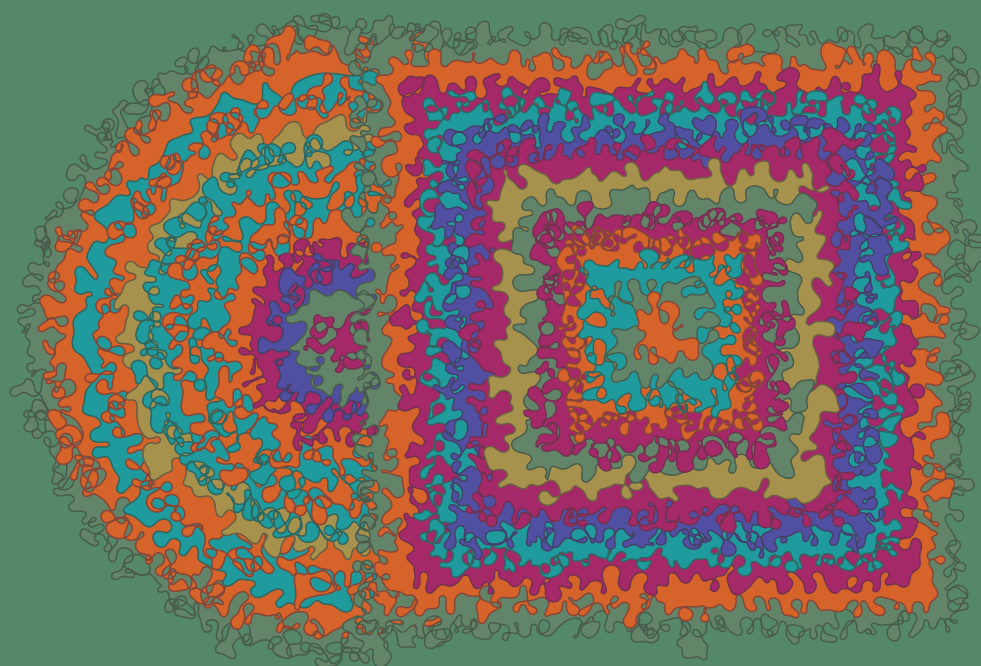


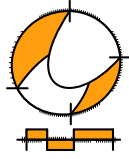
Wiskunde

2 HAVO / VWO

Katern 3 / Opgaven

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Voorwoord 3

1 Exponentiële verbanden 3

- 1.1 Groeifactoren 6
- 1.2 Groeipercntages 12
- 1.3 Exponentiële groei 17
- 1.4 Exponentieel verval 23
- 1.5 Exponentiële vergelijkingen 29
- 1.6 Totaalbeeld 33

2 Statistiek 35

- 2.1 Centrummaten 38
- 2.2 Spreidingsmaten 45
- 2.3 Klassenindeling 52
- 2.4 Schattingen 59
- 2.5 Statistische uitspraken 65
- 2.6 Totaalbeeld 68

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

Begrippen

- ▶ exponentieel verband — groeifactor
- ▶ groeipercentage
- ▶ formule voor exponentiële groei
- ▶ formule voor exponentieel verval
- ▶ exponentiële vergelijking

Activiteiten

- ▶ groei met een vaste groeifactor leren kennen en die groeifactor bepalen vanuit een tabel;
- ▶ groeifactoren en groeipercentages naar elkaar omrekenen;
- ▶ formules voor exponentiële groei opstellen en daar grafieken bij tekenen;
- ▶ formules voor exponentieel verval opstellen en daar grafieken bij tekenen;
- ▶ exponentiële vergelijkingen oplossen door aflezen uit grafieken en inklemmen.

Bij iedere stap verdubbelen



Domein

Grafieken en formules

Hoofdstuk

Exponentiële verbanden

Inhoud

1.1	Groefactoren	6
1.2	Groepercentages	12
1.3	Exponentiële groei	17
1.4	Exponentieel verval	23
1.5	Exponentiële vergelijkingen	29
1.6	Totaalbeeld	33



1.1 Groeifactoren

Verkennen

Opgave V1

Een kaars heeft een lengte van 30 cm. Ieder uur wordt de kaars 3 cm korter.

- a** Vul de tabel verder in.

tijd (in uren)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
lengte kaars (in cm)	30										

- b** Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?

Opgave V2

Je hebt op 1 januari 2015 een bedrag van € 750,00 op je spaarrekening staan, het hele jaar komt er niets bij. Je krijgt op deze spaarrekening 1,4% rente.

- a** Hoeveel euro krijg je er op 1 januari 2016 bij vanwege de rente?
- b** Hoeveel geld heb je op 1 januari 2016 in totaal op je rekening staan?
- c** De rente blijft gelijk en je haalt niets van je spaarrekening af en er komt verder ook niets bij. Hoeveel euro krijg je er op 1 januari 2017 bij?
- d** Leg uit waarom je antwoord bij a niet hetzelfde is als bij c.

Theorie

Opgave 1

Mijnheer en mevrouw Lont sparen en ze hebben allebei € 1600. Mijnheer Lont spaart daar elk jaar € 400 bij. Mevrouw Lont spaart elk jaar een kwart van het bedrag dat ze al heeft.

- a** Hoeveel heeft mijnheer Lont over 2 jaar?
- b** Hoeveel heeft mevrouw Lont over 2 jaar?
- c** Bij wie van beiden is sprake van exponentiële groei?

Opgave 2

Een bedrijfje is gestart met een beginkapitaal van € 300.000. De winst bedraagt in het eerste jaar € 7500. De winst wordt bij het kapitaal gevoegd.

- a** Hoeveel procent winst heeft het bedrijf in het eerste jaar?
- b** Hoe groot is dit kapitaal na 2 jaar als de winst gelijk blijft aan € 7500?
- c** Hoe groot is het kapitaal na 2 jaar als het winstpercentage gelijk blijft?
- d** In welk van beide gevallen is de groei exponentieel?

**Opgave 3**

Een bioloog telt op drie verschillende broedplaatsen het aantal aalscholvers. Na drie jaar heeft hij het volgende resultaat:

plaats	1999	2000	2001
stuwmeer	24	60	60
wad	85	119	167
slufter	45	90	135

- a** Beschrijf voor elk van deze plaatsen de soort groei. In één geval is sprake van exponentiële groei, hoeveel bedraagt daar de groeifactor per jaar?
- b** Hoeveel aalscholvers verwacht je in 2002 op het wad?
- c** Hoeveel aalscholvers waren er vermoedelijk in 2000 op het wad?

Opgave 4

Het aantal inwoners van de USA groeide in de negentiger jaren van de vorige eeuw exponentieel:

jaar	aantal inwoners (mln)	groeifactor
1990	254,11	...
1991	256,65	1,01
1992	259,22	
1993	261,81	
1994	264,43	
1995	267,07	

- a** Bepaal in twee decimalen nauwkeurig de groeifactor per jaar voor de periode van 1992 tot en met 1995. Vul de tabel in.
- b** Waarom is er sprake van exponentiële groei?
- c** Hoe groot zal het aantal inwoners in 1996 geweest zijn?
- d** Hoe groot was het aantal inwoners in 1989?

**Opgave 5**

Bekijk de tabel met de groei van het aantal konijnen a in een natuurgebied in Nederland van 2009 tot 2016.

Stel dat $t = 0$ overeenkomt met 1 januari 2009 en er wordt éénmaal per jaar gemeten.

<i>tijd t (jaar)</i>	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
<i>aantal a</i>	1568	1929	2372	2918	3589	4415	5430	6679

- a** Laat zien dat het aantal konijnen de hele periode 2009–2016 met een vaste groeifactor per jaar toeneemt.
- b** Hoeveel konijnen verwacht je in 2017?
- c** Hoeveel konijnen verwacht je in 2020?

Opgave 6

Op een spaarrekening staat een bedrag van € 100,00 tegen een rente van 4% per jaar. De groei van het kapitaal is exponentieel. Bekijk de tabel.

Hierin is K het kapitaal in euro en t de tijd in jaar.

<i>tijd t (jaar)</i>	0	1	2	3	4	5	...	20
<i>kapitaal K (€)</i>	100,00	...	108,16	112,49	219,11

- a** Bepaal de groeifactor per jaar. Rond af op twee decimalen.
- b** Vul de tabel verder in voor de jaren $t = 0$ tot en met $t = 5$.
- c** Bekijk de tabel. Op $t = 15$ is het kapitaal gegroeid tot € 180,09. Laat met een tabel zien hoe je dit berekent.

Opgave 7

Gebruik de tabel uit **Voorbeeld 2** met de exponentiële groei van de wereldbevolking. Rond steeds af op twee decimalen.

- a** Bereken de groeifactor over de periode tussen 1800 en 1850.
- b** Bereken de groeifactor over de periode tussen 1870 en 1880.
- c** Bereken de groeifactor over de periode tussen 1800 en 1880.
- d** Hoeveel inwoners waren er in 1920?

**Opgave 8**

In landen met een hoge groeifactor neemt de bevolking snel exponentieel toe. Vaak zijn dat juist de armste landen. China heeft de bevolking in 1970 geboortebeperking opgelegd. Per gezin maximaal één kind. De groeifactor van de bevolking is daar sindsdien laag, namelijk 1,01.

Hier zie je de gegevens per 1 januari van het genoemde jaar van enkele landen.

land	aantal inwoners 2015	aantal inwoners 2016
Congo-Kinshasa	79375136	82470766
Nigeria	18045729	18406644
China	1367485388	

- a** Bereken de groeifactor per jaar in Congo-Kinshasa.
- b** Bereken de groeifactor per jaar in Nigeria.
- c** Bereken het te verwachten aantal inwoners in China in 2016.
- d** Hoeveel inwoners verwacht je in Congo-Kinshasa in 2018? Rond af op miljoenen.

Verwerken**Opgave 9**

Er is een duidelijk verschil tussen lineaire en exponentiële groei.

- a** Wat blijft bij lineaire groei gelijk?
- b** Wat blijft bij exponentiële groei gelijk?

Opgave 10

Bedenk van de volgende situaties of sprake is van lineaire of exponentiële groei.

- a** Het aantal vlinders neemt jaarlijks met 0,4% toe.
 - A.** Lineaire groei
 - B.** Exponentiële groei
- b** De afstand van een boot tot de kust neemt toe met 25 mijl per uur.
 - A.** Lineaire groei
 - B.** Exponentiële groei
- c** Het weefsel van een wever groeit in een uur met 3 cm.
 - A.** Lineaire groei
 - B.** Exponentiële groei



- d** Van een fruitboom worden elk jaar van elke tak twee nieuwe takken behouden. Tel het aantal eindtakken.
- A.** Lineaire groei
B. Exponentiële groei

Opgave 11

Bekijk de tabel.

tijd t in dagen	0	1	2	3	4	5	6	7
aantal a	483	532	591	660	732	811	903	1002

- a** Laat met berekeningen zien dat hier (bij benadering) sprake is van exponentiële groei.
- b** Welk groeipercentage hoort er bij de tabel?
- c** Welk aantal verwacht je als $t = 9$?
- d** Wanneer komt het aantal voor het eerst boven de 2000?

Opgave 12

De prijzen van levensmiddelen en luxe artikelen stijgen voortdurend. Daardoor wordt geld steeds minder waard. Het percentage waarmee de prijzen stijgen heet de prijsindex. Economen proberen de prijsindex laag te houden.

- a** Hoeveel kost een artikel van €1000,00 na 1 jaar als de prijsindex 2,4% bedraagt?
- b** En hoeveel na 2 jaar met een gelijkblijvende prijsindex?
- c** Wanneer zal de prijs over twee jaar hoger zijn: als de prijsindex per jaar 2,4% is of als de prijsindex per twee jaar 4,8% is?
- d** Hoeveel jaar zal het duren voor het artikel dat € 1000,00 kost, boven de € 1100,00 gaat kosten? Ga ervan uit dat de prijsindex 2,4% blijft.

Opgave 13

De bevolking van een stad Z bedraagt nu ongeveer 20000 mensen. Dat aantal groeit met 4% per jaar.

- a** Maak een bijbehorende tabel van het aantal mensen in Z met als tijd $t = 0, 1, 2$ en 3 jaren.
- b** Vul aan: Of er in een tabel sprake is van exponentiële groei kun je nagaan door ...
- c** Teken de grafiek die hoort bij de tabel bij a.

Opgave 14

Jan neemt een vel papier van het formaat A4. Hij scheurt het doormidden en legt de beide helften op elkaar. Hij scheurt de lagen nogmaals doormidden en legt de beide helften op elkaar. Dat doet hij nog vier maal. Als hij dan de helften op elkaar heeft gelegd, krijgt hij de lagen niet meer doormidden gescheurd.

- a** Hoeveel lagen papier heeft hij inmiddels op elkaar?



- b** Leg uit dat het aantal lagen papier exponentieel groeit.
- c** Hoeveel bedraagt het vaste groeipercentage?

Toepassen

Opgave 15: Groei wereldbevolking in de 20e eeuw

In de tabel en de grafiek is de bevolkingsgroei van de wereldbevolking in de 20^e eeuw en het begin van de 21^e eeuw weergegeven.

<i>tijd (jaar)</i>	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
<i>bevolking (mld)</i>	1,65	1,75	1,86	2,07	2,30	2,54	3,03	3,70	4,45	5,29	6,12	6,91

- a** Teken een bijpassende grafiek. Geeft de grafiek een lineair of een exponentieel verband weer? Licht je antwoord toe.
- b** Bereken de toename vanaf 1970 per tien jaar. Rond af op één decimaal.
- c** Laat zien, dat de toename van 1900 tot 1950 per tien jaar exponentieel is. Licht je antwoord toe met een berekening en rond de groeifactor af op één decimaal.
- d** Klopt de bij c berekende groeifactor per tien jaar in één decimaal ook voor de periode 1950—1970?
- e** Beantwoord vraag a nog eens met de berekeningen bij b en c.
- f** Hoe groot is de wereldbevolking in 2030 als de groei in hetzelfde tempo doorgaat? Rond af op tientallen miljoen mensen.

