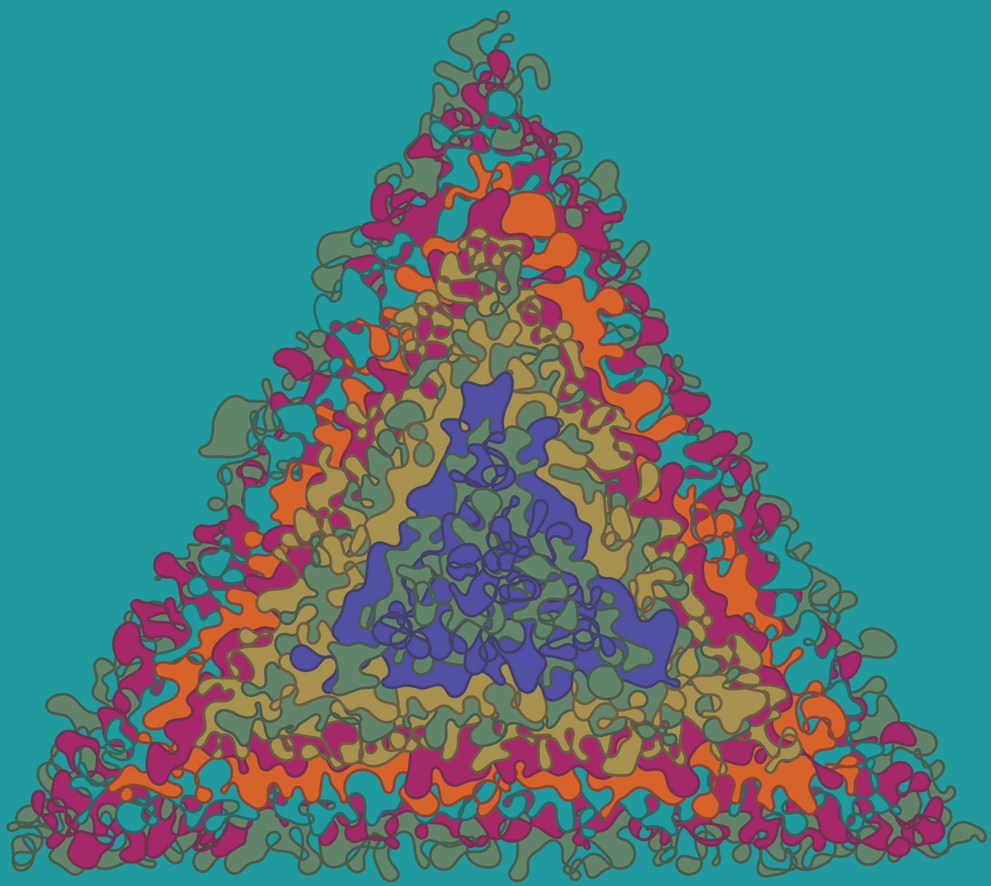
Wiskunde / PGA

2 HAVO / VWO

Machten en wortels

ConTeXt College



Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via `info@math4all.nl`. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je werkt dan onder begeleiding van je docent in kleine groepjes aan wiskundige problemen en samen bouw je de theorie op en maak je er een overzicht van.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee je kunt nagaan of je de stof beheerst. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding vind je terug in de marge.

★ het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen

★ ★ een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die je alleen hoeft te maken als je er genoeg tijd voor hebt

★ ★ ★ een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die je alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk voor je was

1

Machten en wortels

1.1 Kwadraten

Inleiding

De oppervlakte van een vierkant heet een kwadraat. Dat komt van het Latijnse woord 'quadratus' voor vierkant. Je rekent die oppervlakte uit door de zijde van het vierkant met zichzelf te vermenigvuldigen. En een getal met zichzelf vermenigvuldigen heet daarom kwadrateren.

Je leert in dit onderwerp

- getallen kwadrateren (met zichzelf vermenigvuldigen) en de bijbehorende notatie.

Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- de oppervlakte van een roosterfiguur en een vierkant met gegeven zijde berekenen.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het begrip 'kwadraat' en het leren kwadrateren van alle mogelijke getallen. Let goed op het gebruik van haakjes.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 1.1**

Bereken zonder rekenmachine:

a $3{,}3^2$

b $0{,}9^2$

c $-2{,}7^2$

d $(-0{,}1)^2$

e $15^2 - 13^2$

f $(15 - 13)^2$

★ **Opgave 1.2**

Bereken zonder rekenmachine:

a $\left(\frac{2}{5}\right)^2$

b $\left(-\frac{3}{8}\right)^2$

c $\left(-1\frac{1}{4}\right)^2$

d $-\left(2\frac{2}{5}\right)^2$

★ **Opgave 1.3**

Laat met behulp van vierkanten zien dat $1{,}5^2 = 2{,}25$.

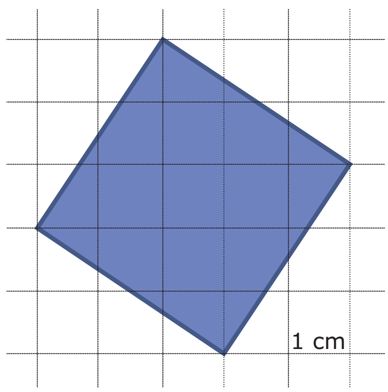
★ **Opgave 1.4**

Bekijk de roosterfiguur hiernaast.

a Waarom weet je zeker dat het een vierkant betreft?

b Hoe groot is de oppervlakte van dit vierkant?

c Bereken nu de lengte van de zijde in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 1.1

★ ★ **Opgave 1.5**

Bepaal de twee waarden van p waarvoor geldt:

a $p^2 = 121$

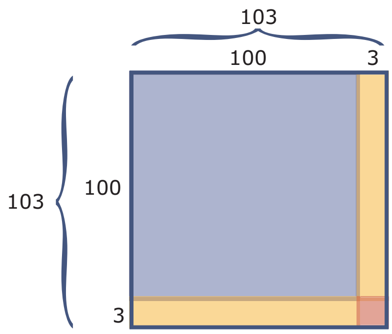
b $p^2 = 4{,}41$

c $p^2 = 1\frac{7}{9}$

Toepassen

Een kwadraat is de oppervlakte van een vierkant. Daar kun je gebruik van maken om kwadraten van sommige getallen snel zonder rekenmachine uit te rekenen.

Bijvoorbeeld $103^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2 = 10000 + 600 + 9 = 10609$.



Figuur 1.2

En dus is $10{,}3^2 = 106{,}09$.

Bedenk zelf hoe je bijvoorbeeld 98^2 en $0{,}98^2$ op deze manier snel kunt berekenen.

★★ **Opgave 1.6: Kwadraten en vierkanten**

Je kunt de kwadraten van sommige getallen uit het hoofd uitrekenen door je er vierkanten bij voor te stellen. Lees **Toepassen**.

a Bereken op deze manier 51^2.

b Bereken op deze manier 98^2.

c Bereken op deze manier $10{,}4^2$.

★★★ **Opgave 1.7: Kwadraten van getallen die eindigen op 5**

Soms moet je een kwadraat uitrekenen van een getal dat eindigt op een 5. Daarvoor kun je een ‘truc’ gebruiken. Hiermee kun je bijvoorbeeld 35^2 uitrekenen.

- Deel het getal door 10. Tussen welke twee gehele getallen ligt het antwoord?
- Vermenigvuldig die twee getallen met elkaar.
- Je krijgt nu het antwoord door 25 achter de uitkomst van die vermenigvuldiging te plaatsen.

Ga na of deze ‘truc’ echt werkt. En probeer hem daarna te verklaren.

Practicum

Veel rekenwerk doe je met een **rekenmachine**, ook kwadraten uitrekenen.
Voor de volgende twee types rekenmachine zijn er practica beschikbaar:

- **Machten en wortels, wetenschappelijke notatie TI-30XB Multiview**
- **Machten en wortels, wetenschappelijke notatie Casio fx-82NL**

Antwoorden

1.1 a $3{,}3^2 = 10{,}89$

b $0{,}9^2 = 0{,}81$

c $-2{,}7^2 = -7{,}29$

d $(-0{,}1)^2 = 0{,}01$

e $15^2 - 13^2 = 225 - 169 = 56$

f $(15 - 13)^2 = 2^2 = 4$

1.2 a $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

b $\left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$

c $\left(-1\frac{1}{4}\right)^2 = 1\frac{9}{16}$

d $-\left(2\frac{2}{5}\right)^2 = -5\frac{19}{25}$

1.3 Verdeel het vierkant van 1,5 bij 1,5 zo dat er een vierkant van 1 bij 1 en eentje van 0,5 bij 0,5 ontstaan. Er blijven dat twee rechthoeken van 1 bij 0,5 over.

