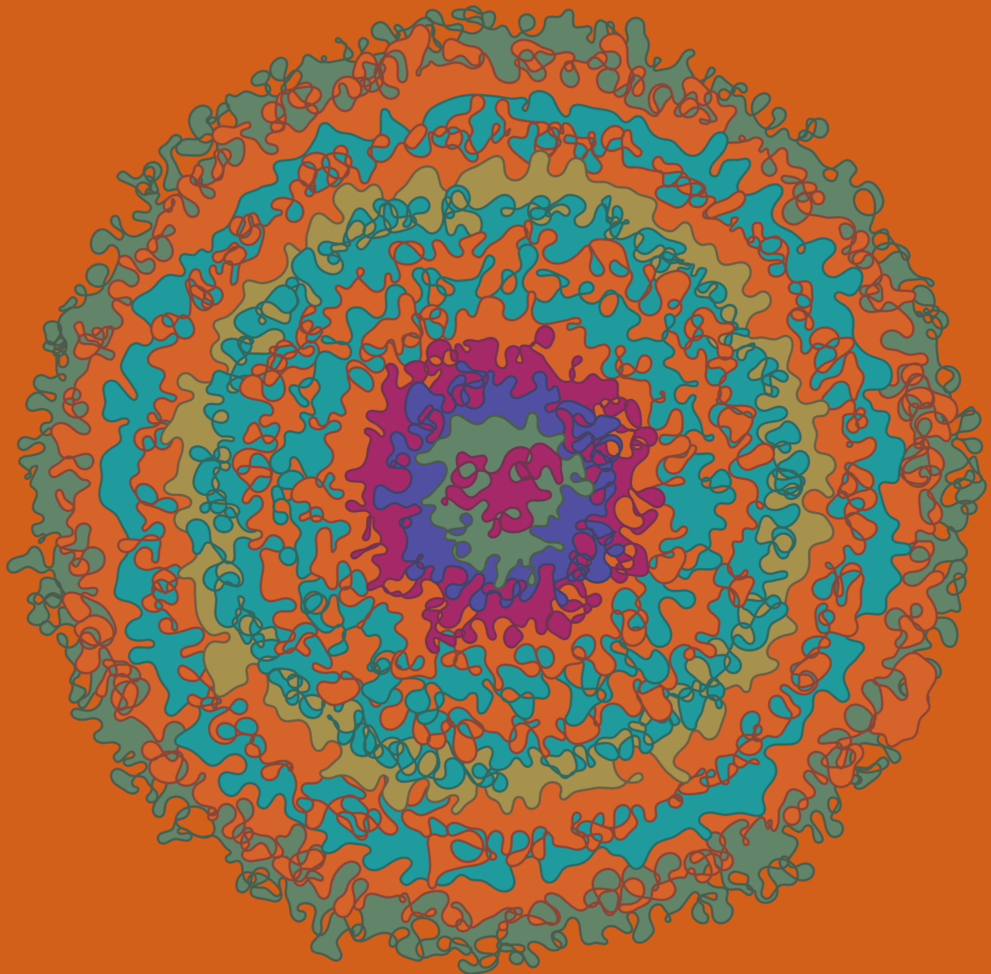
Wiskunde / PGA

2 HAVO / VWO / docentmateriaal

Werken met variabelen

ConTeXt College



Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je begeleidt dan als docent de leerlingen die in kleine groepjes aan wiskundige problemen werken en op die manier een eigen theoretisch kader opstellen. Dit gebeurt voornamelijk op de wijze die wordt beschreven in het boek *Building Thinking Classrooms in Mathematics* van Peter Liljedahl. Dit boek is ook in het Nederlands beschikbaar. Het is verstandig om dit boek vooraf door te werken, maar je kunt ook beginnen met deze **beknopte handleiding**.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee de leerling kan nagaan of de stof wordt beheersd. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding staat in de marge naast de opgave.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die de leerling alleen hoeft te maken als er genoeg tijd voor is
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die een leerling alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk was

In de bijlage staat een “**Leerdoelentabel**” waarin staat aangegeven door welke opgave het specifieke leerdoel wordt afgedekt en op welk niveau dit gebeurt. Als je deze tabel aan de leerlingen uitreikt, kunnen ze hun eigen vorderingen bijhouden.
Opgaven uit de samenvattende paragraaf *Totaalbeeld* worden voorafgegaan door een T.

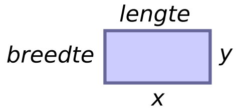
1

Werken met variabelen

1.1 Rekenen met variabelen

Inleiding

Je hebt al met formules kennis gemaakt. Daarbij gebruik je variabelen, grootheden waarvan de waarde kan variëren, veranderen. De omtrek P van deze rechthoek bijvoorbeeld is $P = x + y + x + y$. Dat wil je natuurlijk korter kunnen schrijven...



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- in uitdrukkingen met variabelen termen en factoren herkennen;
- formules herleiden door optellen en aftrekken van gelijksoortige termen;
- de vermenigvuldigingspunt gebruiken en die indien mogelijk weglaten;
- formules herleiden door vermenigvuldigen van factoren.

Voorkennis

- rekenen, ook met negatieve getallen;
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van grafieken en inklemmen of door handig rekenen.

Voor de docent

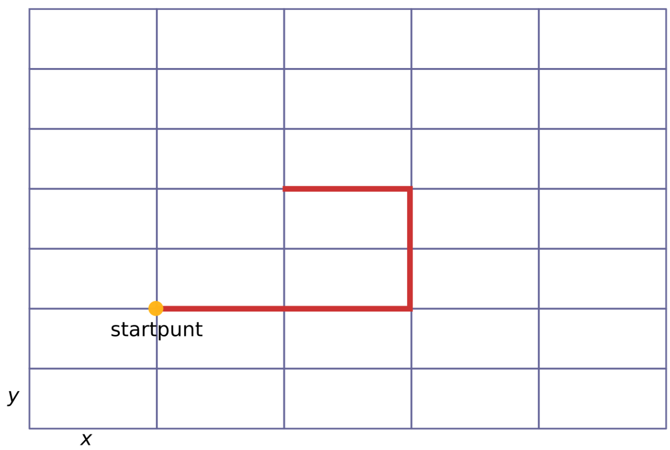
Bij het onderdeel ‘Rekenen met variabelen’ maken de leerlingen kennis met het samennemen van termen en het vermenigvuldigen van factoren in uitdrukkingen met variabelen. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken, met plakband om de informatiebladen eraan op te hangen (of je laat ze zelf dergelijke roosters tekenen).
- Bij de eerste opdracht hoort een informatieblad met een rooster van rechthoeken en een startpunt.
- Bij de tweede opdracht hoort een informatieblad met een rooster van rechthoeken.

Opdracht 1.1

Je ziet hier een rooster met horizontaal stappen met lengte x en verticaal stappen met lengte y.
Je kunt vanaf het startpunt de getekende route $x+x+y+y-x$ lopen. Korter geschreven $2 \cdot x + 2 \cdot y - x$. Je ziet dat nu voor vermenigvuldigen het teken $\cdot$ wordt gebruikt om verwarring tussen x en $\times$ te voorkomen. En meestal laat je zelfs die stip weg: $2x+2y-x$. Je ziet ook dat de kortste route van het startpunt naar het eindpunt van je route is $x+2y$, dus $2x+2y-x = x+2y$. Zo kun je uitdrukkingen korter schrijven door termen met dezelfde letters samen te nemen. Stappen naar rechts en omhoog worden als optelling gezien, stappen naar links en naar beneden als aftrekking.



Figuur 1.2

Herleid (schrijf korter) met behulp van routes in deze figuur:

1. $3x + 2y + 2x + 2y$
2. $3x + 2y - 2x + 2y$
3. $3x + 2y - 2x - 2y$
4. $2y + x + 3y + 2x - y - 2y$
5. $5y - 2y + 4x - y - 2x$
6. $3y + 2x - 4y - 2x$
7. $y + 2x - 3y - 3x$
8. $-y + 2x + 3y - 3x$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in stappen. De figuur staat op het **Werkblad** en kan worden uitgedeeld.

Eventuele hulpvragen: “Hoe teken je de gegeven uitdrukking als route op je getallenlijn?” en “Hoe kun je vanaf het startpunt via de kortste route naar je eindpunt komen?”.
Op zeker moment is het ook nuttig om te laten vallen dat $1x = x$, dus dat je zo'n 1 meestal weglaat.

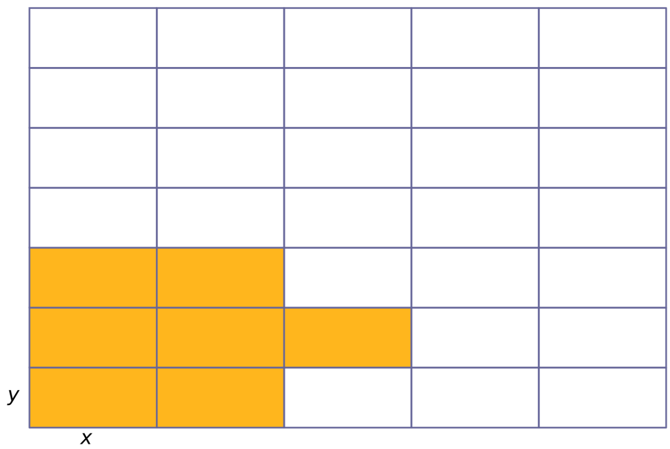
Bespreek nog even na afloop het samennemen van termen in het algemeen (ook met andere letters). Laat de uitdrukking ‘gelijksoortige termen’ vallen.

Uitwerking

1. $3x + 2y + 2x + 2y = 5x + 4y$
2. $3x + 2y - 2x + 2y = 1x + 4y$
3. $3x + 2y - 2x - 2y = 1x = x$
4. $2y + x + 3y + 2x - y - 2y = 3x + 2y$
5. $5y - 2y + 4x - y - 2x = 2x + 2y$
6. $3y + 2x - 4y - 2x = -1y = -y$
7. $y + 2x - 3y - 3x = -1x - 2y = -x - 2y$
8. $-y + 2x + 3y - 3x = -x + 2y$

Opdracht 1.2

Je ziet hier een rooster met horizontaal stappen met lengte x en verticaal stappen met lengte y.
Elke afzonderlijke rechthoek heeft een oppervlakte van $x \cdot y$. Dit kun je schrijven als xy.
De figuur die hier is aangegeven heeft een oppervlakte van $2x \cdot 3y + x \cdot y$. Maar je ziet vast wel dat je dit kunt schrijven als $6xy + xy = 7xy$. Het wordt zo een term met drie factoren: 7, x en y.



Figuur 1.3

Herleid (schrijf korter) met behulp deze figuur:

1. $2x \cdot 3y + 3x \cdot y$
2. $2x \cdot 3y - x \cdot y$
3. $2x \cdot 3y - 2x \cdot y$
4. $2x \cdot 2y + 3x \cdot 2y - x \cdot y$
5. $3x \cdot 4y - x \cdot 2y - x \cdot y$
6. $3x \cdot 4y - x \cdot y + 3x + 2y$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in stappen. De figuur staat op het **Werkblad** en kan worden uitgedeeld.

