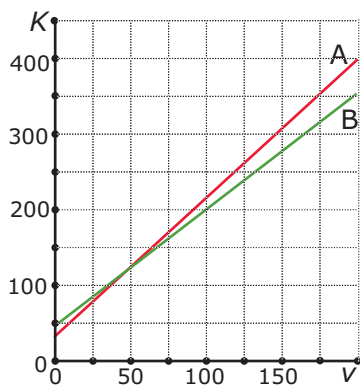
2.5 a Omdat je naast een vast bedrag per jaar een vast bedrag per m^3 betaalt.

verbruik v (m^3)	0	50	100	150	200
kosten K in gebied A (euro)	36,00	126,00	216,00	306,00	396,00
kosten K in gebied B (euro)	48,00	125,50	203,00	280,50	358,00

b Gebied A: $K = 36 + 1,80v$.

Gebied B: $K = 48 + 1,55v$.

c Zie de figuur.



d In gebied A zijn de kosten € 252,00 en in gebied B betaal je € 234,00.

e In het gebied waar het hellingsgetal het kleinst is, dus in gebied B.

2.6 50 kg.

2.7 E

2.8 a Afschrijving, onderhoud, belasting, verzekering.

b Benzineauto: € 0,14.

Elektrische auto: € 0,072.

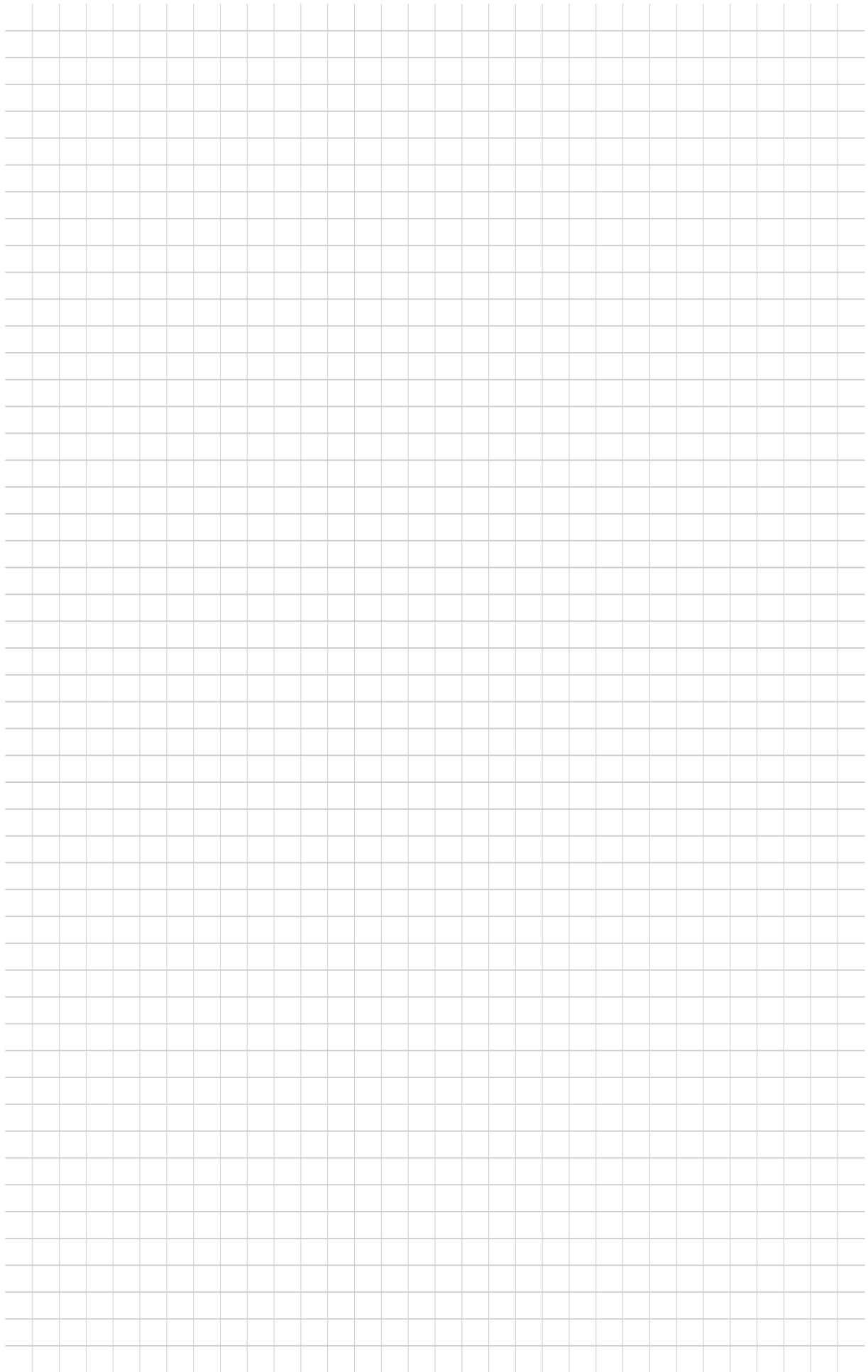
c Benzineauto: $K = 2400 + 0,14a$.

Elektrische auto: $K = 4200 + 0,072a$.



- d** Benzineauto: € 4920.
Elektrische auto: € 5496.
- e** Doen. Vanaf 26471 km/jaar is de elektrische auto voordeliger. (Bij deze aannames en zonder rekening te houden met milieuvoor/nadelen.)

2.9 Eigen antwoord.





Theorie

Om te onthouden

A large grid of graph paper with a light gray background and a fine grid of lines, intended for taking notes on the theory of linear and hyperbolic equations.



Verwerken

★ Opgave 3.1

Los de vergelijkingen op.

a $-6k + 55 = 4k - 25$

b $12 - 4x = 36 + 2x$

c $\frac{1}{3}x - 25 = 16 + \frac{1}{2}x$

d $5(4 - 2x) = 5x - (3 + x)$

★ Opgave 3.2

Los de vergelijkingen op.

a $\frac{3a-3}{3} + 2,5 = \frac{1}{2}a - 3,5$

b $\frac{1}{6}q + 2q = 3q - 0,5 + 7$

c $p(3 - 1) + 2 \cdot \frac{1}{6}p = 15p + 30$

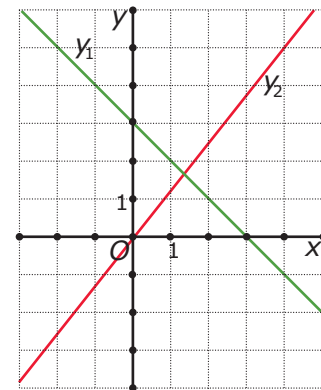
★ Opgave 3.3

Je ziet de grafieken van twee lineaire verbanden, aangegeven met y_1 en y_2 .

a Los op: $y_1 = y_2$.

b Los op: $y_1 > y_2$.

c Controleer je antwoord bij b voor enkele waarden van x .



Figuur 3.2

★ Opgave 3.4

Voor de jaarlijkse kosten K (euro) voor het waterverbruik v (m^3) in twee gebieden A en B gelden de formules:

• gebied A: $K = 36 + 1,80v$

• gebied B: $K = 48 + 1,55v$

Schrijf bij de volgende vragen steeds de bijbehorende ongelijkheid op en los deze vergelijking op. Geef je antwoord in m^3 nauwkeurig.

a Bij welk verbruik zijn de kosten in gebied A lager dan in gebied B?

b Bij welk verbruik zijn de kosten in gebied B hoger dan € 200?

★★ Opgave 3.5

De temperatuur boven het aardoppervlak hangt onder andere af van de hoogte waarop je je bevindt. Vooral voor bergbeklimmers is het belangrijk om te weten dat elke stijging van 100 m een daling van de temperatuur van ongeveer $0,6$ °C betekent.