Opgave 16: Kettingbrief

Iemand stuurt een brief naar 5 andere personen. In de brief staat de opdracht een kopie van de brief binnen een week weer naar 5 andere personen te sturen. Dus wordt het versturen van de brief telkens herhaald. Je noemt dit een kettingbrief. Als iedereen blijft meedoen en verschillende mensen niet naar dezelfde personen een brief sturen, groeit het aantal deelnemers aan een kettingbrief explosief. Ga daar in deze opgave van uit.

- a** Leg uit dat hier sprake is van exponentiële groei van het aantal personen dat per keer een brief krijgt.
- b** Hoe groot is de groeifactor?
- c** De personen die een brief ontvangen van de vijf personen die de initiatiefnemer van de kettingbrief heeft aangeschreven, horen bij de tweede ronde.
Hoeveel mensen zitten er in de tweede ronde?
- d** In welke ronde worden er 625 brieven verstuurd?
- e** Hoeveel brieven zijn er dan totaal verstuurd?
- f** Leg uit waarom zo'n kettingbrief op den duur niet langer kan worden voortgezet, zelfs niet als iedereen wel een keer zou willen meedoen.

1.2 Groeipercentages

Verkennen

Opgave V1

Je hebt op 1 januari 2015 een bedrag van € 750,00 op je spaarrekening staan, het hele jaar komt er niets bij. Je krijgt op deze spaarrekening 1,4% rente per jaar.

- a** Op 1 januari 2016 krijg je de rente uitbetaald en heb je € 760,50 op je rekening staan. Reken na of het rentepercentage klopt.
- b** Op 1 januari 2017 krijg je opnieuw de rente uitbetaald en heb je € 771,15 op je rekening staan. Is het percentage rente veranderd?
- c** Welke groeifactor hoort bij dit percentage? Hoe bereken je daarmee hoeveel geld je op 1 januari 2018 op je rekening hebt staan?

Theorie

Opgave 1

Bestudeer de [Uitleg](#).

Vaak is bij een nieuwe virusziekte het groeipercentage van het aantal besmettingen groter, soms wel 12% per dag in dichtbevolkte gebieden.

- a** Hoeveel bedraagt in dit geval de groeifactor per dag?
- b** Hoeveel bedraagt in dit geval de groeifactor per week?
- c** Hoeveel bedraagt in dit geval het groeipercentage per week?

In een dichtbevolkt gebied zijn op zekere dag 453 mensen besmet met de virusziekte met een groeipercentage van 12% per dag.

- d** Hoeveel besmettingen zijn er na een week?

Opgave 2

Door energieverbruik voor verwarming en industrie wordt koolstofdioxide aan de lucht toegevoegd. Die toevoeging veroorzaakt het zogeheten broeikaseffect. Elke tien jaar neemt de hoeveelheid kooldioxide met 5% toe.

- a** Hoe groot is de groeifactor per tien jaar?
- b** In 1990 was de uitstoot 6090 Megaton. Hoe groot was de uitstoot in 2000?
- c** Hoe groot zal de uitstoot zijn geweest in 2020?



Opgave 3

Bekijk de tabel in **Voorbeeld 1**.

Geef van elk werelddeel de groeifactor per jaar.

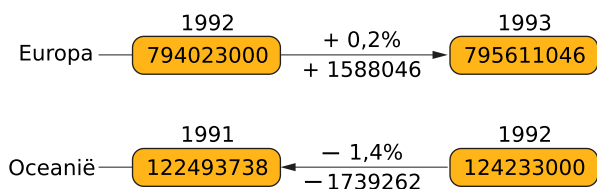
Opgave 4

Bekijk de tabel in **Voorbeeld 1**. Gebruik bij het beantwoorden van deze vragen de bijbehorende groeifactoren.

- a Hoe groot was het aantal inwoners in Europa in 1993?
- b Hoe groot was het aantal inwoners in 1991 in Oceanië?

Opgave 5

Barbara rekent liever met de vertrouwde procenten.



Welke fout maakt Barbara in haar berekening?

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a Hoe groot is de groeifactor per jaar van Kongo?
- b Bereken het groeipercentage gerekend over tien jaar van Kongo.

Opgave 7

De Club van Rome doet voorspellingen over de wereldbevolking in de eenentwintigste eeuw. In Afrika is de bevolkingsgroei 2,7% per jaar.

- a Bereken de grootte van de bevolking van Afrika over tien jaar na 1992. Gebruik hiervoor de tabel. Geef je aantallen in duizendtallen nauwkeurig, maar reken met alle cijfers door. Let erop dat de tabel met twee jaar verspringt.

jaartal	1992	1994	1996	1998	2000	2002
Afrika	664439000					

- b Bereken de groeifactor gerekend over tien jaar.
- c Bereken het groeipercentage per tien jaar.



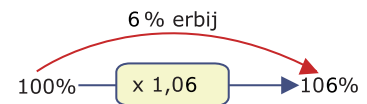
- d** Bereken het aantal inwoners in Afrika in de komende jaren. Vul de tabel in, geef ook nu de aantallen in duizenden.

jaartal	2002	2012	2022	2032	2042
Afrika					

Verwerken

Opgave 8

Bekijk de figuur.



- a** Hoe bereken je de groeifactor vanuit het groeipercentage?
- b** Hoe bereken je vanuit de groeifactor het groeipercentage?
- c** Je vermenigvuldigt met de groeifactor om de waarde een tijdseenheid verder te berekenen. Wat moet je doen als je een tijdseenheid teruggaat?

Opgave 9

Bepaal in de volgende gevallen groeifactor en/of groeipercentage.

- a** Een kapitaal van € 1000,00 groeit met 4% per jaar.
- b** Het aantal vogels van een bepaalde soort is in een natuurgebied in de afgelopen tien jaar wel 1,5 keer zo groot geworden.

Opgave 10

In een weide staan ongeveer 600 paardenbloemen. Vorig jaar waren er ongeveer 500. Verondersteld wordt dat het aantal met een vast percentage groeit.

- a** Hoe groot is de groeifactor per jaar?
- b** Hoe groot is het groeipercentage?
- c** Hoeveel paardenbloemen zullen er over twee jaar zijn?
- d** Hoeveel paardenbloemen waren er drie jaar geleden?

Opgave 11

In het begin van een griep epidemie groeit het aantal ziektegevallen exponentieel. In een dichtbevolkte stad worden in de eerste week van februari 2346 ziektegevallen gemeld. De groeifactor per week is 1,45.

- a** Hoeveel bedraagt het groeipercentage per week?
- b** Bereken het aantal ziektegevallen een week later.
- c** Bereken het aantal ziektegevallen in de eerste week van maart als de ziekte zich in dit tempo blijft uitbreiden.



Opgave 12

Het aantal personenauto's groeit exponentieel met de groei van de wereldbevolking mee. Het groeipercentage per drie jaar is 15%.

- a Hoeveel bedraagt de groeifactor per drie jaar?
- b Is de groei per jaar groter dan, kleiner dan of gelijk aan 5%? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.
- c Maak een schatting van het percentage per jaar in tienden van procenten nauwkeurig.

Opgave 13

Iemand betaalt voor een studie € 3000,00 en sluit daarvoor een lening af. De rente is 0,5% per maand. De studieschuld wordt vier jaar na het afsluiten van de lening vastgesteld.

- a Hoe groot is de groeifactor per maand?
- b Bereken het bedrag dat na een jaar verschuldigd is.
- c Hoeveel procent is de schuld in een jaar gestegen?
- d Bereken de uiteindelijke studieschuld na vier jaar.
- e Hoeveel procent rente betaal je dus over die vier jaar?

Toepassen

Opgave 14: Het Aziatisch lieveheersbeestje

Het Aziatisch veelkleurig lieveheersbeestje is bezig met een gigantische opmars. Nederland is al geheel gekoloniseerd en de soort rukt nog verder naar het noorden op. In gebieden waar de soort nieuw opduikt, zien we het voor kolonisatie gebruikelijke verloop. Aanvankelijk neemt de soort langzaam toe, om plotseling exponentieel te groeien. Deze groei is eindig, meestal daalt de stand weer om vervolgens op een lager pitje door te lopen.



Op dit moment groeit het aantal lieveheersbeestjes in gebied A exponentieel met 5% per maand. Een maand geleden waren er in gebied A 250 lieveheersbeestjes.

- a Hoe groot is de groeifactor per maand?
- b Hoeveel lieveheersbeestjes zijn er op dit moment?
- c Hoeveel lieveheersbeestjes waren er 2 maanden geleden?
- d Wanneer komt het aantal lieveheersbeestjes voor het eerst boven de 500?
- e Hoe groot is de groeifactor per jaar?
- f Met hoeveel procent neemt het aantal lieveheersbeestjes in een jaar toe?



Opgave 15: Hypotheek

De meeste mensen die een huis kopen, lenen daarvoor geld bij een bank. Zo'n lening wordt een hypotheek genoemd. Er zijn verschillende hypotheekvormen. In deze opgave gaat het over een aflossingsvrije hypotheek. Je leent bij een bank voor 30 jaar een bedrag. Over dat bedrag betaal je elk jaar hypotheekrente aan de bank, maar je betaalt niets terug van het geleende bedrag. Na afloop van de 30 jaar betaal je het bedrag in één keer terug. Daar moet je dus voor sparen in die 30 jaar.

Mevrouw Everts heeft lang geleden een huis van € 250.000 gekocht. Ze heeft een aflossingsvrije hypotheek van € 250.000 met een looptijd van 30 jaar tegen een rentepercentage van 5,4% per jaar.

Van de belastingdienst krijgt ze elk jaar een deel van de betaalde hypotheekrente terug. Hoeveel je terugkrijgt, hangt af van je inkomen. Mevrouw Everts krijgt 30% van de betaalde hypotheekrente terug.

- a** Bereken voor mevrouw Everts hoeveel euro de jaarlijkse hypotheekrente na belastingterug-gave bedraagt.

Voordat zij het huis kocht, had ze € 40.000 gespaard. Dit bedrag heeft ze in een (belastingvrij) beleggingsfonds gestort. Zij hoopt dat dit bedrag na 30 jaar tot € 250.000 is gegroeid, zodat ze in één keer het geleende bedrag kan aflossen.

- b** Maak een schatting van het percentage waarmee de € 40.000 dan per jaar moet toenemen, uitgaande van exponentiële groei. Geef je antwoord in tienden van procenten nauwkeurig.

1.3 Exponentiële groei

Verkennen

Opgave V1

Je hebt op 1 januari 2015 een bedrag van € 750,00 op je spaarrekening staan, het hele jaar komt er niets bij. Je krijgt op deze spaarrekening 1,4% rente.

- a** In de vorige paragrafen heb je al berekend hoeveel geld er op 1 januari 2016 en op 1 januari 2017 op je bankrekening staat. Schrijf de twee berekeningen die daarbij horen eens onder elkaar, en zet die voor 1 januari 2018 er ook onder.
- b** Wat blijft er bij de drie berekeningen steeds hetzelfde?
- c** In een formule blijven de getallen staan die steeds hetzelfde zijn. Getallen die steeds veranderen noemen we 'variabelen', deze krijgen in een formule een letter.

Probeer een formule te maken waarmee je het bedrag op je spaarrekening kunt berekenen.

Theorie

Opgave 1

Een bioloog telt vijf jaar lang het aantal van een bepaalde vogelsoort. In de tabel zie je zijn gegevens.

jaar	2011	2012	2013	2014	2015
aantal vogels	3045	3350	3685	4053	4458

- a** Neem $t = 0$ in 2011. Hoeveel is de 'beginhoeveelheid'?
- b** Er is sprake van exponentiële groei. Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar?
- c** Leid de formule af van de groei van de vogelpopulatie V .
- d** Hoeveel vogels zou deze bioloog in 2026 moeten aantreffen?

Opgave 2

Een bacterie van een bepaalde soort deelt zich elke 15 minuten. Een onderzoeker volgt het aantal bacteriën B vanaf een bepaald tijdstip $t = 0$, met t in uren. Op $t = 0$ zijn er 100 bacteriën.

- a** Stel een formule op voor B afhankelijk van t .
- b** Hoeveel bacteriën zijn er na 2 uur?
- c** Hoe lang duurt het voor er meer dan 100 miljoen bacteriën zijn?

**Opgave 3**

Stel er zijn in een bepaald gebied 174 konijnen en de groeifactor van het aantal konijnen is 1,05 per jaar.

- a** Stel een formule op voor het aantal konijnen K na t jaar.
- b** Hoeveel konijnen zijn er na vijftien jaar? Gebruik de formule, rond het aantal konijnen af op tientallen.

Opgave 4

Een bioloog telt vijf jaar lang het aantal van een hazensoort in de duinen bij Wassenaar. Bekijk de gegevens in de tabel.

<i>tijd (jaar)</i>	2011	2012	2013	2014	2015
<i>aantal hazen</i>	30045	32298	34721	37325	40124

- a** Stel een formule op voor de groei van de hazenpopulatie H met $t = 0$ in 2011. Geef de groeifactor per jaar in drie decimalen nauwkeurig.
- b** Hoeveel hazen treft deze bioloog in 2020 aan? Rond het aantal af op honderdtallen.

Opgave 5

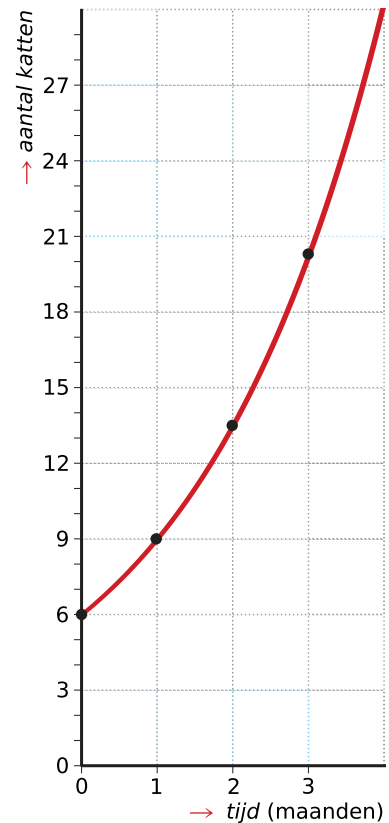
Bekijk de formule in [Voorbeeld 2](#).