Eventuele hulpvragen: "Hoe kun je de gegeven uitdrukking als gebied in je figuur tekenen?" en "Uit hoeveel rechthoekjes met oppervlakte xy bestaat die figuur?".

Bespreek nog even na afloop het samennemen van termen en factoren in het algemeen (ook met andere letters).

Uitwerking

1. $2x \cdot 3y + 3x \cdot y = 6xy + 3xy = 9xy$
2. $2x \cdot 3y - x \cdot y = 6xy - xy = 5xy$
3. $2x \cdot 3y - 2x \cdot y = 6xy - 2xy = 4xy$
4. $2x \cdot 2y + 3x \cdot 2y - x \cdot y = 4xy + 6xy - xy = 9xy$
5. $3x \cdot 4y - x \cdot 2y - x \cdot y = 12xy - 2xy - xy = 9xy$
6. $3x \cdot 4y - x \cdot y + 3x + 2y = 12xy - xy + 3x + 2y = 11xy + 3x + 2y$

Opdracht 1.3

Schrijf de volgende formules zo kort mogelijk.
Bereken daarna de waarde van K als $a = 5$ en $b = -3$.

- $K_1 = 5a + 4ab + 6a - 3ab$
- $K_2 = ab - 4b + 3ab - 7b$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling. Schrijf de gegeven uitdrukkingen op je eigen bord, evenals de waarden voor a en b.

Mogelijke hulpvragen: "Welke termen kun je samennemen en welke niet?", "Welke bewerkingstekens zijn er in deze uitdrukkingen weggelaten?" en "Hoe bereken je ab als a en b gegeven zijn?".

Uitwerking

Eerst herleiden:

- $K_1 = 5a + 4ab + 6a - 3ab = 11a + ab$
- $K_2 = ab - 4b + 3ab - 7b = 4ab - 11b$

Nu $a = 5$ en $b = -3$ substitueren (invullen):

- $K_1 = 11a + ab = 11 \cdot 5 + 5 \cdot -3 = 55 - 15 = 40$
- $K_2 = 4ab - 11b = 4 \cdot 5 \cdot -3 - 11 \cdot -3 = -60 + 33 = -27$

Opdracht 1.4

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over uitdrukkingen met variabelen korter schrijven door termen samen te nemen en/of factoren te vermenigvuldigen. Onthoud ook goed wanneer je termen mag samennemen en wanneer niet.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Een **uitdrukking** met variabelen bestaat uit **termen** en **factoren**:
$2xy - 5x + 6xy + 7x$ heeft vier termen, namelijk $2xy$, $-5x$, $6xy$ en $7x$.
$2xy$ heeft drie factoren, namelijk 2, x en y.

Soms kun je een uitdrukking **herleiden**. Je schrijft hem dan zo kort mogelijk.

Je kunt formules of uitdrukkingen herleiden door **gelijksoortige termen** samen te nemen:

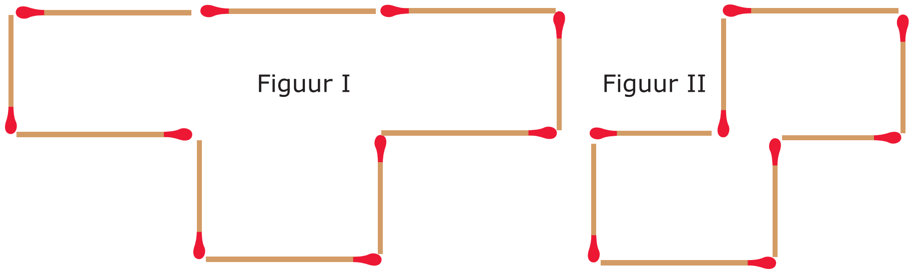
- $a + a = 2 \cdot a = 2a$ en $2a + 3a = 5a$.
  Maar $2a + 2b$ kan niet korter; die twee termen zijn niet van dezelfde soort.
- $5ab - 2ba = 5ab + -2ab = 3ab$
- Je gebruikt vaak de wisseleigenschap: $a + b = b + a$ en $ab = a \cdot b = b \cdot a = ba$.
  Bij aftrekken mag dit alleen als je het minteken meeneemt: $4 - 3 = -3 + 4$ of met variabelen $a - b = -b + a$.
- $1a$ schrijf je korter als a, net zoals $-1a = -a$.

Uiteraard mag je ook andere letters gebruiken.

Verwerken

★ Opgave 1.1

Schrijf bij de twee rechthoekige luciferfiguren zo eenvoudig mogelijke formules voor de omtrek P en de oppervlakte A. De lengte van de korte lucifer is p en die van de lange is r.



Figuur 1.4

★ Opgave 1.2

Herleid.

- **a** $4p + 6q - 3p + 12q$
- **b** $-3p - 4p + 12q + 11p$
- **c** $15a + 3b - 12a + b - a$
- **d** $x \cdot 5 + 4y - 4x$
- **e** $p + 4q + 2p - 2q$
- **f** $3a + 4b - 6a + 8c$

★ Opgave 1.3

Herleid.

- **a** $2bl + l + bl + 4l + 3bl$
- **b** $3kl + 2kl + l + 4l - kl$
- **c** $150a - 12b \cdot 10a + 22a + 3 + 55ab$
- **d** $-m + 8 + 4 + 9m$

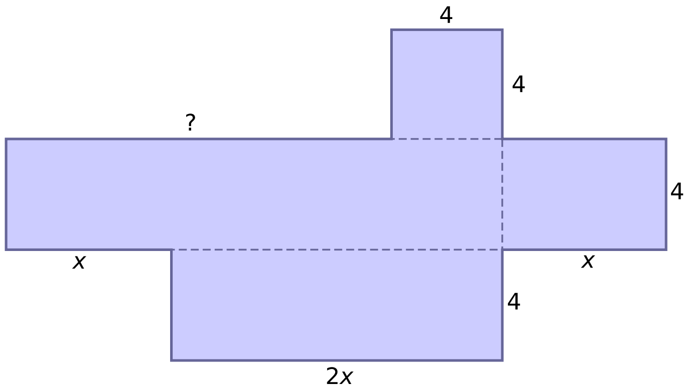
★ Opgave 1.4

Neem $p = 5$ en $q = -3$ en bereken R.

- **a** $R = 12p - 5q + pq - 6p + 5pq$
- **b** $R = 13p \cdot -2q - 2pq$

★ **Opgave 1.5**

Deze figuur heeft alleen rechte hoeken.



Figuur 1.5

a Hoe groot is de lengte van het lijnstuk bij het vraagteken?

b Geef een zo kort mogelijke formule voor de omtrek P van de figuur.

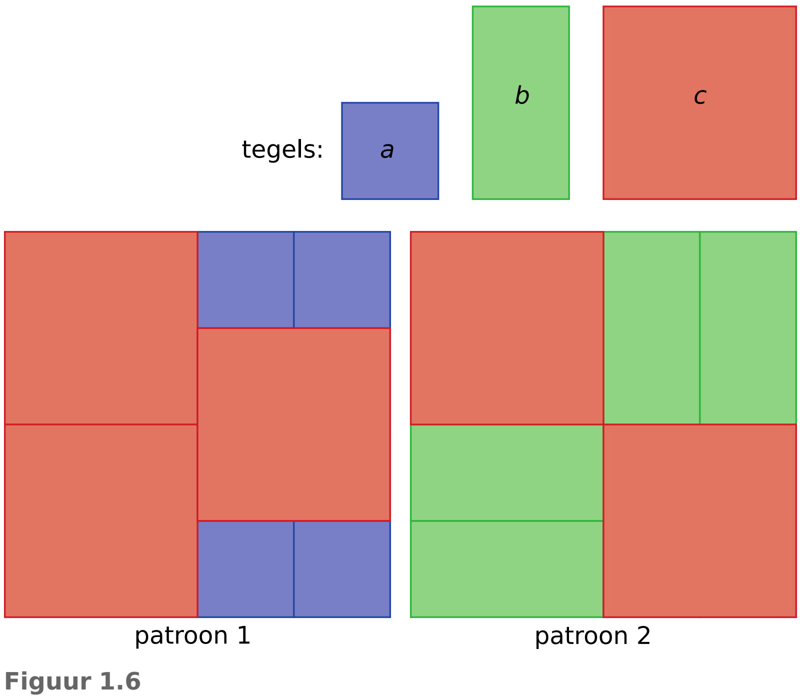
c Geef een zo kort mogelijke formule voor de oppervlakte A van de figuur.

d Neem $x = 6$ cm. Hoe groot zijn dan de omtrek en de oppervlakte van de figuur?

Toepassen

★ ★ **Opgave 1.6: Tegelpatronen**

Een tuindersbedrijf maakt tegelpatronen voor terrassen. Daarvoor gebruiken ze drie typen tegels. De oppervlakte van tegel 1 is a, van tegel 2 b en van tegel 3 c. In de figuren zie je twee tegelpatronen die het bedrijf maakt.



Figuur 1.6

a Maak een formule voor oppervlakte A van tegelpatroon 1 en tegelpatroon 2.

Om het werk te versnellen, maakt het bedrijf grotere tegelpatronen door samenstellingen te maken van patroon 1 en patroon 2. Een samenstelling ziet er als volgt uit:

patroon 1	patroon 2	patroon 1
patroon 2	patroon 1	patroon 2
patroon 1	patroon 2	patroon 1

Tabel 1.1

b Maak een formule voor de oppervlakte van dit samengestelde tegelpatroon.

De tegel met oppervlakte a kost € 5, die met oppervlakte b kost € 8 en die met oppervlakte c kost € 12.

c Hoeveel kost dit samengestelde tegelpatroon?

Practicum

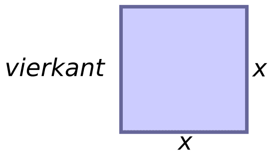
Met *Algebra*KIT kun je oefenen met **rekenen met variabelen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.2 Variabelen en machten

Inleiding

Je hebt al met formules kennisgemaakt. Daarbij gebruik je variabelen, grootheden waarvan de waarde kan variëren, veranderen. De oppervlakte A van dit vierkant bijvoorbeeld is $A = x \cdot x$. Ook dit wil je natuurlijk korter kunnen schrijven...



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met machten als je gelijke variabelen vermenigvuldigt;
- formules herleiden door vermenigvuldigen van factoren, ook als daarbij machten voorkomen.

Voorkennis

- rekenen, ook met negatieve getallen;
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- uitdrukkingen herleiden door vermenigvuldigen van factoren en optellen/aftrekken van gelijksoortige termen.

