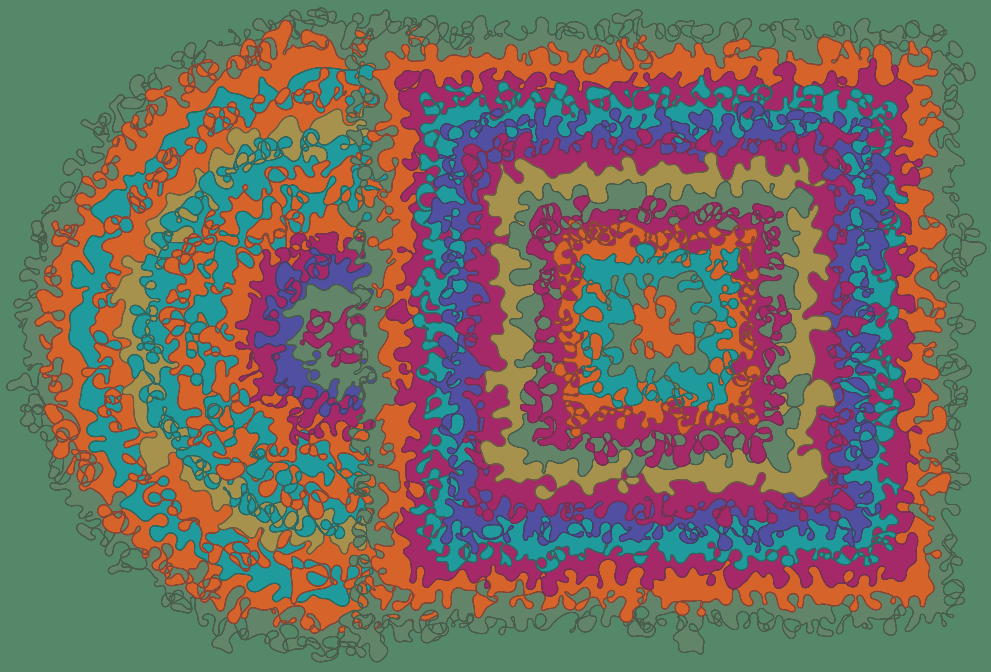
Wiskunde

2 HAVO / VWO

Katern 3 / Theorie

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

Begrippen

- exponentieel verband — groeifactor
- groeipercentage
- formule voor exponentiële groei
- formule voor exponentieel verval
- exponentiële vergelijking

Activiteiten

- groei met een vaste groeifactor leren kennen en die groeifactor bepalen vanuit een tabel;
- groeifactoren en groeipercentages naar elkaar omrekenen;
- formules voor exponentiële groei opstellen en daar grafieken bij tekenen;
- formules voor exponentieel verval opstellen en daar grafieken bij tekenen;
- exponentiële vergelijkingen oplossen door aflezen uit grafieken en inklemmen.

Bij iedere stap verdubbelen

Domein

Grafieken en formules

Hoofdstuk

Exponentiële verbanden

Inhoud

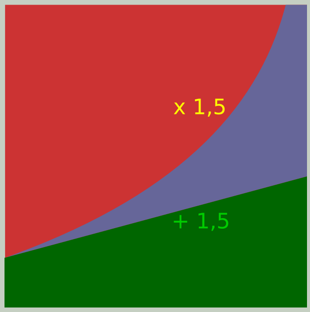
1

1.1 Groeifactoren

Inleiding

Soms nemen hoeveelheden gelijkmatig toe of af. Dat heet lineaire groei.

Maar soms neemt een hoeveelheid met de tijd steeds sterker toe of steeds langzamer af. Een bekend voorbeeld is de groei van het aantal mensen op aarde. Die groei lijkt nog wel steeds sneller te gaan.



Je leert in dit onderwerp

- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei de groeifactor per tijdseenheid afleiden uit de gegevens en daarmee verder rekenen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg 1

Stel je hebt € 100 en spaart er elke maand 4 euro bij.

Dit gebeurt er dan met je kapitaal:

tijd t (in maanden)	0	1	2	3	4	...	20
kapitaal K (in €)	100	104	108	112	116	...	180

Omdat er per tijdseenheid een vast bedrag bijkomt, spreek je van lineaire groei.

Hierbij hoort de formule: $K = 100 + 4t$.
De grafiek bij het verband is een rechte lijn.

Stel je nu voor dat je € 100 hebt en daar elke maand 4% bij krijgt. De toename is dan $\frac{4}{100}$ deel van het kapitaal aan het begin van elke maand.

Dit gebeurt er dan met je kapitaal:

tijd t (in maanden)	0	1	2	3	4	...	20
kapitaal K (in €)	100	104	108,2	112,5	117	...	210,7

In dit geval is sprake van exponentiële groei, het kapitaal groeit steeds sterker.

De grafiek bij dit verband is geen rechte lijn, maar loopt in dit geval steeds steiler omhoog.

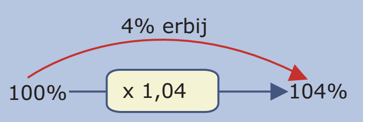
Uitleg 2

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid telkens per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Dit getal heet de groeifactor per tijdseenheid.

Zet je een bedrag van € 100 op een spaarrekening tegen een rente van 4% per jaar, dan groeit het kapitaal zo:

tijd t (in jaren)	0	1	2	3	4	...	20
kapitaal K (in €)	100	104	108,20	112,5	117,0	...	210,7

Je ziet:



- van $t = 0$ naar $t = 1$: vermenigvuldigingsfactor $\frac{104}{100} = 1{,}04$
- van $t = 1$ naar $t = 2$: vermenigvuldigingsfactor $\frac{108{,}2}{104} = 1{,}04$
- van $t = 2$ naar $t = 3$: vermenigvuldigingsfactor $\frac{112{,}5}{108{,}2} = 1{,}04$

Er is een vaste vermenigvuldigingsfactor per jaar. Er is dus een groeifactor van $1{,}04$ per jaar.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Theorie

Als bij een hoeveelheid H per tijdseenheid een vast bedrag bij wordt opgeteld, spreek je van **lineaire groei**.

Hierbij hoort de formule: $H = b + a \cdot t$ waarin b de starthoeveelheid op $t = 0$ is en a de vaste hoeveelheid die er elke tijdseenheid bijkomt.
De grafiek bij het verband is een rechte lijn.

Als een hoeveelheid H per tijdseenheid met een vast bedrag wordt vermenigvuldigd, spreek je van **exponentiële groei**, de hoeveelheid groeit dan steeds sterker.

De grafiek bij dit verband is geen rechte lijn, maar loopt steeds steiler omhoog of steeds minder steil omlaag.

Bij exponentiële groei wordt de hoeveelheid telkens per tijdseenheid met hetzelfde getal vermenigvuldigd. Dit getal heet de **groeifactor** per tijdseenheid.

Voorbeeld 1

Bekijk de tabel met het aantal konijnen a in een natuurgebied afhankelijk van de tijd t in jaren.

Stel dat $t = 0$ overeenkomt met 1 januari 2012 en er éénmaal per jaar wordt gemeten.

tijd t (jaar)	0	1	2	3	4
aantal konijnen a	122	134	147	162	178

Laat zien dat jaarlijks het aantal konijnen met een vaste groeifactor toeneemt en dit aantal dus exponentieel groeit. Bereken die groeifactor per jaar op twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De vermenigvuldigingsfactor voor het eerste jaar (periode $t = 0$ tot $t = 1$):
aantal konijnen op $t = 1$: 134
aantal konijnen op $t = 0$: 122

vermenigvuldigingsfactor eerste jaar = $\frac{134}{122} \approx 1{,}10$.

Voor alle volgende jaren blijft de vermenigvuldigingsfactor ongeveer gelijk:
$\frac{134}{122} \approx \frac{147}{134} \approx \frac{162}{147} \approx \frac{178}{162} \approx 1{,}10$.

Omdat er jaarlijks met dezelfde factor van $1{,}10$ wordt vermenigvuldigd, is er van exponentiële groei sprake met groeifactor $1{,}10$.

Opgave 5 Opgave 6

Voorbeeld 2

Thomas Robert Malthus (1766—1834) beschouwde de toename van de wereldbevolking als exponentiële groei. Dit klopt niet helemaal want de groeifactoren tussen verschillende decennia verschillen een beetje. Ga hier toch, net als Malthus, uit van exponentiële groei.