- a** Bereken met de formule hoeveel inwoners de Nederlandse stad in 2035 heeft. Rond af op duizendtallen.
- b** Bereken met de formule hoeveel inwoners de Congolese stad in 2035 heeft.
- c** Welke bevolkingsaantallen hebben deze steden in 3000 als de groei zo doorgaat?



Opgave 6

Een hondenopvangcentrum bouwt de service uit met de opvang van katten. Dat moet zich langzaam opbouwen, maar de kattenservice groeit exponentieel, zie de grafiek.



- a** Lees de waarde bij $t = 0$ uit de grafiek af.
- b** Lees uit de grafiek de groeifactor per maand af. Rond af op één decimaal.
- c** Stel een formule op bij deze exponentiële groei.
- d** Bereken het te verwachten aantal katten na één jaar.

Opgave 7

Op 1 januari 2020 waren er 850 mensen in een bepaald gebied besmet met Covid-19. Dagelijks nam het aantal besmettingen met 3,5% toe.

- a** Geef de groeifactor per dag.
- b** Stel een formule op voor de groei van het aantal besmettingen A .
- c** Vul de tabel in met behulp van de formule. Let op! Reken met onafgeronde getallen door.

t (dagen na 1 jan.2020)	0	1	2	3	4	5
A	850					

- d** Teken een grafiek bij de tabel. Kies geschikte stapgroottes bij de assen. Op de y -as zet je het aantal besmettingen, begin te tellen vanaf 850. Op de x -as zet je de dagen. Bedenk dat voor $t = 0$ geldt dat het 1 januari is.
- e** Hoeveel mensen waren er aan het eind van januari 2020 in dit gebied besmet met Covid-19?
Er wordt aangenomen dat de besmetting al eind 2019 in dit gebied is begonnen. Neem aan dat ook in de periode voor 1 januari 2020 dezelfde besmettingsfactor van 3,5% gold.
- f** Hoeveel mensen waren er op 30 december in dit gebied besmet met Covid-19?



Verwerken

Opgave 8

Het aantal inwoners groeit exponentieel met de formule $A = b \cdot g^t$.

Hierin is A het aantal inwoners en t de tijd in jaar.

Op $t = 0$ zijn er 7000 inwoners. Het groeipercentage is 3% per jaar.

Kies het juiste antwoord.

- a** Hoe groot is het begingetal b ?
- A. 1,03
 - B. 3
 - C. 7000
- b** Hoe groot is de groeifactor g ?
- A. 1,0
 - B. 1,03
 - C. 1,07
- c** Welke formule hoort bij dit exponentiële verband?
- A. $A = 7000 \cdot 1,03^t$ met A het aantal inwoners en t de tijd in jaar.
 - B. $A = 1,03 \cdot 7000^t$ met A het aantal inwoners en t de tijd in jaar.
 - C. $A = 7000 \cdot 1,03^t$ met A het aantal inwoners en t de tijd in maanden.
- d** Hoe groot is het aantal inwoners op $t = 2$?
- A. 7210
 - B. 7426
 - C. 14420

Opgave 9

Als dieren uit andere streken in het wild worden losgelaten, kunnen ze een plaag worden, omdat ze geen natuurlijke vijanden hebben. Zo is op een eiland een konijnenplaag ontstaan. Vijf jaar geleden waren er 9000 konijnen geteld, nu zijn er 12600. Het aantal konijnen K groeit exponentieel.

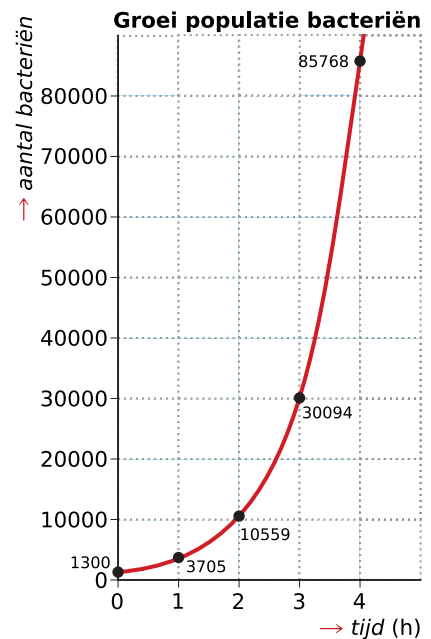
- a** Stel de formule op voor K met als tijdseenheid vijf jaar. Neem aan dat vijf jaar geleden $t = 0$, dan is nu $t = 1$.
- b** Maak een tabel bij deze formule vanaf $t = 0$ tot en met 25 jaar daarna en teken de bijbehorende grafiek.
- c** Hoeveel jaar na de eerste telling zijn er meer dan 100.000 konijnen op dit eiland?



Opgave 10

De grafiek geeft een exponentieel verband weer van de groei van een populatie bacteriën per uur.

Stel de formule op die bij de grafiek hoort, met A het aantal bacteriën.



Opgave 11

Duizenden ratten eten in een gebied in Afrika alles op wat ze tegenkomen. De ratten eten ook de verbouwde gewassen op, zodat de inwoners vrezen voor een gebrek aan voedsel. Op 1 januari 2000 heeft men geschat dat er in een bepaald gebied in Afrika ongeveer 5000 ratten leven. Het aantal ratten neemt elk half jaar met 30% toe.

- a** Geef de formule voor het aantal ratten R en de tijd t in halve jaren na 1 januari 2000.
- b** Bereken het aantal ratten op 1 juli 2016. Rond af op duizendtallen.
- c** Bereken met hoeveel procent het aantal ratten is toegenomen op 1 januari 2001 in vergelijking met 1 januari 2000.
- d** Bereken in welk jaar het aantal ratten voor het eerst meer dan 1 miljard is als er niets tegen de exponentiële groei ondernomen wordt.

Opgave 12

Een schip heeft olie op zee geloosd. De olievlek groeit elk uur ongeveer met een kwart van zijn oppervlakte. Als hij wordt ontdekt is de vlek 50000 m^2 groot.

- a** Stel de formule op voor het olieoppervlak O afhankelijk van de tijd t in uren.
- b** Maak een grafiek van de groei van de olievlek gedurende een periode vanaf 3 uur vóór tot 3 uur na het ontdekken van de ramp.
- c** Hoe groot zal de vlek 12 uur na het ontdekken ervan zijn geworden? Rond af op honderdtallen.
- d** De olie werd 10 uur geleden geloosd. Hoe groot was de vlek toen? Rond af op tientallen.



Toepassen

Opgave 13: Radioactief uranium

Bij radioactief uranium komen bij splijting van de kern twee kleine deeltjes vrij, die in staat zijn om bij botsingen met een uraniumkern een nieuwe splijting te veroorzaken. Dat is het principe van de eerste atoombom. Bij de splijting komt namelijk heel veel energie vrij.

- a Van elke tien kernen die splijten zullen zeventien deeltjes binnen 0,01 microseconde een nieuwe kern splijten. Ga uit van tien kernen op $t = 0$ en stel de formule op voor het aantal splijtende kernen R met als tijdseenheid 0,01 microseconde.
- b Hoeveel kernen zullen na 1 microseconde splijten?

Opgave 14: Reuzenpadden in Australië

In 1935 werden 102 reuzenpadden uit Hawaï overgebracht naar Australië. In 2021 waren de dieren verspreid over een gebied van 0,5 miljoen km^2 met gemiddeld 2000 exemplaren per hectare (hm^2).

- a Bereken het aantal reuzenpadden in 2021 in Australië in miljoen.

De populatie reuzenpadden is exponentieel gegroeid van 1935 tot 2021.

- b Controleer dat het groeipercentage per jaar van het aantal reuzenpadden in Australië ongeveer 27,2 is.
- c Geef de formule voor de groei van het aantal reuzenpadden in Australië in de periode 1935 tot 2021.
- d De exponentiële groei zet op deze manier door. Het aantal reuzenpadden per hectare blijft echter ongeveer gelijk. Wanneer zullen de reuzenpadden zich over een oppervlakte van 2 miljoen km^2 verspreid hebben?



1.4 Exponentieel verval

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de volgende tabel over het aantal dieren van een bepaalde soort in het wild.

Jaar	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Aantal dieren	4450	3961	3525	3137	2792	2485	2212	1968	1752

- a Bereken de groeifactor per jaar. Wat valt je op?
- b Hoe zou je dit kunnen verklaren?
- c Met hoeveel procent neemt het aantal dieren ieder jaar af?
- d Hoeveel dieren zijn er nog over in 2025 als het zo doorgaat?

Theorie

Opgave 1

Het aantal dieren A van een bedreigde soort bestond in 2013 nog uit 25000 exemplaren. De populatie nam met 8% per jaar af.

- a Is er sprake van exponentieel verval? Licht je antwoord toe.
- b Hoeveel bedraagt de groeifactor g per jaar?
- c Geef de formule voor het verloop van de populatie A afhankelijk van de tijd t .
- d Vul de tabel in ($t = 0$ in 2013) en teken een bijpassende grafiek.

<i>tijd t (jaar)</i>	0	4	8	12	16	20
<i>aantal dieren A</i>	25000					

- e Lees uit de grafiek af in welk jaar de populatie gehalveerd is.
- f Wordt het aantal dieren ooit 0 als het verval zo doorgaat?



Opgave 2

In de Duitse stad Hameln groeide ooit (in 1284) het aantal ratten exponentieel.

jaartal	1282	1283	1284
aantal ratten ($\times 100$)	400	480	576

Het gemeentebestuur wilde vanaf 1284 door inzet van een rattenvanger een even grote afname in procenten bewerkstelligen als de toename in de jaren daarvoor.

- Gebruik de aantallen voor 1282 en 1283 en bereken de groeifactor van de toename in een decimaal nauwkeurig.
- Hoe groot wordt de groeifactor bij een even grote procentuele afname vanaf 1284?
- Stel een formule op voor het aantal ratten R , met het aantal jaar t als tijdseenheid. Stel 1 januari 1284 op $t = 0$.
- Zijn er twee jaar na het begin van bestrijding weer evenveel ratten als twee jaar voor het begin?

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** de ontbossing op het eiland Borneo.

- Waarom ligt de groeifactor bij de afname van de oppervlakte van het regenwoud in het voorbeeld tussen 0 en 1?
- Laat met een berekening zien dat de gevonden groeifactor overeenkomt met de halvering van het bosgebied tussen 1950 en 2005.
- Als de afname van het regenwoud op Borneo zo doorgaat, hoeveel km^2 is er dan in 2030 nog op Borneo?
- Hoeveel procent van de hoeveelheid regenwoud in 1950 is er dan verdwenen?

Opgave 4

De populatie van bedreigde diersoort B bestond in 2008 uit 43000 exemplaren. De populatie nam 11% per jaar af.

- Is hier sprake van exponentiële toename of van exponentieel verval?
- Geef de formule voor het verloop van de populatie B afhankelijk van de tijd t in jaar.
- Teken de grafiek voor het verloop van de populatie gedurende de eerste twintig jaar.
- Lees uit de grafiek af in welk jaar de populatie gehalveerd is.

Opgave 5

Bekijk de tabellen in **Voorbeeld 2**.

- Geef een formule voor de hoeveelheid schol S na t jaar.
- Geef een formule voor de hoeveelheid kabeljauw K na t jaar.



c Vul de tabel in.

<i>tijd</i> (jaar)	<i>schol</i>	<i>kabeljauw</i>
2001		
2002		
2003		
2004		
2005		

d In welk jaar is het minimum voor kabeljauw overschreden?

e Bereken in welk jaar het minimum voor schol wordt overschreden.

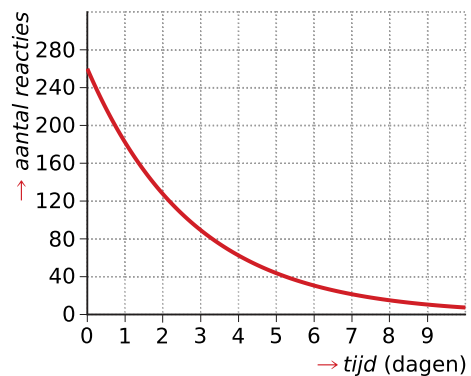
Verwerken

Opgave 6

Bekijk de grafiek met het aantal reacties op een blog op internet.

Welke uitspraken zijn waar?

- A.** Er is sprake van een exponentiële toename.
- B.** Er is sprake van een exponentiële afname.
- C.** Er is sprake van exponentieel verval.
- D.** Er is sprake van een lineaire afname.



Opgave 7

Het aantal inwoners van een dorp op $t = 0$ is 7000. Dit dorp heeft te maken met procentuele afname van het aantal inwoners van ongeveer 0,5% per jaar. Je kunt bij dit verval een formule opstellen van de vorm $A = b \cdot g^t$.

a Welk getal is b ?

- A.** 0
- B.** 0,5
- C.** 7000

b Welk getal is g ?

- A.** 0,5
- B.** 0,995
- C.** 1,005

c Welke formule is de juiste?

- A.** $A = 0,5^t$
- B.** $A = 7000 \cdot 0,995^t$
- C.** $A = 1,05 \cdot 7000^t$



- d** Bereken A voor $t = 2$ afgerond op een geheel getal.
- A.** 1750
 - B.** 3500
 - C.** 6930

Opgave 8

Emke blaast een ballon op. De inhoud V is na het opblazen 9,2 liter. De ballon loopt daarna langzaam leeg. Er is sprake van exponentieel verval met formule $V = 9,2 \cdot 0,975^t$.

Hierin is V de inhoud van de ballon in liter en t de tijd in uur.

- a** Geef het begingetal b en de groeifactor g .
- b** Hoe zie je aan de formule dat er sprake is van exponentieel verval?
- c** Bereken hoeveel liter lucht er na drie uur nog in de ballon zit. Rond af op één decimaal.
- d** Met hoeveel procent neemt de inhoud per uur af?
- e** Om te voorkomen dat de inhoud minder wordt dan 7,5 liter, moet de ballon weer op tijd worden opgeblazen. Na hoeveel uur moet de ballon weer opgeblazen worden?