Voor de docent

Bij het onderdeel 'Variabelen en machten' maken de leerlingen kennis met het samennemen van termen en het vermenigvuldigen van factoren in uitdrukkingen met variabelen waarin ook machten voor komen. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

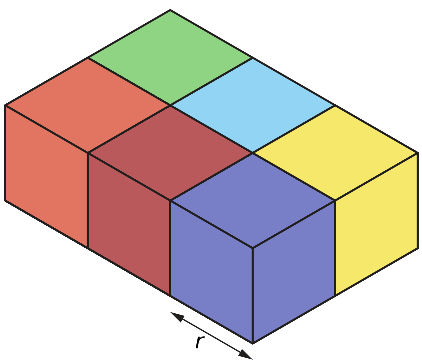
- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken, met plakband om de informatiebladen eraan op te hangen.
- Eventueel bij de eerste opdracht kubusjes om de figuren mee te maken (dan is het informatieblad overbodig).
- Eventueel bij de tweede opdracht lucifers van twee verschillende afmetingen (of gewoon stokjes) om de figuren mee te maken (dan is het informatieblad overbodig).
- Bij de eerste en de tweede opdracht zit een informatieblad met een figuur die eventueel kan worden uitgedeeld of alleen op je eigen werkplek kan worden getoond.
- Bij de derde opdracht hoort een informatieblad met de te herleiden uitdrukkingen.

Opdracht 2.1

In de afbeelding zie je een balk die bestaat uit zes kubussen. Iedere kubus heeft zijden van r cm.

Daarom heeft iedere kubus een oppervlakte van $6 \cdot r \cdot r$ en een inhoud van $r \cdot r \cdot r$.
Dit schrijf je korter als $6 \cdot r^2 = 6r^2$ (je zegt: "zes r kwadraat") en r^3 (je zegt: "r tot de derde (macht)"), dat noem je werken met machten.

1. Je kunt hiermee de oppervlakte en de inhoud van deze complete figuur opschrijven, doe dat eerst.
2. Bereken daarna de oppervlakte A en de inhoud I van een balk van x bij $4x$ bij $2x$.
3. Bereken tenslotte de oppervlakte A en de inhoud I van een balk van a bij $4a$ bij $2b$.



Figuur 2.2

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in drie stappen. De figuur staat op het **Werkblad** en kan worden uitgedeeld. Wellicht is het ook mooi om een set kubusjes erbij te hebben en zelf figuren te maken.

Eventuele hulpvragen: “Uit hoeveel kubussen bestaat de gegeven balk?”, “Hoeveel grensvlakken (zijvlakken) heeft een balk?”, “Hoe bepaal je de oppervlakte van elk grensvlak?”, “Hoe bepaal je de inhoud van een balk?” en “Welke termen mag je samennemen?”.

Bespreek nog even na afloop het samennemen van termen waarin machten voor komen.

Uitwerking

Oppervlakte gegeven figuur $2 \cdot 3r \cdot r + 2 \cdot 2r \cdot r + 2 \cdot 3r \cdot 2r = 6r^2 + 4r^2 + 12r^2 = 22r^2$.

Inhoud gegeven figuur $3r \cdot 2r \cdot r = 2 \cdot 3 \cdot r^3 = 6 \cdot r^3 = 6r^3$.

Oppervlakte nieuwe balk $2 \cdot x \cdot 4x + 2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot 4x \cdot 2x = 8x^2 + 4x^2 + 16x^2 = 28x^2$.

Inhoud nieuwe balk $I = x \cdot 4x \cdot 2x = 8x^3$.

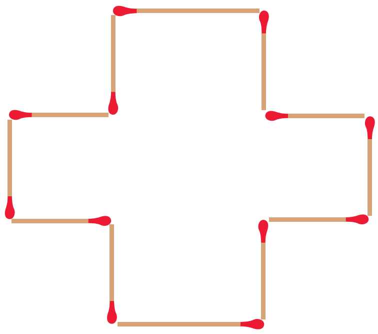
Oppervlakte derde balk $2 \cdot a \cdot 4a + 2 \cdot a \cdot 2b + 2 \cdot 4a \cdot 2b = 8a^2 + 4ab + 16ab$.

Inhoud derde balk $I = a \cdot 4a \cdot 2b = 8a^2b$.

Opdracht 2.2

Bekijk de luciferfiguur. Neem aan dat alle hoeken recht zijn. Noem de lengte van de korte lucifer k en die van de langere lucifer boven en onder l. Alleen de onderste en de bovenste lucifer zijn lang.

Stel een formule op voor de oppervlakte A van het binnengebied van deze figuur. Bereken deze oppervlakte als $k = 3$ cm en $l = 4$ cm.



Figuur 2.3

Toelichting

Geef de opdracht mondeling. De figuur staat op het **Werkblad** en kan worden uitgedeeld. Deze opdracht kan worden uitgebreid door lucifers van twee verschillende lengtes mee te nemen en verschillende figuren (bestaande uit rechthoekjes en vierkantjes) te maken.

Eventuele hulpvragen: “Hoe kun je de figuur verdelen in rechthoekjes en vierkantjes?”, “Hoe schrijf je de formule nu zo kort mogelijk?” en “Hoe bereken je een kwadraat? En andere machten?”.

Uitwerking

Er zijn twee vierkantjes en drie rechthoeken, dus $A = 2 \cdot k^2 + 3 \cdot k \cdot l = 2k^2 + 3kl$.

$A = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 \cdot 4 = 54$ cm^2.

Opdracht 2.3

Herleid de volgende uitdrukkingen:

- $4ab + 2ba$
- $-2t^2 + 3t + t^2$
- $2y \cdot 7y$
- $5z \cdot z^3$
- $-4c^2 \cdot -6c^3$
- $(-x)^2 \cdot x^3$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling via het **Informatieblad**. Stap voor stap is nu niet zo handig omdat de uitwerkingen waarschijnlijk vrij snel gaan.

Mogelijke hulpvragen: “Welke termen kun je samennemen en welke niet?”, “Hoe kun je machten weer uitschrijven in losse variabelen?” en “Hoe kun je dus machten vermenigvuldigen?”.

Uitwerking

- $4ab + 2ba = 4ab + 2ab = 6ab$
- $-2t^2 + 3t + t^2 = -2t^2 + t^2 + 3t = -t^2 + 3t$
- $2y \cdot 7y = 2 \cdot 7 \cdot y \cdot y = 14y^2$
- $5z \cdot z^3 = 5 \cdot z \cdot z \cdot z \cdot z = 5z^4$
- $-4c^2 \cdot -6c^3 = -4 \cdot c \cdot c \cdot -6 \cdot c \cdot c \cdot c = 24 \cdot c^5$
- $(-x)^2 \cdot x^3 = -x \cdot -x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$

Opdracht 2.4

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over uitdrukkingen met variabelen en ook met machten korter schrijven door termen samen te nemen en/of factoren te vermenigvuldigen. Onthoud ook goed wanneer je termen mag samennemen en wanneer niet.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Soms kun je een uitdrukking herleiden. Je schrijft hem dan zo kort mogelijk.

Je kunt formules of uitdrukkingen herleiden door factoren met elkaar te vermenigvuldigen en dan gelijksoortige termen samen te nemen.

Als je factoren vermenigvuldigt die dezelfde variabele hebben, werk je met **machten**.

- $a \cdot b = ab$ en $2a \cdot 3b = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 6ab$.
- $a \cdot a = a^2$ en $2a \cdot 3a = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a = 6a^2$.
  a^2 is de tweede macht van a; je zegt 'a tot de tweede (macht)' of a-**kwadraat**. Je zegt ook wel dat a wordt gekwadrateerd.
- $a \cdot a \cdot a = a^3$ en $2a \cdot 3a \cdot 5a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a = 30a^3$.
  a^3 is de derde macht van a; je zegt 'a tot de derde (macht)'. Je zegt ook wel dat je a tot de derde macht verheft.
- $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ en $2a^3 \cdot 3a^2 = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = 6a^5$.
  a^5 is de vijfde macht van a; je zegt 'a tot de vijfde (macht)'. Je zegt ook wel dat je a tot de vijfde macht verheft.

Uiteraard mag je ook andere letters gebruiken.

Weer kun je de gelijksoortige termen optellen of aftrekken:

- $3ab + b^2 + 4ab + b^2 = 3ab + 4ab + b^2 + b^2 = 7ab + 2b^2$
- $-4ab + 3ac - 5ac + 3ab = -4ab + 3ab + 3ac - 5ac = -ab - 2ac$
- $(2a)^3 - 2a^2 \cdot a = 2a \cdot 2a \cdot 2a - 2 \cdot a \cdot a \cdot a = 8a^3 - 2a^3 = 6a^3$

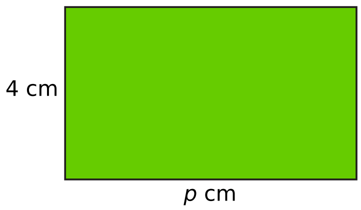
Verwerken

★ **Opgave 2.1**

Van een rechthoek is de lengte p en de breedte 4.

a Geef de formule voor de oppervlakte A van deze rechthoek.

b Hoe groot is A als $p = 3$?



Figuur 2.4

★ **Opgave 2.2**

Herleid.

a $ab + 2ab$

b $10xy - 7xy$

c $nm + nm + 2nm$

d $5df - 10df + 7df$

★ **Opgave 2.3**

Herleid.

a $5a \cdot 4a^2$

b $-3p \cdot 2p$

c $3x^4 \cdot 4x^2$

d $g^2 \cdot 2g \cdot 3g$

★ **Opgave 2.4**

Herleid. Als je het niet korter kunt schrijven, neem je de uitdrukking over.

a $pt + 3tp - 5p$

b $x^2 + x^2$

c $v^2 + 3v$

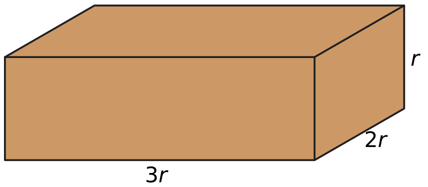
d $4u^2 - 2u^2$

e $8z^4 \cdot (-z)^2$

f $8x - 8 \cdot x \cdot (-2x) - 16x^2$

★ **Opgave 2.5**

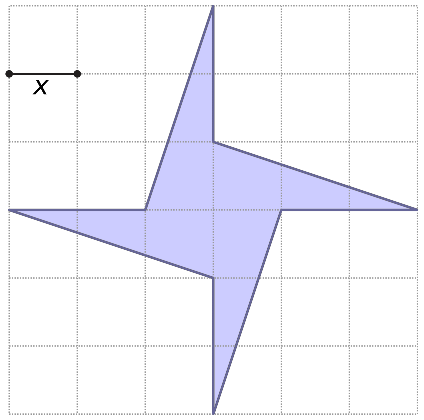
Stel een formule op voor de inhoud I en de oppervlakte A van deze balk.



Figuur 2.5

★ ★ **Opgave 2.6**

Je ziet een windmolenfiguur. De figuur wordt gevormd door de vier wieken die aan een windmolen zitten. Druk de oppervlakte van de windmolenfiguur uit in x.



Figuur 2.6

Toepassen

Een fabrikant wil zijn hagelslag verpakken in doosjes met een vierkante bodem.
Voor een doosje gebruikt hij 800 cm^2 karton.
Ga ervan uit dat een doosje precies de vorm van een balk heeft.

De hoogte van zo'n doosje wordt aangegeven met h en de zijde van het grondvlak met x, beide in cm.
Voor het verband tussen h en x geldt de formule: $4xh + 2x^2 = 800$.

