Wiskunde / PGA

2 HAVO / VWO / docentmateriaal

Lineair en hyperbolisch

ConTeXt College

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je begeleidt dan als docent de leerlingen die in kleine groepjes aan wiskundige problemen werken en op die manier een eigen theoretisch kader opstellen. Dit gebeurt voornamelijk op de wijze die wordt beschreven in het boek *Building Thinking Classrooms in Mathematics* van Peter Liljedahl. Dit boek is ook in het Nederlands beschikbaar. Het is verstandig om dit boek vooraf door te werken, maar je kunt ook beginnen met deze **beknopte handleiding**.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee de leerling kan nagaan of de stof wordt beheersd. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding staat in de marge naast de opgave.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die de leerling alleen hoeft te maken als er genoeg tijd voor is
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die een leerling alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk was

In de bijlage staat een “**Leerdoelentabel**” waarin staat aangegeven door welke opgave het specifieke leerdoel wordt afgedekt en op welk niveau dit gebeurt. Als je deze tabel aan de leerlingen uitreikt, kunnen ze hun eigen vorderingen bijhouden.
Opgaven uit de samenvattende paragraaf *Totaalbeeld* worden voorafgegaan door een T.

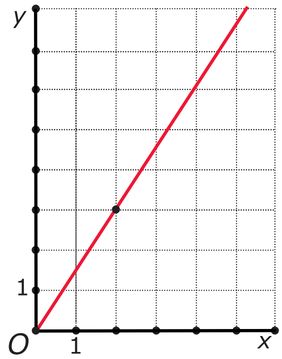
1

Lineair en hyperbolisch

1.1 Recht evenredig

Inleiding

Je hebt al met formules kennisgemaakt. Nu ga je werken met formules met twee variabelen. Je kunt daar een grafiek bij maken. De eenvoudigste grafieken zijn rechte lijnen door de oorsprong van het assenstelsel. Dus daar begin je mee.



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken;
- de begrippen evenredigheidsconstante en hellingsgetal;
- van een formule en/of grafiek bepalen of er sprake is van een recht evenredig verband.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode gebruiken.

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Recht evenredig’ maken de leerlingen kennis met het recht evenredig zijn van twee variabelen en het opstellen van de bijpassende formule en/of grafiek. Ook het begrip ‘evenredigheidsconstante’ komt aan de orde. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken.
- Misschien leuk om bij de eerste opdracht ook daadwerkelijk een Deense Kroon te tonen en misschien wel de actuele koers te gebruiken.
- Bij de tweede opdracht kunnen de gegevens gemakkelijk worden omgezet naar een elektrische auto die (bijvoorbeeld) 18 kWh per 100 km verbruikt, waarbij elke kWh aan elektriciteit € 0,45 kost.

Opdracht 1.1

Veel landen hebben een eigen munteenheid. Denemarken bijvoorbeeld heeft de Deense Kroon (DKK). Een Deense Kroon is ongeveer € 0,13.

Noem de kosten voor het kopen van Deense Kronen E (in €) en het aantal Deense Kronen q. Welke formule geldt er dan als er geen bijkomende kosten zijn? Teken er een grafiek bij.

Laat zien, dat als jullie 2 zoveel DKK kopen als een ander groepje, je dan ook 2 zoveel moet betalen.

Figuur 1.2

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Eventuele hulpvragen: "1 DKK = 0,13 euro, dus hoeveel betaal je voor q DKK?" en "Heb je al een tabel bij je formule gemaakt?".
Bij het laten zien dat je 2 keer zoveel moet betalen als je 2 keer zoveel DKK koopt, is één voorbeeld eigenlijk niet genoeg.

Bespreek dat na afloop (hopelijk heeft minstens één groepje een echte redenering op de werkplek staan, die heb je dan wel even aangeduid als belangrijk). Laat verder de termen 'recht evenredig' en 'evenredigheidsconstante' vallen en vraag na hoe die in de grafiek zichtbaar zijn.

Uitwerking

Formule: $E = 0{,}13 \cdot q$.

De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong van het assenstelsel en het punt (100,13).

Als je q door $2q$ vervangt, worden de kosten $0{,}13 \cdot 2q = 2 \cdot 0{,}13 \cdot q = 2E$ euro.

Opdracht 1.2

Pieter gaat op vakantie met de auto en hij legt 1105 kilometer af. Zijn auto rijdt 13 kilometer op één liter benzine. De benzineprijs is op dit moment € 1,75 per liter.

- Waarom zijn de benzinekosten K in euro recht evenredig met de afstand s in km?
- Stel een formule op voor het verband tussen K en s. Rond de evenredigheidsconstante af op twee decimalen.
- Wat kost de vakantie Pieter aan benzine?

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Eventuele hulpvragen: "Welke aanname doet Pieter omtrent het rijgedrag?", "Hoe bereken je de kosten per km?" en "Hoe bepaal je de totale kosten?".

Bespreek nog even na afloop waarom recht evenredigheid eigenlijk vaak een aanname is en het belang/risico van afronden.

Uitwerking

De benzinekosten zijn recht evenredig met het aantal gereden km omdat Pieter ervan uitgaat dat zijn verbruik constant hetzelfde zal zijn, dus dat hij een constante snelheid rijdt.

Hij kan 13 km rijden met 1 liter benzine en deze kost € 1,75.

13 km kost Pieter dus € 1,75 = 175 eurocent.

Per kilometer is dit dan $\frac{175}{13} \approx 13{,}5$ cent.

Voor de kosten K geldt dan $K = 0{,}13 \cdot s$ euro.

Pieter zal in totaal $\frac{1105}{13} = 85$ liter benzine verbruiken. De benzine kost € 1,75 per liter. De vakantie kost Pieter dus aan benzine: $85 \cdot 1{,}75 = 148{,}75$ euro. Met de formule zou dit $0{,}13 \cdot 1105 = 143{,}65$ euro zijn. Het verschil zit hem in het afronden.

Opdracht 1.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het ‘recht evenredig’ zijn van twee variabelen. Het gaat er om hoe je dit aan een bijpassende formule en/of grafiek kunt zien en hoe je de ‘evenredigheidsconstante’ kunt vinden.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

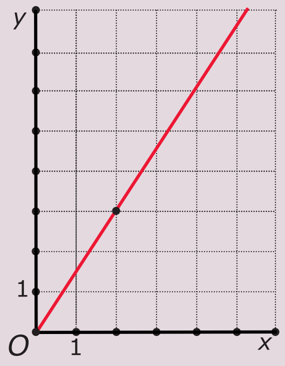
Om te onthouden

Bekijk de applet

In de wiskunde is het gebruikelijk om voor de variabelen de letters x en y te gebruiken in formules. Je zegt dat de variabele y **recht evenredig** is met de variabele x als een verdubbeling van x ook altijd een verdubbeling van y betekent. Hierbij hoort een formule van de vorm $y = a \cdot x$. De grafiek bij een recht evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong (0,0).

- a heet de **evenredigheidsconstante**.
- a bepaalt hoe steil de rechte lijn loopt en heet daarom wel het **hellingsgetal** van die rechte lijn.

Meestal is y de afhankelijke variabele en dus komt y op de verticale as. Die as heet daarom de ***y*-as**. De horizontale as is de ***x*-as**.



Figuur 1.3

Verwerken

★ Opgave 1.1

Mevrouw Willems krijgt een kilometervergoeding K voor de kilometers die ze voor haar werk met de auto aflegt. Ze krijgt € 0,19 per km. Noem het aantal werkkilometers per maand q.

a Stel de formule op voor K.

b Is K recht evenredig met q? Waarom wel/niet?

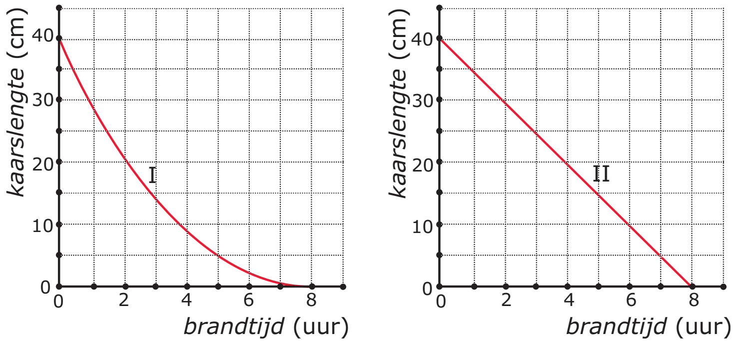
c Hoe ziet de grafiek van K er uit?

Mevrouw Willems heeft berekend dat iedere gereden kilometer 12,5 cent aan brandstof kost.

d Zijn de brandstofkosten voor het werk ook recht evenredig met q?

★ Opgave 1.2

Zuiver cilindervormige kaarsen branden gelijkmatig op: elk uur verdwijnt er (in theorie) evenveel kaarslengte. Hier zie je twee grafieken bij opbrandende kaarsen.



Figuur 1.4

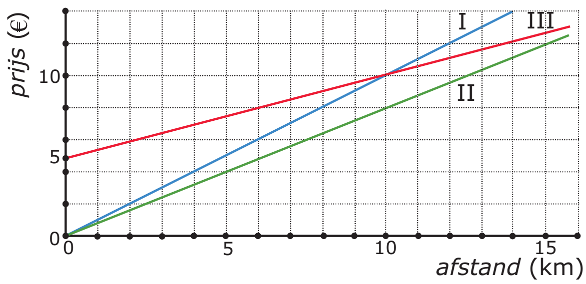
a Welke van deze twee grafieken hoort bij een cilindervormige kaars en waarom?

b Is de kaarslengte recht evenredig met de brandtijd?

c Met hoeveel centimeter per uur brandt de cilindervormige kaars op?

★ Opgave 1.3

De prijs die je voor een rit met een taxi betaalt, hangt af van de afstand die je rijdt. Je ziet hieronder van drie taxibedrijven de grafiek van het verband tussen prijs p (in €) en gereden afstand s (in km).



Figuur 1.5

a Bij welke firma's betaal je alleen een bedrag per gereden km?

b Geef bij die twee taxibedrijven een formule voor p afhankelijk van s.

c Ook bij het derde taxibedrijf betaal je een vast bedrag per gereden km. Alleen berekenen zij ook nog voorrijkosten. Hoeveel bedragen die voorrijkosten?

d Stel ook voor die derde firma een formule op voor p.

e Hoe kun je aan de grafiek en de formule zien dat bij die derde firma de prijs p niet recht evenredig is met het aantal gereden km s?

★ **Opgave 1.4**

De volgende formules beschrijven een verband tussen x en y:

- formule I: $y = 0{,}85x$
- formule II: $y = 0{,}85 + x$
- formule III: $y = 8{,}5x$
- formule IV: $y = 8{,}5 - 1{,}5x$

a Bij welke van deze formules is y recht evenredig met x?

b Bereken bij elk van deze formules de waarde van x waarvoor $y = 5$.

★ ★ **Opgave 1.5**

Bij constante snelheid geldt: $s = vt$, waarin

- s de afgelegde weg in m is;
- v de snelheid in m/s is;
- t de tijd in s is.

a Leg uit waarom de afgelegde weg bij constante snelheid recht evenredig is met de tijd.

b Een voorwerp beweegt 20 s met een snelheid van 40 m/s. Hoeveel bedraagt zijn afgelegde weg?

c Een voorwerp beweegt 20 s en legt daarin 700 m af. Met welke snelheid bewoog dit voorwerp?

d Een voorwerp beweegt 1500 m met een snelheid van 60 m/s af. Hoe lang doet het daar over?

e Je kunt de gegeven formule ook in de vorm $v = ...$ schrijven. Hoe ziet de formule er dan uit?

f Schrijf de gegeven formule in de vorm $t = ...$.