De ballon heeft na enige tijd een inhoud van 7,5 liter. Op dat moment blaast Emke de ballon weer op. Met iedere ademstoot komt er ongeveer 0,3 liter lucht bij. De ballon knalt kapot als de inhoud groter wordt dan 10 liter.

- f** Bereken bij welke ademstoot van Emke de ballon kapot knalt.

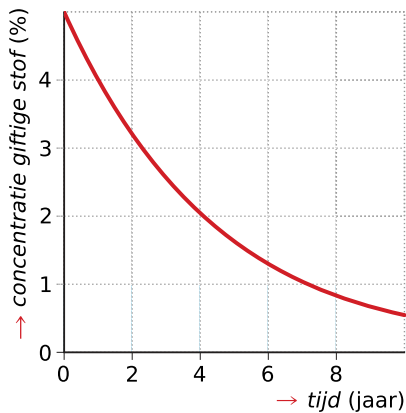
Opgave 9

Kirsten koopt een huis voor € 200.000 en sluit een hypotheek af. Zij lost elk jaar 10% van de hypotheek af.

- a** Geef de formule voor het verloop van de hypotheekschuld H afhankelijk van de tijd t in jaar na het afsluiten van de hypotheek.
- b** Teken de grafiek voor het verloop van de hypotheekschuld gedurende de eerste negen jaar.
- c** Lees uit de grafiek af na hoeveel jaar de hypotheekschuld is gehalveerd.
- d** Bereken de hypotheekschuld na 25 jaar.

**Opgave 10**

Met water wordt een giftige stof uit verontreinigde grond gewassen. Een detector houdt de concentratie van de stof in het waswater bij. Die concentratie neemt exponentieel af. Bekijk de grafiek.



Stel een formule op voor de concentratie C van deze stof. Neem als tijdseenheid het aantal jaar nadat met het wassen is begonnen.

Opgave 11

De stof ^{253}Fm (Fermium) wordt kunstmatig gemaakt. Per dag verdwijnt 20% van deze stof vanzelf. Daarom komt de stof niet in de natuur voor.

- Hoe groot is de groeifactor g per dag?
- Stel de formule op voor de overblijvende stof m als er 100 g Fermium wordt gemaakt. Neem de tijd t in dagen.
- Hoeveel gram Fermium is er na 20 dagen over? Rond af op één decimaal.
- Na hoeveel dagen is het overgebleven Fermium uit b gedaald naar minder dan 0,5 gram?



Toepassen

Opgave 12: Opslag kernafval

In 2003 is in Zeeland een gebouw geopend waarin kernafval uit Borssele wordt opgeslagen. Dit afval bestaat uit zes glasblokken met hoogradioactief afval.

In het begin geeft één blok evenveel warmte W af als een kachel van 1800 Watt. Na 100 jaar is de warmteafgifte verminderd tot 180 Watt. De warmteafgifte neemt exponentieel af.



- a** Laat zien, dat dit betekent dat de groeifactor per jaar ongeveer 0,977 is.
- b** Geef de formule waarmee je de warmteafgifte per jaar berekent.
- c** Met hoeveel procent neemt de warmteafgifte per jaar af?

Het gebouw is knaloranje geverfd. In grote groene letters zijn er beroemde formules van Einstein en Planck op aangebracht. Elke tien jaar wordt het gebouw in een iets lichtere tint geschilderd om met de kleurtint de afname van de warmteafgifte aan te geven.

- d** Bereken het percentage waarmee de warmteafgifte in een periode van tien jaar afneemt. Rond af op twee decimalen.
- e** Na hoeveel jaar is de warmteafgifte voor het eerst minder dan de helft van de oorspronkelijke warmteafgifte?

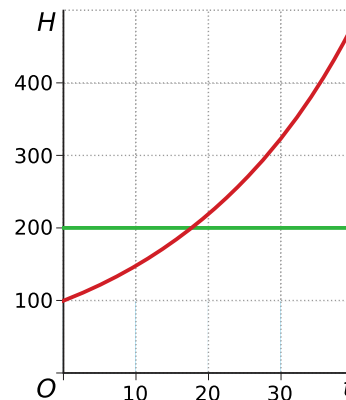
1.5 Exponentiële vergelijkingen

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de grafiek van $H = 100 \cdot 1,04^t$.

Je wilt oplossen $H = 200$.



- Welke vergelijking hoort daar bij?
- Hoe los je zo'n vergelijking op als je de gevraagde t -waarde wilt schatten?
- Hoe los je zo'n vergelijking op als je de gevraagde t in één decimaal nauwkeurig wilt weten?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Bij $t \approx 18$ is de beginhoeveelheid van 100 verdubbeld.

- Voor welke waarde van t is de hoeveelheid opnieuw verdubbeld? Lees je antwoord af uit de grafiek.
- Bereken met behulp van inklemmen wanneer $H = 400$. Geef de waarde van t in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 2

In 2015 had Gilles € 1000 op zijn bankrekening staan. Hij kon toen kiezen uit twee mogelijkheden:

- het volledige bedrag op een spaarrekening zetten tegen 4% rente per jaar;
- € 800,00 voor ten minste tien jaar vastzetten op een rekening die 6% rente per jaar oplevert.

- Stel de formules op van de groei van het kapitaal K_1 en K_2 .
- Bereken van K_1 en K_2 de waarde van het kapitaal in 2025.
- Geef de vergelijking waarmee je het moment kunt berekenen waarop bij beide spaarvormen hetzelfde bedrag op de rekening staat.
- Bereken met een inklemtabel na hoeveel jaar K_1 en K_2 ongeveer hetzelfde opbrengen.

**Opgave 3**

Gebruik de gegevens uit **Voorbeeld 1**.

- a** Stel de vergelijking op waarmee je kunt berekenen wanneer de gebruikte hoeveelheid landbouwgrond gelijk is aan 1 miljard hectare.
- b** Gebruik de grafiek om een schatting te maken van het jaar waarin de 1 miljard hectare wordt bereikt.
- c** Bereken met een inklemtabel in welk jaar de 1 miljard hectare werd bereikt. Rond L steeds af op vier decimalen.

Opgave 4

Een bacterie van een bepaalde soort deelt zich elke 15 minuten in tweeën. Een onderzoeker volgt het aantal bacteriën B vanaf tijdstip $t = 0$ met t in uur. Op $t = 0$ zijn er 100 bacteriën.

- a** Hoe groot is de groeifactor per uur?
- b** Stel de formule op voor het exponentiële verband B afhankelijk van t in uren.
- c** Hoeveel bacteriën zijn er na 2 uur?
- d** Hoeveel uur duurt het voor er meer dan 100 miljoen bacteriën zijn?

Opgave 5

Tijdens het begin van een griep epidemie neemt het aantal ziektegevallen dagelijks met 18% toe. Bepaal zo nauwkeurig mogelijk na hoeveel dagen het aantal zieken is verdubbeld.

Opgave 6

Bekijk de vergelijking: $137 \cdot 1,27^t = 289 + 55 \cdot t$.

- a** Gebruik een grafiek om de oplossing te schatten.
- b** Los de vergelijking op. Rond t af op één decimaal.

Verwerken**Opgave 7**

Los de vergelijking $4 \cdot 1,2^t = 12$ op met behulp van een inklemtabel. Rond t af op één decimaal.

Opgave 8

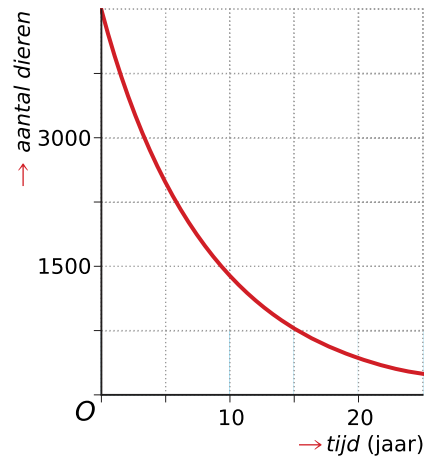
Los op: $137 \cdot 1,27^t = 289 + 55 \cdot t$. Geef t in gehelen.



Opgave 9

Van een bedreigde diersoort in het wild is een formule gemaakt waarmee je per jaar t kunt berekenen hoeveel dieren D er nog zijn: $D = 4450 \cdot 0,89^t$ met $t = 0$ in 2007.

Hier zie je de bijbehorende grafiek.



- a** Bepaal met de grafiek na hoeveel jaar het aantal dieren is gehalveerd.
- b** Na hoeveel jaar is er nog minder dan 25% van de dieren over?

Bekijk de vergelijking $4450 \cdot 0,89^t = 1235$.

- c** Op welke vraag geeft de oplossing van de vergelijking een antwoord?
- d** Wat is het antwoord op die vraag als je het op de maand nauwkeurig wilt weten?
- e** Is het zinvol om dit tot op de maand nauwkeurig te willen weten?

Opgave 10

In een gebied wordt een diersoort met uitsterven bedreigd. Jaarlijks wordt de totale hoeveelheid dieren in dat gebied 12% kleiner.

Bepaal zo nauwkeurig mogelijk na hoeveel jaar nog 10% van deze diersoort in het gebied leeft.

Opgave 11

Stine heeft een salaris van € 2000 per maand. De komende vijf jaar krijgt ze geen loonsverhoging. Maandelijks is zij nu € 1500 aan levensonderhoud kwijt. De kosten voor levensonderhoud gaan per maand met 0,4% omhoog.

- a** Geef de formule voor het bedrag V dat Stine per maand overhoudt na aftrek van de kosten voor levensonderhoud. Neem $t = 0$ op het moment dat levensonderhoud haar € 1500 kost.
- b** Teken een grafiek bij V met t van 0 tot 60 maanden.
- c** In welk jaar houdt Stine minder dan € 150 per maand over? Schat met de grafiek in welk jaar dat zal zijn. Bepaal daarna met een tabel in welke maand precies.



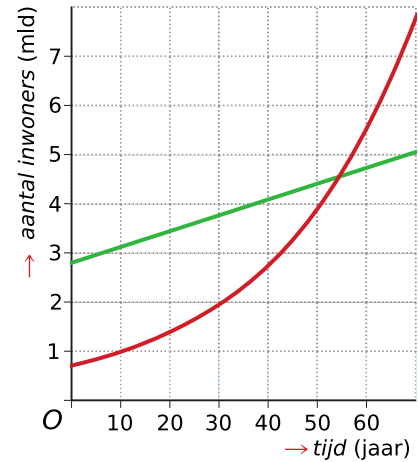
Toepassen

Opgave 12: Wel- en niet-geïndustrialiseerde landen

In 1972 was het totaal aantal inwoners van alle steden in geïndustrialiseerde landen A_i gelijk aan het totaal aantal inwoners van alle steden in niet-geïndustrialiseerde landen A_n : beide 0,7 miljard inwoners.

De steden in de geïndustrialiseerde landen groeiden daarna met 8 miljoen inwoners per jaar. In niet-geïndustrialiseerde landen groeiden de steden met 3,5% per jaar.

Bekijk de grafiek van $A_n = 0,7 \cdot 1,035^t$ en $A_i = 4(0,7 + 0,008t)$.



- Bekijk de vergelijking $0,7 \cdot 1,035^t = 4(0,7 + 0,008t)$. Welke vraag hoort bij deze vergelijking?
- Lees de oplossing van deze vergelijking af uit de grafiek. Welk jaartal hoort bij deze oplossing?
- Bepaal met behulp inklemmen de juiste waarde van t in gehele jaren nauwkeurig en het bijbehorende jaartal.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Groeiverschijnselen komen veel voor. Regelmatig is die groei - zeker gedurende een bepaalde periode - exponentieel. Dat wil zeggen er is sprake van een toename met een vast percentage per tijdseenheid. En zo bestaat er ook exponentieel verval.

De volgende opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Exponentiële verbanden** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- ▶ exponentieel verband — groeifactor
- ▶ groeipercentage
- ▶ formule voor exponentiële groei
- ▶ formule voor exponentieel verval
- ▶ exponentiële vergelijking

Activiteiten

- ▶ groei met een vaste groeifactor leren kennen en die groeifactor bepalen vanuit een tabel;
- ▶ groeifactoren en groeipercentages naar elkaar omrekenen;
- ▶ formules voor exponentiële groei opstellen en daar grafieken bij tekenen;
- ▶ formules voor exponentieel verval opstellen en daar grafieken bij tekenen;
- ▶ exponentiële vergelijkingen oplossen door aflezen uit grafieken en inklemmen.

Opgave 1

Lineaire of exponentiële groei?

- a** Het aantal vlinders neemt jaarlijks met 1,01% toe.
- A.** lineaire groei
 - B.** exponentiële groei
- b** De afstand van een vliegtuig tot de kust neemt toe met 1000 kilometer per uur.
- A.** lineaire groei
 - B.** exponentiële groei
- c** Jeannette breit een sjaal. Elk uur komt er 10 centimeter bij.
- A.** lineaire groei
 - B.** exponentiële groei
- d** Het aantal insecten neemt toe met 5% per dag.
- A.** lineaire groei
 - B.** exponentiële groei

**Opgave 2**

Welke groeifactor hoort bij het groeipercentage of omgekeerd? Geef exacte antwoorden.

- a groeipercentage 18,8%
- b groeifactor 1,032
- c groeipercentage 3,9%
- d groeifactor 3,9
- e groeipercentage 35%
- f groeifactor 1,04
- g groeipercentage 5,5%
- h groeifactor 1,645

Opgave 3

In de beginperiode van een griep epidemie groeit het aantal ziektegevallen exponentieel. In een dichtbevolkte stad worden in de eerste week van februari 4623 ziektegevallen gemeld. Na een week zijn er 7166 ziektegevallen.

- a Hoe groot is de groeifactor per week? Rond af op twee decimalen.
- b Stel een bijpassende formule op voor het aantal ziektegevallen Z afhankelijk van de tijd t in weken. Neem $t = 0$ voor de eerste week van februari.
- c Bereken het aantal ziektegevallen in de eerste week van maart als de ziekte zich in dit tempo uitbreidt.
- d Bereken de groeifactor voor een tijdsperiode van vier weken. Rond af op twee decimalen.