★ ★ **Opgave 2.7**

Bekijk hierboven de beschrijving van een bepaald type verpakkingsdoosje.

a Leid zelf de formule die in de tekst wordt gegeven af.

b De verpakkingsmachine laat een maximale breedte van 8 cm toe.
Bepaal de waarde van h bij $x = 8$.

★ ★ **Opgave 2.8**

Bekijk de oppervlakteformule van het doosje hagelslag nog eens.

a Welke formule kun je opstellen voor de inhoud I van het doosje?

b Hoeveel cm^3 hagelslag gaat er in het doosje met de maximale breedte van 8 cm?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **rekenen met variabelen en machten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.3 Rekenschema's

Inleiding

Je hebt al met formules kennisgemaakt. Formules gebruik je vaak om kort weer te geven hoe je bijvoorbeeld de kosten K uitrekent bij het aankopen van een bepaalde hoeveelheid a. Je kunt dan voor a de juiste waarde in de formule invullen (substitueren). Maar soms wil je voor een bepaald bedrag K weten hoeveel je kunt kopen. Je moet dan terugrekenen...

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- bij een formule een rekenschema opstellen en gebruiken om een variabele te berekenen;
- een terugrekenschema opstellen en gebruiken om de invoervariabele te berekenen.

Voorkennis

- rekenen, ook met negatieve getallen;
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- uitdrukkingen herleiden door vermenigvuldigen van factoren en optellen/aftrekken van gelijksoortige termen.

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Rekenschema's’ maken de leerlingen kennis met het oplossen van vergelijkingen met één variabele (de invoervariabele die moet worden berekend) waarbij een uitkomst bekend is. Ze gebruiken daarbij het schematisch heen- en terugrekenen. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken, met plakband om de informatiebladen eraan op te hangen.
- Bij de eerste opdracht zit een informatieblad met een rekenschema dat eventueel kan worden uitgedeeld of alleen op je eigen werkplek kan worden getoond.

Opdracht 3.1

Figuur 3.2

Met dit ‘rekenschema’ reken je de maandelijkse kopieerkosten K bij een gegeven aantal kopieën a uit.

Stel een bijpassende formule op. Als de maandelijkse kosten € 2250,00 bedragen, kun je met behulp van een ‘terugrekenschema’ berekenen hoeveel kopieën er die maand gemaakt zijn. Schrijf op welke vergelijking je zo oplost en bepaal die oplossing door een terugrekenschema te gebruiken.

Toelichting

Geef de opdracht mondeling. De figuur staat op het **Werkblad**.

Eventuele hulpvragen: “Welke berekeningen worden er uitgevoerd?”, “Hoe maak je daarvan een formule?”, “Hoe reken je stap voor stap terug, wat moet eerst?”, “Hoe kan dus het terugrekenschema er uitzien?” en “Op welk bedrag kom je zo uit als je vanuit 2250 terug rekent?”.

Uitwerking

Formule: $K = 150 + 0{,}075a$.

Vergelijking: $150 + 0{,}075 \cdot a = 2250$.

Terugrekenschema:

Figuur 3.3

Ga na, dat je vindt: $a = 28000$.

Opdracht 3.2

Een kaars met een beginlengte van 50 cm wordt aangestoken.
Neem aan dat deze kaars elk uur precies 1,5 cm korter wordt.

Stel een formule op voor de kaarslengte L in cm van deze kaars afhankelijk van de tijd t in uren na het aansteken. Maak daarbij ook een rekenschema en bereken met behulp van een terugrekenschema op welk tijdstip deze kaars nog 5 cm lang is.

Schrijf tenslotte je formule om naar de vorm $t = ...$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Eventuele hulpvragen: “Met welk getal moet je telkens de invoervariabele t vermenigvuldigen?”, “Hoe kun je een aftrekking weergeven als een optelling?”, “Hoe maak je zo een rekenschema?” en “Hoe reken je nu terug?”. Tenslotte: “Hoe kun je met behulp van het terugrekenschema de formule omschrijven naar de vorm $t = ...$?”.

Uitwerking

Formule: $L = 50 - 1{,}5t = -1{,}5 \cdot t + 50$.

Rekenschema:

Figuur 3.4

Terugrekenschema:

Figuur 3.5

$5 - 50 = -45$ en $-45 / -1{,}5 = 30$, dus $t = 30$ uur.

De formule kan worden omgeschreven naar $t = (L - 50) / -1{,}5$.

Opdracht 3.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over rekenschema's en terugrekenschema's bij formules en hoe je hiermee een vergelijking kunt oplossen.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

In een formule zoals $K = 150 + 0{,}075a$ kun je het berekenen van de waarde van K vanuit een gekozen waarde van a weergeven met een **rekenschema**:

$$a \xrightarrow{\times\ 0{,}075} \ldots \xrightarrow{+\ 150} K$$

Figuur 3.6

Een rekenschema is ook handig bij het terugrekenen vanuit de uitkomst. Elke bewerking wordt ongedaan gemaakt door de terugrekenbewerking uit te voeren. Dat zijn **inverse bewerkingen**.

De inverse bewerkingen bij de formule kun je in een **terugrekenschema** zetten:

$$a \xleftarrow{/\ 0{,}075} \ldots \xleftarrow{-\ 150} K$$

Figuur 3.7

Merk op:

- de terugrekenbewerking van optellen is aftrekken;
- de terugrekenbewerking van aftrekken is optellen;
- de terugrekenbewerking van vermenigvuldigen is delen;
- de terugrekenbewerking van delen is vermenigvuldigen.

Verwerken

★ **Opgave 3.1**

Als je naar de Verenigde Staten gaat, is het verstandig om vooraf wat Amerikaanse dollars te kopen. Dat kan bij een bank, maar dan betaal je wel provisie.
Een bank rekent met de formule: $e = 0{,}75d + 4{,}5$.
Hierin is d het aantal Amerikaanse dollars en e het aantal euro dat je ervoor moet betalen.

a Hoeveel provisie betaal je bij deze bank?

b Maak een rekenschema bij deze formule. Geef ook het terugrekenschema.

c Hoeveel moet je betalen voor 1250 Amerikaanse dollars?

d Hoeveel Amerikaanse dollars krijg je voor 500 euro?

★ **Opgave 3.2**

Er is een verband tussen de lengte (cm) van je voet en je schoenmaat: “Vermenigvuldig de lengte van je voet met 1,5 en tel daar 2 bij op.” Neem voor je voetlengte L en de schoenmaat S.

a Geef dit verband met een rekenschema.

b Geef het terugrekenschema.

c Stel een formule op bij het verband tussen L en S.

d Een voet is 26 cm lang. Bereken de schoenmaat.

e Welke vergelijking hoort er bij de vraag: “Bij welke voetlengte heb je een schoenmaat van 36,5?”

f Los deze vergelijking op door terug te rekenen. Bepaal de bijbehorende exacte voetlengte.

★ **Opgave 3.3**

Amerikanen geven de temperatuur weer in graden Fahrenheit (°F) terwijl wij in West-Europa graden Celsius (°C) gebruiken. Als F het aantal °F en C het aantal °C voorstelt, dan geldt: $C = \frac{5F-160}{9}$.

a Het is 59 °F. Wat is de temperatuur in °C? Rond af op een gehele graad.

b Je wilt uitrekenen hoeveel °F overeenkomt met 25 °C. Welke vergelijking los je op?

c Los de vergelijking bij b op. Rond af op een gehele graad.

d Water kookt bij 100 °C. Bereken bij welke temperatuur water kookt in °F. Rond af op een gehele graad.

e Maak bij ditzelfde verband een formule van de vorm $F = ...$

★ **Opgave 3.4**

Een docente Engels heeft een overhoring ‘woordjes’ gegeven. De leerlingen moeten van 36 Engelse woorden de Nederlandse vertaling geven. De docente rekent ‘vier fouten per punt’.

a Bram heeft veertien fouten. Welk cijfer krijgt Bram?

b Met welke formule wordt het cijfer c berekend als het aantal fouten f bekend is?

c Inge had een 5,5 voor de overhoring. Welke vergelijking moet je oplossen om uit te rekenen hoeveel fouten ze had? Los die vergelijking op.

★ **Opgave 3.5**

Voor een proefwerk wiskunde kun je maximaal 51 punten krijgen. Het cijfer wordt berekend met de formule: $c = \frac{p}{51} \cdot 9 + 1$

De c staat voor het cijfer en de p voor het aantal punten.

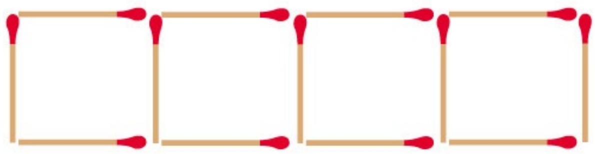
a Welk cijfer heb je als je 33 punten hebt behaald? Rond af op één decimaal.

b Maak een terugrekenschema bij deze formule.

c Jan Willem had een 6,5 voor het proefwerk. Welke vergelijking los je op om uit te rekenen hoeveel punten hij had? Los die vergelijking op. Rond af op gehele punten.

d Welke formule hoort bij het terugrekenschema?

★ ★ **Opgave 3.6**



Figuur 3.8

Met lucifers kun je vierkanten op een rij maken. Kijk maar eens naar de figuur.

a Hoeveel vierkanten zie je in de figuur? Hoeveel lucifers waren er voor nodig?

b Bedenk hoe het aantal lucifers L afhangt van het aantal vierkanten v dat je zo op een rij legt. Stel een formule op voor L afhankelijk van v.

c Welke vergelijking moet je oplossen om uit te rekenen hoeveel vierkanten je kunt maken met 100 lucifers? Los die vergelijking op.

Toepassen

★ ★ **Opgave 3.7: Reisverzekering**

Wanneer je op reis gaat, kun je een reisverzekering afsluiten. Daarvoor betaal je de verzekeringsmaatschappij een bepaalde startpremie. Bij DALIV betaal je een eenmalige afsluitprovisie en daarnaast een vast bedrag per dag. De tabel laat enkele premies zien.

reistijd (dagen)	5	10	15	20
premie (euro)	17,50	30,00	42,50	55,00

Tabel 3.1

a Tussen welke 2 variabelen geeft de tabel het verband weer? Kies voor elk van die variabelen een letter.

b Hoeveel bedraagt de premie als je een reisverzekering voor 25 dagen wilt afsluiten?

c Stel een rekenschema op bij dit verband en bereken daarmee de premiekosten bij 12 dagen.

d Hoeveel dagen ben je verzekerd als je in totaal € 45,00 betaald?

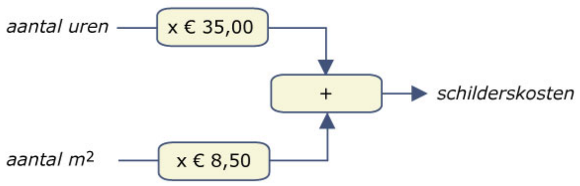
e Met welke formule kun je het aantal dagen d berekenen als je het totaal bedrag e weet?

★ ★ ★ **Opgave 3.8: Schildersbedrijf**

De firma Raaimakers is een schildersbedrijf. De kosten voor het schilderen van een huis worden bepaald door:

- de tijd (h) die de schilders bezig zijn.
- de grootte van de te schilderen oppervlakte (m^2).