★ ★ **Opgave 1.6**

Twee wielrenners rijden een ronde van 178 km. De eerste wielrenner fietst met een constante snelheid van 42 km/h. De tweede komt 3 minuten later binnen dan de eerste wielrenner.

a Hoelang doet de eerste wielrenner over de ronde? Geef je antwoord in seconden nauwkeurig.

b Wat is de constante snelheid van de tweede renner in kilometers per uur? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Veel volwassenen bezitten een auto om zich te verplaatsen. Dat kost geld, met name aan brandstofkosten. Je kunt vrij eenvoudig een schatting maken van het bedrag dat je daar jaarlijks aan kwijt bent.

Neem eens aan dat je dat wilt doen voor een auto die op benzine rijdt. Je maakt dan een lijst met de kilometerstanden (aflezen op de km-teller in de auto) en de hoeveelheid benzine die je tankt op dat moment. En dat houd je een tijdje vol. Daarmee bereken je hoeveel liter benzine de auto gemiddeld per km verbruikt. Verder houd je in dezelfde periode de benzineprijs bij. Op grond daarvan maak je een schatting van de gemiddelde benzineprijs (in euro per liter) voor het jaar waarvoor je de brandstofkosten wilt schatten.

★ ★

Opgave 1.7: Auto op benzine

Deze tabel is gemaakt door de bestuurder van een auto die op benzine rijdt. De kilometerstand en de hoeveelheid getankte benzine is steeds op hetzelfde moment opgeschreven. (Je kunt misschien zelf ook wel dergelijke gegevens bemachtigen. Dan heb je nog wat aan het rekenwerk!)

benzinekosten auto	
km-teller	getankt
kilometerstand	aantal L
12115	45
12678	50
13328	50
13477	40
13997	45
14652	50
15301	50
15984	40
16524	50
17264	45
17925	48

Figuur 1.6

a Laat zien dat deze bestuurder gemiddeld ongeveer 0,08 liter benzine per gereden km verbruikte.

b De gemiddelde benzineprijs was in die periode € 1,75 per liter. Hoeveel bedragen zijn brandstofkosten per kilometer?

Voor een schatting van de totale brandstofkosten per jaar (K in euro) neem je aan dat die recht evenredig met het aantal gereden kilometers per jaar (a in km) zijn.

c Waarom is dat een aanname?

d Stel een formule op bij het verband tussen K en a en bereken hiermee de brandstofkosten voor een jaar waarin deze auto ongeveer 18000 km rijdt.

e Is een onkostenvergoeding van € 0,19 per km voor de kilometers die iemand voor zijn werk rijdt dus zonder meer voordelig voor de automobilist? Licht je antwoord toe.

★ ★ ★

Opgave 1.8: Auto op benzine, op diesel, op gas, of elektrisch?

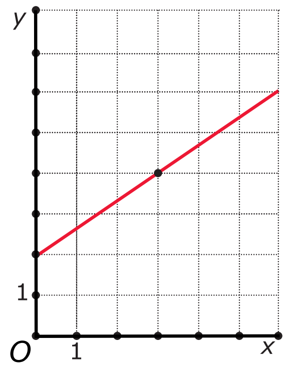
Er zijn ook auto's die niet op benzine rijden, zelfs in dezelfde prijsklasse. Ook daarvan kun je de brandstofkosten per jaar schatten. Wat is het voordeligst?

Houd een vergelijkend onderzoek naar de jaarlijkse brandstofkosten van auto's uit dezelfde prijsklasse die op verschillende brandstoffen rijden. Zoek zoveel mogelijk echte gegevens en/of zoek op internet. Kies zelf een prijsklasse.

1.2 Lineaire verbanden

Inleiding

Er zijn natuurlijk ook situaties waarbij rechte lijn grafieken niet door de oorsprong van het assenstelsel gaan. Je gaat nu zien wanneer dat het geval is. Rechte lijn grafieken horen bij lineaire verbanden.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken;
- de begrippen hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) en startgetal;
- bij een lineaire grafiek een formule opstellen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige verbanden herkennen en de evenredigheidsconstante, het hellingsgetal, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode gebruiken.

Voor de docent

Bij het onderdeel 'Lineaire verbanden' maken de leerlingen kennis met een lineair verband tussen twee variabelen en het opstellen van de bijpassende formule en/of grafiek. Ook de begrippen 'richtingscoëfficiënt/hellingsgetal' en 'startgetal/begingetal' komen aan de orde. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken en plakband voor het opplakken van informatiebladen.
- Misschien leuk om bij de eerste opdracht ook daadwerkelijk een Deense Kroon te tonen en misschien wel de actuele koers te gebruiken.
- Bij de derde opdracht hoort een informatieblad waar de grafiek op staat.

Opdracht 2.1

Veel landen hebben een eigen munteenheid. Denemarken bijvoorbeeld heeft de Deense Kroon (DKK). Een Deense Kroon is ongeveer € 0,13. Wil je bij een bank Deense Kronen kopen dan betaal je vaak ook nog transactiekosten, dat zijn kosten voor het werk dat de bank heeft aan het afhandelen van jouw betalingsopdracht. Stel dat die kosten € 2,50 per transactie zijn.

Figuur 2.2

Noem de kosten voor het kopen van Deense Kronen E (in €) en het aantal Deense Kronen D. Welke formule geldt er? Teken er een grafiek bij.

Ga na, of als jullie 2 zoveel DKK kopen als een ander groepje, je dan ook 2 zoveel moet betalen.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Eventuele hulpvragen: “1 DKK = 0,13 euro, dus hoeveel betaal je voor D DKK?” en “Heb je al een tabel bij je formule gemaakt?”.
Bij het laten zien dat je niet 2 keer zoveel moet betalen als je 2 keer zoveel DKK koopt, is een (tegen-) voorbeeld genoeg.

Bespreek dat na afloop. Laat verder de termen ‘lineair verband’ en ‘hellingsgetal/richtingscoëfficiënt’ vallen en vraag na hoe die in de grafiek zichtbaar zijn.

Uitwerking

Formule: $E = 0{,}13 \cdot D + 2{,}50$.

De grafiek is een rechte lijn door $(0; 2{,}5)$ en $(100; 15{,}5)$.

Als je D door $2D$ vervangt, worden de kosten $0{,}13 \cdot 2D + 2{,}50 \neq 2E$ euro, want de 2,50 wordt niet verdubbeld. Maar ook één tegenvoorbeeld is genoeg.

Opdracht 2.2

Met een glasvezelabonnement ben je voorzien van t.v., internet en vaste telefonie. Je betaalt maandelijkse abonnementskosten en daar bovenop belkosten. Stel je betaalt € 30,00 abonnementskosten per maand en nog € 0,25 per gebelde minuut. Noem de maandelijkse kosten K in euro en het aantal belminuten t.

- Stel een formule op voor het verband tussen K en t en teken een bijpassende grafiek.
- Laat in je grafiek zien hoe je de richtingscoëfficiënt (het hellingsgetal) eruit kunt afleiden.
- Wat kost het je als je 1,5 uur hebt gebeld met de vaste telefoon?

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

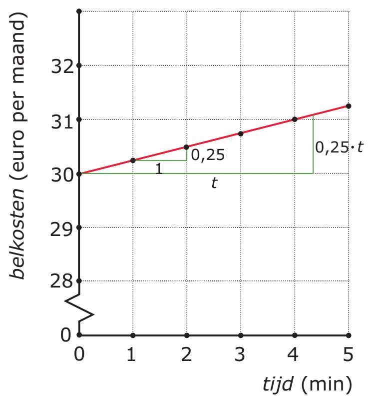
Eventuele hulpvragen: “Hoeveel betaal je als je niet belt?”, “Hoeveel betaal je als je 1 belminuut hebt?”, “Hoeveel betaal je als je 10 belminuten hebt?”, “Hoeveel betaal je als je t belminuten hebt?”, “Heb je een tabel gemaakt?” en “De richtingscoëfficiënt is de toename/afname per belminuut, waar zit dat in je grafiek?”.

Bespreek nog even na afloop de termen ‘lineair verband’, ‘begingetal’ en ‘hellingsgetal/richtingscoëfficiënt’ en waar die in de grafiek te zien zijn.

Uitwerking

Formule $K = 30 + 0{,}25 \cdot t = 0{,}25t + 30$ euro.

Grafiek:

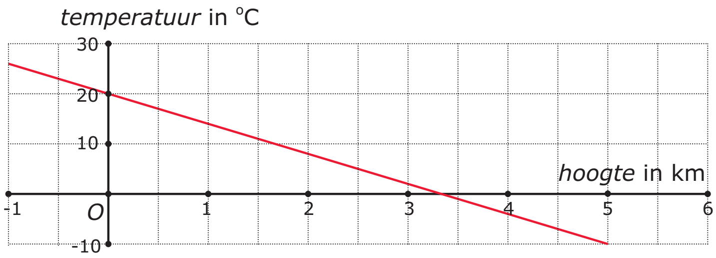


Figuur 2.3

1,5 uur = 90 belminuten. Dan is $K = 0{,}25 \cdot 90 + 30 = 52{,}50$ euro.

Opdracht 2.3

In de grafiek is te zien hoe de temperatuur T afhangt van de hoogte h boven de zeespiegel.



Figuur 2.4

Welke formule hoort bij het lineaire verband tussen T en h?
En op welke hoogte is de temperatuur 0 °C?

Toelichting

Geef de opdracht mondeling. De figuur staat op het **Werkblad** en kan worden uitgedeeld.

Mogelijke hulpvragen: "Kun je twee roosterpunten op de grafiek vinden?", "Hoeveel hoogteverschil en hoeveel temperatuurverschil is er tussen die twee punten?", "Hoe kun je daarmee het hellingsgetal berekenen, dus hoeveel de temperatuur per km lager wordt?" en "Hoe stel je nu de complete formule op?".
En bij het berekenen van de hoogte als $T = 0$ afhankelijk van de aanpak die wordt gekozen: "Kun je alvast een schatting maken?", "Hoe kun je het antwoord vinden door inklemmen?", of "Hoe kun je de vergelijking oplossen?".

Uitwerking

Het startgetal is 20 °C, dat is het punt waar de grafiek de verticale as snijdt.
Om het hellingsgetal te weten te komen, zoek je twee 'mooie' punten op de grafiek. Hier zijn dat (0,20) en (5, -10). Deze coördinaten gebruik je om het hellingsgetal te berekenen. Als de hoogte toeneemt van $h = 0$ tot $h = 5$, dan neemt de temperatuur af van 20 °C naar -10 °C. Bij elke hoogtestijging van $5 - 0 = 5$ km, verandert de temperatuur met $-10 - 20 = -30$ °C. Per km dus met $\frac{-30}{5} = -6$ °C.

Het hellingsgetal per kilometer is daarom -6.

De gevraagde formule is:

$T = 20 - 6h$ met h in kilometers en T in °C.