1.4 a Binnen de roosterfiguur zijn gelijke rechthoekige driehoeken op de roosterlijnen te maken. Van elke rechthoekige driehoek zijn de twee niet-rechte hoeken samen 90°.

b 13 cm^2.

c Ongeveer 3,61 cm.

1.5 a $p = 11$ of $p = -11$.

b $p = 2{,}1$ of $p = -2{,}1$.

c $p = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ of $p = \frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$

1.6 a $51^2 = 2601$

b $98^2 = 9604$

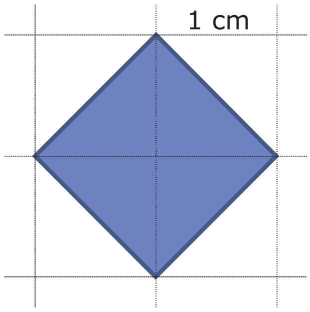
c $10{,}4^2 = 108{,}16$.

1.7 Probeer enkele getallen en teken er een rechthoekje bij om zichtbaar te maken wat je doet.

1.2 Wortels

Inleiding

Dit is een vierkant met een oppervlakte van 2 cm^2. Om de lengte van de zijde te bepalen moet je een getal vinden waarvan het kwadraat 2 is. Zo'n getal kun je door proberen (hoger/lager-tabel) vinden. Gek genoeg komt er geen nauwkeurig decimaal getal uit...



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- terugrekenen vanuit een kwadraat (worteltrekken) en de bijbehorende notatie.

Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- de oppervlakte van een roosterfiguur en een vierkant met gegeven zijde berekenen door kwadrateren.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het begrip ‘wortel van een getal’ en het leren worteltrekken uit getallen, ook met behulp van je rekenmachine. Let er goed op dat sommige wortels alleen kunnen worden benaderd.

Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 2.1**

Bereken de volgende wortels zonder de rekenmachine te gebruiken.
Je kunt dit verder oefenen met het **Practicum**.

a $\sqrt{121}$

b $\sqrt{196}$

c $\sqrt{4{,}41}$

d $\sqrt{0{,}0025}$

e $\sqrt{73-9}$

f $\sqrt{1\frac{15}{49}}$

g $\sqrt{625}-\sqrt{361}$

h $-\sqrt{0{,}36}$

★ **Opgave 2.2**

Een vierkant heeft een oppervlakte van 20 cm^2.

a Hoe groot is de exacte lengte van elke zijde?

b Tussen welke opeenvolgende gehele getallen ligt de lengte van deze zijde?

c Benader de lengte van de zijden van dit vierkant in drie decimalen nauwkeurig.

d Waarom kan dit nooit meer dan een benadering van de werkelijke lengte zijn?

★ **Opgave 2.3**

Schat bij de volgende wortels eerst tussen welke gehele getallen ze liggen. Bereken ze dan met je rekenmachine en rond af op vier decimalen nauwkeurig:

a $\sqrt{5}$

b $\sqrt{96}$

c $\sqrt{0{,}0014}$

d $\sqrt{1700}$

e $\sqrt{15\frac{1}{5}}$

f $12\cdot\sqrt{5}$

★ ★ **Opgave 2.4**

De oppervlakte van een vierkant is A cm^2. De omtrek van dit vierkant is P cm.

a Neem $A=25$ en bereken P.

b Neem $A=24$ en bereken P.

c Stel een formule op voor het verband tussen A en P van de vorm $P=\ldots$

d Stel een formule op voor het verband tussen A en P van de vorm $A=\ldots$

e Bepaal de waarde(n) waarvoor $A=P$.

★ ★ **Opgave 2.5**

Bereken zonder rekenmachine:

a $\sqrt{13^2}$

b $\sqrt{13}^2$

c $\sqrt{7}^2-2\cdot\sqrt{49}$

d $\sqrt{256}-\sqrt{15}^2$

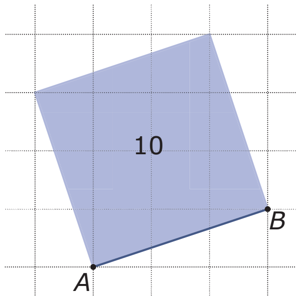
Toepassen

Bekijk de applet: Lengte van een lijnstuk berekenen.

Op een lijnstuk kun je altijd een vierkant maken. Als je dan de oppervlakte van dit vierkant exact kunt bepalen, kun je door worteltrekken ook de lengte van het lijnstuk (de zijde van het vierkant) vaststellen.

Omdat op lijnstuk AB een vierkant van 10 eenheden past, geldt: $AB = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.

Van lijnstukken tussen roosterpunten kun je zo dus altijd de lengte berekenen.



Figuur 2.2

★ ★ **Opgave 2.6: Wortels en vierkanten**

Je ziet in **Toepassen** hoe je de lengte van een lijnstuk tussen twee roosterpunten bepaalt door er een vierkant op te tekenen.

a Ga na dat het vierkant op AB inderdaad een oppervlakte van 10 heeft.

b Bereken op deze manier de lengte van AB als punt B 4 eenheden rechts en 2 eenheden boven punt A ligt.

c Oefen dit met een medeleerling, het zal je later nog van pas komen.

★ ★ ★ **Opgave 2.7: Rare rechthoek?**

Een rechthoek heeft een lengte van $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ en een breedte van $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

Laat zien, dat de oppervlakte van deze rechthoek 2 is.

Practicum

Veel rekenwerk doe je met een **rekenmachine**, ook met kwadraten (machten) en wortels rekenen. Voor de volgende twee types rekenmachine zijn er practica beschikbaar:

- **Machten en wortels, wetenschappelijke notatie TI-30XB Multiview**
- **Machten en wortels, wetenschappelijke notatie Casio fx-82NL**

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het worteltrekken zonder rekenmachine**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Antwoorden

2.1 a $\sqrt{121} = 11$

b $\sqrt{196} = 14$

c $\sqrt{4{,}41} = 2{,}1$

d $\sqrt{0{,}0025} = 0{,}05$

e $\sqrt{73 - 9} = 8$

f $\sqrt{1\frac{15}{49}} = 1\frac{1}{7}$

g $\sqrt{625} - \sqrt{361} = 25 - 19 = 6$

h $-\sqrt{0{,}36} = -0{,}6$

2.2 a $\sqrt{20}$ cm.

b Tussen 4 en 5.

c Ongeveer 4,472 cm.

d $4{,}472^2 \neq 20$

2.3 a Schatting: $2 < \sqrt{5} < 3$.
Benadering: $\sqrt{5} \approx 2{,}2361$.

b Schatting: $9 < \sqrt{96} < 10$.
Benadering: $\sqrt{96} \approx 9{,}7980$.

c Schatting: $0 < \sqrt{0{,}0014} < 1$.
Benadering: $\sqrt{0{,}0014} \approx 0{,}0374$.

d Schatting: $40 < \sqrt{1700} < 50$ (het is nu niet nodig om te schatten tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen deze wortel ligt, het gaat vooral om de orde van grootte).
Benadering: $\sqrt{1700} \approx 41{,}2311$.

e Schatting: $3 < \sqrt{15\frac{1}{5}} < 4$.
Benadering: $\sqrt{15\frac{1}{5}} \approx 3{,}8987$.

f Schatting: $24 < 12 \cdot \sqrt{5} < 36$.
Benadering: $12 \cdot \sqrt{5} \approx 26{,}8328$.

2.4 a $P = 4 \cdot 5 = 20$.

b $P = 4 \cdot \sqrt{24}$.

c $P = 4 \cdot \sqrt{A}$

d $A = \left(\frac{1}{4} \cdot P\right)^2$

e $A = P = 0$ en $A = P = 16$.