De schilderkosten kun je berekenen met het schema:



Figuur 3.9

a Voor het schilderen van de woonkamer en de keuken van het huis van de familie Willemsen wordt achttien uur uitgetrokken. De te schilderen oppervlakte is ongeveer 48 m^2.
Wat zijn de schilderkosten?

b De schilderkosten voor een oppervlakte van 68 m^2 zijn € 1120,50.
Hoelang zijn de schilders bezig geweest?

c Een andere schilderklus kostte € 973,00. Voor het schilderen is een tijd van 12,5 uur berekend.
Welke oppervlakte moest er worden geschilderd?

1.4 Balansmethode

Inleiding

Je krijgt nu te maken met vergelijkingen met één variabele waarin als het ware twee formules met elkaar worden vergeleken. Je zoekt dan naar de waarde(n) van de variabele waarbij beide zijden van de vergelijking dezelfde uitkomst hebben.

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen met een variabele op één plek oplossen met de balansmethode;
- vergelijkingen met een variabele op meer dan één plek oplossen met de balansmethode.

Voorkennis

- rekenen, ook met negatieve getallen;
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- uitdrukkingen herleiden door vermenigvuldigen van factoren en optellen/aftrekken van gelijksoortige termen;
- bij een formule een rekenschema en een terugrekenschema opstellen en gebruiken om een variabele te berekenen.

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Balansmethode’ maken de leerlingen kennis met het oplossen van vergelijkingen met één variabele (die dan vaak op meerdere plaatsen voor komt) met behulp van de balansmethode. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken, met plakband om de informatiebladen eraan op te hangen.
- Bij de eerste opdracht zit een informatieblad om aan de groepjes uit te delen.

Opdracht 4.1

Iemand heeft 9 precies gelijke dukaten. Op een balans houden 2 van die dukaten en 12 gewichten van 100 gram aan de éne kant de 7 andere dukaten, 8 gewichten van 100 gram en 6 gewichten van 10 gram aan de andere kant precies in evenwicht.

Hoe zwaar zijn die munten?

Figuur 4.2

Toelichting

Geef de opdracht mondeling. De informatie staat op het **Informatieblad**.

Het is de bedoeling van deze opdracht om toe te werken naar de balansmethode. Daarvoor is waarschijnlijk het stellen van sturende vragen nodig.

Eventuele hulpvragen: “Kun je hier een vergelijking bij opstellen?”, “Wat is de variabele die je wilt berekenen?”, “Hoe kun je gewichten weghalen zonder dat de balans uit evenwicht raakt?”, “Hoe kun je munten weghalen zonder dat de balans uit evenwicht raakt?” en “Wat houd je uiteindelijk over? En hoe kun je daar het gewenste gewicht mee berekenen?”.

Bespreek na afloop de manier van opschrijven van de oplossing zonder veel tekst te gebruiken. Laat de uitdrukking ‘balansmethode’ vallen.

Uitwerking

Bij de puzzel past de vergelijking $7g + 860 = 2g + 1200$ past. Hierin is g het aantal gram dat een dukaat weegt.

Beide zijden 860 gram weghalen en je krijgt $7g = 2g + 340$.

Beide zijden 2 munten weghalen en je krijgt $5g = 340$.

Dan is $g = 340/5 = 68$ gram.

Kortweg:

$$\begin{aligned} 5g + 1 &= 2g + 13 && \\ & && \text{beide zijden } -1 \\ 5g &= 2g + 12 && \\ & && \text{beide zijden } -2g \\ 3g &= 12 && \\ & && \text{beide zijden } /3 \\ g &= 12/3 = 4 && \end{aligned}$$

Opdracht 4.2

Een vergelijking met één variabele oplossen betekent: zoeken naar de waarde van die variabele waarvoor de vergelijking waar wordt gemaakt. De balansmethode kan je daarbij helpen. Je kunt dan aan beide zijden van het isgelijkteken: hetzelfde optellen of aftrekken, met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigen en/of door hetzelfde (behalve 0) delen. Je gebruikt dit vaak als de variabele aan beide zijden van het isgelijkteken voorkomt.

Los de volgende vergelijkingen op en laat daarbij duidelijk zien hoe. Probeer steeds je antwoord te controleren.

1. $25 + 4{,}5 \cdot x = 3 \cdot x + 40$
2. $8 \cdot g - 15 = 5 \cdot g + 21$
3. $5 \cdot g - 15 = 8 \cdot g$
4. $12 - 4 \cdot g = 6 \cdot g + 2$
5. $2g + 15 + 6g = 5 + 3g - 20$
6. $6 + 8g/2 = 4 - 5g + 12 + g$
7. $x + 6 - 0{,}5x = 3{,}4 + 0{,}1x$
8. $\frac{p}{4} + \frac{1}{12} = 2 - \frac{5}{6}p$
9. $\frac{5-x}{3} = \frac{1}{4}x$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en stap voor stap.
Bespreek nog wel even waarom 0 een uitzondering is bij ‘beide zijden vermenigvuldigen en/of delen door hetzelfde getal’.

Eventuele hulpvragen hangen sterk af van de vergelijking waaraan wordt gewerkt. Bij de vijfde, de zesde en de zevende bijvoorbeeld: “Kun je termen samennemen en zo de vergelijking eenvoudiger maken?”. En bij de achtste en de negende bijvoorbeeld: “Met welk getal moet je vermenigvuldigen om in één keer alle breuken kwijt te raken?”. En in het algemeen: “Hoe kun je telkens het antwoord controleren?”.

Uitwerking

Op de website zijn uitgebreide uitwerkingen van deze opgaven te vinden bij de voorbeelden en de bijbehorende opgaven.

1. $25 + 4{,}5 \cdot x = 3 \cdot x + 40$ geeft $25 + 1{,}5x = 40$ en $1{,}5x = -15$, dus $x = -3$.
2. $8 \cdot g - 15 = 5 \cdot g + 21$ geeft $3g - 15 = 21$ en $3g = 36$, dus $g = 12$.
3. $5 \cdot g - 15 = 8 \cdot g$ geeft $-15 = 3g$, dus $g = -5$.
4. $12 - 4 \cdot g = 6 \cdot g + 2$ geeft $12 = 10g + 2$ en $10g = 10$, dus $g = 1$.
5. $2g + 15 + 6g = 5 + 3g - 20$ geeft $8g + 15 = 3g - 15$ en $5g = -30$, dus $g = -6$.
6. $6 + 8g/2 = 4 - 5g + 12 + g$ geeft $6 + 4g = 16 - 4g$, dus $8g = 10$ en $g = 1{,}25$.
7. $x + 6 - 0{,}5x = 3{,}4 + 0{,}1x$ geeft $0{,}5x + 6 = 3{,}4 + 0{,}1x$ en $0{,}4x = -2{,}6$, dus $x = -6{,}5$.
8. $\frac{p}{4} + \frac{1}{12} = 2 - \frac{5}{6}p$ geeft $3p + 1 = 24 - 10p$ en $13p = 23$ en $p = 23/13$.
9. $\frac{5-x}{3} = \frac{1}{4}x$ geeft $20 - 4x = 3x$ en $7x = 20$, dus $x = 20/7$.

Opdracht 4.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over de balansmethode voor het oplossen van een vergelijking.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Bij het **systematisch oplossen van een vergelijking** kun je vaak gebruik maken van de **balansmethode**.

Je maakt daarbij gebruik van het feit dat je de vergelijking kunt opvatten als een balans die in evenwicht blijft als je:

- links en rechts van het isgelijkteken hetzelfde optelt of aftrekt;
- links en rechts van het isgelijkteken met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigt;
- links en rechts van het isgelijkteken door hetzelfde (behalve 0) deelt.

En soms pas je ook nog andere bewerkingen op dezelfde wijze toe. Maar daarover later...

Figuur 4.3

Verwerken

★ Opgave 4.1

Los de volgende vergelijkingen op. Gebruik waar nodig de balansmethode, maar terugrekenen mag natuurlijk ook.

a $12g + 3 = 7g + 18$

b $10 + 6g = 2 + 8g$

c $12 - 4g = 36 + 2g$

d $5g = g + 8$

e $5200 + 15g = 600$

f $-6g + 55 = 4g - 25$

g $3 - g = 6 + 2g$

h $-g + 7 = 4g - 11$

i $320 + 0{,}5g = 950 - 1{,}25g$

j $17 = 4 - 11g$

★ Opgave 4.2

Op school staat een kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor 10 cent per kopie gebruik van maken.
De school huurt deze machine voor € 150,00 per maand en elke kopie kost de school 7,5 cent.

De vraag is: "Vanaf welk aantal kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruiken van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?".

a Leg uit dat deze vraag kan worden vertaald naar de vergelijking $150 + 0{,}075 \cdot a = 0{,}10 \cdot a$. Hierin is a het aantal kopieën per maand.

b Los deze vergelijking op met de balansmethode.

c Wat is nu het antwoord op de gestelde vraag?

★ Opgave 4.3

Bij het opbranden van een kaars hoort de formule $L = 20 - 1{,}5 \cdot t$, waarin L de lengte in cm en t de brandtijd in uren is.

a Welke vergelijking hoort er bij de vraag: "Na hoeveel uur is deze kaars nog 5 cm lang?"

b Waarom kun je deze vergelijking zowel met de balansmethode als door terugrekenen oplossen?

c Wat is het antwoord op de gestelde vraag?

★ Opgave 4.4

Bij het opbranden van een kaars hoort de formule $L = 20 - 1{,}5 \cdot t$, waarin L de lengte in cm en t de brandtijd in uren is.
Voor een tweede kaars geldt dat hij bij aansteken 30 cm lang is en elk uur 3,25 cm korter wordt als hij opbrandt. Beide kaarsen worden tegelijkertijd aangestoken.

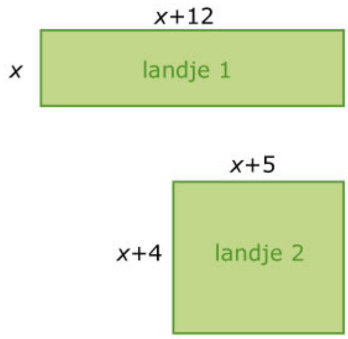
a Welke vergelijking hoort er bij de vraag: "Na hoeveel uur zijn beide kaarsen even lang?"

b Waarom kun je deze vergelijking alleen met de balansmethode oplossen?

c Wat is het antwoord op de gestelde vraag? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

★ ★ **Opgave 4.5**

De twee figuren hieronder hebben niet altijd dezelfde omtrek. Hoeveel moet je voor x nemen als deze figuren dezelfde omtrek moeten hebben?



Figuur 4.4

★ **Opgave 4.6**

Los de volgende vergelijkingen op.

a $4 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{9} + \frac{5}{6}x$

b $0{,}1x + 2{,}5 - 1{,}3x = x - 5{,}4$

c $\frac{1}{5}x - \frac{1}{2} = \frac{x-3}{10} + 0{,}2x$

d $40 - \frac{1}{2}x + 10 = x - 20 + \frac{1}{2}x$

Toepassen

★ ★ ★ **Opgave 4.7: Leeftijdspuzzels**

Een puzzel zoals deze kun je met behulp van een vergelijking oplossen.
Probeer maar...