Je kunt nu een tabel maken en zo kijken bij welke waarde van h je op 0 uitkomt.
Je kunt ook oplossen $20-6h = 0$. Met de balansmethode of terugrekenen geeft dat $h = 10/3 = 3{,}333...$

Opdracht 2.4

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over een 'lineair verband' tussen twee variabelen. Het gaat er om hoe je dit aan een bijpassende formule en/of grafiek kunt zien en hoe je de 'richtingscoëfficiënt' (of het 'hellingsgetal') kunt vinden.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

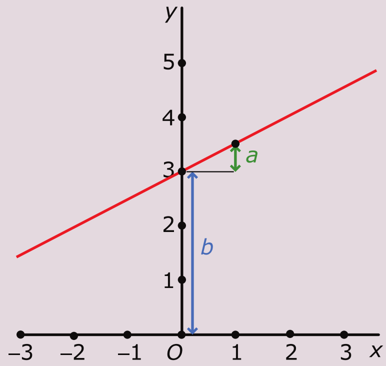
Om te onthouden

Bekijk de applet: Lineaire verbanden

Als er een **lineair verband** tussen y en x is, heeft de bijbehorende formule de vorm $y = a \cdot x + b$, waarin:

- a het **hellingsgetal**, dus de toe- of afname van y per stap van 1 van x;
- b het **begingetal**, de uitkomst bij $x = 0$.

De grafiek bij zo'n lineair verband is een rechte lijn door $(0,b)$. Als je de waarde van x daarna met 1 verhoogt, neemt de uitkomst met a toe en als a negatief is, af. Het hellingsgetal a heet ook wel de **richtingscoëfficiënt**, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.



Figuur 2.5

Verwerken

Opgave 2.1

Tegenwoordig hebben veel mensen een smartphone met internet. Voor een telefoonabonnement betaal je daarom naast abonnementskosten en belkosten ook de kosten voor een internetbundel. Stel je voor dat je € 20,00 abonnementskosten per maand betaalt en dat de belkosten € 0,22 per minuut zijn. Daarnaast betaal je voor de internetbundel van 1000 MB € 10,00.

a Geef een formule voor het verband tussen de totale maandelijkse kosten K en het aantal belminuten m.

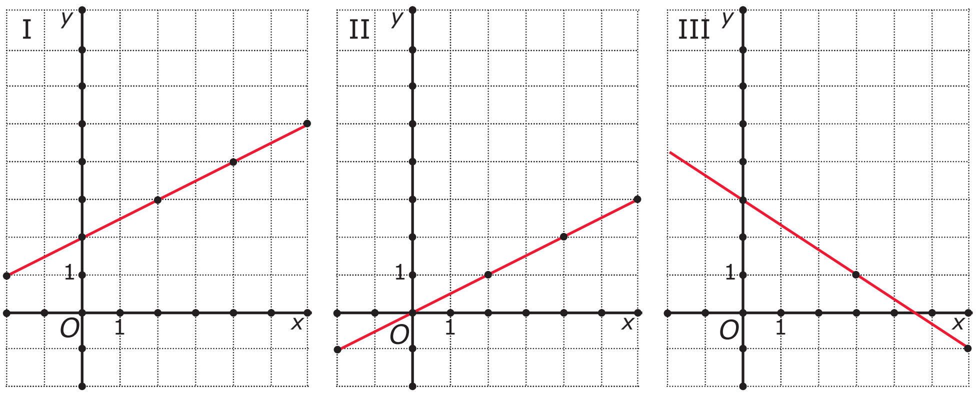
b Maak een tabel bij deze formule.

c Als je geen internetbundel afsluit, betaal je € 0,05 per verbruikte MB. Stel dat je in een bepaalde maand 240 MB verbruikt. Is het dan goedkoper om een internetbundel af te sluiten of om te betalen per verbruikte MB?

A. internetbundel
B. betalen per verbruikte MB

★ Opgave 2.2

Je ziet drie grafieken die elk een verband tussen de variabelen x en y weergeven.



Figuur 2.6

a Bij welke van deze grafieken is y recht evenredig met x?

A. grafiek I
B. grafiek II
C. grafiek III

b Wat is bij die grafiek het hellingsgetal?

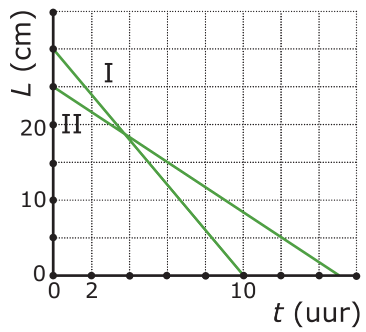
c Bij welke van deze grafieken is het hellingsgetal negatief?

A. grafiek I
B. grafiek II
C. grafiek III

d Maak bij elke grafiek een formule voor y afhankelijk van x.

★ **Opgave 2.3**

Zuiver cilindervormige kaarsen branden gelijkmatig op. Je ziet de grafieken van de lengte L in centimeters van twee van die kaarsen afhankelijk van de brandtijd t in uren.



Figuur 2.7

a Welke grafiek hoort bij de dikste kaars? Licht je antwoord toe.

A. grafiek I
B. grafiek II

b Waarom is er bij beide grafieken sprake van een lineair verband?

c Stel formules op voor het verband tussen L en t.

d Je steekt beide kaarsen tegelijk aan. Welke kaars is het langst na vier branduren?

A. kaars I
B. kaars II

★ **Opgave 2.4**

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(5,12)$.

a Stel een formule op voor y afhankelijk van x.

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $A(0,10)$ en $C(5,0)$.

b Stel een formule op voor y afhankelijk van x.

★ **Opgave 2.5**

Voor het verbruik van water betaal je twee soorten kosten:

- een vast bedrag per jaar, het vastrecht
- een bedrag per m^3 water die je verbruikt

Die bedragen kunnen per gebied verschillend zijn, afhankelijk van de leverancier van het water. In de tabel worden twee gebieden vergeleken:

verbruik v (m^3)	0	50	100	150	200
kosten K in gebied A (euro)	36,00	126,00	216,00		
kosten K in gebied B (euro)	48,00	125,50	203,00		

Tabel 2.1

a In beide gevallen is er sprake van een lineair verband tussen K en v. Leg uit waarom en vul de tabel verder in.

b Uit de tabel kun je afleiden hoeveel je in beide gevallen per m^3 betaalt. Doe dat voor beide gebieden en stel formules op voor K afhankelijk van v.

c Teken de grafieken van K voor beide gebieden in één figuur.

d Bereken de kosten voor een waterverbruik van 120 m^3 in beide gebieden.

e Hoe kun je aan de twee hellingsgetallen zien in welk gebied je het goedkoopste uit bent als je veel water verbruikt?

★ ★ **Opgave 2.6**

Het gewicht van een kabelhaspel hangt af van de lengte van de kabel die er omheen gewonden is. Zo'n grote kabelhaspel bevat nieuw wel 1000 m kabel. Hij weegt dan 800 kg. Als er 200 m kabel af is, weegt de haspel met kabel nog 650 kg.

Hoeveel weegt een lege haspel?

Figuur 2.8

★ ★ **Opgave 2.7**

Op een vliegveld ligt een horizontale rolloopband die 500 meter lang is.
De rolloopband heeft een snelheid van 4 km/h. Emma en Daan stappen tegelijk op de rolloopband. Emma loopt met een snelheid van 6 km/h op de band, Daan staat stil op de rolloopband.
Hoeveel meter ligt Emma voor op Daan als ze aan het einde van de rolloopband is?

A. 100 m
B. 160 m
C. 200 m
D. 250 m
E. 300 m

Toepassen

Veel volwassenen bezitten een auto om zich te verplaatsen. Dat kost geld, niet alleen aan brandstofkosten, maar ook aan wegenbelasting, verzekering, onderhoud en afschrijving. Je wilt een schatting maken van het bedrag dat je daar jaarlijks aan kwijt bent. Gemakkelijk is dat niet want de bedragen voor de verschillende kostenposten veranderen nogal. Je moet daarom aannames doen die zijn gebaseerd op de gegevens van het moment waarop je de berekening gaat uitvoeren. Hier zie je een aantal schattingen op een bepaald moment voor een auto die op benzine rijdt:

Figuur 2.9

- De prijs van een liter benzine is € 1,68 en je rijdt 12 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 300,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 1900,00 per jaar.

Maar rijdt de auto bijvoorbeeld op gas, of op diesel, of elektrisch, dan liggen deze bedragen anders. Voor een vergelijkbare elektrische auto zijn op hetzelfde moment dit de schattingen:

- De prijs van een kWh (kiloWattuur) elektriciteit is € 0,40 en je verbruikt 18 kWh per 100 km.
- De wegenbelasting is € 0 per jaar.
- De verzekering kost € 400,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 4200,00 per jaar.

Deze verschillen spelen een rol als je wilt kiezen tussen rijden op benzine of elektrisch rijden.

★ ★ ★ **Opgave 2.8: Benzineauto of elektrische auto?**

In de tekst bij **Toepassen** zie je schattingen van de diverse kosten die je maakt als je in een eigen auto wilt rijden. Ga in deze opgave uit van die gegevens.

a Welke van deze kosten zijn vaste kosten per jaar?

b Hoeveel bedragen de energiekosten per kilometer voor de auto op benzine? En voor de elektrische auto?

c Stel voor de auto op benzine een formule op van de totale kosten per jaar (K in euro) afhankelijk van het aantal gereden kilometers per jaar (a in km). Doe dit ook voor de elektrische auto.

d Bereken hiermee de kosten voor een jaar waarin de auto ongeveer 18000 km rijdt. Doe dit zowel voor de auto op benzine als de elektrische auto.

e Maak grafieken bij het verband tussen K en a en bepaal daarmee vanaf hoeveel km per jaar je goedkoper uit bent met een auto die op diesel rijdt.

★ ★ ★ **Opgave 2.9: Auto op benzine, op gas, of elektrisch?**

Je hebt in de voorgaande opgave het verschil in kosten bekeken van een auto die op benzine rijdt en een elektrische auto. Natuurlijk is het beter als je zelf actuele gegevens zoekt en gebruikt voor de berekening. Je kunt daarbij ook denken aan het vergelijken met een auto op gas.

Houd een vergelijkend onderzoek naar de jaarlijkse kosten van auto's uit dezelfde prijsklasse die op verschillende brandstoffen rijden. Zoek zoveel mogelijk echte gegevens en/of zoek op internet. Kies zelf een prijsklasse.

Practicum: Formule van een lineair verband opstellen

Bekijk de applet.

Verplaats de twee punten A en B en stel zelf de formule van y afhankelijk van x op. Ga uit van een lineair verband. De juiste formule staat bij de grafiek.

1.3 Lineaire vergelijkingen

Inleiding

Soms wil je lineaire verbanden met elkaar vergelijken. Bijvoorbeeld als je wilt weten welke aanbieder het goedkoopst is, of welke kaars langer brandt, of...

Gelukkig ken je de balansmethode nog wel!?

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden opstellen en oplossen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige en lineaire verbanden herkennen en het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige en lineaire verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Voor de docent

Bij het onderdeel 'Lineaire vergelijkingen' leren de leerlingen wat lineaire verbanden te maken hebben met lineaire vergelijkingen en ongelijkheden en hoe je die vervolgens oplost. De drie bekende methoden: inklemmen, terugrekenen en de balansmethode komen weer voorbij. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken en plakband voor het opplakken van informatiebladen.
- Bij de tweede opdracht hoort een informatieblad waar de grafiek op staat.

Opdracht 3.1

De productie van een nieuw soort verf kost € 3,50 per liter. Verder zijn er vaste kosten (machines, gebouwen, etc.) van € 24000 per jaar. De fabrikant van deze verf wil de verf verkopen voor € 7,20 per liter.
Hoeveel liter moet hij jaarlijks verkopen om winst te gaan maken?