Opgave 4

Levende planten nemen uit de atmosfeer radioactieve koolstof C14 op. Als een plant sterft, verdwijnt de C14 langzaam uit de plant. Van fossiele planten kan de ouderdom worden bepaald door te meten hoeveel procent radioactieve koolstof is overgebleven.

Stel een formule op voor C (het percentage C14 dat overgebleven is) afhankelijk van de tijd t in periodes van 1000 jaar. Per millennium verliest de plant 1,2% C14.

Opgave 5

Gegeven zijn de vergelijkingen $y_1 = 137 \cdot 1,27^t$ en $y_2 = 289 + 55 \cdot t$.

- a Teken y_1 en y_2 in één assenstelsel en schat de oplossing van de vergelijking $y_1 = y_2$.
- b Los de vergelijking op met een inklemtabel. Rond af op één decimaal.



Toepassen

Opgave 6: Noordpoolijs

In de krant stond begin van deze eeuw het volgende artikel:

Noordpoolijs

De ijskap op de Noordpool is in de afgelopen honderd jaar nog nooit zo klein geweest. Als er geen maatregelen worden genomen zal de komende jaren het ijsoppervlak steeds sneller afnemen. Volgens onderzoekers was op 1 september 1975 het ijsoppervlak 7 miljoen vierkante kilometer. Op 1 september 2005 was dit nog maar 5,35 miljoen vierkante kilometer.



- a** Laat met een berekening zien dat tussen 1975 en 2005 de gemiddelde afname van het ijsoppervlak 0,055 miljoen vierkante kilometer per jaar was.
- b** Stel dat het ijsoppervlak tussen 1975 en 2005 lineair afnam en dat dit daarna zo zou blijven doorgaan. Bereken in welk jaar het ijsoppervlak dan verdwenen zou zijn. Schrijf je berekening op.

In werkelijkheid was de afname niet lineair, maar exponentieel. In een tweede artikel stond:

Tussen 1975 en 2005 is het ijsoppervlak elke 10 jaar met 8% afgenomen.

- c** Klopt dat ongeveer met de getallen in het eerste artikel? Laat met een berekening zien hoe je aan je antwoord komt.

De onderzoekers denken dat het ijsoppervlak vanaf 2005 afneemt volgens de volgende formule:

$$N = 5,35 \cdot 0,975^t$$

Hierbij is N het ijsoppervlak in miljoenen vierkante kilometers en t de tijd in jaren na 1 september 2005.

- d** Na 50 jaar zal het ijsoppervlak volgens deze formule ongeveer 1,5 miljoen vierkante kilometer zijn. Bereken na hoeveel jaar het ijsoppervlak volgens deze formule voor het eerst kleiner zal zijn dan 1 miljoen vierkante kilometer. Schrijf je berekening op.

Begrippen

- ▶ frequentietabel — centrummaat — modus — mediaan — gemiddelde
- ▶ boxplot — kwartiel — spreidingsbreedte — (inter)kwartielafstand
- ▶ klassenindeling — klassengrenzen, klassenmidden, klassenbreedte
- ▶ schatten
- ▶ statistisch onderzoek — populatie — steekproef — representatief

Activiteiten

- ▶ gegevens samenvatten in frequentietabellen en beschrijven met behulp van centrummaten;
- ▶ gegevens samenvatten in frequentietabellen en beschrijven met behulp van spreidingsmaten en boxplots;
- ▶ klassenindelingen gebruiken, het gemiddelde schatten;
- ▶ centrummaten en spreidingsmaten schatten vanuit een klassenindeling;
- ▶ kennismaken met statistisch onderzoek, populatie en representatieve steekproef

Cijfers op orde

B1H		ne		en		fa		ak		gs	
leerling	geslacht		RE		RE		RE		RE		RE
1	v	6,7	7	4,4	4	5,6	6	6,6	7	6,8	7
2	v	5,6	6	5,3	5	6,1	6	7,1	7	6,8	7
3	m	8,1	8	6,7	7	5,8	6	7,2	7	7,6	8
4	m	8,5	9	5,1	5	6,1	6	6,1	6	6,1	6
5	m	4,9	5	9,7	10	6,6	7	8,0	8	7,5	8
6	v	6,2	6	9,4	9	7,2	7	6,6	7	7,8	8

Domein

Informatieverwerking

Hoofdstuk

Statistiek

Inhoud

2.1	Centrummaten	38
2.2	Spreidingsmaten	45
2.3	Klassenindeling	52
2.4	Schattingen	59
2.5	Statistische uitspraken	65
2.6	Totaalbeeld	68



2.1 Centrummaten

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de rapportcijfers voor het vak Engels in B1H.

4	5	7	5	10	9	8	4	6	6	7	7	8	3	7
6	6	7	7	9	7	6	7	6	6	8	7	7	8	

- Bereken het gemiddelde van de klas in één decimaal nauwkeurig vanuit de gegeven cijfers.
- Bereken dit gemiddelde nog eens, maar nu nadat je eerst een frequentietabel hebt gemaakt.
- Welk cijfer komt het meest voor Engels voor in B1H?
- Wat geeft de leerlingen van B1H het beste beeld over de behaalde cijfers, het gemiddelde of het cijfer dat het vaakst voor komt? De eerste tabel of de frequentietabel?

Opgave V2

In 2011 was het gemiddelde inkomen per huishouden € 42800,00. In datzelfde jaar was het modale inkomen per huishouden € 32500,00.

- Wat betekent modaal inkomen?
- Wat betekent het dat het gemiddelde inkomen hoger is dan het modale inkomen?
- Welke van beide getallen geeft volgens jou het beste weer hoe het met de inkomens in Nederland zit?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de frequentietabel van de rapportcijfers voor Engels van klas B2F in de [Uitleg](#).

- Reken het daar gegeven gemiddelde zelf na.
- Je ziet hier een staafdiagram dat bij de frequentietabel is gemaakt. Hoe kun je hierin heel snel de modus ontdekken?
- Het gemiddelde is geen cijfer dat door iemand in de klas is behaald. Hoe komt dat?



**Opgave 2**

Dit is een frequentietabel van de cijfers voor Nederlands van klas B2A.

cijfer	frequentie
4	3
5	4
6	8
7	11
8	3
9	1
totaal	

- Hoe kun je bepalen hoeveel leerlingen er in B2A zitten?
- Bereken het gemiddelde rapportcijfer voor Nederlands in B2A in één decimaal nauwkeurig.
- Bepaal de modus voor nederlands in B2A.
- Leg uit waarom de mediaan van de cijfers voor Nederlands in B2A een 6,5 is.

Opgave 3

In deze frequentietabel zie je aantallen leerlingen op vmbo/havo/vwo per onderwijssoort in het schooljaar 2010—2011 volgens het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek). In de tweede kolom zie je hoeveel procent van het totale aantal leerlingen op elke onderwijssoort zit.

	aantal	%
brugjaren	341072	36,3
vwo 3-6	164687	17,5
havo 3-5	151193	16,1
vmbo 3-4	156168	16,6
overig	126414	13,5
	939534	100,0

- Reken de percentages in de tweede kolom na.
- Waarom is het weinig zinvol om hier een gemiddelde te berekenen?
- Waarom kun je geen mediaan berekenen?
- Welk soort voortgezet onderwijs is de modale soort? En waarom had je dat ook wel zonder dat je de frequenties wist kunnen bedenken?

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Rond waar nodig de percentages af op één decimaal.

- Hoeveel procent per klas scoort lager dan de mediaan?
- Hoeveel procent per klas scoort lager dan het gemiddelde?
- Hoeveel procent per klas scoort lager dan de modus?
- Hoeveel procent per klas behaalt precies de modus?
- In welk van beide klassen is het percentage onvoldoendes het grootst?

Opgave 5

Je ziet hier een kruistabel van de cijfers voor de vakken wiskunde en scheikunde in B2D.

		wi							
	B2d	4	5	6	7	8	9	10	
sc	4		1						
	5		2	3	1				
	6	1	4	2	1	1			
	7			1	3	2	1		
	8					2	1		
	9							1	

- Hoeveel leerlingen zitten er in klas B2D?
- Bereken per vak de modus en het gemiddelde cijfer in één decimaal nauwkeurig.



- c** In welk van beide vakken is deze klas gemiddeld beter?
- d** Waaraan zie je dat dit vooral komt door de leerlingen met de hoogste cijfers?

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je een staafdiagram van de groottes van de klassen op twee scholen voor voortgezet onderwijs.

- a** Hoeveel klassen hebben deze scholen?
- b** Maak een dubbele frequentietabel bij het staafdiagram, zodat je de klassengrootte van beide scholen in één tabel kunt bekijken.
- c** Hoeveel leerlingen hebben deze scholen?
- d** Reken nu zelf de gemiddelden na. Ben je het eens met de conclusie?
- e** Op school B wordt besloten om het kleine klasje van 11 leerlingen samen te voegen met een parallelklas van 19. Wat gebeurt er dan met het gemiddelde? En met de modus?
- f** School C heeft hetzelfde gemiddelde aantal leerlingen per klas als school A, maar de modale klassengrootte is 20. Wat zegt dit over school C in vergelijking met de andere twee?

Opgave 7

Deze tabel laat zien hoeveel leerlingen er per dag voor het eerste uur te laat zijn gekomen de afgelopen tijd.

aantal te laat komers	6	7	8	9	10	11	12	13	17
aantal dagen	1	4	3	5	8	11	5	2	1

- a** Van hoeveel schooldagen vind je in deze tabel de aantallen te laat komers?
- b** Hoeveel te laat meldingen waren er gedurende deze telling? Is dat ook gelijk aan het aantal leerlingen dat te laat is gekomen?
- c** Bereken het gemiddelde aantal te laat meldingen (voor het eerste uur) per dag op deze school.

Er blijken een twaalftal regelmatig te laat komers te zijn. Deze leerlingen kwamen in de telperiode gemiddeld 7,5 keer te laat.
- d** Hoeveel wordt het gemiddelde aantal te laat meldingen (voor het eerste uur) per dag als deze groep niet wordt meegeteld?



Verwerken

Opgave 8

Dit zijn de rapportcijfers die in een bepaalde klas voor economie zijn behaald:

7	4	6	6	5	5	7	6	7	9	10	6	8	7
8	6	5	7	5	8	3	7	8	6	6	10	5	7

- Maak een frequentietabel van de rapportcijfers voor economie.
- Bepaal de modus.
- Bepaal de mediaan.

Twee leerlingen die tijdens de toets ziek waren maken een inhaaltoets. Ze halen allebei een zeven.

- Bereken het nieuwe gemiddelde, de nieuwe modus en de nieuwe mediaan.

Opgave 9

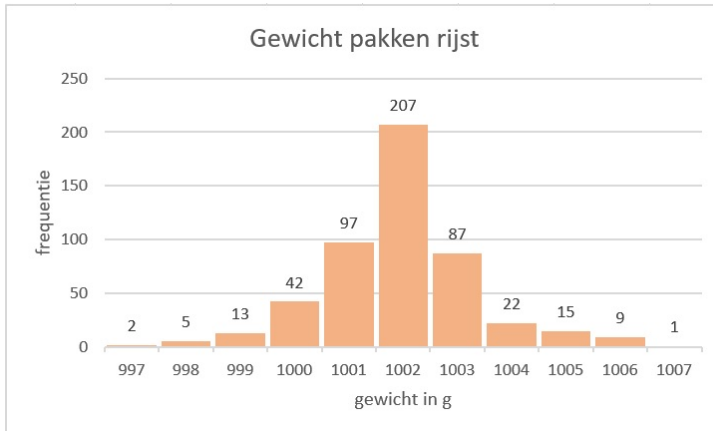
Een centrummaat moet een goede indruk geven van de waarnemingen die je bestudeert. Kies in de volgende gevallen een geschikte centrummaat, en bereken deze maat.

- Erik haalde voor zijn wiskundetoetsen de cijfers 8, 5, 6, 7, 10, 3, 7, 7 en 8.
- De directeur van een onderneming krijgt € 8000 per maand. De vier adjunctdirecteuren ontvangen maandelijks € 3000. De overige dertig werknemers verdienen elk € 1900 per maand.
- Van de docenten van een scholengemeenschap in Overdal komen er 16 te voet naar school, 20 komen met de fiets, 25 met de auto en 37 met het openbaar vervoer.
- De resultaten van een meting van de maximumtemperaturen in een week in juli in graden Celsius waren:

dag	ma	di	wo	do	vr	za	zo
temperatuur in °C	22	23	24	23	23	23	23

**Opgave 10**

In een supermarkt worden pakken rijst verkocht met een gewicht van 1 kg. Elke werkdag wordt een vast aantal pakken gecontroleerd op afwijkend gewicht. In het staafdiagram zijn de resultaten verwerkt van 20 werkdagen.



- Bepaal de modus en de mediaan.
- Hoeveel pakken werden er elke werkdag gecontroleerd?
- Hoeveel procent van de gecontroleerde pakken rijst had een te laag gewicht?
- Bereken het gemiddelde aantal pakken rijst per dag waarvan het gewicht te laag is.
- In totaal zijn in het afgelopen jaar 8500 pakken rijst verkocht. Geef een schatting van het aantal pakken dat minstens het juiste gewicht had.

Opgave 11

Iemand heeft van een aantal doosjes lucifers geteld hoeveel lucifers er in zitten. De resultaten staan in de tabel hier-naast.

- Van hoeveel doosjes lucifers is het aantal lucifers geteld?
- Hoeveel lucifers zijn er in totaal geteld?
- Hoeveel lucifers zitten er gemiddeld in een doosje? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.
- Waarom wist je voordat je de berekening bij c uitvoerde dat het gemiddelde lager moest zijn dan de modus 36?

aantal lucifers	frequentie
31	1
32	3
33	4
34	5
35	7
36	8
37	11
38	6

Opgave 12

Een loterij heeft op een dag aan prijzen gemiddeld € 20000 uitbetaald. De mediaan van die prijzen blijkt € 1500 te zijn.

Geef een verklaring voor het grote verschil tussen die twee centrummaten.