“Achmed en José zijn samen 38 jaar. Achmed was 5 jaar geleden 2 keer zo oud als José nu.
Hoe oud zijn ze elk?”

a Neem eens aan dat José x jaar oud is. Hoe oud is Achmed dan?

b Welke vergelijking kun je nu opstellen om de puzzel op te lossen?

c Los de gevonden vergelijking op en geef beider leeftijden.

Hier zie je nog zo'n puzzel. “Siomara is 24 jaar oud. Ito is jonger. Toen hij 12 jaar oud was, was Siomara zo oud als Ito nu is.
Hoe oud is Ito?”

d Los deze puzzel op.

★ ★ **Opgave 4.8: Break-even-point**

Een **break-even-point** is in de economie het punt waarin de opbrengst R gelijk is aan de totale kosten K.
Voor het aantal liters ActivExtra x dat per maand wordt verkocht geldt: $R = 1{,}15 \cdot x$.
Ook het aantal maandelijks geproduceerde liters is x liter en er geldt: $K = 25000 + 0{,}80 \cdot x$.
Maak je een grafiek van R en een grafiek van K in één figuur, dan is het break-even-point het snijpunt van beide.

a Met welke vergelijking kun je dat snijpunt berekenen?

b Los deze vergelijking op met de balansmethode.

c Vanaf welk aantal liter gaat de firma die ActivExtra produceert hieraan winst maken?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **vergelijkingen oplossen met de balansmethode**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.5 Haakjes in formules

Inleiding

Door de rekenvolgorde zijn er soms in formules haakjes nodig. En ook kunnen in vergelijkingen haakjes voorkomen. Daar ga je nu kennis mee maken.

Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- haakjes wegwerken en herleiden;
- vergelijkingen met haakjes erin oplossen.

Voorkennis

- rekenen, ook met negatieve getallen, en de juiste rekenvolgorde gebruiken;
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- uitdrukkingen herleiden door vermenigvuldigen van factoren en optellen/aftrekken van gelijksoortige termen;
- bij een formule een rekenschema en een terugrekenschema opstellen en gebruiken om een variabele te berekenen;
- een vergelijking oplossen met de balansmethode.

Voor de docent

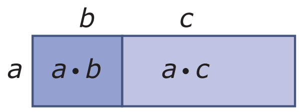
Bij het onderdeel ‘Haakjes in formules’ leren de leerlingen haakjes weg te werken in formules en dit toe te passen bij het oplossen van vergelijkingen met één variabele. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken, met plakband om de informatiebladen eraan op te hangen.
- Bij de derde opdracht zit een informatieblad (voor de laatste opgave) om aan de groepjes uit te delen.

Opdracht 5.1

Een formule met haakjes kun je herschrijven tot er geen haakjes meer zijn.
Je noemt dat ‘haakjes wegwerken’ of ‘haakjes uitwerken’.



Figuur 5.2

Hier zie je dat in het algemeen $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
De oppervlakte van de grote rechthoek is immers zowel $a \cdot (b + c)$ als $a \cdot b + a \cdot c$.

Werk de haakjes uit (teken bij de eerste twee ook rechthoeken om te laten zien dat het klopt):

1. $2(x + 7)$
2. $2(x - 7)$
3. $-2(x + 7)$
4. $-2(x - 7)$
5. $p(x - 7)$
6. $p(x - p)$
7. $x(2x - 1)$
8. $x(2x - 1) + x(x + 2)$
9. $x(2x - 1) - x(x + 2)$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in stappen. Teken de figuur bij $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ op je eigen werkplek.

Bij de tweede zal enige hulp nodig zijn om de rechthoek te kunnen tekenen: “Wat stelt nu $x - 7$ voor?” en “Hoe kan dit de zijde van een recthoek zijn?”.
Bij de derde is een mogelijke hulpvraag: “Waarom is dit gewoon het tegengestelde van de eerste opdracht?”.

Uitwerking

1. $2(x + 7) = 2x + 14$
2. $2(x - 7) = 2x - 14$
3. $-2(x + 7) = -2x + -14 = -2x - 14$
4. $-2(x - 7) = -2x - -14 = -2x + 14$
5. $p(x - 7) = px - 7p$
6. $p(x - p) = px - p^2$
7. $x(2x - 1) = 2x^2 - x$
8. $x(2x - 1) + x(x + 2) = 2x^2 - x + x^2 + 2x = 3x^2 + x$
9. $x(2x - 1) - x(x + 2) = 2x^2 - x - x^2 - 2x = x^2 - 3x$

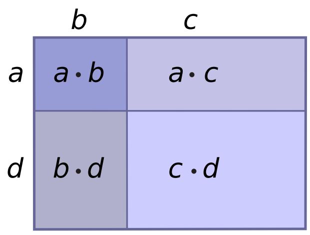
Opdracht 5.2

Een formule met haakjes kun je herschrijven tot er geen haakjes meer zijn.
Je noemt dat ‘haakjes wegwerken’ of ‘haakjes uitwerken’.

Hier zie je dat in het algemeen $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$.

Werk de haakjes uit en vereenvoudig zover mogelijk:

1. $(x + 3)(x + 2)$
2. $(x - 3)(x + 2)$
3. $(x - 3)(x - 2)$
4. $2(x - 7)(x + 4)$
5. $(a - 1)(a - 4)$
6. $(b - 4)(b + 4)$
7. $(c + 5)^2$
8. $(d - 4)^2 - 4(d - 2)$



Figuur 5.3

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en stap voor stap.

Bij de tweede kun je de suggestie doen om hem te schrijven als $(x + -3)(x + 2)$ en dan net zo uitwerken als de eerste.

Uitwerking

1. $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$
2. $(x - 3)(x + 2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$
3. $(x - 3)(x - 2) = x^2 - 5x + 6$
4. $2(x - 7)(x + 4) = 2\left(x^2 - 3x - 28\right) = 2x^2 - 6x - 56$
5. $(a - 1)(a - 4) = a^2 - 5a + 4$
6. $(b - 4)(b + 4) = b^2 - 16$
7. $(c + 5)^2 = (c + 5)(c + 5) = c^2 + 10c + 25$
8. $(d - 4)^2 - 4(d - 2) = d^2 - 8d + 16 - 4d + 8 = d^2 - 12d + 24$

Opdracht 5.3

Nu je haakjes kunt wegwerken in uitdrukkingen, kun je dit ook toepassen bij het oplossen van vergelijkingen.

Los de volgende vergelijkingen op:

1. $5(3x+4)=10x$
2. $5(3x+4)=10$
3. $x^2+13x=(x+3)(x+4)$
4. $(a+2)(a+7)=(a+3)(a+4)$
5. $(8-b)(b+4)=(b-3)(9-b)$
6. Stel zelf een vergelijking op en los het volgende probleem op: “Boer Brandwijk koopt 50 kippen en geiten. De dieren kosten hem 1000 euro. Een kip kost € 1,00 en een geit kost € 51,00. Hoeveel kippen en hoeveel geiten koopt hij?”

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in stappen. De laatste (extra) opgave staat op het **Informatieblad**.

Bij de vergelijkingen waarin kwadraten voorkomen zullen de leerlingen wellicht enige hulp nodig hebben waar het gaat om aan beide zijden het kwadraat af te trekken (of op te tellen).

De laatste (extra) opdracht zal wel als lastig worden ervaren, met name het opstellen van de juiste vergelijking. Laat de groepjes daar rustig op puzzelen. Probeer ze wel zover te krijgen dat ze verder komen dan gewoon proberen (wat overigens een prima strategie is, maar bij dit onderwerp wil je liever wat anders). Overigens is het slim om voor het aantal geiten een variabele te kiezen, want je kunt dan eigenlijk wel zonder haakjes. Kies je voor de kippen een variabele, zijn haakjes wel echt nodig.

Uitwerking

1. $5(3x+4)=10x$ geeft $5x+20=10x$ en $5x=20$, dus $x=4$.
2. $5(3x+4)=10$ geeft $5x+20=10$ en $5x=-10$, dus $x=-2$.
3. $x^2+13x=(x+3)(x+4)$ geeft $x^2+13x=x^2+7x+12$ en $6x=12$, dus $x=2$.
4. $(a+2)(a+7)=(a+3)(a+4)$ geeft $a^2+9a+14=a^2+7a+12$ en $2a=-2$, dus $a=-1$.
5. $(8-b)(b+4)=(b-3)(9-b)$ geeft $-b^2+4b+32=-b^2+6b-27$ en $2b=59$, dus $b=29{,}5$.
6. Aantal geiten g geeft $1\cdot(50-g)+51\cdot g=1000$.
   Dus $50+50g=1000$ en $g=950/50=19$.
   Hij koopt 19 geiten en 31 kippen.

Opdracht 5.4

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het wegwerken van haakjes en het toepassen ervan bij het oplossen van een vergelijking.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

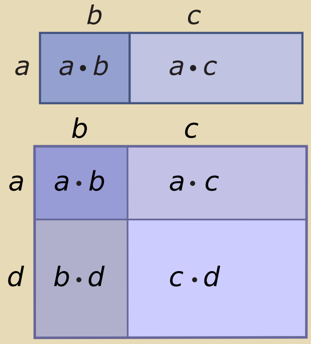
Om te onthouden

Een formule met haakjes kun je ook herschrijven tot er geen haakjes meer zijn.
Je noemt dat **haakjes wegwerken**.

In het algemeen geldt voor alle getallen a, b en c:

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  Korter: $a(b + c) = ab + ac$.
- $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
  Of korter: $(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Dit geldt ook als één of meer van die waarden negatief zijn. In feite is dit een algemene eigenschap van getallen.



Figuur 5.4

Verwerken

★ **Opgave 5.1**

Werk de haakjes uit en schrijf de volgende uitdrukkingen zo eenvoudig mogelijk.

a $10 \cdot (p + 3)$

b $5(2 - 6x)$

c $3(2a + 3) - (6a - 9)$

d $(a - 2)\,(a + 5)$

e $3(b + 1)\,(b - 4)$

f $(2c - 5)^2$

★ **Opgave 5.2**

Los de volgende vergelijkingen op.

a $4(2a + 3) = 14a$

b $6 - 2 \cdot (2x - 1) = 30$

c $2(k + 5) = -4(k - 8)$

d $3(x + 1) - 2(x - 4) = 1$

★ **Opgave 5.3**

300 brugklassers bestellen via school een rekenmachine. Er zijn twee soorten rekenmachines toegestaan, soort A van € 15,00 en soort B van € 12,00. Dat kost in totaal € 4320,00. Hoeveel rekenmachines van elke soort worden er gekocht?

a Als er 50 rekenmachines van soort A worden besteld, hoeveel van soort B moeten er dan worden besteld? Waarom kan dit nooit het juiste antwoord op de vraag zijn?

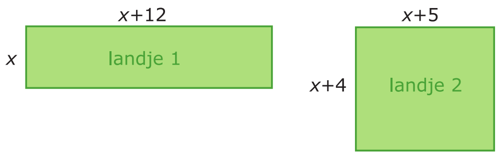
b Neem voor het aantal rekenmachines van soort A een variabele en stel dan een bij dit probleem passende vergelijking op.

c Los deze vergelijking op.

d Hoeveel machines van elke soort zijn er besteld?