2.5 a $\sqrt{13^2} = 13$

b $\sqrt{13}^2 = 13$

c $\sqrt{7}^2 - 2 \cdot \sqrt{49} = -7$

d $\sqrt{256} - \sqrt{15}^2 = 1$

2.6 a Verdeel de figuur in vierkanten en halve rechthoeken. Teken hem eventueel eerst zelf na.

b $AB = \sqrt{20} \approx 4{,}47$

c Doen.

2.7 Teken een groen vierkant met oppervlakte 5 een rood vierkant met oppervlakte 3. Het deel van het groene vierkant dat nog zichtbaar is heeft een oppervlakte van 2. Maak hiervan de gewenste rechthoek.

1.3 Wortelrekenen

Inleiding

Worteltrekken komt meestal niet op exacte getallen uit, je kunt wortels vaak alleen benaderen. Soms laat je dan de wortelvormen gewoon staan en ga je ermee rekenen. Maar kun je wortels zomaar optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen?
Ontdek het zelf...

Je leert in dit onderwerp

- rekenen met wortelvormen.

Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- worteltrekken en de betekenis van de wortel uit een getal.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het leren rekenen met wortels. Voor optellen en aftrekken moeten de wortels ‘gelijksoortig’ zijn. Ook de woorden ‘termen’ en ‘factoren’ komen weer voorbij.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 3.1**

Maak de volgende berekeningen zonder de rekenmachine te gebruiken. Laat wortels die niet op een geheel getal uitkomen in het antwoord staan.

a $\sqrt{7} + \sqrt{7}$

b $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

c $5\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$

d $3\sqrt{5} - \sqrt{5}$

e $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

f $3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{7}$

g $\sqrt{125} \Big/ \sqrt{5}$

h $5\sqrt{10} \Big/ \sqrt{2}$

★ **Opgave 3.2**

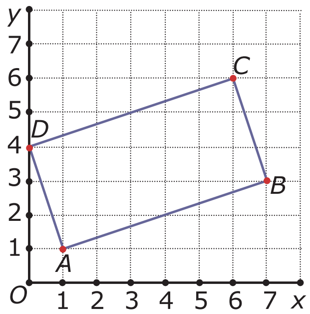
Hier zie je in een assenstelsel de punten $A(1,1)$, $B(7,3)$, $C(6,6)$ en $D(0,4)$ en rechthoek $ABCD$.

a Bereken de oppervlakte van rechthoek $ABCD$.

b Verdeel de rechthoek in twee vierkanten en leg uit hoe je daarmee de lengtes van de zijden kunt berekenen. Bereken de lengtes van AB en AD.

c Laat zien hoe je met behulp van deze twee zijden ook de oppervlakte van de rechthoek kunt berekenen.

d Bereken ook de exacte omtrek van de rechthoek.



Figuur 3.1

★ **Opgave 3.3**

Geef van de volgende berekeningen aan of ze waar of niet waar zijn.

a $\sqrt{7} + \sqrt{8} = \sqrt{15}$

b $\sqrt{9} + \sqrt{49} = \sqrt{100}$

c $\sqrt{7} + 6\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$

d $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{6}$

★ **Opgave 3.4**

Uit een aantal van de volgende berekeningen komt een geheel getal. Bij de andere laat je de wortel in het antwoord staan.

a $\sqrt{2} \cdot \sqrt{12{,}5}$

b $3\sqrt{3} \cdot \sqrt{10}$

c $2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6}$

d $\sqrt{50} \Big/ \sqrt{5}$

e $\dfrac{2\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

f $\dfrac{6\sqrt{12{,}5}}{3\sqrt{2}}$

★ **Opgave 3.5**

Je ziet hier twee vierkanten in elkaar.

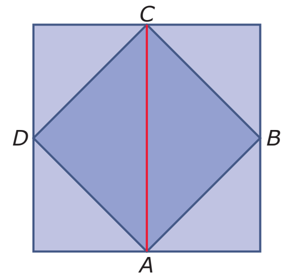
a Bereken de lengte van AB en diagonaal AC als de oppervlakte van vierkant $ABCD$ 6 is.

b Bereken de lengte van AB en diagonaal AC als de oppervlakte van vierkant $ABCD$ 10 is.

c Bereken de lengte van de diagonaal van een vierkant met oppervlakte 8.

d Bereken de lengte van de diagonaal van een vierkant met oppervlakte a.

e Bereken de lengte van de diagonaal van een vierkant met zijde z.

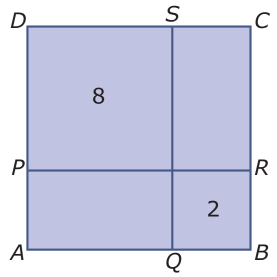


Figuur 3.2

★ ★ **Opgave 3.6**

Een vierkant $ABCD$ is verdeeld in twee kleinere vierkanten en twee rechthoeken. De oppervlaktes van beide kleinere vierkanten zijn gegeven, zie figuur.

Bereken de oppervlakte van $ABCD$.



Figuur 3.3

Toepassen

Het benaderen van wortels is voor ons heden ten dage een fluitje van een cent: je rekenmachine doet dat zo maar in een stuk of negen decimalen nauwkeurig. Geweldig natuurlijk, maar... elektronische rekenmachines bestaan nauwelijks 70 jaar.
Tot die tijd werd er vaak met tabellen voor wortels gewerkt.
En in die tabellen kwamen natuurlijk niet van alle getallen de wortels voor, vaak alleen maar wortels van 1 t/m 100...
Er bestaan dan nog een paar technieken om wortels die niet in de tabel voorkwamen te vinden:

- Benaderen met behulp van inklemmen, een ‘hoger/lager spelletje’.
- Het rekenen met wortels op een handige manier toepassen:
  $\sqrt{500} = \sqrt{100 \cdot 5} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{5} = 10 \cdot \sqrt{5}$
  $\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{6} = 5 \cdot \sqrt{6}$
- En er bestaat een speciale techniek om wortels uit willekeurige (positieve) decimalen getallen te vinden. Die is echter gebaseerd op verdergaande kennis van wiskunde...

★ ★ **Opgave 3.7: Wortels herleiden**

Je ziet hierboven hoe je wortels van getallen die een kwadraat bevatten kunt vereenvoudigen.

a Laat zien dat $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b Vereenvoudig op dezelfde manier $\sqrt{45}$.

c Herleid op dezelfde manier: $\sqrt{18}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{40}$ en $\sqrt{75}$

★ ★ ★ **Opgave 3.8: Kettingbreuk**

Een leuke manier om wortels te benaderen is met behulp van een kettingbreuk. Zo is:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}.$$

Hiermee kun je $\sqrt{2}$ in zoveel decimalen als je maar wilt benaderen. Bedenk hoe je dat doet en benader deze wortel in vijf decimalen nauwkeurig. Kun je de nauwkeurigheid van je rekenmachine halen?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **rekenen met wortels zonder rekenmachine**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Antwoorden

3.1 a $\sqrt{7}+\sqrt{7}=2\sqrt{7}$

b $3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

c $5\sqrt{7}-2\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

d $3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

e $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$

f $3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{7}=6\sqrt{14}$

g $\sqrt{125}\Big/\sqrt{5}=\sqrt{25}=5$

h $5\sqrt{10}\Big/\sqrt{2}=5\sqrt{5}$

3.2 a 20 roostereenheden.

b $AD=\sqrt{10}$ en $AB=2\sqrt{10}$.

c 20.

d $6\sqrt{10}$

3.3 a Niet waar.

b Waar.

c Waar.

d Niet waar.

3.4 a 5

b $3\sqrt{30}$

c 36

d $\sqrt{10}$

e 12

f 5

3.5 a $AB=\sqrt{6}$ en $AC=\sqrt{12}$.

b $AB=\sqrt{10}$ en $AC=\sqrt{20}$.

c 4

d $\sqrt{2a}$

e $z\sqrt{2}$

3.6 18

3.7 a $\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

b Je vindt $3\sqrt{5}$.