Twee bergbeklimmers meten een temperatuur van 16 °C.

a Welke temperatuur meten zij als ze nog 120 m omhoog klimmen?

b Het aantal meters dat ze omhoog gaan, kun je h noemen. Welke formule geeft dan het verband weer tussen temperatuur T in °C en h ?

- c Welke ongelijkheid hoort er bij de vraag: ‘Na hoeveel meter stijgen komt de temperatuur die ze meten, onder het vriespunt?’
- d Los de ongelijkheid bij c op. Geef je antwoord in tientallen meters nauwkeurig.

★★ **Opgave 3.6**

Twee auto's rijden elkaar op de snelweg tegemoet. Op een zeker moment zijn ze nog 120 km van elkaar verwijderd. Auto A rijdt met een snelheid van 115 km/h en auto B met een snelheid van 105 km/h.

Na hoeveel tijd passeren ze elkaar? Geef je antwoord in seconden nauwkeurig.

Toepassen

Iemand wil een nieuwe auto aanschaffen en twijfelt tussen een auto die op benzine rijdt en een zelfde auto die elektrisch is. Hij heeft deze formules opgesteld voor de kosten K afhankelijk van het aantal km a dat hij jaarlijks rijdt.

Benzineauto: $K = 2400 + 0,14a$.

Dieselauto: $K = 4200 + 0,072a$.

Welke auto is voor hem voordeliger?



Figuur 3.3

★★★ **Opgave 3.7: Benzineauto of elektrische auto?**

Gebruik de gegeven formules uit **Toepassen** hierboven.

- a Welke ongelijkheid moet er worden opgelost?
- b Los deze ongelijkheid op in gehele km nauwkeurig.
- c Welk antwoord geef je nu op de vraag die de automobilist zichzelf heeft gesteld.

★★ **Opgave 3.8: Gastank inbouwen?**

Je wilt in een auto die op benzine rijdt een gastank inbouwen. Dat kost € 1450. Gas kost € 0,75 per liter en je rijdt 16 km op 1 liter gas. De benzinekosten zijn € 0,11 per kilometer. De totale kosten K_g voor het rijden op gas hangen af van het aantal kilometers a dat je rijdt.

- a Stel een formule op voor K_g . Rond het hellingsgetal af op twee decimalen.
- b Stel ook een formule op voor K_b , de brandstofkosten aan benzine voor het aantal gereden kilometers a .
- c Na hoeveel gereden kilometers heb je de kosten van de gastank terugverdiend?

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **vergelijkingen oplossen met de balansmethode**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Antwoorden

- 3.1 a** $k = 8$
b $x = -4$
c $x = -246$
d $x = \frac{23}{14}$
- 3.2 a** $a = -2,4$
b $q = -7,8$
c $p = -\frac{45}{19}$
- 3.3 a** $x = 1\frac{1}{3}$
b Bekijk de grafieken: $x > 1\frac{1}{3}$.
c Eigen antwoord.
- 3.4 a** De kosten in A zijn kleiner dan in B als: $v < 48 \text{ m}^3$.
b De kosten in B zijn groter dan € 200 als $v > 98 \text{ m}^3$.
- 3.5 a** Ze meten ongeveer $15,3 \text{ }^\circ\text{C}$.
b $T = 16 - 0,006h$.
c $16 - 0,006h < 0$
d $h > 2670 \text{ m}$.
- 3.6** Na 32 minuten en 24 seconden.
- 3.7 a** $2400 + 0,14a > 4200 + 0,072a$
b De bijbehorende vergelijking $2400 + 0,14a = 4200 + 0,072a$ heeft als oplossing $a = 26470,588..$
Dus de ongelijkheid heeft als oplossing $a \geq 26471$.
c Een heel nauwkeurige schatting van het aantal km waarbij hij voordeliger in een elektrische auto kan rijden is zinloos, want niemand weet precies vooraf hoeveel km je in een jaar gaat rijden. Dus het antwoord zou moeten zijn: vanaf ongeveer 26.500 km per jaar kan hij beter de elektrische auto aanschaffen, als hij daar onder blijft is de auto op benzine voordeliger.
- 3.8 a** $K_g \approx 1450 + 0,047a$
b $K_b = 0,11a$
c Na ongeveer 23016 km.

1.4 Omgekeerd evenredig

Inleiding

Hoe sneller je loopt, fietst, of rijdt, hoe minder tijd je nodig hebt om een bepaalde afstand af te leggen. Daarom bestaat er tussen afstand en tijd vaak geen recht evenredig of lineair verband. Je gaat nu kennismaken met omgekeerd evenredige verbanden.

$$y = a \cdot x$$

recht evenredig

omgekeerd evenredig

$$y = \frac{a}{x}$$

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootte, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige en lineaire verbanden herkennen en het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige en lineaire verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Voor de leerling

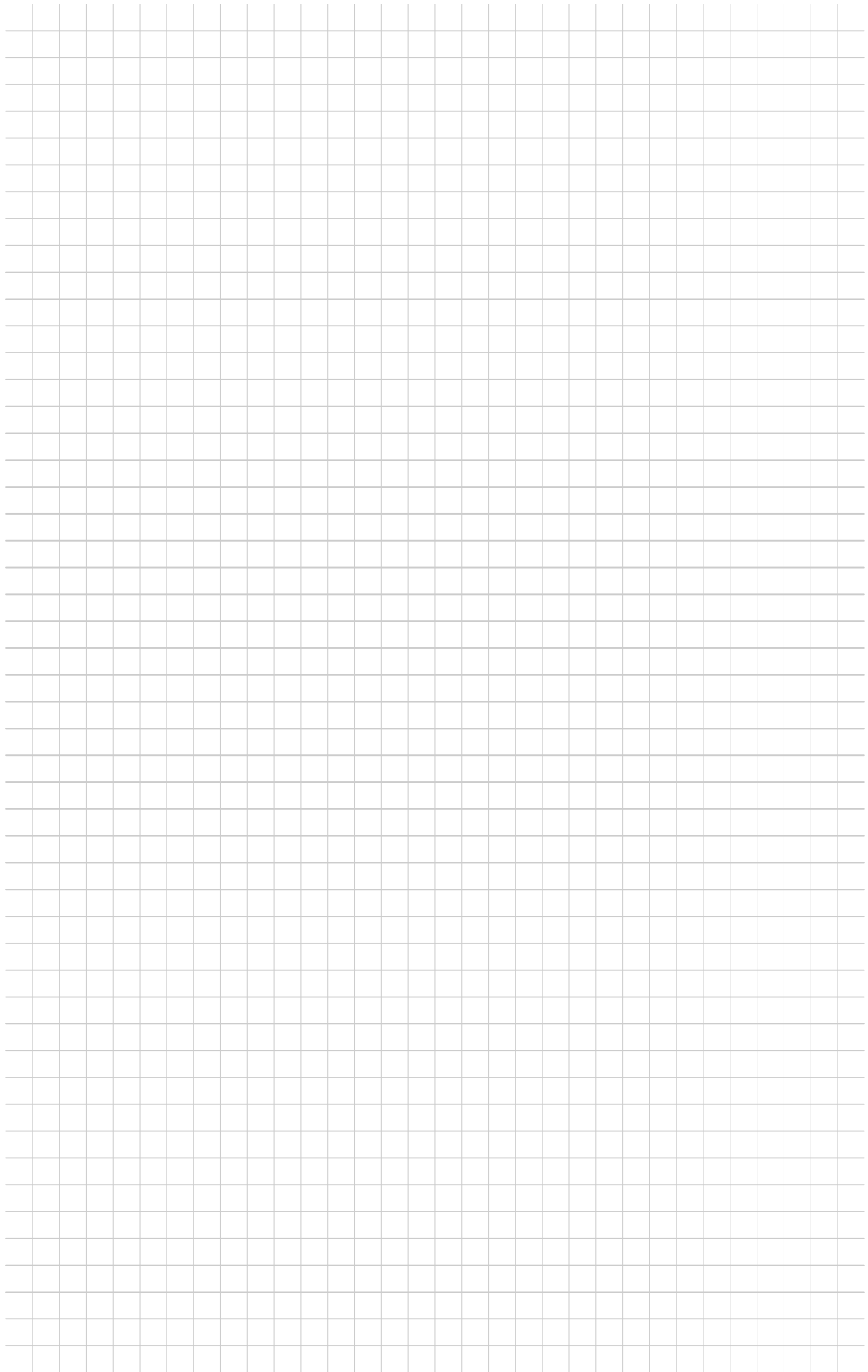
Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het begrip 'omgekeerd evenredig' en om de grafieken en formules die horen bij omgekeerd evenredige verbanden. Onthoud ook de naam 'hyperbool' voor dergelijke grafieken.

Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.



Aantekeningen

A large grid of graph paper for taking notes, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares.





Theorie

Om te onthouden

A large grid of graph paper with a light gray background and a fine grid of lines, intended for taking notes or drawing graphs.

Verwerken

★ Opgave 4.1

Stel je fietst steeds dezelfde route van huis naar school met een constante snelheid.

De tijd die hiervoor nodig is, is omgekeerd evenredig met de snelheid.

- Als de snelheid verdubbelt, wat betekent dit dan voor de tijd?
- Als de tijd verdubbelt, wat betekent dit dan voor de snelheid?
- Welke standaardformule hoort bij deze situatie? Gebruik v voor snelheid, t voor tijd en a voor de afgelegde afstand.

★ Opgave 4.2

Bij het rijden in een auto heb je behalve met de brandstofkosten per gereden kilometer ook te maken met vaste jaarlijkse kosten voor onder andere wegenbelasting, verzekering, garagekosten en afschrijving. Wanneer je wilt uitrekenen hoeveel een auto per gereden kilometer kost, dan moet je ook met die vaste kosten rekening houden.

Mevrouw Jansen schat haar vaste kosten op € 3800,00 per jaar. Als ze dit wil omrekenen naar vaste kosten per kilometer, dan moet ze haar vaste kosten delen door het aantal kilometers dat ze per jaar rijdt.

- Wat zijn haar vaste kosten per kilometer als ze 19000 km in een jaar rijdt?
- Leg uit dat haar vaste kosten per km v omgekeerd evenredig zijn met het jaarlijks aantal gereden kilometers a .
- Stel een formule op voor v afhankelijk van a en teken een bijpassende grafiek.
- Bij welk jaarlijks gereden aantal kilometers zijn haar vaste kosten per kilometer minder dan € 0,10?

★ Opgave 4.3

Een rechthoek met lengte l en breedte b heeft oppervlakte A .

- Stel je voor dat $l = 10$, maar dat b nog kan variëren. Welke formule geldt dan voor A afhankelijk van b ? Is A recht evenredig of omgekeerd evenredig met b ?
- Stel je voor dat $A = 200$, maar dat l en b nog kunnen variëren. Welke formule geldt dan voor l afhankelijk van b ? Is l recht evenredig of omgekeerd evenredig met b ?
- Stel je voor dat $l = 2b$. Welke formule geldt dan voor A afhankelijk van b ? Is er nu sprake van een recht of omgekeerd evenredig verband?

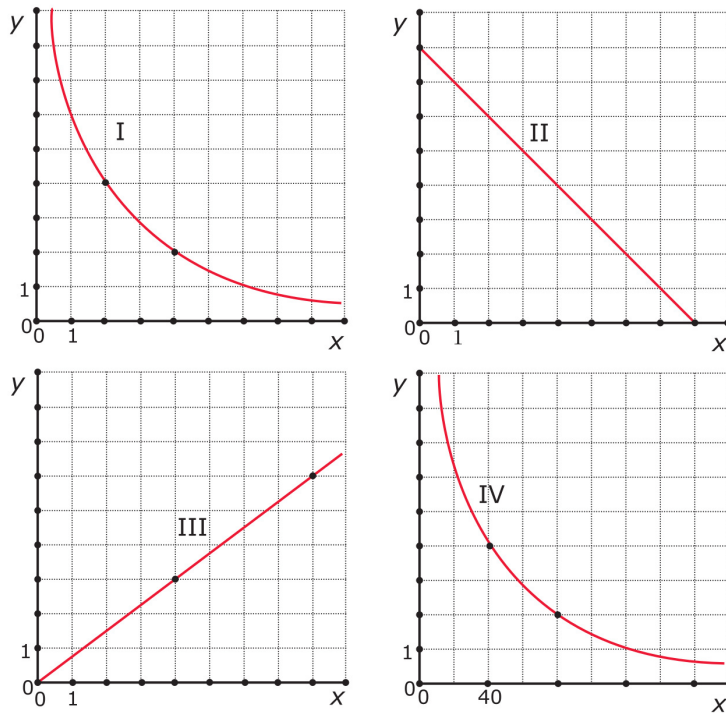
★ Opgave 4.4

Een boer wil voor zijn paard een rechthoekig weiland van 1200 m^2 afzetten. Hij heeft nog zo veel palen en draad, dat de omheining 182 meter lang kan worden.

- De oppervlakte van het weiland wordt 1200 m^2 . Leg uit, dat de lengte l en de breedte b van het weiland daarom omgekeerd evenredig zijn. Stel een bijpassende formule op.
- Omdat de omheining 182 m wordt, kun je nog een formule van de vorm $l = \dots$ afleiden. Schrijf die formule op.
- Teken de grafieken bij deze formules in één assenstelsel.
- Bepaal nu met behulp van de grafiek en inklemmen welke afmetingen het weiland krijgt in m nauwkeurig.

★ **Opgave 4.5**

Je ziet twee hyperbolen en twee rechte lijnen. Schrijf bij elk van deze grafieken een passende formule op. Gebruik de aangegeven roosterpunten. Zet erbij of de variabelen recht evenredig of omgekeerd evenredig zijn, of geen van beide.



Figuur 4.2

★★★ **Opgave 4.6**

Een wandelaar maakt een wandeling van 2 uur. Eerst loopt hij op een vlak stuk weg met snelheid 4 km/h. Daarna moet hij een stuk omhoog. Zijn snelheid is dan 3 km/h. Als hij boven is, dan gaat hij terug. Eerst dus datzelfde stuk omlaag. Dat kan hij snel: 6 km/h. Daarna weer hetzelfde vlakke stuk terug, weer met snelheid 4 km/h.

Hoeveel km heeft de wandelaar gewandeld?

- A. 8
- B. 9
- C. 10
- D. 11
- E. 12



Toepassen

★ ★

Opgave 4.7: Hijskraan

Deze hijskraan kan zware lasten tillen. De last hangt aan een katrol die langs de arm beweegt. De afstand van de plek waaronder de katrol hangt tot het steunpunt van de arm, heet de armlengte a .

Het grootste gewicht G dat deze kraan kan tillen, hangt af van de armlengte.

Voor deze kraan geldt: $G = \frac{120000}{a}$.

Hierin is G in kg en a in meters.

In deze opgave bereken je op welke afstand van de kraan een gewicht van 6 ton (6000 kg) nog kan hangen.

- Welke ongelijkheid moet er worden opgelost?
- Los de bijbehorende vergelijking op.
- Op welke afstand van de kraan kan een gewicht van 6 ton dus nog hangen?
- Om een stapel stenen naar de goede plek te hijsen moet deze stapel 23 m van het steunpunt van de draaiarm kunnen hangen. Hoe zwaar mag die stapel stenen hoogstens zijn?

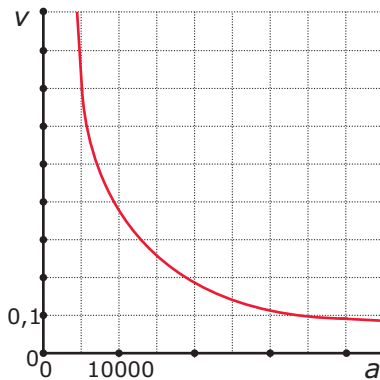


Figuur 4.3

Antwoorden

- 4.1 a De tijd halveert.
b De snelheid halveert.
c $v = \frac{a}{t}$ of $t = \frac{a}{v}$, waarin a de afstand is die je aflegt.