Opgave 13

Een school kent drie rapportperiodes die alle drie even zwaar tellen. Voor wiskunde zijn er de eerste periode drie toetsen gegeven die elk 1 keer, 1 keer en 3 keer meetellen. In de tweede periode zijn er in dat vak twee toetsen gegeven die 2 keer en 3 keer meetellen en in de derde en laatste periode zijn er twee toetsen die 1 keer meetellen en een proefwerk dat drie keer meetelt. Je staat voor wiskunde een 7,2 en alleen het laatste proefwerk moet nog worden gemaakt. De cijfers voor alle toetsen worden in één decimaal nauwkeurig bepaald. Kun je nog een 8 halen als eindcijfer? Laat met een berekening zien welk cijfer je dan voor het laatste proefwerk moet halen.

Opgave 14

In klas V2A zitten 20 leerlingen. Voor een toets Engels scoorde de klas gemiddeld 6,6. Ook klas V2B maakte die toets, maar hier was het gemiddelde cijfer 8,1. Het gemiddelde cijfer van de twee klassen samen was 7,5.

- a Leg uit waarom het gemiddelde niet gelijk is aan $\frac{6,6+8,1}{2} = 7,35$.
- b Hoeveel leerlingen zitten er in klas V2B?
- c De jongens in klas V2A scoorden gemiddeld 6,4 en de meisjes 6,9. Hoeveel jongens zitten er in klas V2A?

Toepassen

Opgave 15: Centrummaten met een spreadsheet

Een spreadsheet (rekenbladprogramma) kan je helpen bij het maken van frequentietabellen en het berekenen van gemiddelden. Bekijk het **Practicum**. Daarin werk je met het een bestand dat is gemaakt voor de spreadsheet waarmee je werkt.

Denk er wel om dat je op een pc of een tablet dit bestand eerst moet downloaden. Er wordt van uit gegaan dat je wel eens eerder met een spreadsheet hebt gewerkt en al weet hoe je met cellen werkt, met formules in cellen werkt, absoluut en relatief kopiëren begrijpt, etc.

- a Maak zelf een frequentietabel van de gehele eindcijfers voor wiskunde van deze groep leerlingen in 4 vwo.
- b Zoek uit hoe je van een rij gegevens het gemiddelde, de modus en de mediaan door Excel kunt laten berekenen. Het gaat met behulp van formules. Zoek een geschikte plek in het Excel-bestand om deze centrummaten neer te zetten.
- c Bereken het gemiddelde voor wiskunde nog eens met behulp van de frequentietabel.
- d Maak vervolgens afzonderlijke groepen van de jongens en de meisjes door te sorteren. Bereken de centrummaten voor deze afzonderlijke groepen en vergelijk ze met elkaar. Maak ook frequentietabellen en staafdiagrammen van de afzonderlijke groepen.



Opgave 16: Geboortemaanden

Werk met hetzelfde Excel-bestand als in de voorgaande opgave. Zet de gegevens over de geboortemaanden op een afzonderlijk werkblad.

- a Maak een frequentietabel van de geboortemaanden van deze groep leerlingen in 4 vwo.
- b Welke centrummaat is hier zinvol?
- c Probeer een conclusie te trekken uit de frequentietabel. Of maak er eerst een staafdiagram van en probeer dan een conclusie te trekken.

Practicum: Statistiek met een spreadsheet

Een **spreadsheet of rekenbladprogramma** kan centrummaten voor je berekenen vanuit de data.

In de volgende practica leer je werken met statistiek in een spreadsheet. Download wel eerst het bijbehorende bestand "Gegevens 154 leerlingen".

- [Data presenteren met behulp van MS-Excel](#)
- [Data presenteren met behulp van Open Office Calc](#)
- [Data presenteren met behulp van Google spreadsheets](#)

2.2 Spreidingsmaten

Verkennen

Opgave V1

In deze tabel hier zie je de cijfers van B1H voor een zevental vakken.

B1H		ne		en		fa		ak		gs		wi		sc	
leerling	geslacht	RE		RE		RE		RE		RE		RE		RE	
1	v	6,7	7	4,4	4	5,6	6	6,6	7	6,8	7	5,6	6	5,8	6
2	v	5,6	6	5,3	5	6,1	6	7,1	7	6,8	7	6,3	6	6,4	6
3	m	8,1	8	6,7	7	5,8	6	7,2	7	7,6	8	5,3	5	5,4	5
4	m	8,5	9	5,1	5	6,1	6	6,1	6	6,1	6	5,6	6	4,3	4
5	m	4,9	5	9,7	10	6,6	7	8,0	8	7,5	8	6,4	6	7,0	7
6	v	6,2	6	9,4	9	7,2	7	6,6	7	7,8	8	7,1	7	7,1	7
7	m	7,1	7	7,9	8	7,9	8	6,6	7	6,6	7	7,4	7	6,5	7
8	v	6,9	7	3,9	4	6,5	7	7,5	8	7,4	7	8,1	8	7,9	8
9	m	7,7	8	6,0	6	6,6	7	6,7	7	7,6	8	6,5	7	6,1	6
10	m	6,8	7	6,2	6	7,0	7	7,1	7	6,8	7	6,8	7	6,1	6
11	v	5,3	5	7,1	7	5,2	5	6,0	6	6,4	6	5,3	5	5,6	6
12	v	5,8	6	6,9	7	7,1	7	7,3	7	7,4	7	7,6	8	6,4	6
13	m	6,2	6	8,1	8	7,9	8	8,4	8	8,2	8	8,1	8	8,2	8
14	m	7,3	7	3,4	3	5,1	5	6,2	6	6,5	7	6,4	6	7,3	7
15	m	7,0	7	6,8	7	7,1	7	7,0	7	5,5	6	7,0	7	7,2	7
16	v	8,5	9	6,4	6	8,0	8	9,1	9	8,8	9	9,3	9	9,1	9
17	v	9,4	9	5,8	6	6,9	7	7,1	7	7,3	7	6,4	6	5,4	5
18	m	8,1	8	6,5	7	6,9	7	7,6	8	7,6	8	7,3	7	6,6	7
19	v	7,0	7	7,2	7	8,0	8	7,4	7	8,7	9	8,8	9	7,2	7
20	v	6,7	7	8,8	9	7,2	7	6,1	6	6,2	6	3,4	3	4,6	5
21	v	7,4	7	7,2	7	7,3	7	7,6	8	7,3	7	7,2	7	7,1	7
22	v	6,4	6	5,8	6	6,4	6	6,9	7	6,2	6	6,5	7	6,0	6
23	m	7,9	8	6,8	7	6,0	6	7,4	7	7,7	8	6,1	6	6,9	7
24	m	6,6	7	6,1	6	6,9	7	5,8	6	5,9	6	7,2	7	6,1	6
25	m	6,4	6	6,4	6	6,0	6	5,4	5	4,6	5	5,3	5	5,8	6
26	m	5,9	6	7,7	8	7,7	8	7,5	8	7,1	7	8,0	8	6,8	7
27	v	6,9	7	7,3	7	6,2	6	6,2	6	6,3	6	5,8	6	5,1	5
28	m	8,8	9	6,9	7	7,2	7	8,0	8	7,5	8	7,6	8	7,2	7
29	m	6,7	7	8,2	8	7,6	8	7,9	8	8,1	8	7,2	7	8,2	8

- Ga na dat voor de vakken Engels en wiskunde het gemiddelde van de gehele rapportcijfers in één decimaal nauwkeurig hetzelfde is.
- Kun je zeggen dat de resultaten voor beide vakken even goed zijn in deze klas?
- Vanuit een tabel zoals die hierboven is het lastig om conclusies te trekken over de resultaten bij de verschillende vakken. Hoe kun je dat beter doen?

Opgave V2

Bekijk de tabel in [Opgave 1](#).

- Wat is het laagste rapportcijfer voor Engels? En voor wiskunde?
- Wat is het hoogste rapportcijfer voor Engels? En voor wiskunde?
- Kun je nu zonder meer zeggen dat de cijfers voor Engels meer gespreid liggen dan bij wiskunde?



Theorie

Opgave 1

Bekijk de frequentietabel van de cijfers voor frans van klas B2F in de [Uitleg](#).

- a Reken de daar gegeven mediaan zelf na.
- b Hoeveel bedraagt de spreidingsbreedte?
- c Hoeveel bedraagt de interkwartielafstand?

Opgave 2

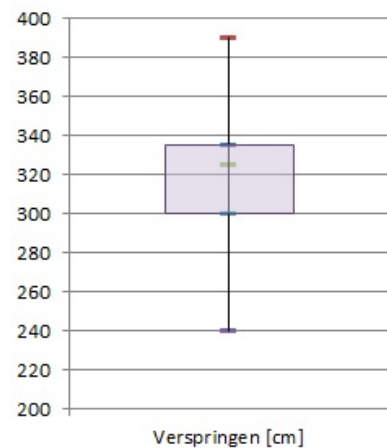
Dit is een frequentietabel van de cijfers voor Nederlands van klas B2B.

cijfer	frequentie
3	1
4	0
5	4
6	8
7	8
8	5
9	2
totaal	28

- a Bepaal de spreidingsbreedte.
- b Bepaal de mediaan.
- c Teken de bijbehorende boxplot.
- d Welk cijfer zou je hier een 'uitschieter' noemen?

Opgave 3

In de boxplot hiernaast zie je de resultaten van de jongens van een brugklas bij het verspringen. Je ziet er de verdeling van de gesprongen afstanden in cm vanaf de afzetbalk.



- a Hoeveel bedraagt de spreidingsbreedte van deze resultaten?
- b Lees de mediaan en de twee kwartielen uit de figuur af.
- c Hoeveel bedraagt de interkwartielafstand?
- d Welke afstanden springen de 25% beste springers?
- e Dit boxplot is gebaseerd op de resultaten van 33 jongens. Hoeveel daarvan springen minder dan 3 m ver?

Opgave 4

Bekijk [Voorbeeld 1](#).

- a Reken zelf alle gegevens nodig voor de boxplot na: mediaan, eerste kwartiel, derde kwartiel en grootste en kleinste cijfer.
- b Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand van deze cijfers.



Opgave 5

Je ziet hier een kruistabel van de cijfers voor de vakken wiskunde en scheikunde in B2D.

		wi							
		B2d	4	5	6	7	8	9	10
sc	4			1					
	5			2	3	1			
	6	1	4	2	1	1			
	7			1	3	2	1		
	8						2	1	
9								1	

- a Bereken per vak de spreidingsbreedte.
- b Bereken per vak de mediaan en beide kwartielen.
- c Bereken per vak de interkwartielafstand.

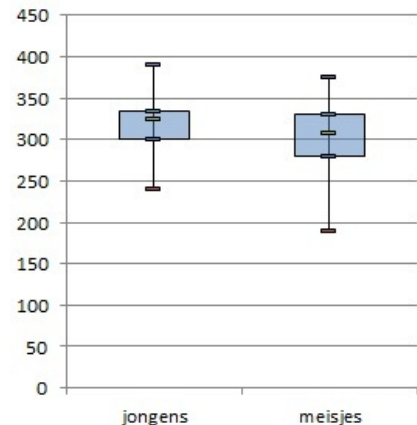
Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a Ga na dat de twee boxplots overeenkomen met de gegevens.
- b Beide klassen hebben evenveel leerlingen. Is dat noodzakelijk om de boxplots eerlijk te kunnen vergelijken?

Opgave 7

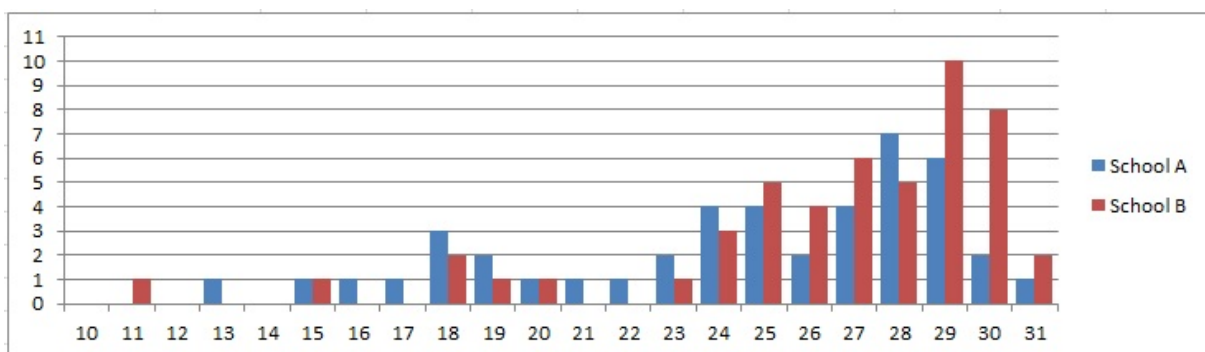
In de boxplots hiernaast zie je de resultaten van de jongens en de meisjes van een brugklas bij het verspringen. Je ziet er de verdeling van de gesprongen afstanden in cm vanaf de afzetbalk.



- a Hoe groot is de spreidingsbreedte bij de jongens en de meisjes?
- b Lees de mediaan en de twee kwartielen van de meisjes uit de figuur af.
- c Kun je op grond van deze boxplots een conclusie trekken als je de resultaten van de jongens en de meisjes wilt vergelijken?

Opgave 8

Op twee scholen voor voortgezet onderwijs heeft men de aantallen leerlingen per klas geteld. Je ziet in dit staafdiagram het resultaat.



- a Maak voor elk van deze scholen een bijpassende boxplot.
- b Hoe kun je aan beide boxplots zien dat school B over het algemeen grotere klassen heeft dan school A?



- c** Op school B wordt besloten om het kleine klasje van 11 leerlingen samen te voegen met een parallelklas van 19. Wat gebeurt er dan met het boxplot?