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Eventuele hulpvragen: "Kun je een formule opstellen voor de kosten/opbrengst?", "Kun je er grafieken bij maken?" of "Kun je een vergelijking maken?" en "Welke methoden ken je om het snijpunt van de grafieken te bepalen?" of "Welke methoden ken je om een vergelijking op te lossen?". Bij leerlingen die dit echt niet meer weten: als het goed is hebben ze leren inklemmen en de balansmethode geleerd. Herinner ze daaraan.

Bespreek na afloop dat het eigenlijk om een 'ongelijkheid' gaat.

Uitwerking

De productiekosten K hangen af van het jaarlijks geproduceerde aantal liters a: $K = 24000 + 3{,}50a$. Als alle jaarlijks geproduceerde verf verkocht wordt, hangt de opbrengst R ook van a af: $R = 7{,}20a$.

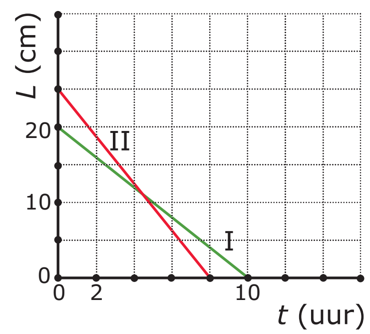
$7{,}20a = 24000 + 3{,}50a$ geeft $3{,}70a = 24000$ en dus $a = 24000/3{,}70 \approx 6486{,}5$.

Hij moet 6487 liter of meer per jaar verkopen.

Opdracht 3.2

Deze grafieken laten zien hoe twee cilindervormige kaarsen opbranden. L is de lengte van de kaars in centimeter en t is de brandtijd in uren. Ze worden gelijktijdig aangestoken.

Bereken in minuten nauwkeurig het moment waarop beide kaarsen even lang zijn.



Figuur 3.2

Toelichting

Geef de opdracht mondeling. De figuur staat op het **Werkblad** en kan worden uitgedeeld.

Eventuele hulpvragen: “Kun je formules opstellen voor de lengtes van de kaarsen afhankelijk van hun brandtijd?”, “Welke vergelijking kun je opstellen?”, “Hoe kun je die vergelijking oplossen?” en “Hoe kun je het antwoord met de grafiek controleren?”.

Uitwerking

Stel bij elke grafiek een formule op:

- kaars I: $L = 20 - 2t$
- kaars II: $L = 25 - 3{,}125t$

Beide kaarsen zijn even lang als: $20 - 2t = 25 - 3{,}125t$. Oplossen geeft:

$$\begin{aligned} 20 - 2t &= 25 - 3{,}125t && \text{beide zijden } -20 \\ -2t &= 5 - 3{,}125t && \text{beide zijden } +3{,}125t \\ 1{,}125t &= 5 && \text{beide zijden : } 1{,}125t \\ t &= \frac{5}{1{,}125} && \text{berekenen} \\ t &= 4\tfrac{4}{9} \end{aligned}$$

Beide kaarsen zijn even lang na ongeveer 4 uur en 27 minuten ($\frac{4}{9} \cdot 60 \approx 27$, omgerekend naar minuten).

Opdracht 3.3

Los de volgende vergelijkingen op:

- $15a + 38 = 10a + 53$
- $5a - 36 = -96 - 3a$
- $25g - 150 = 18g$
- $15200 + 0{,}8x = 8400 + 2x$
- $\frac{2a+20}{6} = 10$
- $\frac{1}{2}(12 - p) = p - (27 - p)$
- $\frac{1}{3}x - 5 = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en stapsgewijs.

Mogelijke hulpvragen zijn sterk afhankelijk van de vergelijking waaraan wordt gewerkt. Bovendien zijn er verschillende manieren om tot het antwoord te komen. Wel gaat het in vrijwel alle gevallen om het gebruiken van de balansmethode, alleen de vijfde kan met behulp van terugrekenen.

Uitwerking

Uitgebreide uitwerkingen staan op de website in de opgaven bij de uitleg en de voorbeelden.

- $15a + 38 = 10a + 53$ geeft $5a = 15$ en $a = 3$.
- $5a - 36 = -96 - 3a$ geeft $8a = -60$ en $a = -7{,}5$.
- $25g - 150 = 18g$ geeft $7g = 150$ en $g = 150/7$.
- $15200 + 0{,}8x = 8400 + 2x$ geeft $1{,}2x = 6800$ en $x = 5666{,}66...$
- $\frac{2a+20}{6} = 10$ geeft $a = (10 \cdot 6 - 20)/2 = 20$.
- $\frac{1}{2}(12 - p) = p - (27 - p)$ geeft $12 - p = 4p - 54$ en $5p = 66$, dus $p = 13{,}2$.
- $\frac{1}{3}x - 5 = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}$ geeft $2x - 30 = 5x + 3$ en $3x = -33$, dus $x = -11$.

Opdracht 3.4

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het oplossen van lineaire vergelijkingen en ongelijkheden.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Soms heb je met twee (of meer) lineaire verbanden te maken en wil je weten wanneer de uitkomsten bij het éne verband meer, minder zijn dan die bij het andere verband. Je krijgt dan een **lineaire ongelijkheid**.

Daarvoor los je eerst de bijbehorende **lineaire vergelijking** op.

Voor zo'n vergelijking gebruik je de **balansmethode**:

- aan beide zijden van het isgelijkteken mag je hetzelfde optellen of aftrekken;
- aan beide zijden van het isgelijkteken kun je met hetzelfde vermenigvuldigen of door hetzelfde delen als dit maar ongelijk is aan 0.

Heb je de vergelijking opgelost, dan kijk je naar de grafieken van beide verbanden om antwoord op de gestelde vraag te kunnen geven.

Verwerken

★ **Opgave 3.1**

Los de vergelijkingen op.

a $-6k + 55 = 4k - 25$

b $12 - 4x = 36 + 2x$

c $\frac{1}{3}x - 25 = 16 + \frac{1}{2}x$

d $5(4 - 2x) = 5x - (3 + x)$

★ **Opgave 3.2**

Los de vergelijkingen op.

a $\frac{3a \cdot 3}{3} + 2{,}5 = \frac{1}{2}a - 3{,}5$

b $\frac{1}{6}q + 2q = 3q - 0{,}5 + 7$

c $p(3 - 1) + 2 \cdot \frac{1}{6}p = 15p + 30$

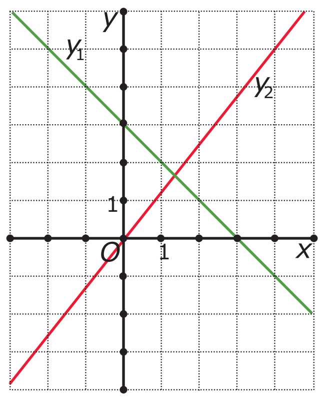
★ **Opgave 3.3**

Je ziet de grafieken van twee lineaire verbanden, aangegeven met y_1 en y_2.

a Los op: $y_1 = y_2$.

b Los op: $y_1 > y_2$.

c Controleer je antwoord bij b voor enkele waarden van x.



Figuur 3.3

★ **Opgave 3.4**

Voor de jaarlijkse kosten K (euro) voor het waterverbruik v (m^3) in twee gebieden A en B gelden de formules:

- gebied A: $K = 36 + 1{,}80v$
- gebied B: $K = 48 + 1{,}55v$

Schrijf bij de volgende vragen steeds de bijbehorende ongelijkheid op en los deze vergelijking op. Geef je antwoord in m^3 nauwkeurig.

a Bij welk verbruik zijn de kosten in gebied A lager dan in gebied B?

b Bij welk verbruik zijn de kosten in gebied B hoger dan € 200?

★ ★ **Opgave 3.5**

De temperatuur boven het aardoppervlak hangt onder andere af van de hoogte waarop je je bevindt. Vooral voor bergbeklimmers is het belangrijk om te weten dat elke stijging van 100 m een daling van de temperatuur van ongeveer 0,6 °C betekent.
Twee bergbeklimmers meten een temperatuur van 16 °C.

a Welke temperatuur meten zij als ze nog 120 m omhoog klimmen?

b Het aantal meters dat ze omhoog gaan, kun je h noemen. Welke formule geeft dan het verband weer tussen temperatuur T in °C en h?

c Welke ongelijkheid hoort er bij de vraag: ‘Na hoeveel meter stijgen komt de temperatuur die ze meten, onder het vriespunt?’

d Los de ongelijkheid bij c op. Geef je antwoord in tientallen meters nauwkeurig.

★ ★ **Opgave 3.6**

Twee auto's rijden elkaar op de snelweg tegemoet. Op een zeker moment zijn ze nog 120 km van elkaar verwijderd. Auto A rijdt met een snelheid van 115 km/h en auto B met een snelheid van 105 km/h.

Na hoeveel tijd passeren ze elkaar? Geef je antwoord in seconden nauwkeurig.

Toepassen

Iemand wil een nieuwe auto aanschaffen en twijfelt tussen een auto die op benzine rijdt en een zelfde auto die elektrisch is. Hij heeft deze formules opgesteld voor de kosten K afhankelijk van het aantal km a dat hij jaarlijks rijdt.

Benzineauto: $K = 2400 + 0{,}14a$.
Dieselauto: $K = 4200 + 0{,}072a$.

Welke auto is voor hem voordeliger?

Figuur 3.4

★ ★ ★ **Opgave 3.7: Benzineauto of elektrische auto?**

Gebruik de gegeven formules uit **Toepassen** hierboven.

a Welke ongelijkheid moet er worden opgelost?

b Los deze ongelijkheid op in gehele km nauwkeurig.

c Welk antwoord geef je nu op de vraag die de automobilist zichzelf heeft gesteld.

★ ★ **Opgave 3.8: Gastank inbouwen?**

Je wilt in een auto die op benzine rijdt een gastank inbouwen. Dat kost € 1450. Gas kost € 0,75 per liter en je rijdt 16 km op 1 liter gas. De benzinekosten zijn € 0,11 per kilometer. De totale kosten K_g voor het rijden op gas hangen af van het aantal kilometers a dat je rijdt.

a Stel een formule op voor K_g. Rond het hellingsgetal af op twee decimalen.

b Stel ook een formule op voor K_b, de brandstofkosten aan benzine voor het aantal gereden kilometers a.

c Na hoeveel gereden kilometers heb je de kosten van de gastank terugverdiend?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **vergelijkingen oplossen met de balansmethode**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.4 Omgekeerd evenredig

Inleiding

Hoe sneller je loopt, fietst, of rijdt, hoe minder tijd je nodig hebt om een bepaalde afstand af te leggen. Daarom bestaat er tussen afstand en tijd vaak geen recht evenredig of lineair verband. Je gaat nu kennismaken met omgekeerd evenredige verbanden.

$$y = a \cdot x$$

recht evenredig

omgekeerd evenredig

$$y = \frac{a}{x}$$

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige en lineaire verbanden herkennen en het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige en lineaire verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Omgekeerd evenredig’ leren de leerlingen wat omgekeerd evenredig is, hoe de grafieken en formules van omgekeerd evenredige verbanden er uitzien. Het begrip ‘hyperbool’ als naam voor deze grafieken komt voorbij. Je geeft de opdrachten mondeling.

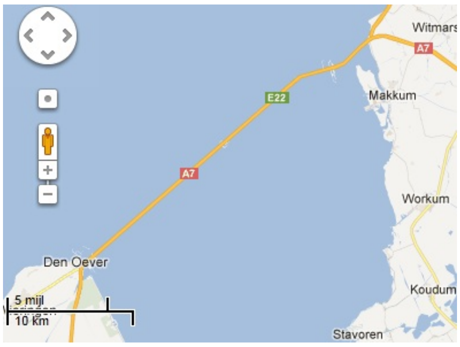
Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken en plakband voor het opplakken van informatiebladen.
- Bij de tweede opdracht hoort een informatieblad waar de grafiek op staat.