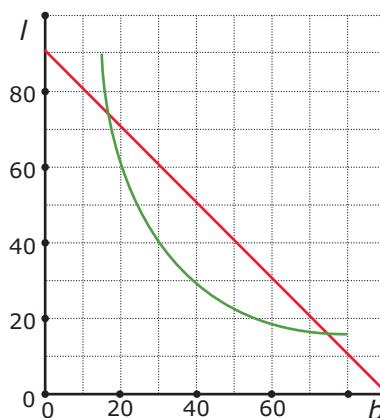
- 4.2 a 0,20 euro/km.
b Als a twee keer zo groot wordt, dan halveert v .
c Formule: $v = \frac{3800}{a}$.



- d Ze moet meer dan 38000 km per jaar rijden.

- 4.3 a Formule: $A = 10b$ en A is recht evenredig met b .
b Formule: $l = \frac{200}{b}$ en l is omgekeerd evenredig met b .
c Formule: $A = 2b^2$.
Het verband tussen A en b is niet recht evenredig en niet omgekeerd evenredig.

- 4.4 a $l = \frac{1200}{b}$
b $l = 91 - b$.
c Zie de figuur.



- d Het weiland wordt 16 bij 75 m.

- 4.5 Grafiek I: omgekeerd evenredig verband met $y = \frac{8}{x}$.
Grafiek II: lineair verband met $y = 8 - x$.
Grafiek III: recht evenredig verband met $y = \frac{3}{4}x$.
Grafiek IV: omgekeerd evenredig verband met $y = \frac{160}{x}$.

- 4.6 A

- 4.7 a $\frac{120000}{a} < 6000$



- b** $a = 20$
- c** Zo'n gewicht kan maximaal 20 meter van het steunpunt van de draaiarm hangen.
- d** Het gewicht mag maximaal 5217 kg zijn.

1.5 Hyperbolische verbanden

Inleiding

Hoe sneller je loopt, fietst, of rijdt, hoe minder tijd je nodig hebt om een bepaalde afstand af te leggen. Vaak is er sprake van een omgekeerd evenredig verband. Maar wat als er een tussenstop is? Je gaat nu kennismaken met hyperbolische verbanden.



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij hyperbolische verbanden maken en gebruiken;
- vergelijkingen oplossen waarin hyperbolische verbanden voorkomen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige, lineaire en omgekeerd evenredige verbanden herkennen en het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige, lineaire en omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Voor de leerling

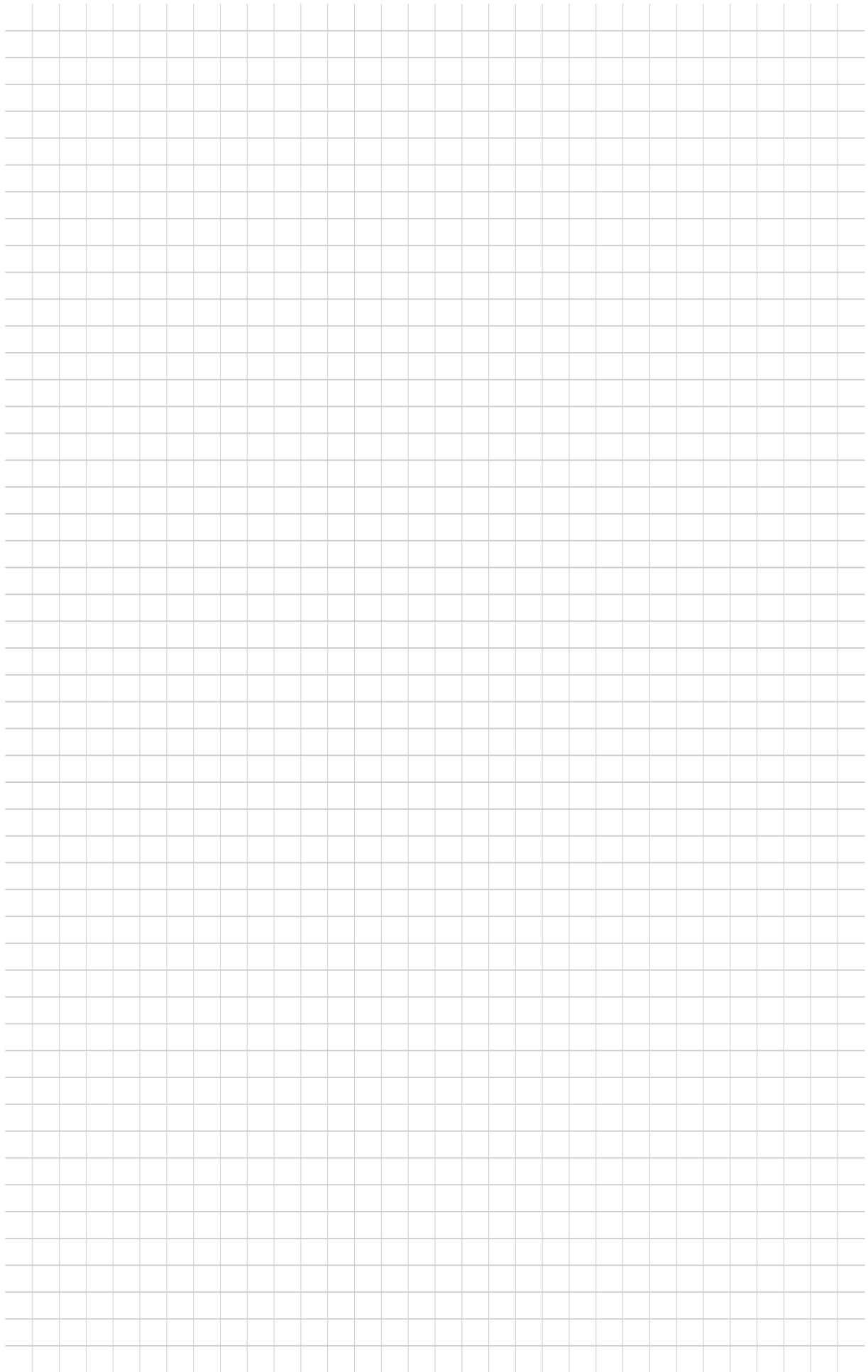
Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het begrip 'hyperbolisch verband' en om de grafieken en formules die horen bij hyperbolische verbanden. Onthoud ook de naam 'asymptoot' voor een lijn die steeds dichterbij wordt benaderd, maar nooit gesneden, in dergelijke grafieken.

Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.



Aantekeningen

A large grid of graph paper for taking notes, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares.





Theorie

Om te onthouden

A large grid of graph paper with 20 columns and 30 rows, intended for taking notes on the theory of hyperbolic functions.



Verwerken

★ Opgave 5.1

Op veel scholen kun je ook als leerling kopieën maken. De maandelijkse kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 150,00
- de kosten per kopie: € 0,02

Noem de maandelijkse kosten per kopie K en het aantal kopieën a .

- Welke formule geldt voor K afhankelijk van a ?
- Waarom zijn K en a niet omgekeerd evenredig?
- Teken een grafiek bij deze formule.
- Stel dat je als leerling € 0,05 per kopie betaalt. Hoeveel kopieën moeten er dan maandelijks minstens worden gemaakt als de school geen verlies wil draaien? Los de bijbehorende ongelijkheid systematisch op.