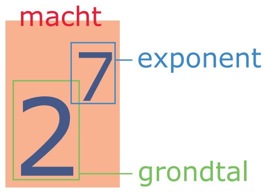
c $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, $\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ en $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

3.8 Controleer je antwoorden met je rekenmachine of zoek meer decimalen van $\sqrt{2}$ op internet.

1.4 Machten

Inleiding

Bij kwadrateren wordt een getal met zichzelf vermenigvuldigd.
Je kunt een getal ook vaker met zichzelf vermenigvuldigen. Dan spreek je van machtsverheffen.
En zoals je bij kwadrateren kunt terugrekenen door worteltrekken, kun je bij machten terugrekenen door hogere machtswortels te gebruiken.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip macht en machten uitrekenen;
- het begrip derdemachtswortel en derdemachtswortels uitrekenen;

Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- kwadrateren, worteltrekken en rekenen met kwadraten en wortelvormen.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het leren rekenen met machten en terugrekenen vanuit machten, zoals derdemachtswortels gebruiken. Bij machten horen de uitdrukkingen ‘grondtal’ en ‘exponenent’ en er zijn bepaalde rekenregels.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

Opgave 4.1

Bereken:

a 4^5

b $3^4 \cdot 2^3$

c $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

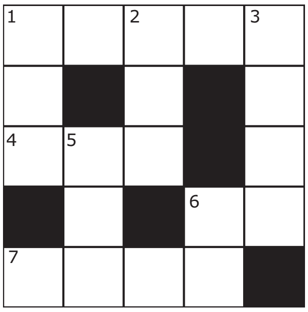
d $\left(1\frac{3}{5}\right)^3$

e $(-2)^6$

f $-2^4 \cdot 3^3$

Opgave 4.2

Je ziet hier een kruisgetallenpuzzel. Hij staat ook op het **werkblad**.
Vul de puzzel in.



Horizontaal		Verticaal	
1	11^4	1	5^3
4	24^2	2	26^2
6	2^6	3	2^{10}
7	92^2	5	$4^2 \cdot 7^2$
		6	4^3

Figuur 4.2

Opgave 4.3

Schrijf de volgende machten eenvoudiger. Je hoeft ze niet te berekenen!

a $2^{16} \cdot \left(2^{10}\right)^3$

b $\frac{4 \cdot 2^{26}}{2^{20}}$

c $\frac{2^{14} \cdot 2^{26}}{\left(2^{20}\right)^2}$

Opgave 4.4

Bereken:

a $\sqrt[3]{1000}$

b $\sqrt[3]{1000000}$

c $\sqrt[3]{10^6}$

d $\sqrt[3]{0{,}001}$

e $\sqrt[3]{0{,}000001}$

f $\sqrt[3]{0{,}125}$

Opgave 4.5

Je hebt een kubus met een inhoud van 20 liter.

a Hoeveel bedraagt de lengte van elke ribbe van deze kubus in mm nauwkeurig?

b Bereken de totale oppervlakte van deze kubus in mm^2 nauwkeurig.

★ **Opgave 4.6**

Je kunt van een getal eerst de derde macht uitrekenen en dan op de uitkomst de derde machtswortel toepassen. En ook de omgekeerde volgorde is mogelijk.

a Neem het getal 6 en bereken $\sqrt[3]{6^3}$. Wat doe je eerst, de derde macht of de derde machtswortel?

b Bereken ook $\sqrt[3]{6}^3$.

c Doe hetzelfde als bij a en b maar nu met het getal 17.

Kennelijk heffen de bewerkingen derde macht en derde machtswortel elkaar op.

d Onderzoek of dit ook voor negatieve getallen geldt.

Toepassen

Als je een blaadje papier neemt (A4-formaat) dan kun je dit dubbel vouwen. Het dubbelgevouwen blaadje vouw je nog eens dubbel. Je hebt dan vier lagen papier op elkaar, en weer kun je het resultaat dubbelvouwen om acht lagen papier te krijgen. Enzovoorts...
Hoe vaak kun je zo blijven dubbelvouwen?

Stel je zet € 100,00 op de bank en je krijgt 4% rente per jaar als je er niet aan komt.
Een jaar later heb je dan € 104,00.
Weer een jaar later: € 108,16.
Nog een jaar later: € 112,49.
Dat noem je ‘rente op rente’ krijgen. Hoeveel heb je na 10 jaar?

★ ★ **Opgave 4.7: Papier vouwen**

In **Toepassen** wordt beschreven hoe je door een blaadje papier dubbel te vouwen steeds meer lagen krijgt.

a Laat zien dat je na 8 keer vouwen 256 lagen papier hebt.

b Hoeveel lagen heb je na 10 keer vouwen?

Ga er van uit dat je stuk papier groot genoeg is om te blijven vouwen en dat het papier 0,1 mm dik is.

c Hoeveel keer moet je vouwen om een laag papier van 10 cm dik te krijgen?

d En na hoeveel keer vouwen heb je een laag papier van 10 m dik?

★ ★ **Opgave 4.8: Rente op rente**

In **Toepassen** wordt beschreven hoe je rekent met rente op rente.

a Reken de bedragen na 1 jaar, na 2 jaar en na 3 jaar zelf na. Hoe reken je?

b Hoeveel heb je na 10 jaar?

c Na hoeveel jaar is het beginbedrag verdubbeld?

Practicum

Veel rekenwerk doe je met een **rekenmachine**, ook met machten en hogere machtswortels rekenen. Voor de volgende twee types rekenmachine zijn er practica beschikbaar:

- **Machten en wortels, wetenschappelijke notatie TI-30XB Multiview**
- **Machten en wortels, wetenschappelijke notatie Casio fx-82NL**

Met *Algebra*KIT kun je oefenen met **machten uitrekenen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Antwoorden

4.1 a 1024

b 648

c $\frac{16}{81}$

d $4\frac{12}{125}$

e 64

f -432

4.2 Zie de figuur.

(1) 1	4	(2) 6	4	(3) 1
2	■	7	■	0
(4) 5	(5) 7	6	■	2
■	8	■	(6) 6	4
(7) 8	4	6	4	■

4.3 a 2^{46}

b 2^{8}

c 1

4.4 a $\sqrt[3]{1000} = 10$

b $\sqrt[3]{1000000} = 100$

c $\sqrt[3]{10^6} = 100$

d $\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$

e $\sqrt[3]{0{,}000001} = 0{,}01$

f $\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$

4.5 a Ongeveer 271 mm.

b Ongeveer 442004 mm^2.

4.6 a Je doet eerst de derde macht en dan de derde machtswortel. Uitkomst: 6.

b De uitkomst is ook nu 6.

c In beide gevallen vind je 17 als uitkomst.

d Ja, dat geldt ook voor negatieve getallen. De derde machtswortel uit een negatief getal wordt gewoon weer een negatief getal.

4.7 a Het aantal lagen verdubbelt steeds en $2^8 = 256$.

b $2^{10} = 1024$

c 10 keer vouwen is wel genoeg.

d 17 keer vouwen.

4.8 a Steeds met 1,04 vermenigvuldigen.

b ≈ 148,02 euro.

c Na 18 jaar.

1.5 Meneer Van Dalen

Inleiding

Je weet al dat je bij het rekenen een bepaalde volgorde in acht moet nemen. Maar nu komen daar machten en wortels nog bij. En die gaan voor...

Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de juiste rekenvolgorde.

Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- kwadrateren, worteltrekken en rekenen met kwadraten en wortelvormen;
- het begrip macht en machten uitrekenen;
- het begrip derdemachtswortel en derdemachtswortels uitrekenen.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het leren rekenen in de juiste rekenvolgorde en het leren omgaan met uitzonderingen op die rekenvolgorde.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 5.1**

Bereken zonder de rekenmachine te gebruiken:

a $3^5/3^2 + 3^4$

b $3^4 \cdot 2^3$

c $\left(\sqrt{196} - 3^2\right)^3$

d $\left(2 \cdot \sqrt[3]{15}\right)^3$

e $6 \cdot 2^3/\left(4^3 - 7 \cdot 2^3\right)$

f $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{9}} \cdot 1{,}5^3$

★ **Opgave 5.2**

Bereken eerst zonder de rekenmachine te gebruiken en controleer daarna je berekening door hem in zijn geheel in de rekenmachine in te voeren.

a $\sqrt{2 \cdot 70 + 4}$

b $\frac{12 \cdot 3}{2^3 - 4}$

c $\frac{2^{4+\sqrt{16}}}{2^5}$

d $\sqrt[3]{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3}$

★ **Opgave 5.3**

Onderzoek of de volgende berekeningen correct zijn. Licht steeds je antwoord toe.

a $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$

b $2^6/2^3 = 2^{6/3} = 2^2$

c $\left(2^2\right)^3 = 2^5$

d $2^0 = 1$

★ ★ **Opgave 5.4**

Bij het rekenen met wortels kun je door slim herleiden soms wortels optellen die op de eerste blik niet gelijksoortig zijn.

a Laat zien, dat $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ en dat $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b Bereken nu de exacte uitkomst van $\left(\sqrt{18} + \sqrt{8}\right)^2$. Geeft je rekenmachine dezelfde uitkomst als je de berekening in één keer invoert?

c Bereken $\left(\sqrt{75} - \sqrt{27}\right)^2$ door beide wortels te herleiden. Controleer je antwoord met de rekenmachine.