In de tabel staan gegevens over de bevolkingsgroei in de negentiende eeuw.

tijd (jaar)	*bevolking* (miljoen)
1800	1000
1810	1050
1820	1102
1830	1158
1840	1216
1850	1276
1860	1340
1870	1407
1880	1477

Bereken de groeifactor per decennium (10 jaar) voor de periode tussen 1800 en 1880. Bereken daarmee de grootte van de wereldbevolking in 1900 en in 2000. Rond af op miljoenen mensen.

Antwoord

De groeifactor per tien jaar over de hele periode bereken je als volgt:

vermenigvuldigingsfactor periode 1800—1810: $\frac{1050}{1000} = 1{,}05$

vermenigvuldigingsfactor periode 1810—1820: $\frac{1102}{1050} \approx 1{,}05$

etc.

De groeifactor per tien jaar voor de periode tussen 1800—1880 is ongeveer $1{,}05$.

Met deze groeifactor bereken je de wereldbevolking in 1900: $1477 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \approx 1709{,}8$.

In 1900 waren er ongeveer 1710 miljoen mensen op de wereld.

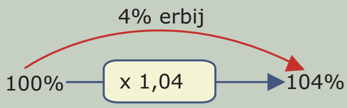
Als je zo door gaat met vermenigvuldigen met $1{,}05$ kom je in 2000 uit op ongeveer 2652 miljoen mensen. Dat is echter veel minder dan echt het geval was. De groei is in werkelijkheid nog sneller gegaan.

Opgave 7 Opgave 8

1.2 Groeipercentages

Inleiding

Tussen groeifactoren en groeipercentages kun je heen en weer rekenen.
Eigenlijk zegt dit plaatje alles.



Je leert in dit onderwerp

- de groeifactor bepalen bij een procentuele toename en omgekeerd;
- groeifactoren omrekenen naar grotere tijdstappen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken;
- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei de groeifactor per tijdseenheid afleiden uit de gegevens en daarmee verder rekenen.

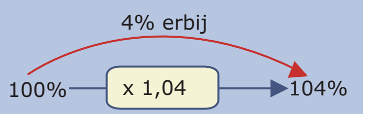
Opgave V1

Uitleg

Als een nieuwe virusziekte zich onder de mensen gaat verspreiden, gaat dit vaak volgens een exponentieel groeiproces. Stel dat er op zeker moment 4000 besmette personen zijn en de groei bedraagt 4% per dag, hoe groot is dan de groeifactor?

Elke dag neemt dan het aantal besmette personen van 100% toe met 4% tot: $100\,\% + 4\% = 104\%$.

De groeifactor is dan $\frac{104}{100} = 1{,}04$ per dag.



Daarmee neemt het aantal besmette personen per week dus toe met
$1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04 = 1{,}04^7 \approx 1{,}316$

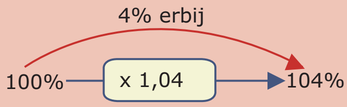
En uit de groeifactor per week, dan kun je dan weer het groeipercentage per week bepalen.
Immers nu neemt elke week 100% toe tot: $100 \cdot 1{,}316 = 131{,}6\%$.
Het aantal besmettingen groeit dan met $31{,}6\%$ per week.
En dat is meer dan met $7 \cdot 4 = 28\%$.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Tussen procenten en groeifactoren kun je heen en weer rekenen.

Bij een vaste procentuele toename kun je een **groeifactor** bepalen.
Als een hoeveelheid ieder jaar met 4% toeneemt, gaat dat als volgt:
$100\,\% + 4\% = 104\%$



De groeifactor is $\frac{104}{100} = 1{,}04$.

En weet je de groeifactor, dan kun je omgekeerd het **groeipercentage** bepalen.
Als een hoeveelheid per jaar groeit met een groeifactor van $1{,}04$, gaat dat als volgt:
$1{,}04 = 104\% = 100\,\% + 4\%$.
De hoeveelheid groeit met 4% per jaar.

En als een hoeveelheid met een groeifactor van $1{,}04$ per jaar groeit, dan is de groeifactor per tien jaar: $1{,}04^{10} \approx 1{,}48$. Dus groeit de hoeveelheid elke tien jaar met 48% (meer dus dan $10 \cdot 4 = 40\%$).

Voorbeeld 1

In 1972 verschijnt het ‘Rapport van de Club van Rome’. De meeste mensen trekken zich echter weinig van de sombere toekomstvoorspellingen aan. Malthus heeft een eeuw eerder immers ook geen gelijk gekregen! Daarom brengt de Club in 1992 een nieuw rapport uit, waarin de eerste voorspellingen worden vergeleken met de werkelijke bevolkingsgroei. De wereldbevolking blijkt in 1992 met $1{,}7\%$ per jaar toe te nemen. Die groei is niet in alle delen van de wereld gelijk.

werelddeel	groei per jaar	aantal inwoners in 1992
Amerika	1,4%	741481000
Europa	0,2%	794023000
Azië	1,5%	3239530000
Afrika	2,7%	664439000
Oceanië	1,4%	124233000

In de tabel is de groei in procenten gegeven. Met groeifactoren is het gemakkelijker rekenen.

In Amerika is de bevolkingsgroei per jaar $1{,}4\%$. De bevolking neemt dus elk jaar met $1{,}4\%$ toe.

Omdat $100 + 1{,}4 = 101{,}4\%$ is de groeifactor $\frac{101{,}4}{100} = 1{,}014$.

Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

In de landen met de hoogste groeifactor neemt de bevolking het snelst toe. Vaak zijn dat juist de armste landen, die de meeste problemen hebben met de levensomstandigheden van hun inwoners.
In Nigeria is de groei per jaar $3{,}0\%$, in Kongo zelfs $3{,}9\%$.
China had in 1970 nog een groei van $2{,}5\%$, maar dat is teruggebracht tot $1{,}0\%$.

Met hoeveel procent neemt de bevolking van Nigeria in 10 jaar tijd toe?

Antwoord

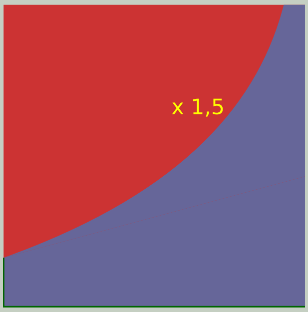
Een groeipercentage van $3{,}0\%$ per jaar wil zeggen een groeifactor van $1{,}03$ per jaar.
Over 10 jaar gerekend is dat een groeifactor van $(1{,}03)^{10} \approx 1{,}34$.
Bij een groeifactor van $1{,}34$ hoort een groeipercentage van 34%.

Opgave 6 Opgave 7

1.3 Exponentiële groei

Inleiding

Bij exponentiële groei horen grafieken die er steeds ongeveer hetzelfde uitzien. En bij die grafieken passen dan weer formules die erg op elkaar lijken. Daar ga je nu mee werken.



Je leert in dit onderwerp

- formules opstellen bij exponentiële groei en daarmee rekenen;
- grafieken maken bij exponentiële groei en er conclusies uit trekken.

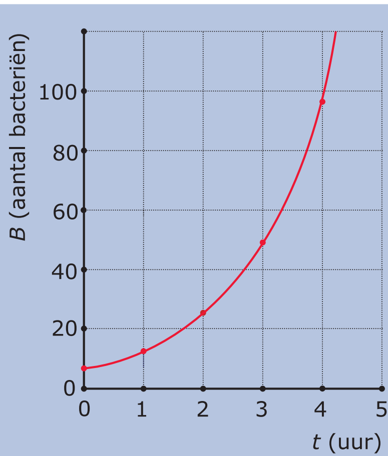
Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei de groeifactor en het groeipercentage per tijdseenheid afleiden uit de gegevens en daarmee verder rekenen.

Opgave V1

Uitleg

Een bepaalde soort bacteriën deelt zich elk uur. Dus elk uur wordt de hoeveelheid bacteriën 2 keer zo groot, de groeifactor per uur is 2. Je begint op $t = 0$ met 6 bacteriën. Dan verloopt het aantal zo:



- Op $t = 0$ zijn er 6 bacteriën;
- Op $t = 1$ zijn er $6 \cdot 2 = 12$ bacteriën;
- Op $t = 2$ zijn er $6 \cdot 2^2 = 24$ bacteriën;
- Op $t = 3$ zijn er $6 \cdot 2^3 = 48$ bacteriën;

Je kunt de bacteriegroei beschrijven met de formule: $A = 6 \cdot 2^t$ met t de tijd in uren en A het aantal bacteriën op tijdstip t.

Met zo'n formule kun je de hoeveelheid bacteriën op verschillende tijdstippen uitrekenen en een passende grafiek maken.