★ Opgave 5.2

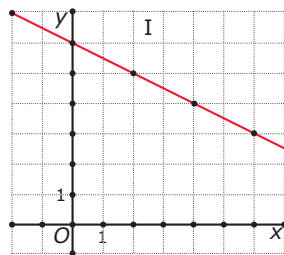
Los de volgende vergelijkingen op:

- $\frac{2400}{x} + 3,6 = 6,8$
- $200 + \frac{50}{x} = 450$
- $\frac{t-15}{300} - 0,5 = 0,8$
- $\frac{800}{d-5} = 50$

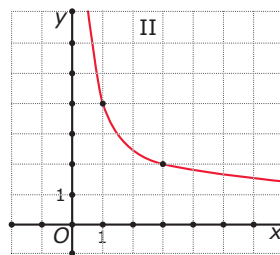
★ Opgave 5.3

Je ziet grafieken bij vier formules.

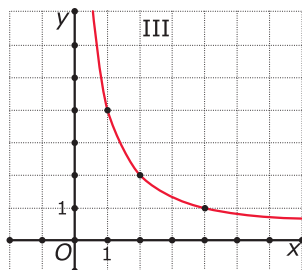
- $y_1 = \frac{4}{x}$
- $y_2 = 6 - 0,5x$
- $y_3 = \frac{3}{x} + 1$
- $y_4 = 0,2x + 4$



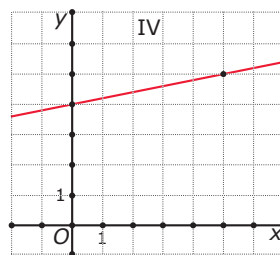
grafiek I



grafiek II



grafiek III



grafiek IV

Figuur 5.2

Welke formule hoort bij welke grafiek?

**★ Opgave 5.4**

Je wilt de vergelijking $\frac{4}{x} + 2 = x + 1$ oplossen. Een vergelijking zoals deze kun je op dit moment alleen grafisch en met inklemmen oplossen.

- Teken de grafieken van $y_1 = \frac{4}{x} + 2$ en $y_2 = x + 1$ in één figuur. Houd ook rekening met negatieve waarden van x .
- Aan de grafieken zie je dat er twee snijpunten zijn. Bereken de coördinaten van die snijpunten door inklemmen in één decimaal nauwkeurig.
- Schrijf de oplossingen van deze vergelijking op in één decimaal nauwkeurig.
- Schrijf de oplossingen van de ongelijkheid $\frac{4}{x} + 2 > x + 1$ op in één decimaal nauwkeurig.

★★ Opgave 5.5

Los de vergelijkingen op.

- $2 - \frac{4}{x} = 8$
- $\frac{80}{2 - 0,5x} = 10$
- $5 + \frac{25}{x^2} = 6$
- $\frac{20}{-0,25x} = 10$

★★ Opgave 5.6

Bij een hyperbolisch verband tussen x en y hoort een formule van de vorm $y = \frac{c}{x} + d$. Hierin zijn c en d constanten.

- Bereken de waarde van y die hoort bij $x = 10$ als de grafiek bij dit hyperbolische verband als horizontale asymptoot $y = 5$ heeft en door het punt $(2,7)$ gaat.
- Bereken de waarde van y die hoort bij $x = 10$ als de grafiek bij dit hyperbolische verband door de punten $(2,9)$ en $(4,8)$ gaat.

Toepassen

De standaard vergoeding voor kilometers die je voor een werkgever rijdt in de eigen auto bedraagt € 0,19 cent per kilometer. Een automobilist die voor zijn baas af en toe een ritje maakt is natuurlijk nieuwsgierig of daarmee inderdaad de kosten zijn gedekt. Het mooiste is als je dit voor een werkelijke situatie kunt narekenen, misschien heb je in je familie of kennissenkring wel iemand die in zo'n situatie zit. En anders kun je met de gegevens hieronder rekenen.

Voor een bepaalde auto die op benzine rijdt worden de volgende schattingen gedaan:

- De prijs van een liter benzine is € 1,68 en je rijdt 12 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 300,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 1900,00 per jaar.

Maar rijdt de auto bijvoorbeeld op gas, of op diesel, of elektrisch, dan liggen deze bedragen anders. Voor een vergelijkbare elektrische auto zijn op hetzelfde moment dit de schattingen:

- De prijs van een kWh (kiloWattuur) elektriciteit is € 0,40 en je verbruikt 18 kWh per 100 km.
- De wegenbelasting is € 0 per jaar.
- De verzekering kost € 400,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 4200,00 per jaar.

Je kunt dit probleem oplossen met behulp van lineaire verbanden, maar ook met een hyperbolisch verband...

★★ **Opgave 5.7: Kilometervergoeding**

In de tekst in **Toepassen** zie je schattingen van de diverse kosten die je maakt als je in een eigen auto wilt rijden. Ga in deze opgave uit van die gegevens.

In deze opgave ga je op zoek naar een formule voor de kosten per jaarlijks gereden kilometer. Je vergelijkt een auto op benzine met een elektrische auto. De kosten per km noem je k en het jaarlijkse aantal gereden km noem je a .

Ga eerst uit van een auto die op benzine rijdt.

- a Stel op grond van de schattingen een formule op voor k afhankelijk van a .
- b Vanaf hoeveel gereden km per jaar is de kilometervergoeding kostendekkend?
Ga nu uit van een elektrische auto.
- c Stel op grond van de schattingen een formule op voor k afhankelijk van a .
- d Vanaf hoeveel gereden km per jaar is de kilometervergoeding kostendekkend?

★★★ **Opgave 5.8: Evenredig met een kwadraat**

Je hebt tot nu toe de begrippen ‘recht evenredig’ en ‘omgekeerd evenredig’ geleerd. Onthoud deze begrippen goed, ze komen regelmatig voor in toepassingen van de wiskunde. Een variabele kan echter ook wel recht evenredig zijn met het kwadraat van een andere variabele. Of omgekeerd evenredig met een kwadraat...

Wanneer y recht evenredig is met het kwadraat van x , dan hoort daarbij een formule van de vorm $y = c \cdot x^2$. Hierin is c een constante.

- a Neem eerst $c = 1$. Maak een tabel voor gehele waarden van x vanaf -3 tot en met 3 en teken een bijpassende grafiek.
- b Je kunt deze grafiek ook maken in **GeoGebra** of in **Desmos** door op de invoerbalk de formule in te voeren. Doe dat en ga na of je grafiek overeenkomt met de grafiek die je bij a hebt getekend.
- c Onderzoek nu met behulp van GeoGebra/Desmos of de grafiek bij andere waarden van c dezelfde vorm heeft. Probeer te beschrijven hoe de grafiek verandert afhankelijk van de gekozen waarde voor c .

Wanneer y omgekeerd evenredig is met het kwadraat van x , dan hoort daarbij een formule van de vorm $y = \frac{c}{x^2}$. Hierin is c een constante.

- d Neem eerst $c = 1$. Maak een tabel zoals deze en teken een bijpassende grafiek.

x	-4	-2	-1	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	1	2	4
y											

Tabel 5.1

- e Je kunt deze grafiek ook maken in **GeoGebra** of in **Desmos** door op de invoerbalk de formule in te voeren. Doe dat en ga na of je grafiek overeenkomt met de grafiek die je bij d hebt getekend.
- f Onderzoek nu met behulp van GeoGebra/Desmos of de grafiek bij andere waarden van c dezelfde vorm heeft. Probeer te beschrijven hoe de grafiek verandert afhankelijk van de gekozen waarde voor c .

Practicum

Applet: hyperbolisch verband

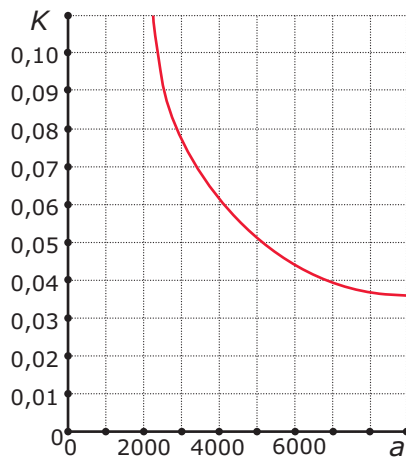
Hier zie je de grafiek van een **hyperbolisch verband**.
Je kunt de invloed van de waarden van c en d op de grafiek bekijken.