★ **Opgave 5.4**

De twee getekende landjes hebben dezelfde oppervlakte.



Figuur 5.5

a Welke vergelijking levert dit op?

b Los de vergelijking op.

c Welke oppervlakte hebben de landjes?

★ ★ **Opgave 5.5**

Een leeftijdspuzzle: “Arnoud en Maartje zijn samen 36 jaar oud. Arnoud is twee keer zo oud als Maartje 3 jaar geleden was. Hoe oud zijn beide?”

a Kies voor de huidige leeftijd van Maartje de letter x. Hoe oud was ze drie jaar geleden? En hoe oud is Arnoud?

b Los deze puzzle op met behulp van een vergelijking.

★ ★ **Opgave 5.6**

Het land van boer Brandwijk was een vierkant van x bij x m. Door de aanleg van een fietspad moet hij aan de westkant een strook van 3 m afstaan. Hij wil er aan de zuidkant een strook van 4 m bij.

a Maak een plaatje van de hierboven beschreven situatie.

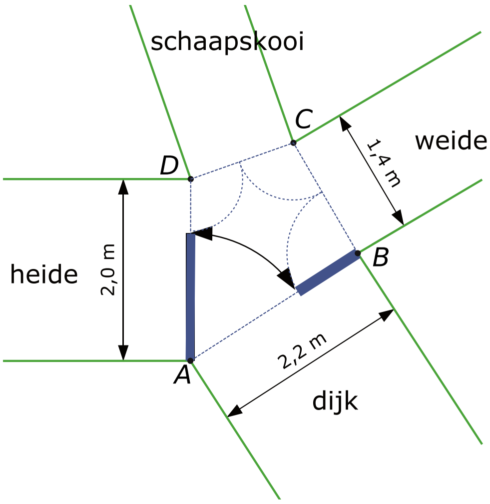
b Welke oppervlakte heeft zijn land na de aanleg van het fietspad als hij zijn zin krijgt? Schrijf de uitdrukking met haakjes en zonder haakjes.

c Als zijn land oorspronkelijk 100 m lang en breed was, hoeveel m^2 heeft hij er dan bij gekregen? Verklaar je antwoord.

d Bij welke waarde van x is het land na de aanleg van het fietspad even groot als ervoor? Verklaar je antwoord.

Toepassen

Boer Harmsen houdt schapen. Die schapen heeft hij soms in een weiland, soms op de heide en soms op de dijk. Hij heeft van de éne naar de andere plek paden gemaakt. Die paden hebben alle drie een andere breedte en komen ergens bij elkaar, zoals je ziet. Daar begint ook een pad naar de schaapskooi. Harmsen heeft bedacht dat het handig is om steeds twee van die paden tegelijk te kunnen afsluiten, dan kunnen zijn schapen gemakkelijk van de éne plaats naar de andere worden gebracht. Hij plaatst daarom vier hekken op dit kruispunt, bij elk van de punten A, B, C en D komt een paal met daaraan een hek dat kan draaien om die paal. Zo komt bij A een hek dat een deel van het pad naar de heide, maar ook een deel van het pad naar de dijk kan afsluiten. En dergelijke hekken komen er ook bij de andere punten. Hij kan zo steeds twee wegen afsluiten. De hekken bij C en bij D maakt hij even breed.



Figuur 5.6

Hoe breed moeten alle hekken en het pad naar de schaapskooi worden?

★ ★ **Opgave 5.7: Schapen houden**

Los het probleem van schapenhouder Harmsen op dat is beschreven in **Toepassen**.

★ ★ ★ **Opgave 5.8: Leeftijd raden**

Schrijf het nummer op van de maand waarin je jarig bent, maar laat het niet zien. Vermenigvuldig dit getal met 5. Tel er 6 bij op en vermenigvuldig het resultaat met 4. Tel daar 1 bij op en vermenigvuldig de uitkomst met 5. Tel daar tenslotte het nummer van de dag bij waarop je jarig bent en trek er nog 125 van af. Als je mij nu de einduitkomst vertelt, weet ik op welke datum je jarig bent.

Dat dit werkt kun je verklaren met behulp van haakjes uitwerken. Probeer maar...

★ ★ ★ **Opgave 5.9: Leeftijdsverschil**

Een hersenkraker:

Een man en een vrouw zijn samen 91 jaar oud. De vrouw is een aantal jaren jonger dan de man. Toen de man zo oud was als zij nu is, was de vrouw 26. Hoe oud zijn de man en de vrouw nu?

a Neem voor de huidige leeftijd van de man maar eens een getal, bijvoorbeeld 60 jaar. Hoe oud moet de vrouw dan nu zijn?

b De gekozen leeftijd voor de man betekent dat zij 26 jaar oud was toen hij 31 jaar was. Waarom kan dit nooit waar zijn?

c Kun je een betere schatting van de leeftijd van de man maken?

d Neem voor de leeftijd van de man x. Hoe oud is de vrouw dan nu?

e Welke vergelijking ontstaat als je op hun leeftijdsverschil let?

f Los deze vergelijking op en bepaal zo de leeftijd van de man en die van de vrouw.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **uitdrukkingen herleiden en haakjes wegwerken**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- formule — uitdrukking herleiden — variabele — factor van een vermenigvuldiging — term van een optelling — gelijksoortige termen
- macht, machtsverheffen — kwadraat, tweede macht
- vergelijking (met één variabele) — rekenschema — terugrekenschema, inverse bewerkingen
- balansmethode
- haakjes wegwerken

Activiteitenlijst

- uitdrukkingen (in formules) herleiden door factoren te vermenigvuldigen en gelijksoortige termen samen te nemen;
- uitdrukkingen (in formules) herleiden door factoren te vermenigvuldigen en daarbij machten te gebruiken en gelijksoortige termen samen te nemen;
- rekenschema's gebruiken om vergelijkingen op te lossen waarin de variabele één keer voor komt;
- de balansmethode gebruiken om vergelijkingen op te lossen;
- uitdrukkingen herleiden door haakjes weg te werken;

Opgave 6.1

Herleid.

a $5a + 2a + 6 + a + 1$

b $5a - 2a + 6 + a - 1$

c $-3a + 4ab - 2a - ab + 2b$

d $2a \cdot 6a - 4a - 5a^2$

Opgave 6.2

Herleid.

a $a \cdot a \cdot 2a$

b $4a^2 \cdot 3a^5$

c $2a \cdot -3a^2 \cdot -2b$

Opgave 6.3

Taxibedrijf A berekent de ritprijs als volgt:
Als de rit begint dan staat de taximeter op € 4,00. Voor iedere in de taxi afgelegde kilometer moet daar bovenop € 2,50 worden betaald. Zij gebruiken dus de formule $p = 4{,}00 + 2{,}5 \cdot a$.

a Je kunt het verband weergeven met een rekenschema. Laat dat zien.

b Je betaalt voor een rit in een taxi van dit bedrijf € 20,25. Met welke vergelijking kun je dan het aantal gereden km berekenen?

c Laat zien hoe je deze vergelijking oplost door terugrekenen.

Opgave 6.4

Los de volgende vergelijkingen op met de balansmethode. Laat duidelijk zien wat je elke stap doet.

a $23g + 40 = 18g + 85$

b $200 - 5g = 10g - 150$

Opgave 6.5

Werk in de volgende uitdrukkingen de haakjes uit. Laat duidelijk zien hoe je te werk gaat.

a $4(x + 3)$

b $4(x - 3)$

c $4 - (x - 3)$

d $(x + 3)(x + 2)$

e $(x + 3)(x - 3)$

f $\left(x^2 - 3\right)^2$

Opgave 6.6

Los de volgende vergelijkingen op. Laat duidelijk zien hoe je te werk gaat.

a $4x - 2(x - 3) = 12$

b $k(k - 2) = (k - 1)(k + 5)$

Testen

★ ### Opgave 6.7

Een bedrijf dat veerdiensten verzorgt tussen diverse havens in Denemarken, Duitsland, Noorwegen en Zweden rekent voor het vervoer prijzen die afhangen van de vaartijd, de gemiddelde tijdsduur van een tocht tussen twee plaatsen met één van hun veerboten. Ze hanteren daarbij de formule $p = 35 + 10 \cdot t$, waarin p de prijs in euro en t de gemiddelde vaartijd in uren is.

a Maak bij deze formule een rekenschema.

b Voor een bepaalde overtocht ben je € 215,00 kwijt en je wilt weten hoeveel uur deze boottocht gemiddeld duurt. Welke vergelijking moet je oplossen?

c Los deze vergelijking op met behulp van een terugrekenschema.

d Hoeveel uur duurt deze tocht gemiddeld?

★ ### Opgave 6.8

Werk de haakjes uit en schrijf de volgende uitdrukkingen zo kort mogelijk.

a $4(6 + 3p) - 2(p - 4)$

b $2x \cdot (x - 3)$

c $(a + 5)(a + 12)$

d $(x - 3)(x + 7)$

e $-4k\left(k^2 + 2k\right)$

f $(m - 4)^2$

★ ### Opgave 6.9

Los de volgende vergelijkingen op.

a $2(k - 3) = 6$

b $-x(x + 3) = (x + 5)(7 - x)$

c $\frac{1}{3}x + \frac{5}{6} = \frac{x}{2}$

d $6x - 2(x - 4) = 15$

★ ★ **Opgave 6.10**

Iemand heeft 100 oude munten bewaard: guldens en rijksdaalders. Stel je voor dat hij van een verzamelaar voor elke gulden nog € 0,50 en voor elke rijksdaalder € 1,25 terug kan krijgen. De totale partij is dan nog € 73,25 waard.

Hoeveel guldens heeft hij dus bewaard? (Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.)

★ ★ **Opgave 6.11**

In de eredivisie voetbal worden 3 punten toegekend voor een gewonnen wedstrijd, 1 punt voor gelijkspel en 0 punten voor een verloren wedstrijd. Er worden in een seizoen 34 wedstrijden gespeeld. Jouw favoriete ploeg heeft in een bepaald seizoen 11 keer verloren en 55 punten verzameld.

Hoeveel wedstrijden hebben ze gewonnen? (Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.)

★ **Opgave 6.12**

Martin de Vries heeft rozen geplant in rijen. Elke rij heeft evenveel rozen als er rijen zijn. Zijn buurman doet hetzelfde, maar hij plant per rij 4 rozen minder. Daarentegen maakt hij 5 rijen met rozen meer. Beiden gebruiken evenveel rozenstruikjes.

Hoeveel? (Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.)

Toepassen

In bepaalde situaties kun je bij het oplossen van een probleem wel eens op de gedachte komen om twee variabelen in te voeren. Hier zie een voorbeeld van probleem dat iemand oplost door twee variabelen te gebruiken.

> Tijdens een toneelvoorstelling waren er in totaal 592 bezoekers.
> De leden van de toneelclub betaalden € 2 entree en de niet-leden € 5. Er is in totaal € 2708 binnengekomen. Hoeveel niet-leden zaten er in de zaal?