Opgave 1 Opgave 2

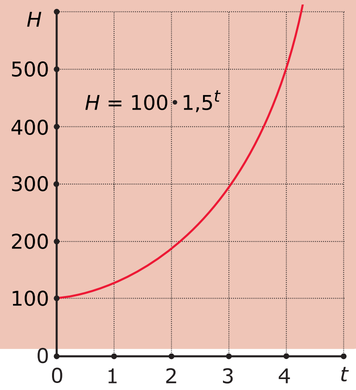
Applet

Theorie

De **formule bij exponentiële groei** heeft als vorm $H = b \cdot g^t$ met:

- b de beginhoeveelheid op $t = 0$;
- g de groeifactor met $g > 1$;
- t het aantal tijdseenheden dat verlopen is;
- H de hoeveelheid op tijdstip t.

De bijbehorende grafiek zie je als $g > 1$ in de figuur. Hij loopt steeds steiler omhoog.



Voorbeeld 1

In een duingebied zitten naar schatting 2000 konijnen. Dat aantal K is exponentieel gegroeid met 10% per jaar. Ga er van uit dat deze groei de komende jaren zo door gaat. Bereken met behulp van de formule voor exponentiële groei het aantal konijnen na twintig jaar.

Rond het aantal konijnen af op honderdtallen.

Antwoord

Om de hoeveelheid K na t jaar te berekenen, stel je eerst de formule op.
Deze formule heeft de vorm $K = b \cdot g^t$.
Het begingetal is gelijk aan $b = 2000$ konijnen.
Uit het groeipercentage van 10% volgt de groeifactor: $g = 1{,}10$.

De formule wordt $K = 2000 \cdot 1{,}10^t$.

Na 20 jaar geldt: $t = 20$ en dus $K = 2000 \cdot 1{,}10^{20} \approx 13454{,}999$.

Na 20 jaar zijn er ongeveer 13500 konijnen.

De exponentiële groei zal dus vermoedelijk niet in dit tempo doorgaan...

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

Een Nederlandse stad heeft op 1 januari 2010 500000 inwoners. Een Congolese stad heeft op dat moment ongeveer 200000 inwoners. De Nederlandse stad groeit met 0,5% per jaar. De Congolese stad groeit jaarlijks met 5,0%.

Vergelijk de bevolkingsgroei van de steden in een grafiek. Stel eerst bijpassende formules op.

Antwoord

Voor de Nederlandse stad N geldt:

- begingetal $b_N = 500000$
- groeifactor $g_N = \frac{100+0,5}{100} = 1,005$

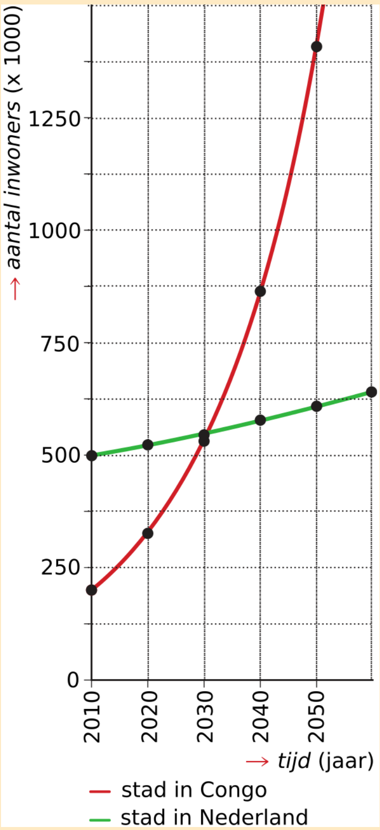
Voor N krijg je de formule $H_N = 500000 \cdot 1,005^t$.
Hierin is H_N het aantal inwoners in de Nederlandse stad en t de tijd in jaar.

Voor de Congolese stad C geldt:

- begingetal $b_C = 200000$
- groeifactor $g_C = \frac{100+5,0}{100} = 1,05$

Voor C krijg je de formule $H_C = 200000 \cdot 1,05^t$.
Hierin is H_C het aantal inwoners in de Congolese stad en t de tijd in jaar.

Zet de aantallen inwoners voor beide steden in een tabel met $t = 0$ in 2010.
Gebruik aantallen (×1000).



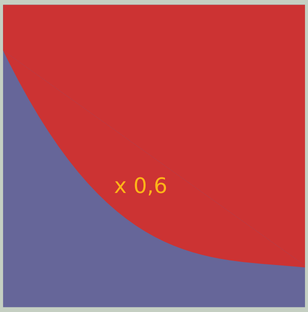
t (jaar)	H_N (×1000)	H_C (×1000)
2010	500	200
2020	526	326
2030	552	531
2040	581	864
2050	610	1408
2060	641	2293

Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7

1.4 Exponentieel verval

Inleiding

Behalve exponentiële groei bestaat er ook exponentiële afname, ofwel exponentieel verval. Ook de grafieken daarbij zien er steeds ongeveer hetzelfde uit. Maar de groeifactoren bij nu kleiner dan 1, omdat de uitkomsten steeds kleiner worden. Daar ga je nu mee werken.



Je leert in dit onderwerp

- formules opstellen bij exponentieel verval en daarmee rekenen;
- grafieken maken bij exponentieel verval en er conclusies uit trekken.

Voorkennis

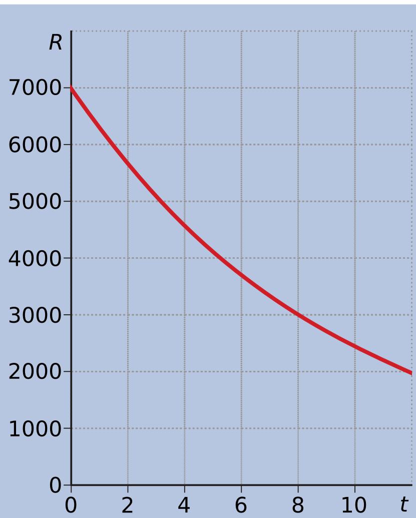
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei de groeifactor en het groeipercentage per tijdseenheid afleiden uit de gegevens;
- formules en grafieken opstellen bij exponentiële groei en daarmee rekenen.

Opgave V1

Uitleg

In het stadje H werd jaren geleden het aantal ratten geschat op 7000. Door bestrijding moest de hoeveelheid ratten R iedere maand met 10% afnemen.

Dit betekende dat er aan het eind van elke maand nog $100 - 10 = 90$% van de ratten over zou blijven.
De ‘groeifactor’ per maand is dan $0{,}90$.
De bijbehorende formule voor het aantal ratten is:
$R = 7000 \cdot 0{,}9^t$ met t de tijd in maanden.
Hiernaast zie je de bijbehorende grafiek. Je ziet het aantal ratten behoorlijk snel afnemen.



Als er sprake is van afname met een vast percentage spreek je van exponentieel verval. De groeifactor is bij exponentieel verval een getal tussen 0 en 1 zoals je ziet.

Opgave 1 Opgave 2

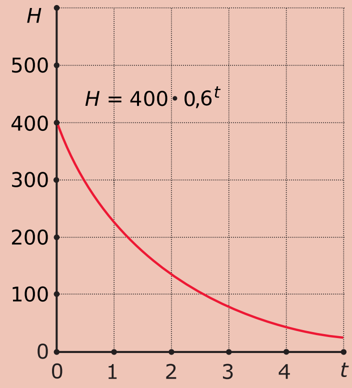
Applet

Theorie

De **formule bij exponentieel verval** heeft als vorm $H = b \cdot g^t$ met:

- b de beginhoeveelheid op $t = 0$;
- g de groeifactor met $0 < g < 1$;
- t het aantal tijdseenheden dat verlopen is;
- H de hoeveelheid op tijdstip t.

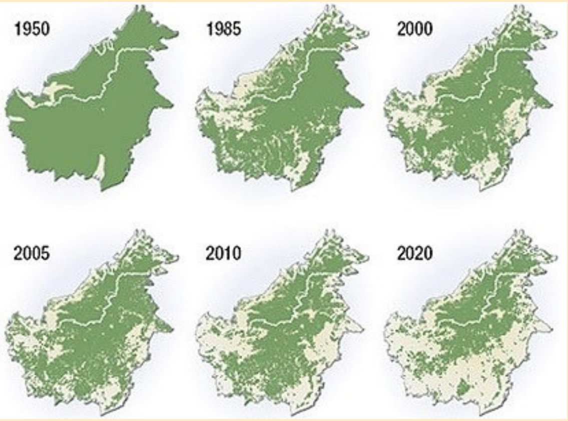
De bijbehorende grafiek zie je als $0 < g < 1$ in de figuur. Hij loopt steeds minder steil omlaag, maar de uitkomsten blijven boven 0 al komen ze er steeds dichter bij.