Antwoorden

5.1 a $K = \frac{150}{a} + 0,02$

b Als je a verdubbelt dan wordt K niet gehalveerd.

c Zie de figuur.



d Bij meer dan 5000 kopieën is de school uit de kosten.

5.2 a $x = 750$

b $x = 0,2$

c $t = 405$

d $d = 21$

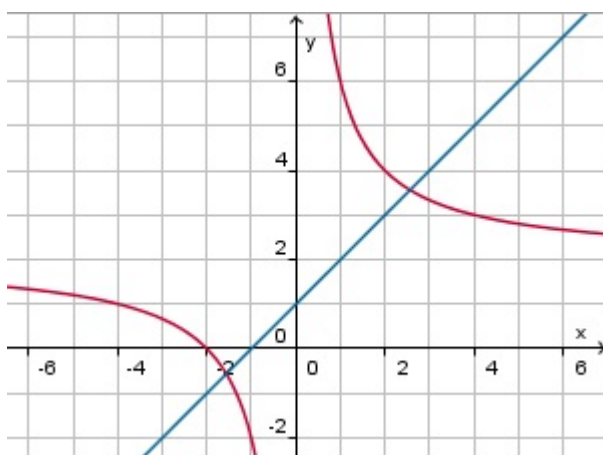
5.3 Grafiek I: $y_2 = 6 - 0,5x$.

Grafiek II: $y_3 = \frac{3}{x} + 1$.

Grafiek III: $y_1 = \frac{4}{x}$.

Grafiek IV: $y_4 = 0,2x + 4$

5.4 a Zie de figuur.



b $(2,6; 3,6)$ en $(-1,6; -0,6)$.

c $x \approx -1,6$ en $x \approx 2,6$.

d $x < -1,6$ en $0 < x < 2,6$.

5.5 a $x = -\frac{2}{3}$

b $x = -12$

c $x = 5$ of $x = -5$

d $x = -8$



5.6 a Bij $x = 10$ hoort $y = 5,4$.

b Bij $x = 10$ hoort $y = 7,4$.

5.7 a $k = 0,14 + \frac{2400}{a}$

b Meer dan 48000 km per jaar.

c $k = 0,072 + \frac{4200}{a}$

d Meer dan 35593 km per jaar.

5.8 a Maak een grafiek bij deze tabel.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

b Werk online met de GeoGebra calculator of met Desmos.

c De grafiek houdt steeds de vorm van een 'kommetje' of een 'bultje' (als c negatief is). Behalve wanneer $c = 0$, dan valt je grafiek samen met de x -as.

d Maak een grafiek bij deze tabel.

x	-4	-2	-1	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	1	2	4
x	0,0625	0,25	1	4	16	0	16	4	1	0,25	0,0625

e Gebruik de GeoGebra calculator of de Desmos grafische rekenmachine.

f De grafiek houdt steeds een vergelijkbare vorm (als c negatief is komen beide 'punten' naar beneden te liggen). Behalve wanneer $c = 0$, dan valt je grafiek samen met de x -as.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- recht evenredig (verband) — evenredigheidsconstante, hellingsgetal
- lineair verband — hellingsgetal, richtingscoëfficiënt — startgetal
- lineaire vergelijking — balansmethode
- omgekeerd evenredig (verband) — hyperbool
- hyperbolisch verband — asymptoot

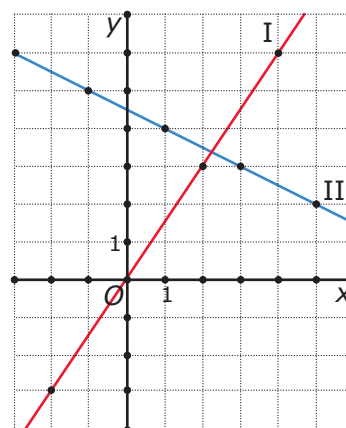
Activiteitenlijst

- formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken
- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken
- vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden oplossen
- formules en grafieken bij omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken
- formules en grafieken bij hyperbolische verbanden maken en gebruiken

Opgave 6.1

Hiernaast zie je twee rechte lijnen in een assenstelsel. Het zijn grafieken van y afhankelijk van x .

- Bij welk van beide grafieken is sprake van een recht evenredig verband tussen x en y ? En waarom?
- Bij de in a bedoelde grafiek hoort een formule van de vorm $y = c \cdot x$. Welke waarde heeft de evenredigheidsconstante c ?
- Als de waarde van x tien keer zo groot wordt, hoeveel keer zo groot wordt de waarde van y dan? Toon dit aan door de waarden van y bij x en bij $10x$ met elkaar te vergelijken.



Figuur 6.1

Opgave 6.2

In de vorige opgave zie je twee rechte lijnen in een assenstelsel. Het zijn grafieken van y afhankelijk van x . Bij beide grafieken is sprake van een lineair verband tussen x en y .

- Waarom?
- Bepaal de richtingscoëfficiënt (het hellingsgetal) van grafiek II. Stel een formule op bij deze grafiek.
- Ga met behulp van een berekening na of het punt $(41, -16)$ op grafiek II ligt.

Opgave 6.3

Gebruik weer de grafieken uit [Opgave 6.1](#).

- Met welke vergelijking kun je de x -waarde van het snijpunt van beide grafieken berekenen?
- Los de in a bedoelde vergelijking op.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van beide grafieken.
- Oefen het oplossen van lineaire vergelijkingen in het [Practicum](#).

**Opgave 6.4**

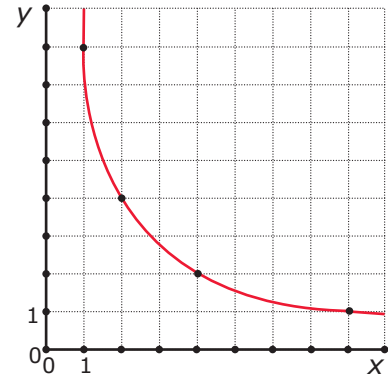
Als je alle waarden van x wilt bepalen waarvoor $1,5x < 4,5 - 0,5x$, dan los je een ongelijkheid op. Daarbij gebruik je de grafieken van $y_1 = 1,5x$ en $y_2 = 4,5 - 1,5x$. Die vind je bij **Opgave 6.1**.

- Waarom moet je eerst de vergelijking $1,5x = 4,5 - 0,5x$ oplossen?
- Los de ongelijkheid op.

Opgave 6.5

Hier zie je een deel van de grafiek bij de formule $y = \frac{8}{x}$.

- Waarom is hier sprake van een omgekeerd evenredig verband?
- Welk punt op de grafiek heeft x -waarde 16?
- Welk punt op de grafiek heeft y -waarde 32?
- Wat gebeurt er met de grafiek als x steeds groter wordt?
- Wat gebeurt er met de grafiek als x steeds dichterbij 0 komt?
- Je kunt in deze formule ook negatieve waarden voor x invullen. De grafiek is daarom niet compleet. Hoe ziet de complete grafiek er uit?



Figuur 6.2

Opgave 6.6

Gegeven is de formule $y = \frac{8}{x} + 2$.

- Teken een grafiek bij deze formule. Welk soort verband beschrijft deze formule?
- Welk punt op de grafiek heeft x -waarde 16?
- Welk punt op de grafiek heeft y -waarde 34?
- Wat gebeurt er met de grafiek als x steeds groter wordt?
- Wat gebeurt er met de grafiek als x steeds dichterbij 0 komt?
- Bekijk de vergelijking $\frac{8}{x} + 2 = 5$. Laat duidelijk zien hoe je deze vergelijking oplost.
- Welke oplossing heeft de ongelijkheid $\frac{8}{x} + 2 > 5$.