Opdracht 4.1

Op de Afsluitdijk ligt een snelweg met een lengte van 32 km. Hoe hoger je snelheid, hoe korter de tijd dat je op de Afsluitdijk rijdt. De tijd die je nodig hebt, is ‘omgekeerd evenredig’ met de snelheid: rijd je twee keer zo snel, dan heb je de helft van de reistijd nodig.

Geef een formule voor de reistijd t in minuten afhankelijk van de snelheid v (in km/h) en teken een bijpassende grafiek. Laat zien dat de bewering hierboven klopt.



Figuur 4.2

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Eventuele hulpvragen: "Je snelheid is in km/uur. Wat betekent dat voor het aantal minuten?", "Hoe bereken je nu het aantal minuten dat je over 32 km doet?" en voor de grafiek "Heb je al een tabel bij je formule gemaakt?".
Bij het laten zien dat je de helft van de tijd nodig hebt als je 2 keer zo snel rijdt, is een voorbeeld eigenlijk niet genoeg.

Bespreek dat na afloop (hopelijk heeft minstens één groepje een echte redenering op de werkplek staan, die heb je dan wel even aangeduid als belangrijk). Laat verder de term 'omgekeerd evenredig' nog eens vallen en benoem dat een bijbehorende grafiek 'hyperbool' heet. Het is ook goed om even te bespreken wat er met de grafiek en de assen aan de hand is, delen door 0 even herhalen.

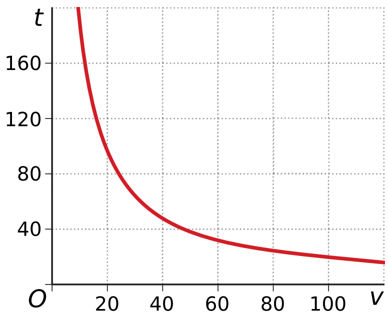
Uitwerking

Je ziet dat je de reistijd t in minuten kunt berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid v (in km/h) en met 60 te vermenigvuldigen: $t = \frac{32}{v} \cdot 60 = \frac{1920}{v}$.

De grafiek van zo'n omgekeerd evenredig verband is een hyperbool.

Je ziet de hyperbool bij de formule $t = \frac{1920}{v}$ voor positieve waarden van t en v. Hier moet inderdaad $t > 0$.

Vervang je in $t = \frac{1920}{v}$ de v door $2v$, dan krijg je $t = \frac{1920}{2v} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1920}{v}$.



Figuur 4.3

Opdracht 4.2

Deze hyperbool geeft het omgekeerd evenredige verband tussen l en b.
Er zijn twee punten van de grafiek af te lezen.

Stel een bijpassende formule op en leg uit hoe groot de oppervlakte is van elke rechthoekige tafel met deze lengte en breedte.

Figuur 4.4

Toelichting

Geef de opdracht mondeling. De figuur staat op het **Werkblad** en kan worden uitgedeeld.

Eventuele hulpvragen: "Hoe ziet de formule van een omgekeerd evenredig verband er uit?", "Hoe kun je nu de juiste formule vinden met behulp van de gegeven punten?", "Heb je beide punten nodig? Waarom wel/niet?" en "Hoe kan de formule gaan over de oppervlakte van een tafel?".

Uitwerking

De grafiek gaat door de punten (40,20) en (20,40).

De formule is van de vorm $l = \frac{A}{b}$.

Als de grafiek door (40,20) gaat, is $20 = \frac{A}{40}$, zodat $A = 800$.

De formule wordt dus $l = \frac{800}{b}$.

Ook het andere gegeven punt voldoet hier aan.

De formule is ook de schrijven als $l \cdot b = 800$ en dit kan de oppervlakte voorstellen van een rechthoekige tafel met lengte l en breedte b.

Opdracht 4.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over 'omgekeerd evenredig' en de formules die passen bij een omgekeerd evenredig verband.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

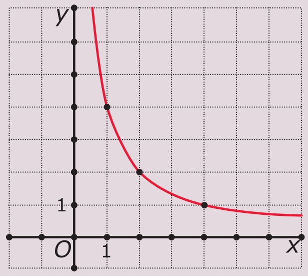
Bekijk de applet: grafiek omgekeerd evenredig verband

Bij een formule van de vorm $y = \frac{c}{x}$ met c een constant getal, spreek je van een **omgekeerd evenredig verband**. Je zegt wel dat de variabelen x en y **omgekeerd evenredig** zijn.

In het algemeen geldt:

- Twee variabelen x en y zijn omgekeerd evenredig als het vermenigvuldigen van x met een getal k tot gevolg heeft dat y met $\frac{1}{k}$ wordt vermenigvuldigd. Bijvoorbeeld: wordt x twee keer zo groot, dan wordt y een half keer zo groot.
- Je kunt de formule $y = \frac{c}{x}$ ook schrijven als $xy = c$.

De grafiek van zo'n omgekeerd evenredig verband is een **hyperbool**.



Figuur 4.5

Verwerken

★ **Opgave 4.1**

Stel je fietst steeds dezelfde route van huis naar school met een constante snelheid.

De tijd die hiervoor nodig is, is omgekeerd evenredig met de snelheid.

a Als de snelheid verdubbelt, wat betekent dit dan voor de tijd?

b Als de tijd verdubbelt, wat betekent dit dan voor de snelheid?

c Welke standaardformule hoort bij deze situatie? Gebruik v voor snelheid, t voor tijd en a voor de afgelegde afstand.

★ **Opgave 4.2**

Bij het rijden in een auto heb je behalve met de brandstofkosten per gereden kilometer ook te maken met vaste jaarlijkse kosten voor onder andere wegenbelasting, verzekering, garagekosten en afschrijving. Wanneer je wilt uitrekenen hoeveel een auto per gereden kilometer kost, dan moet je ook met die vaste kosten rekening houden.

Mevrouw Jansen schat haar vaste kosten op € 3800,00 per jaar. Als ze dit wil omrekenen naar vaste kosten per kilometer, dan moet ze haar vaste kosten delen door het aantal kilometers dat ze per jaar rijdt.

a Wat zijn haar vaste kosten per kilometer als ze 19000 km in een jaar rijdt?

b Leg uit dat haar vaste kosten per km v omgekeerd evenredig zijn met het jaarlijks aantal gereden kilometers a.

c Stel een formule op voor v afhankelijk van a en teken een bijpassende grafiek.

d Bij welk jaarlijks gereden aantal kilometers zijn haar vaste kosten per kilometer minder dan € 0,10?

★ **Opgave 4.3**

Een rechthoek met lengte l en breedte b heeft oppervlakte A.

a Stel je voor dat $l = 10$, maar dat b nog kan variëren. Welke formule geldt dan voor A afhankelijk van b? Is A recht evenredig of omgekeerd evenredig met b?

b Stel je voor dat $A = 200$, maar dat l en b nog kunnen variëren. Welke formule geldt dan voor l afhankelijk van b? Is l recht evenredig of omgekeerd evenredig met b?

c Stel je voor dat $l = 2b$. Welke formule geldt dan voor A afhankelijk van b? Is er nu sprake van een recht of omgekeerd evenredig verband?

★ **Opgave 4.4**

Een boer wil voor zijn paard een rechthoekig weiland van 1200 m^2 afzetten. Hij heeft nog zo veel palen en draad, dat de omheining 182 meter lang kan worden.

a De oppervlakte van het weiland wordt 1200 m^2. Leg uit, dat de lengte l en de breedte b van het weiland daarom omgekeerd evenredig zijn. Stel een bijpassende formule op.

b Omdat de omheining 182 m wordt, kun je nog een formule van de vorm $l = \dots$ afleiden. Schrijf die formule op.

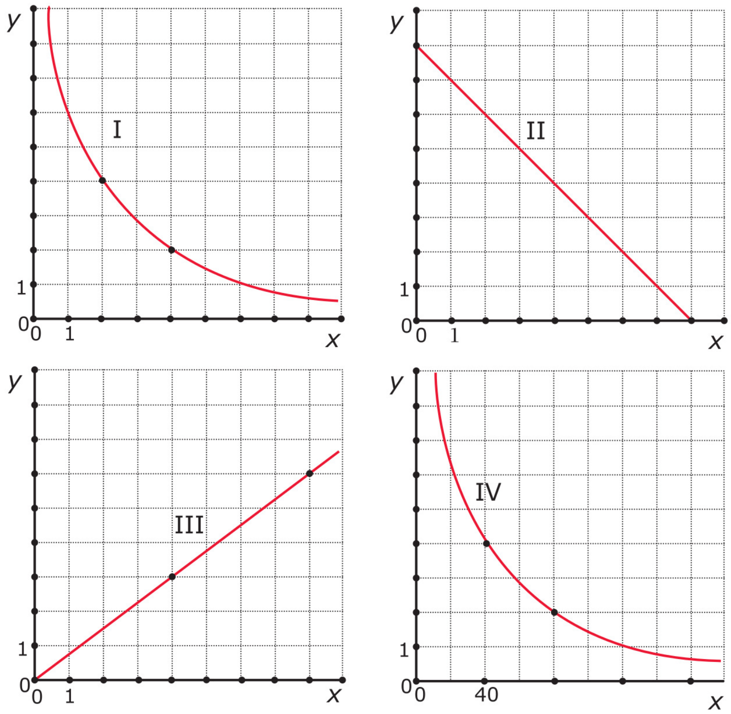
c Teken de grafieken bij deze formules in één assenstelsel.

d Bepaal nu met behulp van de grafiek en inklemmen welke afmetingen het weiland krijgt in m nauwkeurig.

★

Opgave 4.5

Je ziet twee hyperbolen en twee rechte lijnen. Schrijf bij elk van deze grafieken een passende formule op. Gebruik de aangegeven roosterpunten. Zet erbij of de variabelen recht evenredig of omgekeerd evenredig zijn, of geen van beide.



Figuur 4.6

★ ★ ★

Opgave 4.6

Een wandelaar maakt een wandeling van 2 uur. Eerst loopt hij op een vlak stuk weg met snelheid 4 km/h. Daarna moet hij een stuk omhoog. Zijn snelheid is dan 3 km/h. Als hij boven is, dan gaat hij terug. Eerst dus datzelfde stuk omlaag. Dat kan hij snel: 6 km/h. Daarna weer hetzelfde vlakke stuk terug, weer met snelheid 4 km/h.
Hoeveel km heeft de wandelaar gewandeld?

A. 8
B. 9
C. 10
D. 11
E. 12

Toepassen

★ ★ Opgave 4.7: Hijskraan

Deze hijskraan kan zware lasten tillen. De last hangt aan een katrol die langs de arm beweegt. De afstand van de plek waaronder de katrol hangt tot het steunpunt van de arm, heet de armlengte a.

Het grootste gewicht G dat deze kraan kan tillen, hangt af van de armlengte.

Voor deze kraan geldt: $G = \frac{120000}{a}$.

Hierin is G in kg en a in meters.

In deze opgave bereken je op welke afstand van de kraan een gewicht van 6 ton (6000 kg) nog kan hangen.

a Welke ongelijkheid moet er worden opgelost?

b Los de bijbehorende vergelijking op.

c Op welke afstand van de kraan kan een gewicht van 6 ton dus nog hangen?

d Om een stapel stenen naar de goede plek te hijsen moet deze stapel 23 m van het steunpunt van de draaiarm kunnen hangen. Hoe zwaar mag die stapel stenen hoogstens zijn?