Toepassen

Volgens een legende is Sissa Ben Dahir is de uitvinder van het schaakspel. De Indiase koning Shirham vroeg hem wat hij als beloning voor die uitvinding wilde hebben. Sissa Ben Dahir zei: “Geef me één graankorrel om op het eerste veld van het bord te leggen, 2 graankorrels voor op het tweede veld, 4 voor op het derde veld, 8 op het vierde en laat me zo verder gaande alle 64 velden bedekken.” De koning lachte en antwoordde: “Is dat echt alles dat je wilt hebben?” en hij gaf opdracht het graan uit te betalen.
Toen bleek dat de koning te weinig graan had om Sissa uit te betalen, liet hij Sissa Ben Dahir in de gevangenis opsluiten.

Figuur 5.2

★ ★ ★ **Opgave 5.5: Graankorrels op een schaakbord**

Lees hierboven de legende van de uitvinding van het schaakspel.

Om een idee te krijgen van het aantal graankorrels dat koning Shirham moest uitbetalen kun je eens kijken naar machten van 2.

a Waarom moet je naar machten van 2 kijken?

b Bereken:

- 2^0
- $2^0 + 2^1$
- $2^0 + 2^1 + 2^2$
- $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$
- $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$
- $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$
- $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$

c Vergelijk alle uitkomsten bij b. Wat valt je op? (Tel er eventueel telkens 1 bij op.)

d Hoeveel graankorrels wilde Sissa van de koning hebben? Schrijf je antwoord met een macht van 2.

e Nu je weet dat Sissa meer dan 18.000.000.000.000.000.000 (18 triljoen) graankorrels zou moeten krijgen, kun je misschien wel schatten hoeveel m^3 graan dat zou moeten zijn. Stel dat je dit graan wilt opslaan in een grote schuur met een vloeroppervlakte van 1000 m^2. Hoe hoog moet die schuur dan worden?

Practicum

Veel rekenwerk doe je met een **rekenmachine** en de machine hanteert de juiste rekenvolgorde. Voor de volgende twee types rekenmachine zijn er practica beschikbaar:

- **Machten en wortels, wetenschappelijke notatie TI-30XB Multiview**
- **Machten en wortels, wetenschappelijke notatie Casio fx-82NL**

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met de **rekenvolgorde**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Antwoorden

5.1 a $3^5 / 3^2 + 3^4 = 27 + 81 = 108$

b $3^4 \cdot 2^3 = 81 + 8 = 648$

c $\left(\sqrt{196} - 3^2\right)^3 = (14, - ,9)^3 = 5^3 = 125$

d $\left(2 \cdot \sqrt[3]{15}\right)^3 = 8 \cdot 15 = 120$

e $6 \cdot 2^3 / \left(4^3 - 7 \cdot 2^3\right) = 48 / (64 - 56) = 6$

f $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{9}} \cdot 1{,}5^3 = \frac{8}{27} \cdot 3{,}375 = 1$

5.2 a $\sqrt{2 \cdot 70 + 4} = \sqrt{144} = 12$

b $\frac{12 \cdot 3}{2^3 - 4} = \frac{36}{4} = 9$

c $\frac{2^{4+\sqrt{16}}}{2^5} = \frac{2^8}{2^5} = 8$

d $\sqrt[3]{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{3} - \frac{1}{27}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$

5.3 a Correct.

b Niet correct.

c Niet correct.

d Correct.

5.4 a $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ en $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

b 50.

c 12.

5.5 a De aantallen op elk vakje zijn de opvolgende machten van 2.

b 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127

c Alle uitkomsten zijn steeds 1 minder dan de volgende macht van 2.

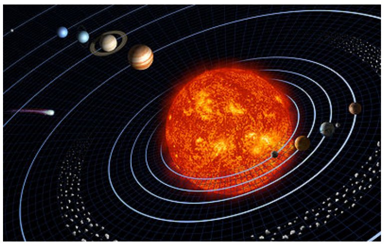
d $2^{64} - 1$ is meer dan 18 triljoen graankorrels.

e Ongeveer 18.000 km!

1.6 Wetenschappelijke notatie

Inleiding

Soms heb je met hele grote getallen te maken. Zoals bij berekeningen van afstanden in het zonnestelsel of nog verder in de ruimte. De getallen worden dan vaak erg onoverzichtelijk met (vaak onnodig) veel cijfers. Dan gebruik je de wetenschappelijke notatie met machten van 10.



Figuur 6.1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de wetenschappelijke notatie.

Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- kwadrateren, worteltrekken en rekenen met kwadraten en wortelvormen;
- machten en wortels uitrekenen en de juiste rekenvolgorde hanteren.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het leren werken met de wetenschappelijke notatie voor hele grote of hele kleine getallen waar veel nullen in voorkomen.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 6.1**

Schrijf als macht van 10:

a 1000

b 100000000

c 10 miljard

d 0,001

e $\frac{1}{100000}$

f 10 miljardste

★ **Opgave 6.2**

Schrijf in de wetenschappelijke notatie:

a 123 miljoen

b 614000000000

c 0,00001496

d 0,00000000000042

★ **Opgave 6.3**

Gebruik bij de volgende berekeningen de wetenschappelijke notatie. Geef je antwoord ook in die vorm.

a In Nederland wonen ongeveer 17,5 miljoen mensen. Het gemiddeld inkomen van een Nederlander is ongeveer € 18.000. Bereken het nationaal inkomen (het inkomen van alle Nederlanders samen).

b In Nederland zijn er jaarlijks ongeveer 1,5 miljoen middelbare scholieren. Zo'n scholier kost de overheid gemiddeld € 4500. Hoeveel geeft de overheid jaarlijks ongeveer uit aan middelbaar onderwijs?

★ **Opgave 6.4**

Bacteriën zijn micro-organismen. Een bepaald soort bacterie heeft een gewicht van $2{,}4 \cdot 10^{-8}$ kg.

a Op een plant bevinden zich 3,2 miljoen van deze bacteriën. Hoeveel wegen deze bacteriën samen? Geef je antwoord met drie significante cijfers.

b Hoeveel van deze bacteriën wegen samen 1 kg? Geef je antwoord met drie significante cijfers.

★ ★ **Opgave 6.5**

Uit Wikipedia (13-11-2009):

> Een amoebe (spreek uit als ‘ameube’) is een eencellig organisme dat bestaat uit protoplasma met één of meerdere kernen. Het endoplasma (binnenste laagje) is troebel en korrelig terwijl het ectoplasma (buitenste laagje) meestal helder is. Het organisme behoort tot de wortelpotigen en varieert afhankelijk van de soort tussen de 30 en 800 µm.

1 µm is $\frac{1}{1000}$ mm. Hoeveel meter is een amoebe van 800 µm? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie.

Toepassen

In deze video wordt je de wereld getoond als je erop inzoomt en uitzoomt in stappen van 10. Hij is Engelstalig.

Bekijk de videoclip: Machten van 10.

★ ★ Opgave 6.6: Lichtjaren

Een lichtjaar is de afstand die het licht in een jaar aflegt. De lichtsnelheid is ongeveer $3 \cdot 10^8$ m/s. Een astronomische eenheid is de gemiddelde afstand van de Aarde tot de Zon: 1 AE = 149,6 miljoen kilometer. Vooral in de sterrenkunde zijn lichtjaar en AE nuttige maten.