Testen★ **Opgave 6.7**

Maandag regent het vanaf 8:00 uur voortdurend. Het water in een cilindervormige regenmeter stijgt elke 10 minuten gelijkmatig met 6 mm. Om 8:00 uur was de regenmeter leeg. De waterhoogte wordt aangegeven door h in millimeters en de tijd t in minuten met $t = 0$ om 8:00 uur.

- Waarom is h recht evenredig met t ?
- Welke formule geeft het verband tussen h en t ?
- Teken een grafiek van h afhankelijk van t .
- Welk hellingsgetal heeft deze grafiek?
- Na hoeveel minuten regenen is de waterhoogte 20 mm?

★ **Opgave 6.8**

Een cilindervormige regenmeter wordt 's avonds geleegd. Het regent 's nachts een beetje. Om 8:00 uur de volgende dag staat er 21 mm water in de meter. Dan regent het zo hard dat er elke 10 minuten 5,5 mm water bijkomt.

De waterhoogte wordt aangegeven door h in millimeters en de tijd door t in minuten.

- Welke formule geeft het verband tussen h en t ?



- b Teken een grafiek van h afhankelijk van t .
- c Waarom is h nu niet recht evenredig met t ?
- d Welk hellingsgetal heeft deze grafiek?
- e Als het minder hard regent, wordt het hellingsgetal dan groter of kleiner?
- f Hoelang na 8:00 uur blijft de waterhoogte in de regenmeter onder de 50 mm? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

★ **Opgave 6.9**

Los de vergelijkingen op.

- a $5(x - 6) = 36 - (4 - x)$
- b $\frac{2}{3}t - 4 = \frac{2t-5}{6}$
- c $\frac{32}{x^2} + 10 = 12$

★ **Opgave 6.10**

Los de ongelijkheid $6 - 2x < 0,5x - 1$ op.

★ **Opgave 6.11**

Een school huurt voor € 2500,00 per jaar een kopieermachine voor de leerlingen. Om de kosten te dekken moeten de leerlingen een bepaald bedrag per kopie betalen.

- a Hoeveel moeten de leerlingen per kopie betalen als er 5000 kopieën per jaar worden gemaakt? En als er 25000 kopieën per jaar worden gemaakt?
- b Leg uit waarom het bedrag per kopie omgekeerd evenredig is aan het aantal kopieën.
De school heeft uitgerekend dat elke kopie aan papier en inkt € 0,05 kost. Die € 0,05 komt extra bij het bedrag dat de leerlingen per kopie moeten betalen. a is het aantal kopieën per jaar.
- c Stel een formule op voor het bedrag B dat een leerling per kopie moet betalen afhankelijk van a .
- d Van welk soort verband is er nu sprake? Teken een bijpassende grafiek voor 0 tot en met 50000 kopieën.
- e Hoeveel kopieën per jaar moeten er worden gemaakt om met een prijs voor de leerlingen van € 0,20 per kopie uit de kosten te komen?

★ **Opgave 6.12**

Los de volgende vergelijkingen op:

- a $15 + \frac{4}{x} = 25$
- b $15 + \frac{4}{x} = \frac{6}{x}$
- c $\frac{200}{4+2x} = 50$
- d $\frac{32}{x^2} + 10 = 12$

★★ **Opgave 6.13**

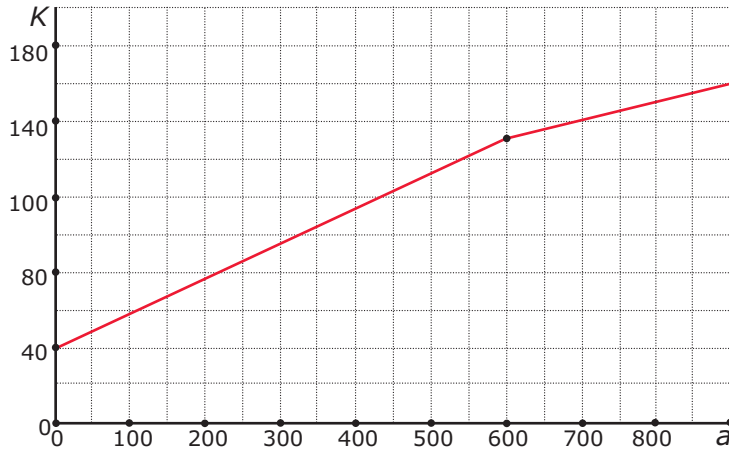
Stel bij de volgende verbanden een passende formule op.

- a Een lineair verband tussen x en y waarvan de grafiek gaat door de punten $A(20,16)$ en $B(25,6)$.
- b Een hyperbolisch verband tussen x en y waarvan de grafiek gaat door het punt $A(20,16)$ en de lijn $y = 10$ als horizontale asymptoot heeft.
- c Een hyperbolisch verband tussen x en y waarvan de grafiek gaat door de punten $A(20,16)$ en $B(25,6)$.

Toepassen

★★ Opgave 6.14: Grootverbruikstarief

Als je meer dan 600 m³ gas per jaar verstoekt, ben je een grootverbruiker. Dat geldt bijvoorbeeld voor de glastuinbouw. Om zijn kassen warm te houden verstoekt een tuinder nogal wat gas. Om dit betaalbaar te houden heeft het gasbedrijf een grootverbruikstarief. In de grafiek zie je wat gegevens (in €).



Figuur 6.3

- Waarom vertoont de grafiek een knik?
- Hoeveel bedragen de vaste kosten per jaar en de prijs per m³ voor een kleinverbruiker? Schrijf je berekening op.
- Beantwoord dezelfde vraag voor een grootverbruiker.
- Als a het aantal verbruikte m³ gas is en K zijn de jaarlijkse kosten (in €) bij grootverbruik, welke formule kun je dan opstellen voor K ?
- Bij welk grootverbruik komen de jaarlijkse kosten boven de € 200?

★★★ Opgave 6.15: Schaal van Richter

De kracht van een aardbeving wordt gemeten op de schaal van Richter. Een kracht van 6 op de schaal van Richter is al een behoorlijke aardschok. Maar die kracht neemt snel af als je verder van het centrum van de aardbeving af bent. Stel dat voor de kracht k van een bepaalde aardbeving geldt:

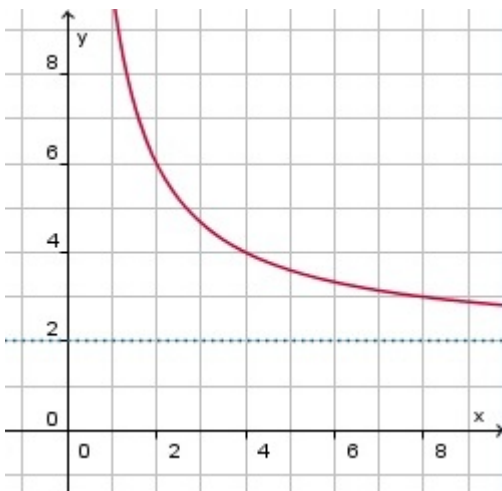
$$k = 1 + \frac{100}{r^2 + 20}$$

Hierin is r de afstand in km vanaf het centrum van de beving.

- Hoeveel bedraagt de kracht van deze aardbeving in het centrum? Rond af op één decimaal nauwkeurig.
- Hoeveel bedraagt de kracht van deze aardbeving op 5 km van het centrum?
- Bij welk getal op de schaal van Richter is er geen sprake van een aardbeving? Leg uit hoe je aan dit antwoord komt.
- Teken een grafiek van k afhankelijk van r . Neem voor r getallen van 0 tot en met 20.
- Als $k < 1,1$ is de aardbeving niet voelbaar. Bereken in één decimaal nauwkeurig hoeveel km je daarvoor van het centrum af moet zitten.