Figuur 4.7

1.5 Hyperbolische verbanden

Inleiding

Hoe sneller je loopt, fietst, of rijdt, hoe minder tijd je nodig hebt om een bepaalde afstand af te leggen. Vaak is er sprake van een omgekeerd evenredig verband. Maar wat als er een tussenstop is? Je gaat nu kennismaken met hyperbolische verbanden.

Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij hyperbolische verbanden maken en gebruiken;
- vergelijkingen oplossen waarin hyperbolische verbanden voorkomen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige, lineaire en omgekeerd evenredige verbanden herkennen en het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige, lineaire en omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Hyperbolische verbanden’ leren de leerlingen wat een hyperbolisch verband is, wat het te maken heeft met een omgekeerd evenredig verband, hoe de grafieken en formules bij hyperbolische verbanden er uitzien. Het begrip ‘asymptoot’ wordt ingevoerd. Verder gaan de leerlingen vergelijkingen en ongelijkheden oplossen die bij hyperbolische verbanden voorkomen. Je geeft de opdrachten mondeling.

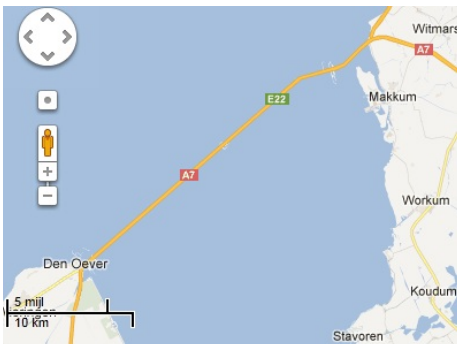
Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken en mogelijkheden om daarop grafieken te maken.

Opdracht 5.1

Je rijdt weer op de Afsluitdijk, die 32 km lang is. Je stapt dit keer onderweg 5 minuten uit om van het uitzicht te genieten. Nu betekent verdubbeling van de snelheid geen halvering van de reistijd. Snelheid en reistijd zijn niet omgekeerd evenredig.

Geef een formule voor de reistijd t in minuten afhankelijk van de snelheid v (in km/h) en teken een bijpassende grafiek. Laat zien dat de bewering hierboven klopt.



Figuur 5.2

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Eventuele hulpvragen: “Hoe bereken je het aantal minuten dat je over 32 km doet?”, “Wat betekent de 5 minuten extra?” en voor de grafiek “Heb je al een tabel bij je formule gemaakt?” en “Waarom komt de uitkomst nooit onder de 5 minuten?”.
Bij het laten zien dat als je 2 keer zo snel rijdt nu niet de reistijd verdubbeld, is een tegenvoorbeeld genoeg.

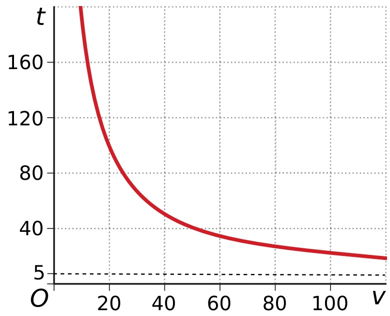
Bespreek dat na afloop. Vertel ook dat de bijbehorende grafiek nog steeds ‘hyperbool’ heet en bespreek het begrip ‘asymptoot’, zowel de verticale als de horizontale asymptoot.

Uitwerking

Je kunt weer de reistijd t in minuten berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid v (in km/h) en met 60 te vermenigvuldigen: $t = \frac{32}{v} \cdot 60 = \frac{1920}{v}$. Maar nu komt er nog 5 minuten bij: $t = \frac{1920}{v} + 5$.

De grafiek van zo'n omgekeerd evenredig verband is een hyperbool. Je ziet de hyperbool bij de formule $t = \frac{1920}{v} + 5$ voor positieve waarden van t en v. Hier moet inderdaad $t > 0$.

Vervang je in $t = \frac{1920}{v} + 5$ de v door $2v$, dan krijg je $t = \frac{1920}{2v} + 5 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1920}{v}$.



Figuur 5.3

Opdracht 5.2

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daarbovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig folders laat drukken.

Noem het aantal folders dat je wilt laten drukken a en de kosten per folder k. Maak een bijpassende formule van k afhankelijk van a en teken de grafiek. Je wilt niet meer dan € 0,06 per folder betalen. Hoeveel folders a moet je dan laten drukken?

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Eventuele hulpvragen: “Welk vast bedrag per folder ben je sowieso kwijt?”, “Hoe kun je die 10 euro verrekenen per folder?”, “Welke formule kun je maken voor de kosten per folder?”, “Hoe maak je daarbij een grafiek?” en “Met welke vergelijking kun je nu berekenen bij hoeveel folders je op 0,06 cent/folder uitkomt?”. Bij het oplossen van die vergelijking is het nuttig om naar de balansmethode toe te laten werken, eventueel ook na het antwoord te hebben gevonden met inklemmen.

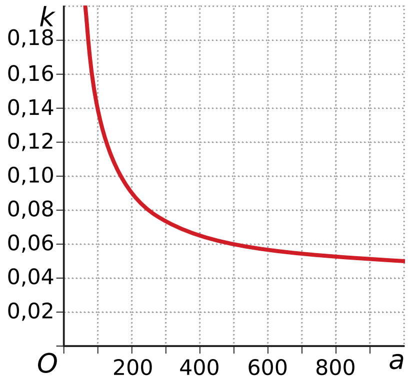
Bespreek na afloop nog de asymptoten van de grafiek en ook het belang van de grafiek bij het oplossen van een ongelijkheid.

Uitwerking

Per folder betaal je in ieder geval € 0,04. Verder betaal je per folder $\frac{10}{a}$ euro.

In totaal dus $k = 0{,}04 + \frac{10}{a}$ euro per folder.

Om een goede bijpassende grafiek te maken moet je bedenken dat je veel folders wilt laten maken om de kosten per folder laag te houden. Misschien wel zo'n 1000 stuks. a komt op de horizontale as en laat je daarom bijvoorbeeld lopen vanaf 0 tot en met 1000. Voor 1000 folders betaal je € 0,05 per stuk, maar voor 100 folders betaal je € 0,14 per stuk. Maak een goede tabel.



Figuur 5.4

Je moet vervolgens oplossen $0{,}04 + \frac{10}{a} = 0{,}06$. Dat kun je doen met behulp van de grafiek en inklemmen, maar je kunt ook de balansmethode toepassen.

Eerst aan beide zijden van het isgelijkteken 0,04 aftrekken: $\frac{10}{a} = 0{,}02$.

Hieruit volgt: $a = \frac{10}{0{,}02} = 500$.

De oplossing van de ongelijkheid $0{,}04 + \frac{10}{a} \leq 0{,}06$ is $a \geq 500$.

Opdracht 5.3

Los de volgende vergelijkingen op:

- $\frac{15}{a} = 3$
- $\frac{15}{a} + 38 = 43$
- $20 + \frac{10}{a} = 25$
- $20 + \frac{10}{a-4} = 25$
- $\frac{10}{a-4} = 20$
- $20 - \frac{10}{a-4} = 10$
- $20 - \frac{10}{2a+6} = 18$
- $20 + \frac{10}{2a+6} = 21$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en stapsgewijs.

Mogelijke hulpvragen zijn sterk afhankelijk van de vergelijking waaraan wordt gewerkt. Bovendien zijn er verschillende manieren om tot het antwoord te komen. Wel gaat het in vrijwel alle gevallen om het gebruiken van de balansmethode. Misschien is het handig om op je eigen bord de volgende berekeningen te schrijven: $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{6}{3} = 2$ en $2 \cdot 3 = 6$. Dan kun je daar af en toe naar verwijzen.

Uitwerking

Gebruik steeds: $\frac{6}{2} = 3$ en $\frac{6}{3} = 2$.

- $\frac{15}{a} = 3$ geeft $a = \frac{15}{3} = 5$.
- $\frac{15}{a} + 38 = 43$ geeft $\frac{15}{a} = 5$ en $a = \frac{15}{5} = 3$.
- $20 + \frac{10}{a} = 25$ geeft $\frac{10}{a} = 5$ en dus $a = \frac{10}{5} = 2$.
- $20 + \frac{10}{a-4} = 25$ geeft $\frac{10}{a-4} = 5$ en $a - 4 = \frac{10}{5} = 2$ dus $a = 6$.

- $\frac{10}{a-4} = 20$ geeft $a - 4 = \frac{10}{20} = 0{,}5$ dus $a = 4{,}5$
- $20 - \frac{10}{a-4} = 10$ geeft $\frac{10}{a-4} = 10$ en $a - 4 = 1$ dus $a = 5$.
- $20 - \frac{10}{2a+6} = 18$ geeft $\frac{10}{2a+6} = 2$ en $2a + 6 = \frac{10}{2} = 5$ zodat $2a = -1$ en $a = -0{,}5$.
- $20 + \frac{10}{2a+6} = 21$ geeft $\frac{10}{2a+6} = 1$ en $2a + 6 = \frac{10}{1} = 10$ zodat $2a = 4$ en $a = 2$.

Opdracht 5.4

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over 'hyperbolische verbanden', de grafieken en de formules die daarbij passen en de vergelijkingen en ongelijkheden die ermee te maken hebben. Onthoud ook wat een 'asymptoot' van een grafiek is.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

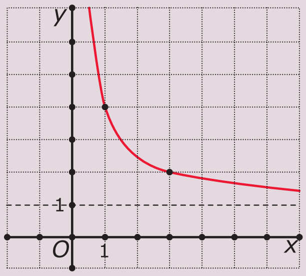
Bekijk de applet: grafiek hyperbolisch verband

Tussen twee variabelen x en y bestaat een **hyperbolisch verband** als er een formule van de vorm $y = \frac{c}{x} + d$ met c en d constant bij hoort.

De grafiek van zo'n hyperbolisch verband is een **hyperbool**.

De grafiek benadert twee lijnen steeds dichter zonder ze ooit te snijden: de y-as en de lijn $y = d$. Dergelijke lijnen noem je **asymptoten**:

- De y-as is de **verticale asymptoot** van de grafiek.
- De lijn $y = d$ is de **horizontale asymptoot** van de grafiek.



Figuur 5.5

Verwerken

★ Opgave 5.1

Op veel scholen kun je ook als leerling kopieën maken. De maandelijkse kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 150,00
- de kosten per kopie: € 0,02

Noem de maandelijkse kosten per kopie K en het aantal kopieën a.

a Welke formule geldt voor K afhankelijk van a?

b Waarom zijn K en a niet omgekeerd evenredig?

c Teken een grafiek bij deze formule.

d Stel dat je als leerling € 0,05 per kopie betaalt. Hoeveel kopieën moeten er dan maandelijks minstens worden gemaakt als de school geen verlies wil draaien? Los de bijbehorende ongelijkheid systematisch op.