De **dubbelster Alpha Centauri** vormt samen met de veel zwakkere Proxima Centauri een drievoudig systeem, dat zich van alle sterren het dichtst bij ons zonnestelsel bevindt. De afstand tot de Zon bedraagt 4,36 lichtjaar.

a Hoeveel km is 1 lichtjaar? En hoeveel AE?

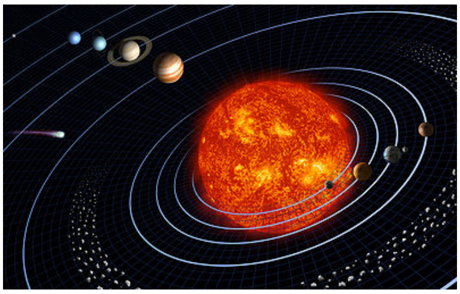
b Hoeveel km is Alpha Centauri van onze Zon verwijderd? En van de Aarde?

c Stel je voor dat je in een ruimteschip met 20000 km/uur van de Aarde rechtstreeks naar de Zon zou kunnen vliegen. Hoe lang doe je daar dan over? En hoe lang doe je over de reis naar Alpha Centauri?

★ ★ ★ Opgave 6.7: Schaalmodel

Ons **Zonnestelsel** bestaat uit een ster (de Zon) en acht planeten. Je wilt een schaalmodel maken van het zonnestelsel dat nog in een schoollokaal past. Zoek de afmetingen van deze planeten en hun onderlinge afstanden op.

Bereken hoe groot je de afmetingen van de planeten moet maken en hoe groot je de (bijna) cirkelvormige banen om de Zon moet maken. Geef een overzicht van alle afmetingen.



Figuur 6.2

Practicum

Veel rekenwerk doe je met een **rekenmachine**, ook werken met de wetenschappelijke notatie. Voor de volgende twee types rekenmachine zijn er practica beschikbaar:

- **Machten en wortels, wetenschappelijke notatie TI-30XB Multiview**
- **Machten en wortels, wetenschappelijke notatie Casio fx-82NL**

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met de **wetenschappelijke notatie**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Antwoorden

6.1 a 10^3

b 10^8

c 10^{10}

d 10^{-3}

e 10^{-5}

f 10^{-10}

6.2 a $1,23 \cdot 10^8$

b $6,14 \cdot 10^{11}$

c $1,496 \cdot 10^{-5}$

d $4,2 \cdot 10^{-13}$

6.3 a Ongeveer $3,15 * 10^1 1$ euro.

b Ongeveer $6,75 \cdot 10^9$ euro.

6.4 a Ongeveer 76,8 gram.

b Ongeveer $4,17 \cdot 10^7$.

6.5 Zo'n amoebe is $8 \cdot 10^{-4}$ m.

6.6 a Ongeveer $9,47 \cdot 10^{12}$ km. Dat is ongeveer 63300 AE.

b Ongeveer $4,13 \cdot 10^{13}$ km van de Zon en dus ook tot de Aarde.

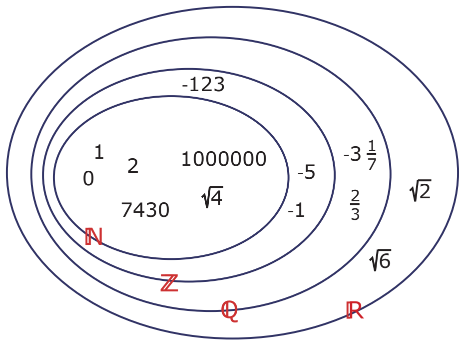
c Ongeveer 236.000 jaar.

6.7 Eigen antwoord, afhankelijk van de keuzes die je maakt.

1.7 Soorten getallen

Inleiding

Je hebt inmiddels met allerlei soorten getallen kennisgemaakt: decimale getallen, gehele getallen, breuken, negatieve getallen, machten, wortels en misschien al het getal π. Hoog tijd om dit even overzichtelijk op een rijtje te zetten.



Figuur 7.1

Je leert in dit onderwerp

- allerlei soorten getallen herkennen en er overzicht over krijgen.

Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- kwadrateren, worteltrekken en rekenen met kwadraten en wortelvormen;
- machten en wortels uitrekenen en de juiste rekenvolgorde hanteren;
- werken met de wetenschappelijke methode.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het herkennen van de verschillende soorten getallen. Ook krijg je te zien hoe je breuken altijd als exacte decimale getallen kunt schrijven, maar wortels vaak alleen kunt benaderen.
Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

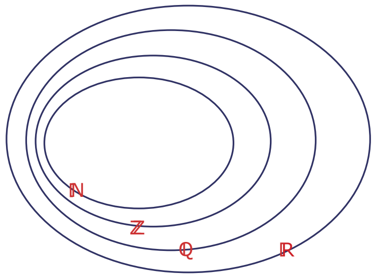
Verwerken

★ **Opgave 7.1**

Gegeven zijn de volgende getallen: $-1{,}5$, $\sqrt{16}$, $-\sqrt{5}$, 0, $\frac{7}{3}$, $\sqrt{-4}$, $1{,}\underline{15}$ en $-\frac{12}{4}$.

a Maak een overzicht van de verschillende soorten getallen zoals dat hiernaast en plaats de gegeven getallen er in.

b Zet de gegeven getallen op de juiste plaats op de getallenlijn.



Figuur 7.2

★ **Opgave 7.2**

Schrijf $\frac{7}{31}$ als exact decimaal getal.

★ **Opgave 7.3**

Schrijf $5{,}1\underline{63}$ als breuk.

★ ★ **Opgave 7.4**

Als je twee natuurlijke getallen optelt, dan krijg je altijd weer een natuurlijk getal. Je zegt daarom wel dat de natuurlijke getallen gesloten zijn voor optellen.

a Zijn de natuurlijke getallen ook gesloten voor aftrekken?

b Zijn de gehele getallen gesloten voor aftrekken?

c Zijn de gehele getallen gesloten voor vermenigvuldigen? En voor delen?

d Welke soort getallen is gesloten voor worteltrekken?

Toepassen

Er zijn nog veel **meer soorten getallen**. Bijvoorbeeld:

- De even getallen zijn alle gehele getallen die een veelvoud zijn van 2.
- De oneven getallen zijn alle gehele getallen die geen veelvoud zijn van 2.
- De drievouden zijn alle gehele getallen die een veelvoud zijn van 3.
- De priemgetallen zijn alle natuurlijke getallen vanaf 2 die niet deelbaar zijn door andere getallen dan 1 en zichzelf.

★ ★ **Opgave 7.5: Veelvouden**

Je ziet hierboven dat er allerlei soorten getallen zijn: de veelvouden 2, 3, ...

a Hoe noem je de veelvouden van 2?

b Zet de natuurlijke getallen vanaf 0 tot en met 99 op een rij en streep alle veelvouden van 2 weg maar 2 zelf niet. Welke getallen houd je over?

c Streep nu de veelvouden van 3 ook weg maar 3 zelf niet. Hoeveel getallen houd je nu over?

d Waarom is het weinig werk om nu de veelvouden van 4 weg te strepen?

e Streep nu de veelvouden van 5 (behalve 5) weg. Daarna die van 7 (behalve 7) en zo steeds verder met het eerstvolgende getal dat nog niet is weggestreept. Wat houd je over?

f Elk natuurlijk getal is een priemgetal of een veelvoud van een priemgetal. Klopt die uitspraak?

★ ★ ★

Opgave 7.6: Perfecte getallen

Het getal 6 heeft behalve zichzelf nog drie andere delers, namelijk 1, 2 en 3. En als je die delers optelt, dan krijg je precies 6. Een getal met de eigenschap dat het gelijk is aan de som van zijn delers (behalve het getal zelf) heet een 'perfect getal'. Perfecte getallen zijn behoorlijk zeldzaam, tot nu toe zijn er slechts 44 gevonden.

a Laat zien dat 28 het volgende perfecte getal is.

Perfecte getallen zijn moeilijk te vinden. Lang hebben wiskundigen gedacht dat ze allemaal de vorm $2^n \cdot \left(2^{n+1} - 1\right)$ zouden hebben.