Je kunt dit probleem aanpakken door het aantal leden x en het aantal niet-leden y te stellen. Uit de tekst hierboven volgt dan $x + y = 592$ en $2x + 5y = 2708$.
En met die twee vergelijkingen kun je het probleem oplossen.

★ ★ ★ **Opgave 6.13: Twee variabelen, of toch maar één?**

Bekijk de aanpak van het probleem in **Toepassen**.

a Leg uit hoe je de twee vergelijkingen uit de tekst kunt afleiden.

b Leg uit waarom $x + y = 592$ is te schrijven als $y = 592 - x$.

c Schrijf ook de andere vergelijking in de vorm $y = ...$

d Je hebt nu twee verbanden tussen x en y. Daarbij kun je grafieken maken. Teken die twee grafieken in één figuur.

e Welke betekenis heeft het snijpunt van beide grafieken?

f Met welke vergelijking kun je dit snijpunt berekenen? Los deze vergelijking op met de balansmethode.

g Wat is het antwoord op de vraag?

h Kon je dit probleem ook oplossen door maar één variabele in te voeren? Hoe dan?

★ ★ ★ **Opgave 6.14: Sinas en cola**

Twee leerlingen kopen voor een klassenavond sinas en cola. Sinas kost € 1,40 per fles van 1 liter en cola € 1,20 per literfles. Ze willen aan drinken € 20,00 uitgeven. Omdat cola goedkoper is kopen ze twee keer zoveel cola als sinas. Hoeveel van elke soort flessen moeten ze aanschaffen?

a Noem het aantal literflessen sinas x en het aantal literflessen cola y. Leg uit welke twee vergelijkingen je uit de tekst kunt afleiden.

b Schrijf ook de tweede vergelijking in de vorm $y = ...$

c Je hebt nu twee verbanden tussen x en y. Daarbij kun je grafieken maken. Teken die twee grafieken in één figuur.

d Waarom hoef je het snijpunt van beide grafieken niet precies uit te rekenen?

e Wat is het antwoord op de vraag? Komen ze precies met het geld uit?

f Kon je dit probleem ook oplossen door maar één variabele in te voeren? Hoe dan?

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		★	★ ★	★ ★ ★
1	**Rekenen met variabelen**	★	★ ★	★ ★ ★
	In uitdrukkingen met variabelen termen en factoren herkennen.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ 1.5 ☐	1.6 ☐	
	Formules herleiden door optellen en aftrekken van gelijksoortige termen.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ 1.5 ☐	1.6 ☐	
	De vermenigvuldigingspunt gebruiken en die indien mogelijk weglaten.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ 1.5 ☐	1.6 ☐	
	Formules herleiden door vermenigvuldigen van factoren.	1.1 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ 1.5 ☐	1.6 ☐	
2	**Variabelen en machten**	★	★ ★	★ ★ ★
	Werken met machten als je gelijke variabelen vermenigvuldigt.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ 2.4 ☐ 2.5 ☐	2.6 ☐ 2.7 ☐ 2.8 ☐	
	Formules herleiden door vermenigvuldigen van factoren, ook als daarbij machten voorkomen.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ 2.4 ☐ 2.5 ☐	2.6 ☐ 2.7 ☐ 2.8 ☐	
3	**Rekenschema's**	★	★ ★	★ ★ ★
	Bij een formule een rekenschema opstellen en gebruiken om een variabele te berekenen.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ 3.5 ☐ **T** 6.7 ☐	3.6 ☐ 3.7 ☐	3.8 ☐
	Een terugrekenschema opstellen en gebruiken om de invoervariabele te berekenen.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ 3.5 ☐ **T** 6.7 ☐	3.6 ☐ 3.7 ☐	3.8 ☐
4	**Balansmethode**	★	★ ★	★ ★ ★
	Vergelijkingen met een variabele op één plek oplossen met de balansmethode.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ 4.6 ☐ **T** 6.9 ☐ **T** 6.12 ☐	4.5 ☐ 4.8 ☐ **T** 6.10 ☐ **T** 6.11 ☐	4.7 ☐ **T** 6.13 ☐ **T** 6.14 ☐
	Vergelijkingen met een variabele op meer dan één plek oplossen met de balansmethode.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ 4.6 ☐ **T** 6.9 ☐ **T** 6.12 ☐	4.5 ☐ 4.8 ☐ **T** 6.10 ☐ **T** 6.11 ☐	4.7 ☐ **T** 6.13 ☐ **T** 6.14 ☐
5	**Haakjes in formules**	★	★ ★	★ ★ ★
	Haakjes wegwerken en herleiden.	5.1 ☐ 5.2 ☐ 5.3 ☐ 5.4 ☐ **T** 6.8 ☐ **T** 6.12 ☐	5.5 ☐ 5.6 ☐ 5.7 ☐ **T** 6.10 ☐ **T** 6.11 ☐	5.8 ☐ 5.9 ☐ **T** 6.13 ☐ **T** 6.14 ☐
	Vergelijkingen met haakjes oplossen.	5.2 ☐ 5.3 ☐ 5.4 ☐ **T** 6.8 ☐ **T** 6.12 ☐	5.5 ☐ 5.6 ☐ 5.7 ☐ **T** 6.10 ☐ **T** 6.11 ☐	5.8 ☐ 5.9 ☐ **T** 6.13 ☐ **T** 6.14 ☐

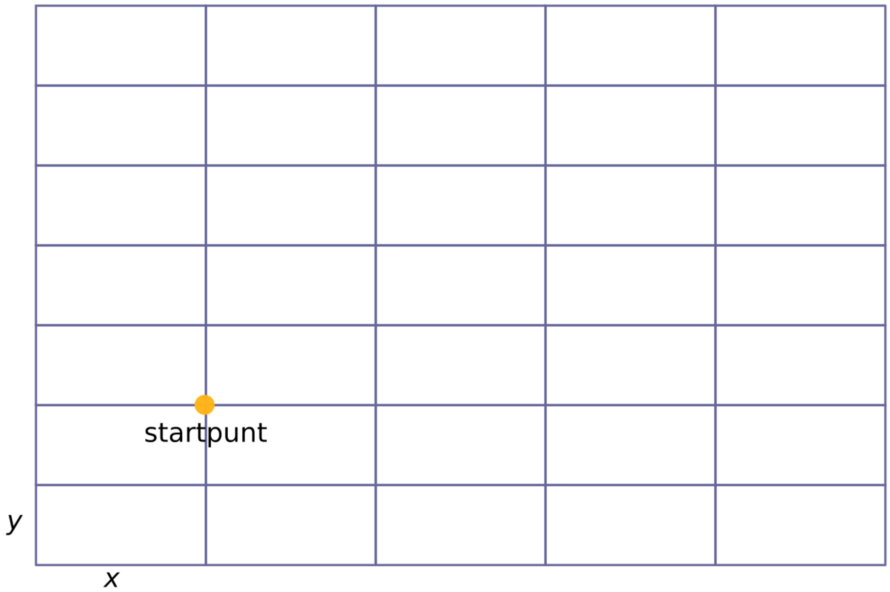
Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

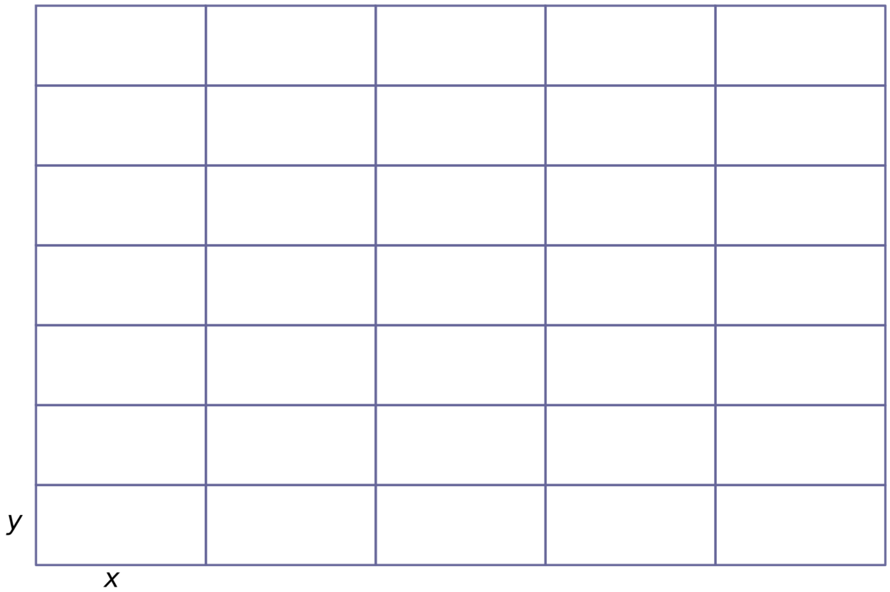
Stichting Math4All

www.math4all.nl

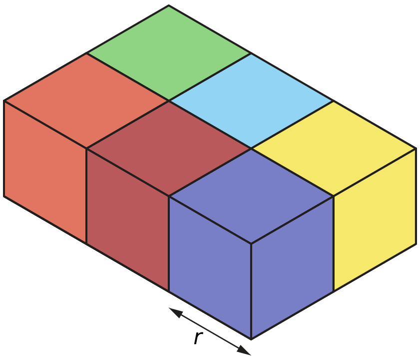
Informatieblad bij Opdracht 1.1



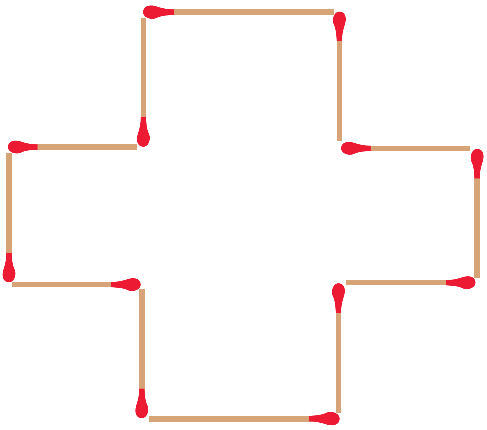
Informatieblad bij Opdracht 1.2



Informatieblad bij Opdracht 3.1



Informatieblad bij Opdracht 2.2



Informatieblad bij Opdracht 2.3

- $4ab + 2ba$
- $-2t^2 + 3t + t^2$
- $2y \cdot 7y$
- $5z \cdot z^3$
- $-4c^2 \cdot -6c^3$
- $(-x)^2 \cdot x^3$

Informatieblad bij Opdracht 3.1

$a \xrightarrow{\times\ 0{,}075} \ldots \xrightarrow{+\ 150} K$

Informatieblad bij Opdracht 4.1

Iemand heeft 9 precies gelijke dukaten. Op een balans houden 2 van die dukaten en 12 gewichten van 100 gram aan de éne kant de 7 andere dukaten, 8 gewichten van 100 gram en 6 gewichten van 10 gram aan de andere kant precies in evenwicht.

Informatieblad bij Opdracht 5.3

“Boer Brandwijk koopt 50 kippen en geiten. De dieren kosten hem 1000 euro. Een kip kost € 1,00 en een geit kost € 51,00. Hoeveel kippen en hoeveel geiten koopt hij?”