Voorbeeld 1

De oppervlakte A van het regenwoud op Borneo is tussen 1950 en 2005 gehalveerd. Dat betekent een afname met 1,3% per jaar. In 2005 bedroeg de oppervlakte nog ongeveer 360000 km^2.

Stel de formule op voor de afname van de oppervlakte van het regenwoud vanaf dat tijdstip.
Geef aan waar A en t voor staan.



Antwoord

De beginwaarde is $b = 360000$ km^2.

De groeifactor g per jaar is $\frac{100-1,3}{100} = \frac{98,7}{100} = 0,987$.

De formule is daarom: $A = 360000 \cdot 0,987^t$.
Hierin is A de oppervlakte in km^2 en t de tijd in jaren.

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

vissoort	*aantal*	%	*minimum aantal*
haring	2000	18	750
schol	490	5	300
kabeljauw	280	30	150

De grootte van de visstand in een gebied laat exponentieel verval zien. De tabel geeft van drie vissoorten het aantal vissen in het jaar 2000 weer met het verval in procenten en het minimum aantal vissen waarmee de soort nog kan overleven.

Geef een formule voor de hoeveelheid haring H.
In welk jaar wordt het minimumaantal voor haring bereikt?

Antwoord

Het begingetal voor de haring is $b = 2000$.

De groeifactor voor de haring is $g = \frac{100-18}{100} = 0{,}82$.

De bijbehorende formule is $H = 2000 \cdot 0{,}82^t$
Hierin is H de hoeveelheid haring en t de tijd in jaar na 2000.

Hiermee kun je deze tabel maken.

Het minimumaantal voor haring is 750. In 2005 wordt dit minimumaantal bereikt.

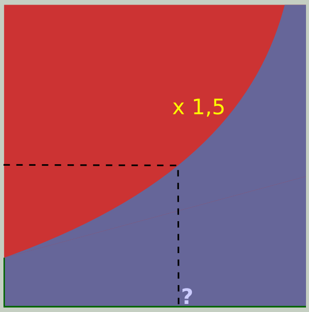
tijd (jaar)	*haring*
2001	1640
2002	1345
2003	1103
2004	904
2005	741

Opgave 5

1.5 Exponentiële vergelijkingen

Inleiding

Vaak kun je door aflezen van de grafiek de tijd schatten die hoort bij een bepaalde waarde. Maar soms wil je nauwkeuriger antwoorden. Bij het oplossen van een exponentiële vergelijking kun je gebruik maken van de inklemmethode.



Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen met exponentiële verbanden oplossen met behulp van inklemmen.

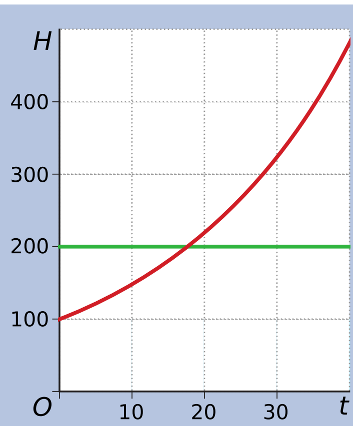
Voorkennis

- een vergelijking oplossen met behulp van de inklemmethode;
- herkennen wanneer er sprake is van lineaire groei en wanneer er sprake is van exponentiële groei;
- bij exponentiële groei/verval de groeifactor en het groeipercentage per tijdseenheid afleiden uit de gegevens;
- formules en grafieken opstellen bij exponentiële groei/verval en daarmee rekenen.

Opgave V1

Uitleg

In de figuur zie je de grafiek van $H = 100 \cdot 1{,}04^t$.



Vaak kun je door aflezen van de grafiek de tijd schatten die hoort bij een bepaalde waarde. Maar soms wil je nauwkeuriger antwoorden. Bij het oplossen van een exponentiële vergelijking kun je gebruik maken van de inklemmethode.

Als je wilt weten wanneer de beginhoeveelheid 100 is verdubbeld, dan moet je de vergelijking: $100 \cdot 1{,}04^t = 200$ oplossen. In de figuur zie je dat de oplossing in de buurt van $t = 20$ ligt.

Vervolgens maak je een inklemtabel.

t	$H = 100 \cdot 1{,}04^t$	verschil met 200
15	180,1	19,1
16	187,3	12,7
17	194,8	5,2
18	202,6	-2,6

Bij $t = 18$ zit het verschil het dichtst bij 0. De oplossing van de vergelijking is: $t \approx 18$.
Soms is dit nog niet nauwkeurig genoeg. Dan maak je in de buurt van $t = 18$ een nauwkeuriger tabel.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Een **vergelijking met een exponentieel verband** los je op met behulp van inklemmen, met de inklemmethode.

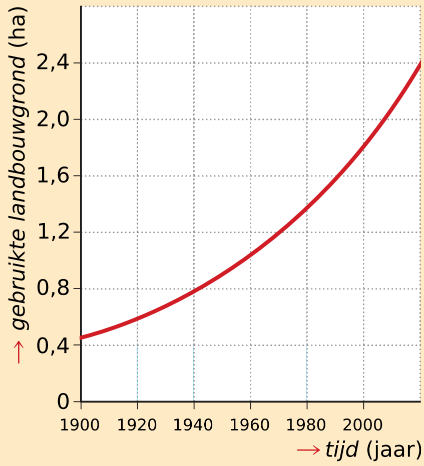
Je kunt daarmee de gevraagde waarde(n) zo nauwkeurig als je wilt benaderen.

Voorbeeld 1

In 1900 was de gebruikte landbouwgrond L in de wereld $0{,}45$ miljard ha. Deze hoeveelheid nam jaarlijks met $1{,}4\%$ toe.

Bekijk de grafiek.

Wanneer was de hoeveelheid gebruikte landbouwgrond gelijk aan 2 miljard hectare?



Antwoord

De bijbehorende formule is $L = 0{,}45 \cdot 1{,}014^t$.
Hierin is L de gebruikte landbouwgrond, t de tijd in jaar en $t = 0$ in 1900.

Gevraagd wordt wanneer L gelijk is aan 2 miljard hectare landbouwgrond.

Dit geeft de vergelijking: $0{,}45 \cdot 1{,}014^t = 2$.

Eerst schat je met de grafiek dat ongeveer in 2008 de vergelijking klopt. Daarbij hoort $t = 108$.

Maak vervolgens een inklemtabel met t-waarden in de buurt van 108. Bereken het verschil steeds in vier decimalen.

t	L	$L - 2{,}00$
2005: $t = 105$	$1{,}9373$	$-0{,}0627$
2006: $t = 106$	$1{,}9644$	$-0{,}0356$
2007: $t = 107$	$1{,}9919$	$-0{,}0081$
2008: $t = 108$	$2{,}0198$	$0{,}0198$
2009: $t = 109$	$2{,}0481$	$0{,}0481$

Bij $t = 107$ is het verschil het kleinst.
Dus in 2007 is de hoeveelheid gebruikte landbouwgrond ongeveer gelijk aan 2 miljard hectare.

Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Van 2000 tot 2050 groeit de gebruikte landbouwgrond volgens voorspellingen met 1,4% per jaar. Neem $t = 0$ in 2000. In 2000 is de gebruikte landbouwgrond 1,81 miljard hectare.

De hoeveelheid beschikbare landbouwgrond is in 2000 gelijk aan 2 miljard hectare. Voorspeld wordt dat de hoeveelheid beschikbare grond met 30 miljoen hectare per jaar kan groeien.

Schat met behulp van een grafiek en een inklemtabel het jaar waarin de benodigde hoeveelheid landbouwgrond L de beschikbare hoeveelheid B heeft ingehaald als deze voorspellingen kloppen. Rond L en B steeds af op twee decimalen.

Antwoord

Formule voor de benodigde grond vanaf het jaar 2000 ($t = 0$): $L = 1{,}81 \cdot 1{,}014^t$
Hierin is L de grootte van de beschikbare landbouwgrond en t in jaar met $t = 0$ in 2000.