★ Opgave 5.2

Los de volgende vergelijkingen op:

a $\frac{2400}{x} + 3{,}6 = 6{,}8$

b $200 + \frac{50}{x} = 450$

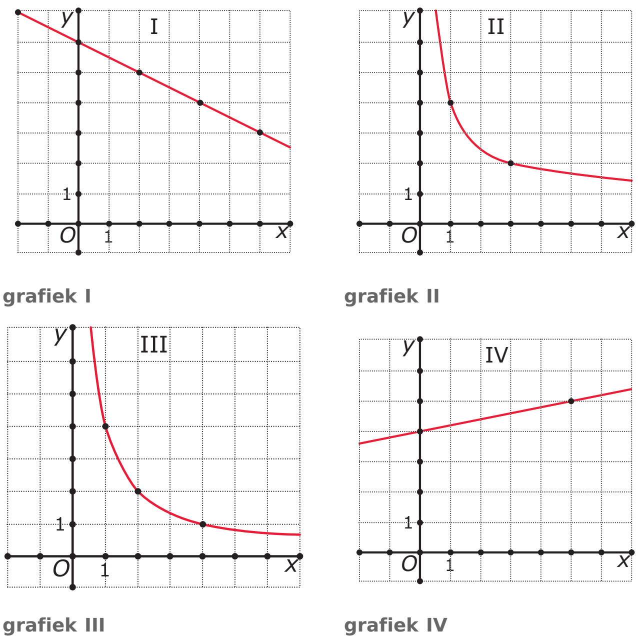
c $\frac{t-15}{300} - 0{,}5 = 0{,}8$

d $\frac{800}{d-5} = 50$

★ Opgave 5.3

Je ziet grafieken bij vier formules.

- $y_1 = \frac{4}{x}$
- $y_2 = 6 - 0{,}5x$
- $y_3 = \frac{3}{x} + 1$
- $y_4 = 0{,}2x + 4$



Figuur 5.6

Welke formule hoort bij welke grafiek?

★ **Opgave 5.4**

Je wilt de vergelijking $\frac{4}{x}+2 = x+1$ oplossen. Een vergelijking zoals deze kun je op dit moment alleen grafisch en met inklemmen oplossen.

a Teken de grafieken van $y_1 = \frac{4}{x} + 2$ en $y_2 = x + 1$ in één figuur. Houd ook rekening met negatieve waarden van x.

b Aan de grafieken zie je dat er twee snijpunten zijn. Bereken de coördinaten van die snijpunten door inklemmen in één decimaal nauwkeurig.

c Schrijf de oplossingen van deze vergelijking op in één decimaal nauwkeurig.

d Schrijf de oplossingen van de ongelijkheid $\frac{4}{x} + 2 > x + 1$ op in één decimaal nauwkeurig.

★ ★ **Opgave 5.5**

Los de vergelijkingen op.

a $2 - \frac{4}{x} = 8$

b $\frac{80}{2-0,5x} = 10$

c $5 + \frac{25}{x^2} = 6$

d $\frac{20}{\text{-}0,25x} = 10$

★ ★ **Opgave 5.6**

Bij een hyperbolisch verband tussen x en y hoort een formule van de vorm $y = \frac{c}{x} + d$. Hierin zijn c en d constanten.

a Bereken de waarde van y die hoort bij $x = 10$ als de grafiek bij dit hyperbolische verband als horizontale asymptoot $y = 5$ heeft en door het punt (2,7) gaat.

b Bereken de waarde van y die hoort bij $x = 10$ als de grafiek bij dit hyperbolische verband door de punten (2,9) en (4,8) gaat.

Toepassen

De standaard vergoeding voor kilometers die je voor een werkgever rijdt in de eigen auto bedraagt € 0,19 cent per kilometer. Een automobilist die voor zijn baas af en toe een ritje maakt is natuurlijk nieuwsgierig of daarmee inderdaad de kosten zijn gedekt. Het mooiste is als je dit voor een werkelijke situatie kunt narekenen, misschien heb je in je familie of kennissenkring wel iemand die in zo'n situatie zit. En anders kun je met de gegevens hieronder rekenen.

Voor een bepaalde auto die op benzine rijdt worden de volgende schattingen gedaan:

- De prijs van een liter benzine is € 1,68 en je rijdt 12 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 300,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 1900,00 per jaar.

Maar rijdt de auto bijvoorbeeld op gas, of op diesel, of elektrisch, dan liggen deze bedragen anders. Voor een vergelijkbare elektrische auto zijn op hetzelfde moment dit de schattingen:

- De prijs van een kWh (kiloWattuur) elektriciteit is € 0,40 en je verbruikt 18 kWh per 100 km.
- De wegenbelasting is € 0 per jaar.
- De verzekering kost € 400,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 4200,00 per jaar.

Je kunt dit probleem oplossen met behulp van lineaire verbanden, maar ook met een hyperbolisch verband...

★ ★ **Opgave 5.7: Kilometervergoeding**

In de tekst in **Toepassen** zie je schattingen van de diverse kosten die je maakt als je in een eigen auto wilt rijden. Ga in deze opgave uit van die gegevens.

In deze opgave ga je op zoek naar een formule voor de kosten per jaarlijks gereden kilometer. Je vergelijkt een auto op benzine met een elektrische auto. De kosten per km noem je k en het jaarlijkse aantal gereden km noem je a.

Ga eerst uit van een auto die op benzine rijdt.

a Stel op grond van de schattingen een formule op voor k afhankelijk van a.

b Vanaf hoeveel gereden km per jaar is de kilometervergoeding kostendekkend?

Ga nu uit van een elektrische auto.

c Stel op grond van de schattingen een formule op voor k afhankelijk van a.

d Vanaf hoeveel gereden km per jaar is de kilometervergoeding kostendekkend?

★ ★ ★ **Opgave 5.8: Evenredig met een kwadraat**

Je hebt tot nu toe de begrippen ‘recht evenredig’ en ‘omgekeerd evenredig’ geleerd. Onthoud deze begrippen goed, ze komen regelmatig voor in toepassingen van de wiskunde. Een variabele kan echter ook wel recht evenredig zijn met het kwadraat van een andere variabele. Of omgekeerd evenredig met een kwadraat...

Wanneer y recht evenredig is met het kwadraat van x, dan hoort daarbij een formule van de vorm $y = c \cdot x^2$. Hierin is c een constante.

a Neem eerst $c = 1$. Maak een tabel voor gehele waarden van x vanaf -3 tot en met 3 en teken een bijpassende grafiek.

b Je kunt deze grafiek ook maken in **GeoGebra** of in **Desmos** door op de invoerbalk de formule in te voeren. Doe dat en ga na of je grafiek overeenkomt met de grafiek die je bij a hebt getekend.

c Onderzoek nu met behulp van GeoGebra/Desmos of de grafiek bij andere waarden van c dezelfde vorm heeft. Probeer te beschrijven hoe de grafiek verandert afhankelijk van de gekozen waarde voor c.

Wanneer y omgekeerd evenredig is met het kwadraat van x, dan hoort daarbij een formule van de vorm $y = \frac{c}{x^2}$. Hierin is c een constante.

d Neem eerst $c = 1$. Maak een tabel zoals deze en teken een bijpassende grafiek.

x	-4	-2	-1	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	1	2	4
x											

Tabel 5.1

e Je kunt deze grafiek ook maken in **GeoGebra** of in **Desmos** door op de invoerbalk de formule in te voeren. Doe dat en ga na of je grafiek overeenkomt met de grafiek die je bij d hebt getekend.

f Onderzoek nu met behulp van GeoGebra/Desmos of de grafiek bij andere waarden van c dezelfde vorm heeft. Probeer te beschrijven hoe de grafiek verandert afhankelijk van de gekozen waarde voor c.

Practicum

Applet: hyperbolisch verband

Hier zie je de grafiek van een **hyperbolisch verband**.
Je kunt de invloed van de waarden van c en d op de grafiek bekijken.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- recht evenredig (verband) — evenredigheidsconstante, hellingsgetal
- lineair verband — hellingsgetal, richtingscoëfficiënt — startgetal
- lineaire vergelijking — balansmethode
- omgekeerd evenredig (verband) — hyperbool
- hyperbolisch verband — asymptoot

Activiteitenlijst

- formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken
- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken
- vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden oplossen
- formules en grafieken bij omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken
- formules en grafieken bij hyperbolische verbanden maken en gebruiken

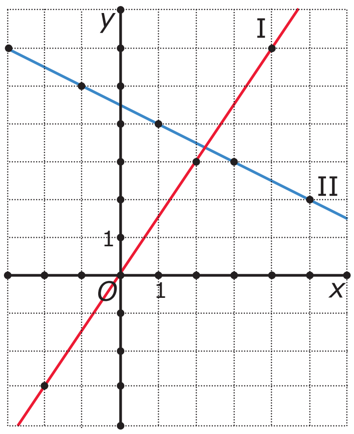
Opgave 6.1

Hiernaast zie je twee rechte lijnen in een assenstelsel. Het zijn grafieken van y afhankelijk van x.

a Bij welk van beide grafieken is sprake van een recht evenredig verband tussen x en y? En waarom?

b Bij de in a bedoelde grafiek hoort een formule van de vorm $y = c \cdot x$. Welke waarde heeft de evenredigheidsconstante c?

c Als de waarde van x tien keer zo groot wordt, hoeveel keer zo groot wordt de waarde van y dan? Toon dit aan door de waarden van y bij x en bij $10x$ met elkaar te vergelijken.



Figuur 6.1

Opgave 6.2

In de vorige opgave zie je twee rechte lijnen in een assenstelsel. Het zijn grafieken van y afhankelijk van x. Bij beide grafieken is sprake van een lineair verband tussen x en y.

a Waarom?

b Bepaal de richtingscoëfficiënt (het hellingsgetal) van grafiek II. Stel een formule op bij deze grafiek.

c Ga met behulp van een berekening na of het punt $(41, -16)$ op grafiek II ligt.

Opgave 6.3

Gebruik weer de grafieken uit **Opgave 6.1**.

a Met welke vergelijking kun je de x-waarde van het snijpunt van beide grafieken berekenen?

b Los de in a bedoelde vergelijking op.

c Bereken de coördinaten van het snijpunt van beide grafieken.

d Oefen het oplossen van lineaire vergelijkingen in het **Practicum**.

Opgave 6.4

Als je alle waarden van x wilt bepalen waarvoor $1{,}5x < 4{,}5 - 0{,}5x$, dan los je een ongelijkheid op. Daarbij gebruik je de grafieken van $y_1 = 1{,}5x$ en $y_2 = 4{,}5 - 1{,}5x$. Die vind je bij **Opgave 6.1**.

a Waarom moet je eerst de vergelijking $1{,}5x = 4{,}5 - 0{,}5x$ oplossen?

b Los de ongelijkheid op.

Opgave 6.5

Hier zie je een deel van de grafiek bij de formule $y = \frac{8}{x}$.

a Waarom is hier sprake van een omgekeerd evenredig verband?

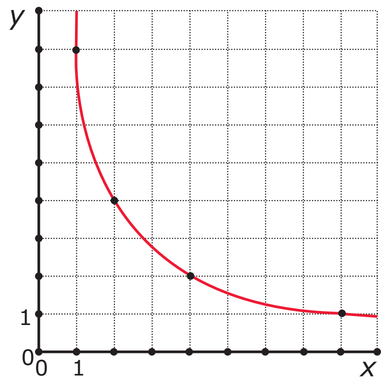
b Welk punt op de grafiek heeft x-waarde 16?

c Welk punt op de grafiek heeft y-waarde 32?

d Wat gebeurt er met de grafiek als x steeds groter wordt?

e Wat gebeurt er met de grafiek als x steeds dichter bij 0 komt?

f Je kunt in deze formule ook negatieve waarden voor x invullen. De grafiek is daarom niet compleet. Hoe ziet de complete grafiek er uit?



Figuur 6.2

Opgave 6.6

Gegeven is de formule $y = \frac{8}{x} + 2$.

a Teken een grafiek bij deze formule. Welk soort verband beschrijft deze formule?

b Welk punt op de grafiek heeft x-waarde 16?

c Welk punt op de grafiek heeft y-waarde 34?

d Wat gebeurt er met de grafiek als x steeds groter wordt?

e Wat gebeurt er met de grafiek als x steeds dichter bij 0 komt?

f Bekijk de vergelijking $\frac{8}{x} + 2 = 5$. Laat duidelijk zien hoe je deze vergelijking oplost.

g Welke oplossing heeft de ongelijkheid $\frac{8}{x} + 2 > 5$.