Antwoorden

- 6.1 a** Bij grafiek I, want deze grafiek is een rechte lijn door de oorsprong van het assenstelsel.
b $c = 1,5$
c Ook tien keer zo groot.
- 6.2 a** Beide grafieken zijn rechte lijnen.
b Het hellingsgetal is $c = -0,5$ en een bijpassende formule is $y = 4,5 - 0,5x$.
c $4,5 - 0,5 \cdot 41 = -16$, dus dit punt ligt inderdaad op grafiek II.
- 6.3 a** $1,5x = 4,5 - 0,5x$
b $x = 2,25$
c $(2,25; 3,375)$
d Je oefent jezelf met AlgebraKIT.
- 6.4 a** Je weet dan het snijpunt van beide grafieken.
b $x < 2,25$
- 6.5 a** Als x twee keer zo groot wordt, wordt y gehalveerd.
b $(16; 0,5)$
c $(0,25; 32)$
d De grafiek gaat dan steeds dichterbij de x -as lopen.
e De grafiek gaat dan steeds dichterbij de y -as lopen.
f Bij negatieve waarden van x krijg je dezelfde uitkomsten als bij positieve x -waarden, maar dan negatief. De complete grafiek bestaat dus uit twee stukken die elkaar spiegelbeeld zijn bij spiegeling in $O(0,0)$.
- 6.6 a** Maak eerst een tabel. Zie figuur. Het is een hyperbolisch verband.



- b** $(16; 2,5)$
c $(0,25; 34)$
d De grafiek gaat dan steeds dichterbij de lijn $y = 2$ lopen.
e De grafiek gaat dan steeds dichterbij de y -as lopen.
f $x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$
g $x > 0$ en $x < 2\frac{2}{3}$
- 6.7 a** Tweemaal zo lang regenen geeft een tweemaal zo grote waterhoogte.
b $h = 0,6t$
c De grafiek wordt een rechte lijn door $O(0,0)$ en $(10,6)$.
d $0,6$



- e Na $33\frac{1}{3}$ minuten.
- 6.8 a** $h = 21 + 0,55t$
- b** De grafiek wordt een rechte lijn door (0,21) en (10; 26,5).
- c** De grafiek van h gaat niet door de oorsprong van het assenstelsel.
- d** 0,55
- e** Het hellingsgetal wordt kleiner.
- f** Bijna 53 minuten.
- 6.9 a** $x = 15,5$
- b** $t = 9,5$
- c** $\frac{32}{x^2} + 10 = 12$ geeft $\frac{32}{x^2} = 2$ en $x^2 = 16$, zodat $x = 4$ of $x = -4$.
- 6.10** $x > 2,8$.
- 6.11 a** Bij 5000 kopieën: € 0,50.
Bij 25000 kopieën: € 0,10.
- b** Bij vijf keer zo veel kopieën wordt de prijs per kopie vijf keer zo laag.
- c** $B = \frac{2500}{a} + 0,05$
- d** Een hyperbolisch verband met horizontale asymptoot $B = 0,05$ en verticale asymptoot de B -as.
- e** Bij 16667 kopieën of meer is de school uit de kosten.
- 6.12 a** $x = 0,4$.
- b** $x = \frac{2}{15}$.
- c** $x = 0$.
- d** $x = 4$ of $x = -4$.
- 6.13 a** $y = -2x + 56$
- b** $y = \frac{120}{x} + 10$
- c** $y = \frac{1000}{x} - 34$
- 6.14 a** Vanaf 600 m^3 betaal je minder per kubieke meter gas.
- b** Vaste kosten per jaar: € 40 en prijs per m^3 : € 0,15.
- c** Vaste kosten per jaar en voor de eerste 600 m^3 : € 130.
Prijs per m^3 boven de 600 m^3 : € 0,10.
- d** $K = 70 + 0,10a$
- e** Als $a > 1300 \text{ m}^3$ per jaar.
- 6.15 a** $k = 6$
- b** $k = 3,2$
- c** Bij 1.
- d** Maak een grafiek bij deze tabel.
- | | | | | | |
|-----|---|-----|-----|-----|-----|
| r | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
| k | 6 | 3,2 | 1,8 | 1,4 | 1,2 |
- e** Meer dan 31,3 km.



Leerdoelentabel

In het achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:

✓ goed gemaakt — S wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — H hulp nodig gehad — G samen met groepje goed gemaakt — X fout gemaakt en niet goed begrepen — N niet bekeken

1	Recht evenredig	★	★★	★★★
	Formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken.	1.1 <input type="checkbox"/> 1.2 <input type="checkbox"/> 1.3 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/>	1.5 <input type="checkbox"/> 1.6 <input type="checkbox"/> 1.7 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	1.8 <input type="checkbox"/>
	Betekenis van evenredigheidsconstante en hellingsgetal begrijpen.	1.1 <input type="checkbox"/> 1.2 <input type="checkbox"/> 1.3 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/>	1.5 <input type="checkbox"/> 1.6 <input type="checkbox"/> 1.7 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	1.8 <input type="checkbox"/>
	Van een formule en/of grafiek bepalen of er sprake is van een recht evenredig verband.	1.1 <input type="checkbox"/> 1.2 <input type="checkbox"/> 1.3 <input type="checkbox"/> 1.4 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/> T 6.8 <input type="checkbox"/>	1.5 <input type="checkbox"/> 1.6 <input type="checkbox"/> 1.7 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	1.8 <input type="checkbox"/>
2	Lineaire verbanden	★	★★	★★★
	Formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken.	2.5 <input type="checkbox"/> T 6.8 <input type="checkbox"/>	T 6.13 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	2.8 <input type="checkbox"/> 2.9 <input type="checkbox"/>
	De begrippen hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) en startgetal.	2.2 <input type="checkbox"/> 2.3 <input type="checkbox"/> 2.4 <input type="checkbox"/> 2.5 <input type="checkbox"/> T 6.8 <input type="checkbox"/>	2.6 <input type="checkbox"/> 2.7 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	2.8 <input type="checkbox"/> 2.9 <input type="checkbox"/>
	Bij een lineaire grafiek een formule opstellen.	2.2 <input type="checkbox"/> 2.3 <input type="checkbox"/> 2.4 <input type="checkbox"/>	2.6 <input type="checkbox"/> 2.7 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	2.8 <input type="checkbox"/> 2.9 <input type="checkbox"/>
3	Lineaire vergelijkingen	★	★★	★★★
	Vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden opstellen en oplossen.	3.1 <input type="checkbox"/> 3.2 <input type="checkbox"/> 3.3 <input type="checkbox"/> 3.4 <input type="checkbox"/> T 6.9 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/>	3.5 <input type="checkbox"/> 3.6 <input type="checkbox"/> 3.8 <input type="checkbox"/> T 6.13 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	3.7 <input type="checkbox"/>
4	Omgekeerd evenredig	★	★★	★★★
	Formules en grafieken bij omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken.	4.1 <input type="checkbox"/> 4.2 <input type="checkbox"/> 4.3 <input type="checkbox"/> 4.4 <input type="checkbox"/> 4.5 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/>	4.7 <input type="checkbox"/>	4.6 <input type="checkbox"/>
5	Hyperbolische verbanden	★	★★	★★★
	Formules en grafieken bij hyperbolische verbanden maken en gebruiken.	5.1 <input type="checkbox"/> 5.3 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/>	5.6 <input type="checkbox"/> 5.7 <input type="checkbox"/> T 6.13 <input type="checkbox"/>	5.8 <input type="checkbox"/> T 6.15 <input type="checkbox"/>
	Vergelijkingen oplossen waarin hyperbolische verbanden voorkomen.	5.1 <input type="checkbox"/> 5.2 <input type="checkbox"/> 5.4 <input type="checkbox"/> T 6.9 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/> T 6.12 <input type="checkbox"/>	5.5 <input type="checkbox"/> 5.7 <input type="checkbox"/> T 6.13 <input type="checkbox"/>	5.8 <input type="checkbox"/> T 6.15 <input type="checkbox"/>

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All



www.math4all.nl