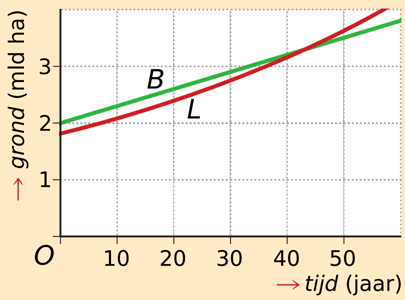
Er komt jaarlijks 30 miljoen hectare bij de in 2000 aanwezige 2 miljard hectare, dat is 0,03 miljard hectare.
Formule voor de beschikbare landbouwgrond B vanaf 2000: $B = 2 + 0{,}03t$.
Hierin is B de grootte van de beschikbare landbouwgrond en t in jaar met $t = 0$ in 2000.

Je wilt uitrekenen op welk tijdstip de benodigde landbouwgrond gelijk is aan de beschikbare landbouwgrond:
$L = B$ geeft de vergelijking $1{,}81 \cdot 1{,}014^t = 2 + 0{,}03t$.

Schat de oplossing van deze vergelijking door het snijpunt in de grafiek af te lezen: $t \approx 42$, dus in 2042.

Maak vervolgens een inklemtabel.

t	L	B	$L - B$
$t = 40$	3,16	3,20	-0,04
$t = 41$	3,20	3,23	-0,03
$t = 42$	3,25	3,26	-0,01
$t = 43$	3,29	3,29	0,00
$t = 44$	3,34	3,32	0,02



Bij $t = 43$ is het verschil 0,00. In 2043 is de benodigde landbouwgrond gelijk aan de beschikbare landbouwgrond.

Opgave 6

Begrippen

- frequentietabel — centrummaat — modus — mediaan — gemiddelde
- boxplot — kwartiel — spreidingsbreedte — (inter)kwartielafstand
- klassenindeling — klassengrenzen, klassenmidden, klassenbreedte
- schatten
- statistisch onderzoek — populatie — steekproef — representatief

Activiteiten

- gegevens samenvatten in frequentietabellen en beschrijven met behulp van centrummaten;
- gegevens samenvatten in frequentietabellen en beschrijven met behulp van spreidingsmaten en boxplots;
- klassenindelingen gebruiken, het gemiddelde schatten;
- centrummaten en spreidingsmaten schatten vanuit een klassenindeling;
- kennismaken met statistisch onderzoek, populatie en representatieve steekproef

Cijfers op orde

B1H		ne		en		fa		ak		gs	
leerling	geslacht		RE		RE		RE		RE		RE
1	v	6,7	7	4,4	4	5,6	6	6,6	7	6,8	7
2	v	5,6	6	5,3	5	6,1	6	7,1	7	6,8	7
3	m	8,1	8	6,7	7	5,8	6	7,2	7	7,6	8
4	m	8,5	9	5,1	5	6,1	6	6,1	6	6,1	6
5	m	4,9	5	9,7	10	6,6	7	8,0	8	7,5	8
6	v	6,2	6	9,4	9	7,2	7	6,6	7	7,8	8

Domein

Informatieverwerking

Hoofdstuk

Statistiek

Inhoud

2

2.1 Centrummaten

Inleiding

Als je beschikt over een hele serie gegevens, zoals alle rapportcijfers van alle leerlingen in leerjaar 2 van alle vakken, dan heb je een enorme brij aan getallen. Hoe krijg je daar enig overzicht over?

B1H		ne		en		fa		ak		gs	
leerling	geslacht		RE		RE		RE		RE		RE
1	v	6,7	7	4,4	4	5,6	6	6,6	7	6,8	7
2	v	5,6	6	5,3	5	6,1	6	7,1	7	6,8	7
3	m	8,1	8	6,7	7	5,8	6	7,2	7	7,6	8
4	m	8,5	9	5,1	5	6,1	6	6,1	6	6,1	6
5	m	4,9	5	9,7	10	6,6	7	8,0	8	7,5	8
6	v	6,2	6	9,4	9	7,2	7	6,6	7	7,8	8

Zoals je weet kunnen frequentietabellen en diagrammen helpen. Maar soms is een enkel getal genoeg...

Je leert in dit onderwerp

- van een hoeveelheid gegevens de modus, de mediaan en het gemiddelde berekenen;
- modus, mediaan en gemiddelde interpreteren als centrummaten van die gegevens.

Voorkennis

- (gewogen) gemiddelde van een hoeveelheid gegevens berekenen;
- werken met (relatieve) frequenties en (relatieve) frequentietabellen;
- werken met kruistabellen.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Je ziet hier een frequentietabel van de rapportcijfers voor het vak Engels in klas B2F. Je wilt de gegevens van deze klas samenvatten.

cijfer	frequentie
4	1
5	4
6	9
7	11
8	3
9	1
totaal	29

Er zijn drie getallen die de waarnemingen van deze frequentietabel samenvatten:

- het cijfer dat het vaakst voorkomt en dus de grootste frequentie heeft heet de modus (het modale cijfer) van deze gegevens.
- de middelste van alle waarnemingen (cijfers) als die op volgorde staan, heet de mediaan van deze gegevens.
- het gemiddelde van de waarnemingen vind je door alle cijfers bij elkaar op te tellen en dat getal te delen door het totaal aantal cijfers. Houd daarbij rekening met de frequenties.

Bij deze frequentieverdeling is 7 de modus, omdat deze het vaakst voor komt.

De mediaan is in dit geval het 15e cijfer, dus een 7. Let op dat alle cijfers op volgorde staan. Bij een oneven aantal getallen is de mediaan het middelste getal. Bij een even aantal getallen is de mediaan het midden van de twee middelste getallen.

Het gemiddelde cijfer is $\frac{188}{29} \approx 6{,}5$.

De modus, de mediaan en het gemiddelde geven een soort centrum van de frequentieverdeling weer. Deze drie getallen heten daarom centrummaten en ze kunnen verschillend zijn.

Het is niet zo dat je modus, mediaan en gemiddelde altijd kunt bepalen. Je moet voor de mediaan en het gemiddelde altijd getallen als waarneming hebben.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

Er zijn drie getallen die een hoeveelheid gegevens (waarnemingen) kunnen samenvatten:

- de **modus** (de modale waarde) is de waarneming die het vaakst voorkomt en dus de grootste frequentie heeft. Er is geen modus als twee waarnemingen het meest voorkomen.
- de **mediaan** is het midden van alle waarnemingen als die op volgorde staan.
- het **gemiddelde** van de waarnemingen vind je door alle waarden bij elkaar op te tellen en dat getal te delen door het totaal aantal cijfers. Daarbij moet je rekening houden met de frequenties (de wegingen) van de waarnemingen.

De modus, de mediaan en het gemiddelde zijn **centrummaten**. Deze drie getallen kunnen verschillend zijn.

Het is niet zo dat je modus, mediaan en gemiddelde altijd kunt bepalen. Je moet voor de mediaan en het gemiddelde altijd getallen als waarneming hebben.

Voorbeeld 1

Je ziet hier de frequentietabellen van de klassen B2A en B2C van hun rapportcijfers voor het vak wiskunde. Vergelijk de modus, de mediaan en het gemiddelde cijfer van beide klassen. Trek conclusies over welke klas gemiddeld beter scoort, in welke klas zitten de beste leerlingen, waar vallen de meeste onvoldoendes, etc.

	klas B2A	klas B2C
cijfer	frequentie	frequentie
4	1	0
5	4	4
6	9	8
7	11	6
8	3	4
9	1	2
totaal	29	24

Antwoord

Klas B2A:

- de modus is 7, want 7 komt het vaakst voor bij klas B2A.
- de mediaan is 7, want dat is het 15de getal als je ze van klein naar groot opschrijft.
- het gemiddelde is ongeveer 6,5, want $\frac{1 \cdot 4+4 \cdot 5+9 \cdot 6+11 \cdot 7+3 \cdot 8+1 \cdot 9}{29} \approx 6{,}5$.

Klas B2C:

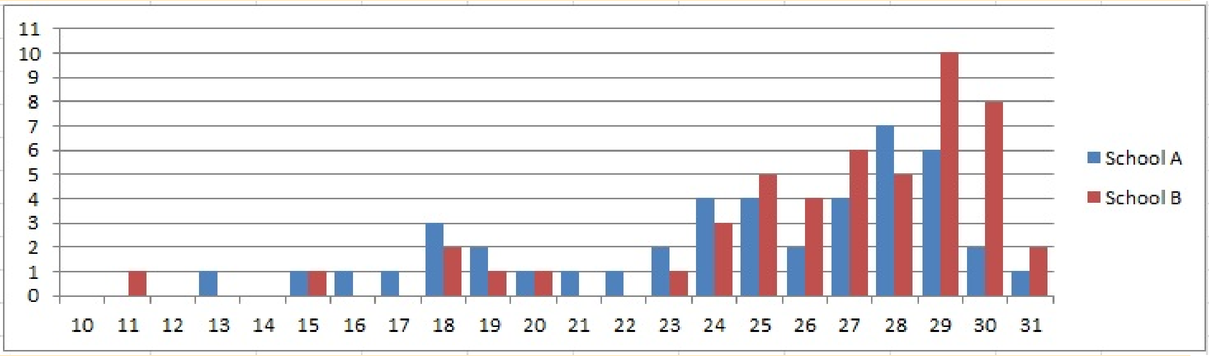
- de modus is 6, want 6 komt het vaakst voor bij klas B2C.
- de mediaan is $6{,}5$, want dat is het gemiddelde van het 12e en 13e cijfer als je ze van klein naar groot opschrijft.
- het gemiddelde is ongeveer $6{,}7$, want $\frac{4 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 9}{24} \approx 6{,}7$.