Testen

★ Opgave 6.7

Maandag regent het vanaf 8:00 uur voortdurend. Het water in een cilindervormige regenmeter stijgt elke 10 minuten gelijkmatig met 6 mm. Om 8:00 uur was de regenmeter leeg. De waterhoogte wordt aangegeven door h in millimeters en de tijd t in minuten met $t = 0$ om 8:00 uur.

a Waarom is h recht evenredig met t?

b Welke formule geeft het verband tussen h en t?

c Teken een grafiek van h afhankelijk van t.

d Welk hellingsgetal heeft deze grafiek?

e Na hoeveel minuten regenen is de waterhoogte 20 mm?

★ Opgave 6.8

Een cilindervormige regenmeter wordt 's avonds geleegd. Het regent 's nachts een beetje. Om 8:00 uur de volgende dag staat er 21 mm water in de meter. Dan regent het zo hard dat er elke 10 minuten 5,5 mm water bijkomt.
De waterhoogte wordt aangegeven door h in millimeters en de tijd door t in minuten.

a Welke formule geeft het verband tussen h en t?

b Teken een grafiek van h afhankelijk van t.

c Waarom is h nu niet recht evenredig met t?

d Welk hellingsgetal heeft deze grafiek?

e Als het minder hard regent, wordt het hellingsgetal dan groter of kleiner?

f Hoelang na 8:00 uur blijft de waterhoogte in de regenmeter onder de 50 mm? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

★ **Opgave 6.9**

Los de vergelijkingen op.

a $5(x-6) = 36-(4-x)$

b $\frac{2}{3}t - 4 = \frac{2t-5}{6}$

c $\frac{32}{x^2} + 10 = 12$

★ **Opgave 6.10**

Los de ongelijkheid $6 - 2x < 0{,}5x - 1$ op.

★ **Opgave 6.11**

Een school huurt voor € 2500,00 per jaar een kopieermachine voor de leerlingen. Om de kosten te dekken moeten de leerlingen een bepaald bedrag per kopie betalen.

a Hoeveel moeten de leerlingen per kopie betalen als er 5000 kopieën per jaar worden gemaakt? En als er 25000 kopieën per jaar worden gemaakt?

b Leg uit waarom het bedrag per kopie omgekeerd evenredig is aan het aantal kopieën.

De school heeft uitgerekend dat elke kopie aan papier en inkt € 0,05 kost. Die € 0,05 komt extra bij het bedrag dat de leerlingen per kopie moeten betalen. a is het aantal kopieën per jaar.

c Stel een formule op voor het bedrag B dat een leerling per kopie moet betalen afhankelijk van a.

d Van welk soort verband is er nu sprake? Teken een bijpassende grafiek voor 0 tot en met 50000 kopieën.

e Hoeveel kopieën per jaar moeten er worden gemaakt om met een prijs voor de leerlingen van € 0,20 per kopie uit de kosten te komen?

★ **Opgave 6.12**

Los de volgende vergelijkingen op:

a $15 + \frac{4}{x} = 25$

b $15 + \frac{4}{x} = \frac{6}{x}$

c $\frac{200}{4+2x} = 50$

d $\frac{32}{x^2} + 10 = 12$

★ ★ **Opgave 6.13**

Stel bij de volgende verbanden een passende formule op.

a Een lineair verband tussen x en y waarvan de grafiek gaat door de punten $A(20{,}16)$ en $B(25{,}6)$.

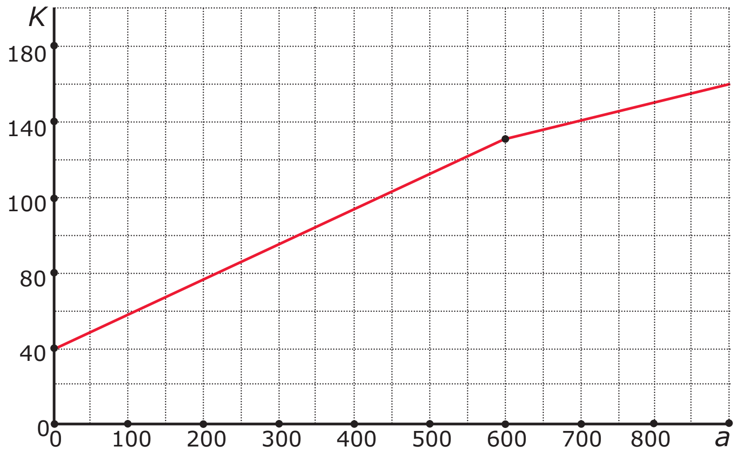
b Een hyperbolisch verband tussen x en y waarvan de grafiek gaat door het punt $A(20{,}16)$ en de lijn $y = 10$ als horizontale asymptoot heeft.

c Een hyperbolisch verband tussen x en y waarvan de grafiek gaat door de punten $A(20{,}16)$ en $B(25{,}6)$.

Toepassen

★ ★ **Opgave 6.14: Grootverbruikstarief**

Als je meer dan 600 m^3 gas per jaar verstookt, ben je een grootverbruiker. Dat geldt bijvoorbeeld voor de glastuinbouw. Om zijn kassen warm te houden verstookt een tuinder nogal wat gas. Om dit betaalbaar te houden heeft het gasbedrijf een grootverbruikstarief. In de grafiek zie je wat gegevens (in €).



Figuur 6.3

a Waarom vertoont de grafiek een knik?

b Hoeveel bedragen de vaste kosten per jaar en de prijs per m^3 voor een kleinverbruiker? Schrijf je berekening op.

c Beantwoord dezelfde vraag voor een grootverbruiker.

d Als a het aantal verbruikte m^3 gas is en K zijn de jaarlijkse kosten (in €) bij grootverbruik, welke formule kun je dan opstellen voor K?

e Bij welk grootverbruik komen de jaarlijkse kosten boven de € 200?

★ ★ ★ **Opgave 6.15: Schaal van Richter**

De kracht van een aardbeving wordt gemeten op de schaal van Richter. Een kracht van 6 op de schaal van Richter is al een behoorlijke aardschok. Maar die kracht neemt snel af als je verder van het centrum van de aardbeving af bent. Stel dat voor de kracht k van een bepaalde aardbeving geldt:

$$k = 1 + \frac{100}{r^2+20}$$

Hierin is r de afstand in km vanaf het centrum van de beving.

a Hoeveel bedraagt de kracht van deze aardbeving in het centrum? Rond af op één decimaal nauwkeurig.

b Hoeveel bedraagt de kracht van deze aardbeving op 5 km van het centrum?

c Bij welk getal op de schaal van Richter is er geen sprake van een aardbeving? Leg uit hoe je aan dit antwoord komt.

d Teken een grafiek van k afhankelijk van r. Neem voor r getallen van 0 tot en met 20.

e Als $k < 1{,}1$ is de aardbeving niet voelbaar. Bereken in één decimaal nauwkeurig hoeveel km je daarvoor van het centrum af moet zitten.

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

1	**Recht evenredig**	★	★ ★	★ ★ ★
	Formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ T 6.7 ☐	1.5 ☐ 1.6 ☐ 1.7 ☐ T 6.14 ☐	1.8 ☐
	Betekenis van evenredigheidsconstante en hellingsgetal begrijpen.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ T 6.7 ☐	1.5 ☐ 1.6 ☐ 1.7 ☐ T 6.14 ☐	1.8 ☐
	Van een formule en/of grafiek bepalen of er sprake is van een recht evenredig verband.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ T 6.7 ☐ T 6.8 ☐	1.5 ☐ 1.6 ☐ 1.7 ☐ T 6.14 ☐	1.8 ☐
2	**Lineaire verbanden**	★	★ ★	★ ★ ★
	Formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken.	2.5 ☐ T 6.8 ☐	T 6.13 ☐ T 6.14 ☐	2.8 ☐ 2.9 ☐
	De begrippen hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) en startgetal.	2.2 ☐ 2.3 ☐ 2.4 ☐ 2.5 ☐ T 6.8 ☐	2.6 ☐ 2.7 ☐ T 6.14 ☐	2.8 ☐ 2.9 ☐
	Bij een lineaire grafiek een formule opstellen.	2.2 ☐ 2.3 ☐ 2.4 ☐	2.6 ☐ 2.7 ☐ T 6.14 ☐	2.8 ☐ 2.9 ☐
3	**Lineaire vergelijkingen**	★	★ ★	★ ★ ★
	Vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden opstellen en oplossen.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ T 6.9 ☐ T 6.10 ☐	3.5 ☐ 3.6 ☐ 3.8 ☐ T 6.13 ☐ T 6.14 ☐	3.7 ☐
4	**Omgekeerd evenredig**	★	★ ★	★ ★ ★
	Formules en grafieken bij omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ 4.5 ☐ T 6.11 ☐	4.7 ☐	4.6 ☐
5	**Hyperbolische verbanden**	★	★ ★	★ ★ ★
	Formules en grafieken bij hyperbolische verbanden maken en gebruiken.	5.1 ☐ 5.3 ☐ T 6.11 ☐	5.6 ☐ 5.7 ☐ T 6.13 ☐	5.8 ☐ T 6.15 ☐
	Vergelijkingen oplossen waarin hyperbolische verbanden voorkomen.	5.1 ☐ 5.2 ☐ 5.4 ☐ T 6.9 ☐ T 6.11 ☐ T 6.12 ☐	5.5 ☐ 5.7 ☐ T 6.13 ☐	5.8 ☐ T 6.15 ☐

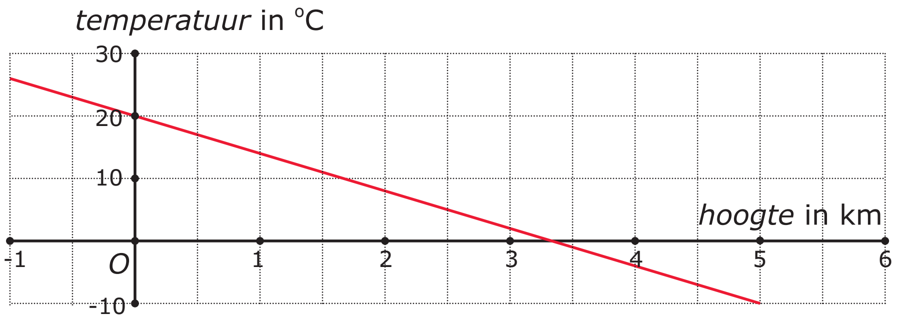
Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

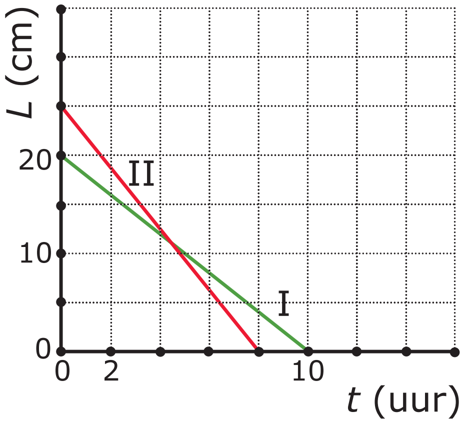
Stichting Math4All

www.math4all.nl

Informatieblad bij Opdracht 2.3



Informatieblad bij Opdracht 3.2



Informatieblad bij Opdracht 4.2