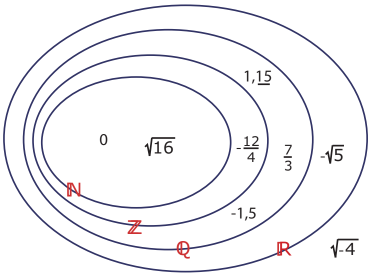
b Ga na, dat dit klopt voor $n = 1$ en voor $n = 2$.

c Voor $n = 3$ krijg je geen perfect getal. Ga dat na.

d Maar voor $n = 4$ klopt het weer wel. Welk perfecte getal krijg je dan? Kun je er nog meer vinden?

Antwoorden

7.1 a Zie de figuur.



b Ze moeten in de volgorde $-\frac{12}{4}$, $-\sqrt{5}$, -1,5, 0, $1{,}\underline{15}$, $\frac{7}{3}$ en tenslotte $\sqrt{16}$ op de juiste plek worden gezet.

7.2 $0{,}\underline{225806451612903}$

7.3 $\frac{284}{55}$

7.4 a Nee.

b Ja.

c Voor vermenigvuldigen wel, maar voor delen niet.

d De reële getallen.

7.5 a De even getallen.

b De oneven getallen onder de 100.

c Nog 34.

d Dat zijn even getallen en die zijn al doorgestreept.

e De priemgetallen onder de 100.

f Ja, behalve misschien 0 en 1.

7.6 a Controleer dat de delers samen 28 zijn.

b Dan krijg je 6 en 28.

c Je krijgt dan 120 en de som van de delers van dit getal is groter dan het getal zelf.

d Bij $n = 4$ hoort 496.

1.8 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- kwadraat — kwadrateren
- wortel — worteltrekken
- term en factor — gelijksoortige termen
- macht, grondtal en exponent — machtsverheffen — derdemachtswortel
- rekenvolgorde
- wetenschappelijke notatie
- soorten getallen — natuurlijke getallen — gehele getallen — rationale getallen — reële getallen

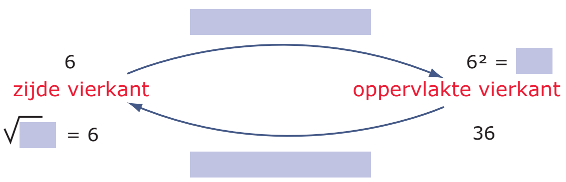
Activiteitenlijst

- kwadrateren en werken met kwadraten;
- terugrekenen vanuit kwadraten, worteltrekken;
- rekenen met wortels — gelijksoortige termen samennemen;
- werken met hogere machten dan bij kwadrateren — derdemachtswortels uitrekenen;
- de uitgebreide voorrangsregels voor het rekenen ook met machtsverheffen en worteltrekken;
- hele grote getallen en getallen dicht bij 0 schrijven en de wetenschappelijke notatie en omgekeerd;
- soorten getallen herkennen — breuken exact als decimaal getal schrijven;

Opgave 8.1

Kwadrateren en worteltrekken hangen met elkaar samen.

a Maak dat duidelijk in een begrippennet zoals dit. Vul het volledig in.



Figuur 8.1

b De meeste wortels kun je alleen benaderen. Geef een voorbeeld van zo'n wortel met de bijbehorende benadering in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 8.2

Met wortels kun je in veel gevallen rekenen zonder ze te benaderen.

a Maak met twee voorbeelden duidelijk hoe je gelijksoortige wortels kunt optellen en aftrekken.

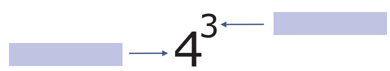
b Maak met twee voorbeelden duidelijk hoe je wortels kunt vermenigvuldigen en delen.

c Soms kun je wortels die op het eerste gezicht niet gelijksoortig zijn toch gelijksoortig maken en optellen of aftrekken. Geef een voorbeeld.

Opgave 8.3

Hier zie je een macht.

Zet de begrippen ‘grondtal’ en ‘exponent’ in de figuur.

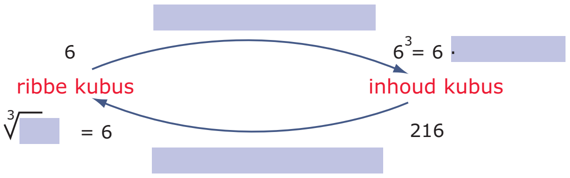


Figuur 8.2

Opgave 8.4

Derde machten en derdemachtswortels hangen met elkaar samen.

a Maak dat duidelijk in een begrippennet zoals dit. Vul het volledig in.



Figuur 8.3

b De meeste derdemachtswortels kun je alleen benaderen. Geef een voorbeeld van zo'n wortel met de bijbehorende benadering in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 8.5

Je hebt nu machtsverheffen en worteltrekken aan de mogelijke bewerkingen toegevoegd.

a Machten met hetzelfde grondtal kun je vermenigvuldigen en delen door de exponenten op te tellen respectievelijk af te trekken. Geef daarvan voorbeelden.

b Wat doe je met de exponenten bij machten van machten? Geef een voorbeeld.

c Geef een voorbeeld van rekenen met wortels en machten waaruit de voorrangsregels duidelijk worden.

Opgave 8.6

Schrijf de getallen 12000000000 en 0,0000000035 in de wetenschappelijke notatie.

Opgave 8.7

Welke soorten getallen zijn er? Maak een beknopt overzicht.

Testen

★ ### Opgave 8.8

Bereken (gebruik alleen waar nodig je rekenmachine om het antwoord in twee decimalen nauwkeurig te geven):

a 7^2

b $1{,}5^2$

c $\left(\frac{2}{5}\right)^2$

d $\sqrt{6{,}25}$

e $\sqrt{\frac{4}{81}}$

f $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

g $\sqrt{70}$

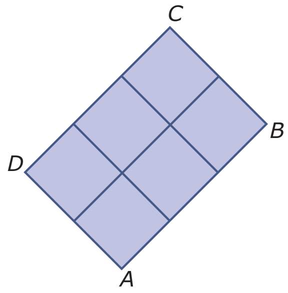
h $\left(3\sqrt{6}\right)^2$

★ **Opgave 8.9**

Rechthoek $ABCD$ is opgebouwd uit zes vierkanten die elk een oppervlakte van 2 hebben.

a Bereken de exacte omtrek van rechthoek $ABCD$.

b De oppervlakte van de rechthoek kun je op twee manieren berekenen, namelijk door de oppervlaktes van de afzonderlijke vierkanten op te tellen en door twee verschillende zijden te vermenigvuldigen. Laat zien dat je in beide gevallen dezelfde oppervlakte krijgt.



Figuur 8.4

Opgave 8.10

a Je hebt een kubus met ribben van 2,5 cm. Hoe groot is de inhoud van de kubus?

b Je hebt een kubus met een inhoud van 40 cm^3. Tussen welke twee opeenvolgende gehele getallen ligt de lengte van een ribbe?

c Je hebt een kubus met een inhoud van 40 cm^3. Geef de exacte lengte van elke ribbe van deze kubus en benader deze lengte in drie decimalen nauwkeurig.

★ **Opgave 8.11**

Maak de volgende berekeningen, geef steeds exacte antwoorden.

a 7^4

b 5^0

c $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

d $1{,}6^3$

e $\sqrt{2 \cdot 2^2 + 17}$

f $\left(\sqrt{75} + \sqrt{3}\right)^2$

g $\frac{6 \cdot 3^2}{6 - 3^2}$

h $5^{1+\sqrt{25}}/25 - 5$

★ **Opgave 8.12**

Schrijf als macht van 7:

a $7 \cdot 7^{140}$

b $7^{141}/7^{15}$

c $\left(7^{70}\right)^7$

d $7^5 + 42 \cdot 7^4$

e $\frac{3 \cdot 7^{115}}{1029}$

f $\frac{8 \cdot 7^{200}}{7^{201} + 7^{200}}$

★ **Opgave 8.13**

In Australië woonden in 2020 ongeveer 25,5 miljoen mensen. Het nationaal inkomen van Australië bedroeg in dat jaar ongeveer 1.223.887.000.000 USD (US-dollar).

a Schrijf beide getallen in de wetenschappelijke notatie.

b Bereken het gemiddeld jaarinkomen van een inwoner van Australië in 2020.