Verwerken

Opgave 9

Op 1 januari 2021 werden de volgende geboortegewichten van een groep jongens gemeten. De resultaten in grammen:

1850	2100	2500	2600	2700	2800	2900	3150	3250	3300
3300	3400	3400	3500	4000	4000	4000	4050	4090	4100
4150	4160	4180	4200	4200	4400	4500	4700	4800	4850

Hetzelfde gebeurde bij een even grote groep meisjes:

2400	2500	2500	2600	2700	2800	2800	2800	2900	2900
3000	3000	3100	3100	3200	3200	3200	3300	3300	3350
3400	3400	3500	3500	3600	3700	3800	3900	4000	4000

- a** Bepaal de spreidingsbreedte bij de jongens en bij de meisjes.
b Maak de boxplots die bij deze gegevens horen.
c Hoeveel procent van de meisjes woog tussen de 2800 en 3500 gram?
d Hoeveel procent van de jongens woog meer dan het zwaarste meisje?

Opgave 10

Dit is een steelbladdiagram van de cijfers voor een scheikundetoets in een vijfde klas.

3	4																		
4	8	8	9	9															
5	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	3								
6																			
7	9																		
8	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	6						
9	8																		

- a** Maak er een boxplot bij.
b Welk diagram geeft het beste beeld van de verdeling van de cijfers, het steelbladdiagram of de boxplot?

Opgave 11

Van twee honkbalteams zijn alle leeftijden genoteerd:

team 1	18	20	21	22	23	23	24	28	28
team 2	21	22	22	22	23	23	24	24	26

- a** Bepaal van beide teams de gemiddelde leeftijd en de mediaan.
b Teken bijbehorende boxplots.



- c** Krijg je hierdoor een goede indruk van het verschil in leeftijdsopbouw tussen beide teams? Leg dat uit.

Opgave 12

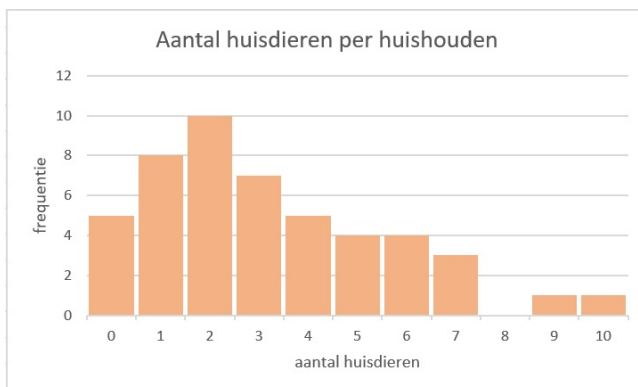
Een van de leerlingen van de vijfde klas heeft de gewichten van al zijn klasgenoten opgeschreven. Het resultaat in kilogrammen is als volgt:

72	50	63	59	63	51	56	64	58	74
52	69	42	51	54	58	51	60	60	59
50	67	61	45	66	49	64	63	57	56

- a** Bereken bij deze gegevens de mediaan en de interkwartielafstand.
- b** Hoeveel procent van deze leerlingen weegt minder dan 63 kg volgens je antwoord bij a? Is dat in werkelijkheid ook zo?

Opgave 13

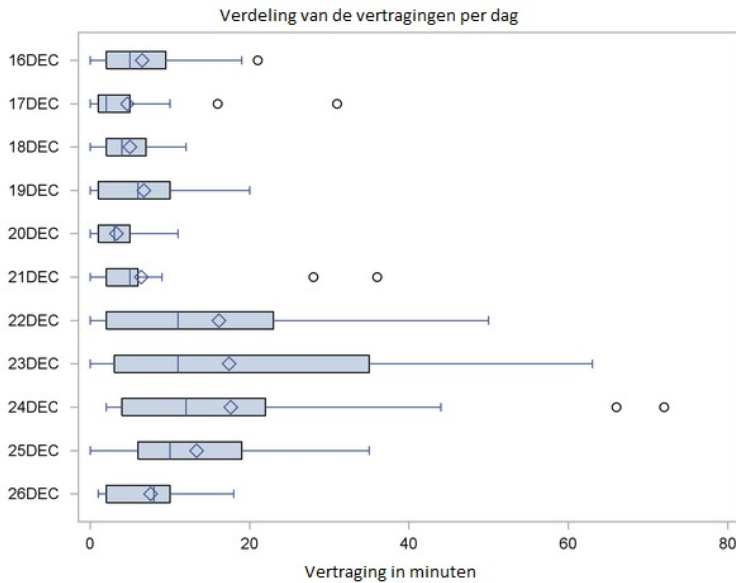
Aan een groep kinderen uit klas 2 is gevraagd hoeveel huisdieren er in hun huishouden zijn. De resultaten zie je in het staafdiagram.



- a** Hoeveel kinderen zijn er ondervraagd?
- b** Bereken het gemiddelde aantal huisdieren per huishouden.
- c** Bereken de mediaan en de kwartielen.
- d** Bepaal de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
- e** Teken de bijbehorende boxplot.
- f** Hoeveel huisdieren hebben de 25% huishoudens met de meeste huisdieren?

**Opgave 14**

Op een bepaald vliegveld is een aantal opeenvolgende dagen bijgehouden hoeveel vertraging de vluchten van die dag hadden. Elke dag vinden er dezelfde vluchten plaats, in totaal 320 vluchten per dag. De echte uitschieters zijn buiten de boxplots gehouden en aangegeven door rondje. Ook is het gemiddelde aantal minuten vertraging elke dag aangegeven met een symbool in de vorm van een ruit.



- Hoeveel uitschieters waren er op 17 december? Veranderen de mediaan en de kwartielen als deze uitschieters wel worden meegerekend?
- Waarom zie je dat bij het berekenen van het gemiddelde de uitschieters wel zijn meegeteld?
- Welke dag kende de minste vertragingen?
- Welke dag was de kleinste vertraging het grootst?
- Op welke dagen was meer dan een kwart van de vluchten meer dan 20 minuten vertraagd?
- Hoe kan het dat sommige dagen de gemiddelde vertraging nogal veel groter is dan de mediaan?

Toepassen**Opgave 15: Boxplots met een spreadsheet**

Een spreadsheet kan je helpen bij het berekenen van centrum- en spreidingsmaten en het maken van boxplots. Bekijk het [Practicum](#) en het download het bestand 'Gegevens 154 Leerlingen'.

Er wordt van uit gegaan dat je wel eens eerder met Excel hebt gewerkt en al weet hoe je met cellen werkt, met formules in cellen werkt, absoluut en relatief kopiëren begrijpt, etc.

- Maak zelf een tabel met de kwartielen, de mediaan en maximum en minimum van de gehele eindcijfers voor wiskunde van deze groep leerlingen in 4 vwo.
- Maak een bijbehorend boxplot.



- c** Maak vervolgens afzonderlijke groepen van de jongens en de meisjes door te sorteren. Bereken de centrum- en spreidingsmaten voor deze afzonderlijke groepen en vergelijk ze met elkaar. Maak ook boxplots van de afzonderlijke groepen.

Opgave 16: Lengtes en gewichten vergelijken

Werk met hetzelfde bestand als in de voorgaande opgave. Zet de gegevens over de lengtes van de jongens en de meisjes op een afzonderlijk werkblad. Doe hetzelfde met de gewichten van de jongens en de meisjes.

- a** Maak voor de lengtes van de jongens en de meisjes afzonderlijke boxplots. Kun je conclusies trekken?
- b** Maak voor de gewichten van de jongens en de meisjes afzonderlijke boxplots. Kun je conclusies trekken?

Practicum: Statistiek met een spreadsheet

Een **spreadsheet of rekenbladprogramma** kan centrum- en spreidingsmaten voor je berekenen vanuit de data.

In de volgende practica leer je werken met statistiek in een spreadsheet. Je kunt er ook boxplots in maken. Download wel eerst het bijbehorende bestand 'Gegevens 154 leerlingen'.

- [Data presenteren met behulp van MS-Excel](#)
- [Data presenteren met behulp van Open Office Calc](#)
- [Data presenteren met behulp van Google spreadsheets](#)

2.3 Klassenindeling

Verkennen

Opgave V1

In deze tabel hier zie je de cijfers van B1H voor een zevental vakken.

B1H		ne		en		fa		ak		gs		wi		sc	
leerling	geslacht	RE		RE		RE		RE		RE		RE		RE	
1	v	6,7	7	4,4	4	5,6	6	6,6	7	6,8	7	5,6	6	5,8	6
2	v	5,6	6	5,3	5	6,1	6	7,1	7	6,8	7	6,3	6	6,4	6
3	m	8,1	8	6,7	7	5,8	6	7,2	7	7,6	8	5,3	5	5,4	5
4	m	8,5	9	5,1	5	6,1	6	6,1	6	6,1	6	5,6	6	4,3	4
5	m	4,9	5	9,7	10	6,6	7	8,0	8	7,5	8	6,4	6	7,0	7
6	v	6,2	6	9,4	9	7,2	7	6,6	7	7,8	8	7,1	7	7,1	7
7	m	7,1	7	7,9	8	7,9	8	6,6	7	6,6	7	7,4	7	6,5	7
8	v	6,9	7	3,9	4	6,5	7	7,5	8	7,4	7	8,1	8	7,9	8
9	m	7,7	8	6,0	6	6,6	7	6,7	7	7,6	8	6,5	7	6,1	6
10	m	6,8	7	6,2	6	7,0	7	7,1	7	6,8	7	6,8	7	6,1	6
11	v	5,3	5	7,1	7	5,2	5	6,0	6	6,4	6	5,3	5	5,6	6
12	v	5,8	6	6,9	7	7,1	7	7,3	7	7,4	7	7,6	8	6,4	6
13	m	6,2	6	8,1	8	7,9	8	8,4	8	8,2	8	8,1	8	8,2	8
14	m	7,3	7	3,4	3	5,1	5	6,2	6	6,5	7	6,4	6	7,3	7
15	m	7,0	7	6,8	7	7,1	7	7,0	7	5,5	6	7,0	7	7,2	7
16	v	8,5	9	6,4	6	8,0	8	9,1	9	8,8	9	9,3	9	9,1	9
17	v	9,4	9	5,8	6	6,9	7	7,1	7	7,3	7	6,4	6	5,4	5
18	m	8,1	8	6,5	7	6,9	7	7,6	8	7,6	8	7,3	7	6,6	7
19	v	7,0	7	7,2	7	8,0	8	7,4	7	8,7	9	8,8	9	7,2	7
20	v	6,7	7	8,8	9	7,2	7	6,1	6	6,2	6	3,4	3	4,6	5
21	v	7,4	7	7,2	7	7,3	7	7,6	8	7,3	7	7,2	7	7,1	7
22	v	6,4	6	5,8	6	6,4	6	6,9	7	6,2	6	6,5	7	6,0	6
23	m	7,9	8	6,8	7	6,0	6	7,4	7	7,7	8	6,1	6	6,9	7
24	m	6,6	7	6,1	6	6,9	7	5,8	6	5,9	6	7,2	7	6,1	6
25	m	6,4	6	6,4	6	6,0	6	5,4	5	4,6	5	5,3	5	5,8	6
26	m	5,9	6	7,7	8	7,7	8	7,5	8	7,1	7	8,0	8	6,8	7
27	v	6,9	7	7,3	7	6,2	6	6,2	6	6,3	6	5,8	6	5,1	5
28	m	8,8	9	6,9	7	7,2	7	8,0	8	7,5	8	7,6	8	7,2	7
29	m	6,7	7	8,2	8	7,6	8	7,9	8	8,1	8	7,2	7	8,2	8

- Waarom heeft het geen zin om bij de cijfers voor bijvoorbeeld geschiedenis die op één decimaal zijn afgerond een frequentietabel of een staafdiagram te maken?
- De rapportcijfers worden afgerond op gehele getallen. Welke cijfers worden afgerond op een 6.
De cijfers die worden afgerond op een 8 kun je aangeven als de klasse $7,5- < 8,5$.
- Om welke cijfers gaat het dan als je cijfers in één decimaal hebt?
- Om welke cijfers gaat het dan als je cijfers in twee decimalen hebt?

Opgave V2

Bekijk de tabel uit de voorgaande opgave.

- Bereken het gemiddelde van de rapportcijfers voor geschiedenis als ze nog niet op gehele cijfers zijn afgerond in één decimaal nauwkeurig.
- Bereken opnieuw het gemiddelde van de rapportcijfers voor geschiedenis, maar neem nu de gehele cijfers.
- Hoe komt het dat ze verschillen?



Theorie

Opgave 1

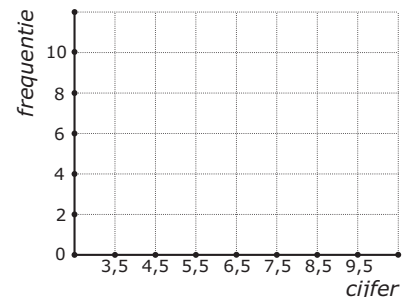
Bekijk in de **Uitleg** de klasseindeling van de rapportcijfers voor een bepaald vak in klas 2A.

- a** Ga na dat de absolute frequentie van de klasse $5,5- < 6,5$ inderdaad 7 is en reken de relatieve frequentie na.
- b** Hoeveel procent van de behaalde cijfers is kleiner dan 6,5? En waarom kun je dit gemakkelijker uit de klassenindeling halen dan uit de ruwe data?
- c** Hoeveel procent van de behaalde cijfers is kleiner dan 6,0? Waarom kun je dit niet uit de klassenindeling halen, maar alleen uit de ruwe data?
- d** Welke betekenis hebben de klassenmiddens? Waar kun je die voor gebruiken?

Opgave 2

De volgende cijfers werden voor een toets Engels gehaald.

3,6	4,4	4,5	4,6	5,0	5,4	5,5	5,6	5,6	6,1
6,2	6,4	6,5	6,5	6,5	7,1	7,2	7,3	7,4	7,4
7,5	7,6	7,6	8,0	8,1	8,3	8,4	8,6	9,4	9,4



- a** Bereken het gemiddelde in één decimaal nauwkeurig.
- b** Maak voor deze cijfers een klassenindeling met als eerste klasse $3,5- < 4,5$ en de frequentietabel die daarbij hoort.
- c** Je kunt bij je klassenindeling een staafdiagram maken. Je ziet in de figuur hoe je de assen kunt indelen. Teken zelf zo'n staafdiagram.

Elke klasse staat hier voor een cijfer afgerond op gehelen.