Klas B2C scoort gemiddeld hoger dan B2A, maar het meest voorkomende cijfer zit bij B2C onder het gemiddelde. Er zitten in klas B2C dus veel leerlingen die magertjes scoren (de helft scoort 5 of 6), maar ook naar verhouding veel leerlingen die heel goed scoren.

Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Op twee scholen voor voortgezet onderwijs zijn de aantallen leerlingen per klas geteld. Je ziet in dit staafdiagram het resultaat voor school A en school B.



Bepaal de modale en de gemiddelde klassengrootte per school en gebruik deze gegevens om te bepalen welke school in het algemeen grotere klassen heeft.

Antwoord

School A:

- de modale klassengrootte: 28, want de blauwe staven horen bij school A en de hoogste blauwe staaf hoort bij een klassengrootte van 28.
- de gemiddelde klassengrootte: ongeveer $24{,}5$.

School B:

- de modale klassengrootte: 29.
- de gemiddelde klassengrootte: ongeveer $26{,}4$.

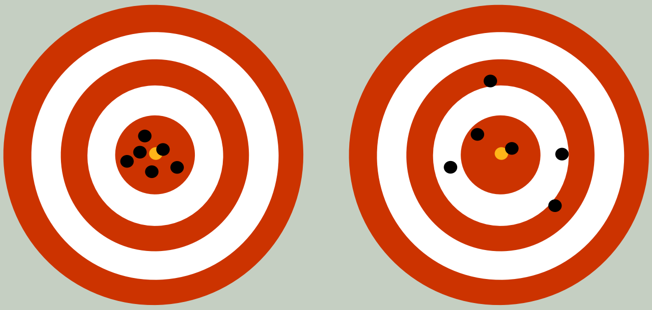
De modus is bij school B net iets groter dan bij school A, bovendien heeft school B een grotere gemiddelde klassengrootte. Op school B zijn de klassen in het algemeen dus groter (ondanks die éne uitschieter van een klasje van maar 11 leerlingen).

Opgave 6 Opgave 7

2.2 Spreidingsmaten

Inleiding

Ook al hebben twee groepen gegevens dezelfde centrummaat, dan nog kunnen er grote verschillen zijn. De spreiding kan erg verschillend zijn. Je ziet dat hier met de schoten op deze roos. Van de tweede serie is de spreiding groter.



Je leert in dit onderwerp

- de spreidingsbreedte en de kwartielafstand van een serie gegevens berekenen en interpreteren als spreidingsmaten;
- een serie gegevens samenvatten in een boxplot.

Voorkennis

- (gewogen) gemiddelde, modus en mediaan van een hoeveelheid gegevens berekenen;
- werken met (relatieve) frequenties en (relatieve) frequentietabellen;
- werken met kruistabellen.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

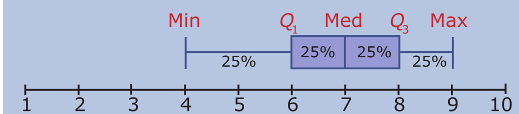
Je ziet hier een frequentietabel van de rapportcijfers voor het vak Frans in klas B2F. Je kunt deze tabel samenvatten met de modus, de mediaan en/of het gemiddelde.

cijfer	frequentie
4	1
5	4
6	9
7	7
8	6
9	2
totaal	29

Je kunt van deze frequentietabel ook een samenvatting maken, bestaande uit vijf getallen:

1. De laagste waarneming is 4.
2. De hoogste waarneming is 9.
3. De mediaan (afgekort med) is 7.
4. De mediaan van de eerste helft is hier 6. Dat heet het eerste kwartiel (afgekort Q_1).
5. De mediaan van de tweede helft is hier 8. Dit is het derde kwartiel (afgekort Q_3).

Deze vijf getallen zet je in een tekening langs een as en je krijgt een ‘boxplot’, een 5-getallen samenvatting van de frequentietabel.



Voor elke boxplot geldt: tussen twee opvolgende getallen van de 5-getallen samenvatting zit 25% van de waarnemingen. In de boxplot kun je geen gemiddelde en modus aflezen.

Uit de boxplot kun je wel twee spreidingsmaten aflezen:

1. De grootste waarneming min de kleinste waarneming heet de spreidingsbreedte.
2. Het derde kwartiel min het eerste kwartiel heet de interkwartielafstand, of gewoon kwartielafstand.

Ook deze spreidingsmaten kun je goed gebruiken om series waarnemingen te vergelijken.

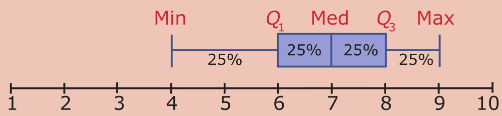
Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

Je kunt van een hoeveelheid gegevens een samenvatting maken, bestaande uit vijf getallen:

- de kleinste waarneming;
- het **eerste kwartiel** Q_1, dit is de mediaan van de eerste helft waarnemingen;
- het **tweede kwartiel** is de mediaan;
- het **derde kwartiel** Q_3, dit is de mediaan van de tweede helft waarnemingen;
- de grootste waarneming.

Deze vijf getallen zet je in een tekening langs een as en je maakt een **boxplot**. Een boxplot is een 5-getallen samenvatting van de frequentietabel.



In een boxplot vind je twee **spreidingsmaten**:

- de **spreidingsbreedte** is de grootste waarneming min de kleinste waarneming;
- de **interkwartielafstand** is het derde kwartiel min het eerste kwartiel.

Voorbeeld 1

Bekijk de tabel met cijfers voor het vak Duits van B2L. Vat deze gegevens samen in een boxplot.

cijfer	frequentie
2	1
3	3
4	4
5	3
6	2
7	6
8	3
9	5
10	3
totaal	30

Antwoord

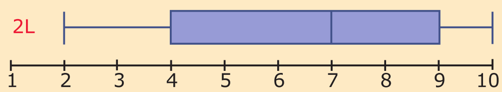
Het laagste cijfer is een 2 en het hoogste is een 10.

De mediaan is hier het gemiddelde van het vijftiende en het zestiende getal, dus 7.

Het eerste kwartiel is hier $Q_1 = 4$.

Het derde kwartiel is hier $Q_3 = 9$.

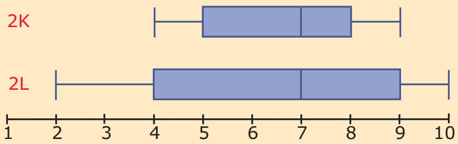
Nu heb je alle gegevens om de boxplot te kunnen tekenen.



Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Dit zijn de rapportcijfers voor het vak Duits van de klassen B2K en B2L met de bijpassende boxplots.



rapportcijfer	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B2K: frequentie			4	5	5	8	4	4	
B2L: frequentie	1	3	4	3	2	6	3	5	3

Van beide klassen is het modale cijfer hetzelfde. Ook de mediaan van beide klassen is hetzelfde en zelfs de gemiddelden zijn gelijk.

De boxplots van de frequentieverdeling van de cijfers zijn voor deze klassen nogal verschillend.

Opgave 6 Opgave 7 Opgave 8

2.3 Klassenindeling

Inleiding

Soms heb je echt veel verschillende gegevens. Bijvoorbeeld de lengtes van 90 meisjes. Dat noem je de ruwe data. Het maken van een frequentietabel levert dan weinig overzicht op. Daarvoor kun je beter de lengtes groeperen in zogenaamde ‘klassen’. Daarover gaat dit onderdeel.

Je leert in dit onderwerp

- een frequentietabel met klassenindeling en geschikte klassenbreedte maken bij een verzameling ruwe data;
- bij zo'n klassenindeling diagrammen maken;
- bij een klassenindeling het gemiddelde schatten.