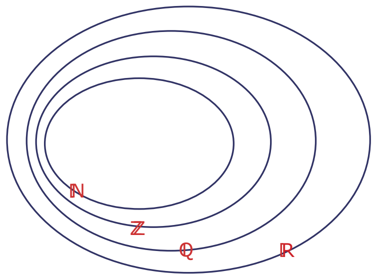
De landoppervlakte van Australië bedraagt ongeveer $7{,}7 \cdot 10^6$ km^2.

c Hoeveel grond heeft een Australiër gemiddeld tot zijn beschikking?

★ **Opgave 8.14**

Gegeven zijn de volgende getallen: 8, -0,35, $\sqrt{17}$, -$\sqrt{4}$, $1\frac{3}{7}$, $\sqrt{0{,}25}$, $6{,}1\underline{3}$ en $\frac{12}{3}$.

Maak een overzicht van de verschillende soorten getallen zoals dat hiernaast en plaats de gegeven getallen er in.



Figuur 8.5

Toepassen

★ ★ ★ **Opgave 8.15: Wortels benaderen**

Voor het benaderen van wortels bestaan verschillende technieken. Deze gaat vrij snel:

- Stap 1: Doe een gok.
- Stap 2: Deel het getal waarvan je de wortel wilt benaderen door je gok.
- Stap 3: Bereken het gemiddelde van het getal dat je bij stap 2 hebt gevonden en je gok.

Je hebt nu een nieuwe gok en daarmee herhaal je de stappen 2 en 3 tot je de gewenste benadering hebt gevonden.

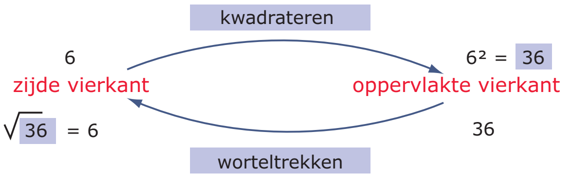
a Probeer deze techniek uit en laat zien dat $\sqrt{12} \approx 3{,}644$ in drie decimalen nauwkeurig.

b Benader op dezelfde manier $\sqrt{40}$ in drie decimalen nauwkeurig.

c Geef een verklaring voor deze methode met behulp de oppervlakte van rechthoeken.

Antwoorden

8.1 a Zie de figuur.



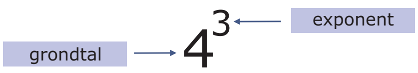
b $\sqrt{7} \approx 2{,}65$

8.2 a Bijvoorbeeld: $3\sqrt{7} + \sqrt{7} = 4\sqrt{7}$ en $3\sqrt{7} - \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$.

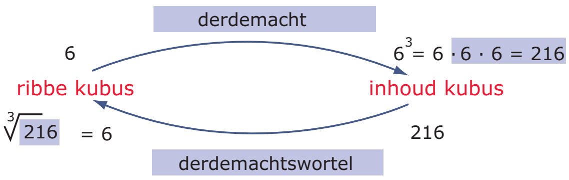
b Bijvoorbeeld: $3\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{14}$ en $\frac{6\sqrt{18}}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{9} = 9$.

c Bijvoorbeeld: $5\sqrt{8} + 3\sqrt{2} = 5 \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$.

8.3 Zie de figuur.



8.4 a Zie de figuur.



b $\sqrt[3]{7} \approx 1{,}91$

8.5 a Bijvoorbeeld: $5^6 \cdot 5^4 = 5^{6+4} = 5^{10}$ en $5^6 / 5^4 = 5^{6-4} = 5^2$.

b Bijvoorbeeld $\left(5^2\right)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$.

c Bijvoorbeeld $\sqrt{5 \cdot 3^2 + 8/2} = \sqrt{5 \cdot 9 + 8/2} = \sqrt{45 + 4} = \sqrt{49} = 7$. Merk op dat de lange streep aan het wortelteken de haakjes vervangt.

8.6 $12000000000 = 1{,}2 \cdot 10^{10}$ en $0{,}0000000035 = 3{,}5 \cdot 10^{-9}$

8.7 Er zijn:

- natuurlijke getallen 0, 1, 2, 3, enz.;
- gehele getallen 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, enz.;
- rationale getallen, alle getallen die je als breuk kunt schrijven;
- reële getallen, de rationale en de irrationale getallen (zoals $\sqrt{5}$) samen.

8.8 a 49

b 2,25

c $\frac{4}{25}$

d 2,5

e $\frac{2}{9}$

f $1\frac{1}{4}$

g $\approx 8{,}37$

h 54

8.9 a Die omtrek is $10\sqrt{2}$.

b In beide gevallen vind je 12 als oppervlakte.

8.10 a 15,625 cm^3.

b Tussen 3 en 4 cm.

c $\sqrt[3]{40} \approx 3{,}420$.

8.11 a 2401

b 1

c $\frac{16}{81}$

d 4,096

e 5

f 108

g -18

h 620

8.12 a 7^{141}

b 7^{126}

c 7^{490}

d 7^{6}

e 7^{112}

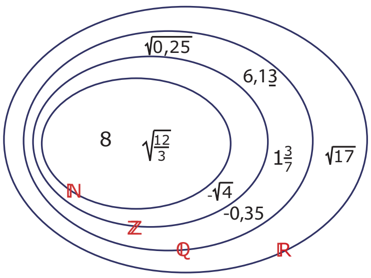
f 1

8.13 a Aantal inwoners: $2{,}55 \cdot 10^{7}$.
Nationaal inkomen: $1{,}224 \cdot 10^{12}$ USD.

b 48000 USD.

c Ongeveer 0,302 km^2.

8.14 Zie de figuur.



8.15 a Gok 2, dan levert stap 2 6 en stap 3 4 op. Herhaal hiermee de stappen 2 en 3: resulaat 3,5. Weer stap 2 en 3: resultaat 3,465. En nog een keer: resultaat 3,464.

b $\sqrt{40} \approx 6{,}325$, controleer je antwoord met je rekenmachine.

c Eigen antwoord.

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		★	★★	★★★
1	**Kwadraten**	★	★ ★	★ ★ ★
	Getallen kwadrateren (met zichzelf vermenigvuldigen) en de bijbehorende notatie.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐ 1.4 ☐ **T** 8.8 ☐	1.5 ☐ 1.6 ☐	1.7 ☐ **T** 8.15 ☐
2	**Wortels**	★	★ ★	★ ★ ★
	Terugrekenen vanuit een kwadraat (worteltrekken) en de bijbehorende notatie.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ **T** 8.8 ☐ **T** 8.9 ☐	2.4 ☐ 2.5 ☐ 2.6 ☐	2.7 ☐ **T** 8.15 ☐
3	**Wortelrekenen**	★	★ ★	★ ★ ★
	Rekenen met wortelvormen.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ 3.5 ☐ **T** 8.11 ☐	3.6 ☐ 3.7 ☐	3.8 ☐
4	**Machten**	★	★ ★	★ ★ ★
	Het begrip macht en machten uitrekenen.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ **T** 8.11 ☐ **T** 8.12 ☐	4.7 ☐ 4.8 ☐	
	Het begrip derdemachtswortel en derdemachtswortels uitrekenen.	4.4 ☐ 4.5 ☐ 4.6 ☐		
5	**Meneer Van Dalen**	★	★ ★	★ ★ ★
	Werken met de juiste rekenvolgorde.	5.1 ☐ 5.2 ☐ 5.3 ☐ **T** 8.11 ☐	5.4 ☐	5.5 ☐
6	**Wetenschappelijke notatie**	★	★ ★	★ ★ ★
	Werken met de wetenschappelijke notatie.	6.1 ☐ 6.2 ☐ 6.3 ☐ 6.4 ☐ **T** 8.13 ☐	6.5 ☐ 6.6 ☐	6.7 ☐
7	**Soorten getallen**	★	★ ★	★ ★ ★
	Allerlei soorten getallen herkennen en er overzicht over krijgen.	7.1 ☐ 7.2 ☐ 7.3 ☐ **T** 8.14 ☐	7.4 ☐ 7.5 ☐	7.6 ☐

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

www.math4all.nl

Werkblad bij Opgave 4.2 op pagina 28.