Voorkennis

- (gewogen) gemiddelde, modus en mediaan van een hoeveelheid gegevens bereke-nen;
- werken met (relatieve) frequenties en (relatieve) frequentietabellen;
- werken met kruistabellen.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Dit zijn dertig rapportcijfers van klas 2A op één decimaal nauwkeurig. Dat zijn ruwe data, ruwe gegevens. Maar het is geen handig overzicht van resultaten van de klas. Overzicht krijg je door te gaan ordenen.
De cijfers ga je ordenen in klassen, groepjes cijfers die dicht bij elkaar liggen.
Je begint met klasse $3{,}5 - < 4{,}5$. Hierin komen alle cijfers vanaf $3{,}5$ tot aan $4{,}5$ ($4{,}5$ zelf dus niet). $3{,}5$ en $4{,}5$ zijn de klassengrenzen.
De volgende klasse is $5{,}5 - < 6{,}5$ En de volgende $6{,}5 - < 7{,}5$ enzovoorts. Alle klassen maak je even breed.

cijfers klas 2A				
4,1	3,8	5,9	6,1	6,5
8,5	4,9	9,1	7,2	7,3
6,5	7,9	6,7	5,5	6,4
5,7	7,6	6,5	7,1	8,1
8,5	6,8	5,1	8,2	7,5
6,9	6,2	7,1	7,3	5,7

Het aantal cijfers dat in die klasse komt is de absolute frequentie van de klasse. Vaak zijn relatieve frequenties handiger. De relatieve frequentie bepaal je door de frequentie te delen door het totaal. Ook kun je het percentage berekenen, je vermenigvuldigt dan de relatieve frequentie met 100.

De breedte van een klasse heet de klassenbreedte, hier dus 1 want $4{,}5 - 3{,}5 = 1$.

Nu heb je geordende data, de cijfers van de klas zijn overzichtelijk weergegeven in een klassenindeling.

klasse	klassenmidden	frequentie	relatieve frequentie	percentage (%)
$3{,}5- < 4{,}5$	4	2	$\frac{2}{30}$	$6{,}7$
$4{,}5- < 5{,}5$	5	2	$\frac{2}{30}$	$6{,}7$
$5{,}5- < 6{,}5$	6	7	$\frac{7}{30}$	$23{,}3$
$6{,}5- < 7{,}5$	7	11	$\frac{11}{30}$	$36{,}7$
$7{,}5- < 8{,}5$	8	5	$\frac{5}{30}$	$16{,}7$
$8{,}5- < 9{,}5$	9	3	$\frac{3}{30}$	$10{,}0$
totaal		30	1	100

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

Een groep gegevens (liefst in de vorm van getallen) noem je **ruwe data**, ruwe gegevens. Erg overzichtelijk zijn de ruwe data meestal niet.
Dan ga je ze ordenen in **klassen**, dat zijn groepjes getallen die dicht bij elkaar liggen.
Je begint met het kiezen van de **klassengrenzen**. Normaal gesproken kies je alle klassen even breed.

Het verschil van de klassengrenzen van een klasse heet de **klassenbreedte**.
Het **klassenmidden** is meestal het gemiddelde van de twee klassengrenzen.

Het aantal getallen dat in een bepaalde klasse komt is de **absolute frequentie** van de klasse. Vaak zijn **relatieve frequenties** handiger. De relatieve frequentie bepaal je door de frequentie te delen door het totaal. Ook kun je het **percentage** berekenen, je vermenigvuldigt dan de relatieve frequentie met 100.

Nu heb je **geordende data**, de cijfers van de klas zijn overzichtelijk weergegeven in een **klassenindeling**. Het gemiddelde kun je nu alleen nog maar schatten met behulp van de klassenmiddens.

Voorbeeld 1

Om de rapportcijfers voor hetzelfde vak van 2A en 2B te kunnen vergelijken maak je één klassenindeling.

Omdat de leerlingenaantallen verschillen gebruik je relatieve frequenties, deze geven aan welk deel van het geheel in een bepaalde klasse valt. Zo kun je de twee klassen op een eerlijke manier met elkaar vergelijken.

	klas 2A		klas 2B	
klasse	abs. freq.	%	abs. freq.	%
$3,5 < 4,5$	2	6,7	1	4,0
$4,5 < 5,5$	2	6,7	2	8,0
$5,5 < 6,5$	7	23,3	12	48,0
$6,5 < 7,5$	11	36,7	6	24,0
$7,5 < 8,5$	5	16,7	4	16,0
$8,5 < 9,5$	3	10,0	0	0,0
totaal	30	100	25	100

Cijfers klas 2A				
4,1	3,8	5,9	6,1	6,5
8,5	4,9	9,1	7,2	7,3
6,5	7,9	6,7	5,5	6,4
5,7	7,6	6,5	7,1	8,1
8,5	6,8	5,1	8,2	7,5
6,9	6,2	7,1	7,3	5,7

Cijfers klas 2B				
6,1	5,8	5,9	4,1	5,5
6,5	5,9	7,1	7,4	6,3
6,5	5,9	5,2	6,0	7,4
8,1	7,6	5,4	6,2	7,5
6,4	6,9	6,2	8,3	5,6

Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Deze tabel laat de verdeling zien van de lengtes van 90 meisjes in een vierde klas. De gebruikte klassenindeling heeft een klassenbreedte van 5.

De werkelijke lengtes van de 90 meisjes kun je niet uit deze frequentietabel aflezen. De ruwe data zie je niet meer. Je ziet alleen de geordende data.
Als je aanneemt dat in de klasse $150- < 155$ alle lengtes zitten vanaf $150,00...$ tot en met $154,99...$ dan is het klassenmidden $\frac{150+155}{2} = 152,5$.

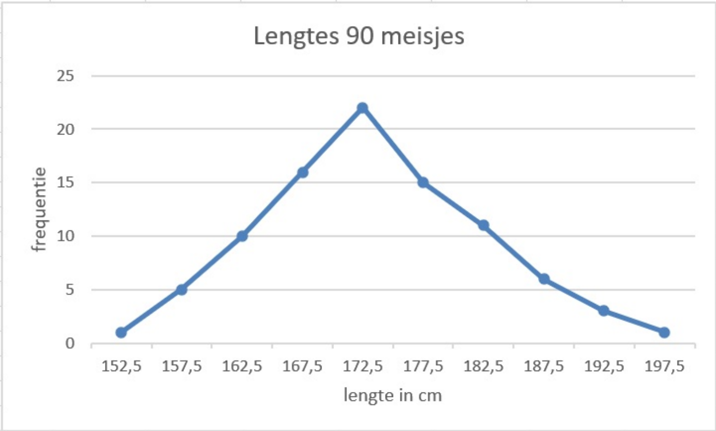
Maak een lijndiagram met behulp van deze klassenmiddens.

Je kunt vanuit die klassenmiddens ook het gemiddelde schatten. Laat zien, hoe.

lengteklasse	klassenmidden	freq.
$150- < 155$	152,5	1
$155- < 160$	157,5	5
$160- < 165$	162,5	10
$165- < 170$	167,5	16
$170- < 175$	172,5	22
$175- < 180$	177,5	15
$180- < 185$	182,5	11
$185- < 190$	187,5	6
$190- < 195$	192,5	3
$195- < 200$	197,5	1
	totaal	90

Antwoord

Hier zie je het lijndiagram bij de lengte van de meisjes.
De dikke punten zijn de frequenties die boven het klassenmidden liggen. Deze dikke punten verbind je.



Je schat het gemiddelde van alle 90 meisjes door elk klassenmidden te vermenigvuldigen met de bijbehorende frequentie, al deze uitkomsten bij elkaar op te tellen, en vervolgens te delen door het totaal aantal meisjes. Je komt dan uit op $173{,}4$ cm.

Opgave 6 Opgave 7

2.4 Schattingen

Inleiding

Je hebt leren werken met klassenindelingen en de bijbehorende frequentietabellen. Voordeel ervan is het krijgen van enig overzicht als je met veel ruwe data te maken hebt. Nadeel is dat je alle centrummaten en spreidingsmaten alleen nog maar kunt schatten.

Je leert in dit onderwerp

- bij een klassenindeling de centrummaten en de spreidingsmaten schatten;
- bij een klassenindeling een boxplot maken.

Voorkennis

- (gewogen) gemiddelde, modus en mediaan van een hoeveelheid gegevens berekenen;
- een frequentietabel met klassenindeling en geschikte klassenbreedte maken bij een verzameling ruwe data;
- werken met kruistabellen.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Cijfers klas 2A				
4,1	3,8	5,9	6,1	6,5
8,5	4,9	9,1	7,2	7,3
6,5	7,9	6,7	5,5	6,4
5,7	7,6	6,5	7,1	8,1
8,5	6,8	5,1	8,2	7,5
6,9	6,2	7,1	7,3	5,7

Dit zijn dertig rapportcijfers van klas 2A voor een bepaald vak. Je ziet hieronder een klassenindeling. De indeling is zo gemaakt dat je rapportcijfers snel kunt aflezen.

klasse	frequentie
$3,5- < 4,5$	2
$4,5- < 5,5$	2
$5,5- < 6,5$	7
$6,5- < 7,5$	11
$7,5- < 8,5$	5
$8,5- < 9,5$	3
totaal	30

Vanuit deze klassenindeling kun je van de verdeling van de cijfers op één decimaal de centrummaten (modus, mediaan, gemiddelde) en de spreidingsmaten (spreidingsbreedte, kwartielafstand) niet meer precies berekenen.
In plaats daarvan gebruik je:

- de modale klasse, dat is de klasse met de hoogste frequentie;
- de klassenmiddens om het gemiddelde te schatten;
- het aantal klassen maal (keer) de klassenbreedte voor de spreidingsbreedte (ook wel variatiebreedte genoemd).

Wil je een boxplot maken, dan moet je de benodigde vijf getallen schatten.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Vanuit een klassenindeling kun je van de verdeling van de cijfers op één decimaal de centrummaten (modus, mediaan, gemiddelde) en de spreidingsmaten (spreidingsbreedte, kwartielafstand) niet meer precies berekenen.
In plaats daarvan gebruik je:

- de **modale klasse**, dat is de klasse met de hoogste frequentie;
- de klassenmiddens om het **gemiddelde te schatten**;
- het aantal klassen maal (keer) de klassenbreedte voor de **spreidingsbreedte** of **variatiebreedte**.

Om een **boxplot** te maken moet je de hoogste en de laagste waarde, kwartielen en de mediaan schatten.

Voorbeeld 1

Hier zie je de frequentietabel van de rapportcijfers van klas 2A nog eens.
Hoe kun je hier een boxplot bij maken als dit moet passen bij de werkelijke cijfers (die op één decimaal nauwkeurig waren gegeven)?

klasse	frequentie
$3{,}5- < 4{,}5$	2
$4{,}5- < 5{,}5$	2
$5{,}5- < 6{,}5$	7
$6{,}5- < 7{,}5$	11
$7{,}5- < 8{,}5$	5
$8{,}5- < 9{,}5$	3
totaal	30

Antwoord

Voor een boxplot heb je vijf getallen nodig: de laagste waarde, de hoogste waarde, het eerste kwartiel, de mediaan en het derde kwartiel. Nu kun je deze waarden gemakkelijk bepalen als je gewoon de klassenmiddens (afgeronde, gehele cijfers) gebruikt. Maar dit boxplot past niet goed bij de werkelijke cijfers.
Je kunt de vijf gezochte waarden echter schatten:

- De laagste waarde schat je $3{,}5$ en de hoogste is $9{,}5$.
- Voor de mediaan heb je het 15e en 16e getal nodig. Die zitten beide in de klasse $6{,}5- < 7{,}5$. Daar zitten 10 getallen in. Neem aan dat die gelijkmatig oplopen vanaf $6{,}5$.
  Dan verschillen ze $0{,}1$ van elkaar.
  Dan is het 15e getal $6{,}5 + 3 \cdot 0{,}1 = 6{,}8$ en het 16e getal $6{,}5 + 4 \cdot 0{,}1 = 6{,}9$.
  De mediaan is dus $6{,}85$.
- Het eerste kwartiel is het 8e getal. Dat schat je net zo als de mediaan. Je vindt ongeveer $5{,}9$.
- Het derde kwartiel is het 23e getal. En dat schat je als $7{,}5$.

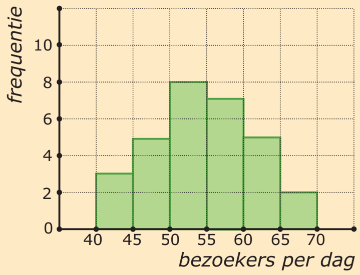
Nu kun je de gewenste boxplot tekenen.

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

Dit staafdiagram geeft voor de maand juni de aantallen bezoekers van een klein museum.

Hoe bereken je hierbij het gemiddelde aantal bezoekers per dag?



Antwoord

Je kunt het gemiddelde schatten met behulp van de klassenmiddens. Daarbij moet je rekening houden met het feit dat het hier om gehele aantallen gaat.

De klasse $40- < 45$ bestaat uit de aantallen 40, 41, 42, 43 en 44. Het midden daarvan is 42.
Op dezelfde wijze vind je de andere klassenmiddens 47, 52, enzovoorts. Nu kun je het gemiddelde schatten.

Je ziet dat je bij het berekenen van een klassenmidden moet bedenken of echt alle getallen tussen de ondergrens en de bovengrens voor kunnen komen, of alleen maar de gehele getallen!

Opgave 5 Opgave 6

2.5 Statistische uitspraken

Inleiding

Je hebt inmiddels allerlei tabellen en diagrammen leren maken om data overzichtelijker weer te geven. Die data krijg je door statistisch onderzoek. Hoog tijd om daar eens een eerste kennismaking mee te hebben.

Je leert in dit onderwerp

- een statistische uitspraak herkennen;
- bij een statistisch onderzoek de begrippen populatie en steekproef herkennen;
- aangeven of een steekproef representatief is;
- een eenvoudig statistisch onderzoek opzetten.

Voorkennis

- (gewogen) gemiddelde, modus en mediaan van een hoeveelheid gegevens berekenen;
- een frequentietabel met klassenindeling en geschikte klassenbreedte maken bij een verzameling ruwe data;
- werken met diverse tabellen (waaronder kruistabellen) en er verschillende diagrammen bij maken;
- bij een klassenindeling de centrummaten en de spreidingsmaten schatten;
- bij een klassenindeling een lijndiagram, een staafdiagram en een boxplot maken.

Opgave V1

Uitleg

Kleurenblinden kunnen bepaalde kleuren niet onderscheiden, bijvoorbeeld het verschil tussen rood en groen niet zien.

Over **kleurenblindheid** is veel geschreven en er bestaan tests om te onderzoeken of je een vorm van kleurenblindheid hebt.

Stel je eens voor dat je zou willen weten hoeveel procent van de Nederlanders kleurenblind is.
Even zoeken op internet en je weet het toch? Nee, natuurlijk niet...
Niemand weet dat precies, want het is onmogelijk om iedere Nederlander te testen op kleurenblindheid en bovendien komen er voortdurend mensen bij en sterven er mensen. Dus dit percentage kun je nooit precies weten!

Zo'n vraag beantwoord je met behulp van statistisch onderzoek.
Je test een beperkt aantal personen op kleurenblindheid en berekent hoeveel procent daarvan kleurenblind is. Je noemt dat een ‘steekproef’ trekken uit de totale ‘populatie’

(alle Nederlanders). Zo'n steekproef moet een goede vertegenwoordiging van de totale populatie zijn, 'representatief' zijn voor de populatie. Pas dan kun je met een enige betrouwbaarheid zeggen dat het gevonden percentage dicht in de buurt zit van het werkelijke percentage.

Op dit moment heb je met twee soorten statistisch onderzoek kennis gemaakt:

- onderzoek waarbij je op zoek gaat naar het percentage van een bepaalde populatie dat een zekere eigenschap heeft;
- onderzoek waarbij je twee groepen in een populatie met elkaar vergelijkt.

Bij beide soorten onderzoek heb je een representatieve steekproef nodig.

Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6

Theorie

Een **statistische uitspraak** over een groep is een uitspraak die is gebaseerd op gegevens van een deel van de groep.

Soms is een groep zo groot dat je niet even ieder lid van de groep kunt bekijken/bevragen.

Een vraag over zo'n grote groep beantwoord je met behulp van **statistisch onderzoek**. Je bekijkt/bevraagt een beperkt aantal leden van de groep en verzamelt daarvan gegevens. Je noemt dat een **steekproef** trekken uit de totale **populatie** (bijvoorbeeld alle Nederlanders). Zo'n steekproef moet een goede vertegenwoordiging van de totale populatie zijn, **representatief** zijn voor de populatie. Pas dan kun je met enige betrouwbaarheid zeggen dat de gevonden gegevens ook iets zeggen over de hele groep. Meer kun je met statistiek niet doen...

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 3

Math4all

www.math4all.nl