Die gehele cijfers zijn de klassenmiddens 4, 5, ... 9.

- d** Bereken hiermee het gemiddelde van de cijfers. Vind je hetzelfde als bij a? En waarom?

Opgave 3

Bekijk de cijfers voor een toets Engels uit de voorgaande opgave. Je kunt ook een andere klassenindeling maken door bijvoorbeeld de eerste klasse $3,0- < 4,0$ te maken en de andere klassen dezelfde klassenbreedte te geven.

- a** Wat is daarvan het grote nadeel?
- b** Hoe zou je met zo'n klassenindeling het gemiddelde schatten als je de ruwe data niet meer hebt?

Je kunt ook een klassenindeling maken met een grotere klassenbreedte. Bijvoorbeeld klassen zoals $3,5- < 5,5$, enzovoorts.

- c** Welk nadeel heeft dat?

**Opgave 4**

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a** Reken de relatieve frequenties van de klasse $5,5- < 6,5$ voor zowel 2A als 2B na.
- b** Hoeveel procent van de leerlingen in 2A heeft een onvoldoende (dat is een cijfer lager dan 5,5)? En hoe zit dat in 2B? Kun je een conclusie trekken?
- c** Schat met behulp van de klassenindeling hoeveel procent van de leerlingen in 2A een cijfer lager dan 6,0 heeft. Doe dit ook voor 2B. Kun je een conclusie trekken?

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a** Bereken de gemiddelde rapportcijfers in één decimaal nauwkeurig voor zowel 2A als 2B vanuit de ruwe data.
- b** De rapportcijfers worden op gehele getallen afgerond. Om van die gehele cijfers de gemiddelden te berekenen kun je de klassenindeling goed gebruiken. Hoe komt dat?
- c** Hoe zou je de gemiddelden van de gehele rapportcijfers voor 2A en 2B uitrekenen bij de klassenindeling?

Vind je veel verschil met het antwoord bij a?

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**. Je ziet daar de lengtes van 90 meisjes in een vierde klas ingedeeld in klassen.

- a** Waarom is zo'n klassenindeling juist wel handig als je overzicht over de verdeling van de lengtes wilt krijgen?
- b** Hoeveel procent van deze meisjes heeft een lengte vanaf 160 tot 180 cm?
- c** Hoeveel procent van deze meisjes is langer dan 190 cm? Rond af op één decimaal.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** staat dat het gemiddelde van de lengtes in zo'n klassenindeling kan worden geschat door de klassenmiddens te gebruiken.

- a** Waarom kun je bij een klassenindeling geen enkele centrummaat precies berekenen?
- b** Bereken de gemiddelde lengte met behulp van de klassenmiddens en laat zien dat dit inderdaad een schatting van 173,4 cm oplevert.
- c** Je hebt een schatting van de gemiddelde lengte. Hoeveel bedraagt de gemiddelde lengte minimaal?
- d** Hoeveel bedraagt de gemiddelde lengte maximaal?
- e** Als je aanneemt dat in elke klasse alleen gehele (afgeronde) lengtes zitten, wat zijn dan de klassenmiddens?
- f** Wat betekent de aanname bij e voor de schatting van de gemiddelde lengte?



Verwerken

Opgave 8

Geef in de volgende situaties aan of een klassenindeling maken mogelijk/zinvol is, leg uit waarom. Zo ja, geef aan wat jij als eerste klasse zou kiezen.

- a** Je hebt op de huishoudbeurs aan 500 bezoekers hun leeftijd gevraagd. De jongste bezoeker was 17 en de oudste was 81.
- b** Je hebt aan die zelfde 500 bezoekers van de huishoudbeurs hun lievelingskleur gevraagd. Tussen de antwoorden die de bezoekers gaven zaten 12 verschillende kleuren.
- c** Je hebt aan die zelfde 500 bezoekers van de huishoudbeurs gevraagd hoe vaak ze nu in totaal de huishoudbeurs al bezocht hebben. Het laagste aantal was 1 keer en het hoogste aantal was 15 keer.

Opgave 9

Johan gooit zestig keer met vijf dobbelstenen en noteert telkens de som van de vijf aantallen ogen. Zijn scores zijn als volgt:

16	22	21	16	20	24	20	23	16	22
17	15	17	26	23	20	17	19	21	23
17	22	18	14	18	15	16	18	17	18
20	22	18	18	25	14	13	12	15	17
22	14	18	20	12	20	15	18	15	24
17	12	23	14	11	14	21	16	18	5

- a** Wat was het grootste getal dat hij had kunnen gooien? Leg uit.
- b** Bereken de gemiddelde score in één decimaal nauwkeurig.
- c** Maak een klassenindeling van de scores. Neem als klassen $5- < 8$ en $8- < 11$, enzovoorts.
- d** Welke scores horen tot de klasse $5- < 8$? Wat is dus het klassenmidden? En waarom kun je nu niet gewoon het gemiddelde van de klassengrenzen nemen?
- e** Bereken nu met behulp van de klassenindeling de gemiddelde score.
- f** In hoeveel procent van de worpen scoorde Johan meer dan 13 maar minder dan 23?
- g** Waarom zou score 18 zoveel vaker voorkomen dan score 28?

**Opgave 10**

Je ziet hier een klassenindeling van de gewichten van een groep personen.

gewichtsklasse	frequentie
45– < 50	1
50– < 55	5
55– < 60	8
60– < 65	15
65– < 70	19
70– < 75	9
75– < 80	3

- a** Welk klassenmidden heeft de klasse 45– < 50? Licht je antwoord toe.
- b** Bereken het gemiddelde gewicht in één decimaal nauwkeurig.
- c** Hoeveel procent van deze groep mensen weegt minder dan 70 kg?

Opgave 11

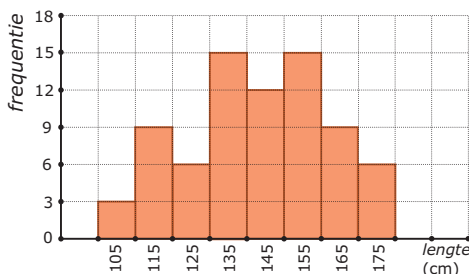
Bij een cabaretvoorstelling is aan 44 bezoekers hun leeftijd gevraagd. Het resultaat is als volgt:

31	29	18	16	24	47	12	32	52	10	26
22	12	53	49	25	21	59	51	32	16	27
18	29	31	37	17	42	31	39	19	33	28
44	16	29	22	17	19	54	27	30	28	51

- a** Maak een klassenindeling met als klassen 10– < 15, enzovoorts. Voeg de absolute frequenties toe.
- b** Welke leeftijden horen tot de klasse 50– < 55? Wat is dus het klassenmidden?
- c** Schat met behulp van de klassenindeling de gemiddelde leeftijd van deze bezoekers.
- d** Hoeveel procent van de ondervraagden was jonger dan 30?

Opgave 12

Je ziet hier een verdeling van de lengtes van de vrouwelijke leerlingen van een balletschool. Op de horizontale as staan de klassenmiddens in cm.



- a** Schrijf de eerste klasse van de indeling op.
- b** Van hoeveel leerlingen is de lengte gemeten?
- c** Schat met behulp van de klassenindeling de gemiddelde lengte van deze leerlingen in cm nauwkeurig.



- d** Maak een nieuwe klassenindeling met klassen $100- < 120$, enzovoorts. Bereken opnieuw de gemiddelde lengte van deze leerlingen, maar nu vanuit de nieuwe klassenindeling. Verklaar het verschil.

Opgave 13

Op 1 januari 2021 werden de volgende geboortegewichten van een groep jongens gemeten. De resultaten in grammen:

1850	2100	2500	2600	2700	2800	2900	3150	3250	3300
3300	3400	3400	3500	4000	4000	4000	4050	4090	4100
4150	4160	4180	4200	4200	4400	4500	4700	4800	4850

Hetzelfde gebeurde bij een even grote groep meisjes:

2400	2500	2500	2600	2700	2800	2800	2800	2900	2900
3000	3000	3100	3100	3200	3200	3200	3300	3300	3350
3400	3400	3500	3500	3600	3700	3800	3900	4000	4000

Omdat je de geboortegewichten van deze twee groepen wilt vergelijken maak je een klassenindeling en de bijbehorende frequentietabellen. Neem klassen met een breedte van 500 gram. De eerste klasse begint bij 1500.

- a** Maak een geschikte klassenindeling met bijbehorende absolute frequenties.
- b** Schat de gemiddelden van beide groepen met behulp van de klassenindeling bij a.
- c** Hoeveel procent van de jongens woog meer dan het bij b gevonden gemiddelde van de meisjes?
- d** Hoeveel procent van de jongens woog meer dan het zwaarste meisje?

Toepassen

Opgave 14: Lengtes in klassen in een spreadsheet

Een spreadsheet (rekenbladprogramma) kan centrummaten en spreidingsmaten voor je berekenen vanuit de ruwe data, je hebt daarvoor geen frequentietabellen nodig. Maar frequentietabellen zijn handig bij het maken van diagrammen. En vooral als je over veel gegevens beschikt is groeperen in klassen erg handig. Bekijk het [Practicum](#) en het bestand "Gegevens 154 Leerlingen".

Denk er wel om dat je op een pc dit bestand eerst moet downloaden. Er wordt van uit gegaan dat je wel eens eerder met een spreadsheet hebt gewerkt en al weet hoe je met cellen werkt, met formules in cellen werkt, absoluut en relatief kopiëren begrijpt, etc.

- a** Maak zelf de frequentieverdeling van de lengtes van deze groep leerlingen in 4 vwo.
- b** Maak een staafdiagram.



- c Maak vervolgens afzonderlijke groepen van de jongens en de meisjes door te sorteren. Maak frequentietabellen voor deze afzonderlijke groepen en vergelijk ze met elkaar.

Opgave 15: Gemiddelden schatten

Werk met hetzelfde bestand als in de voorgaande opgave. Je hebt de gegevens over de lengtes van de jongens en de meisjes op een afzonderlijk werkblad gezet. Doe hetzelfde met de gewichten van de jongens en de meisjes.

- a Maak voor de lengtes van de jongens en de meisjes afzonderlijke frequentietabellen en schat met behulp daarvan hun gemiddelde lengtes. Kun je conclusies trekken?
- b Maak voor de gewichten van de jongens en de meisjes afzonderlijke frequentietabellen en schat met behulp daarvan hun gemiddelde lengtes. Kun je conclusies trekken?

Practicum: Statistiek met een spreadsheet

Een **spreadsheet of rekenbladprogramma** kan centrummaten en spreidingsmaten voor je berekenen vanuit de ruwe data, je hebt daarvoor geen frequentietabellen nodig. Maar frequentietabellen zijn handig bij het maken van diagrammen. En vooral als je over veel gegevens beschikt is groeperen in klassen erg handig.

In de volgende practica leer je werken met statistiek in een spreadsheet:

- [Data presenteren met behulp van MS-Excel](#)
- [Data presenteren met behulp van Open Office Calc](#)
- [Data presenteren met behulp van Google spreadsheets](#)

2.4 Schattingen

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de rapportcijfers van 2A voor het vak Frans. De rapportcijfers zijn afgerond op gehele getallen, dat is eigenlijk een klassenindeling.

cijfer	frequentie
4	1
5	4
6	7
7	6
8	6
9	6

- a Over welke klassen gaat het dan? En wat zijn dan de klassenmiddens?
- b De docent Frans wil het gemiddelde uitrekenen van de resultaten van deze klas. Hij gebruikt de gehele rapportcijfers. Welke fout maakt hij en hoeveel kan hij er naast zitten?
- c Het modale cijfer is nu eigenlijk een modale klasse. Welke klasse is de modale klasse?

Opgave V2

Bekijk de tabel uit [Opgave 1](#) nog eens.

- a In welke klasse ligt de mediaan? Leg uit.
- b Kun je nu zeggen welk getal de mediaan is als je uitgaat van de (onbekende) rapportcijfers op één decimaal nauwkeurig?
- c Hoe groot is de spreidingsbreedte van de cijfers? Waar hangt dat van af?

Theorie

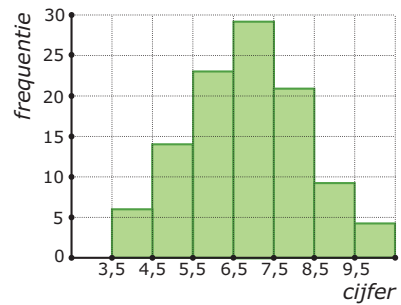
Opgave 1

Bekijk de frequentietabel van de rapportcijfers in klas 2A in de [Uitleg](#).

- a Welke klasse is de modale klasse? Welk geheel rapportcijfer krijgen al die leerlingen?
- b Waarom neem je voor de spreidingsbreedte van de op één decimaal afgeronde rapportcijfers $9,5 - 3,5 = 6$ en niet $9 - 4 = 5$ als je naar de klassenindeling kijkt?
- c In welke klasse zit de mediaan? En de kwartielen?
- d Probeer een manier te bedenken om de vijf waarden die nodig zijn voor de boxplot te schatten.

**Opgave 2**

In dit staafdiagram worden de resultaten voor een toets wiskunde weergegeven. De werkelijke cijfers werden berekend in één decimaal nauwkeurig en konden lopen vanaf 1,0 tot en met 10,0.



- Hoeveel leerlingen hebben deze toets gemaakt?
- Maak een schatting van het gemiddelde van de cijfers.
- Welke klasse is de modale klasse?
- In welke klasse zit de mediaan van de behaalde cijfers?
- Wat is er bijzonder aan de laatste klasse? Hoe moet je daar bij de spreidingsbreedte rekening mee houden?

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**. Omdat je de ruwe data mist, schat je de verschillende centrummaten en spreidingsmaten die je nodig hebt voor een boxplot.

- Hoeveel bedraagt de spreidingsbreedte?
- Bekijk hoe de mediaan is geschat. Schat nu op dezelfde manier de twee kwartielen.
- Teken een boxplot bij de cijfers van klas 2A. Hoeveel bedraagt de kwartielafstand?

Opgave 4

Hier zie je de verdeling van de rapportcijfers van 2B voor hetzelfde vak. Ook deze cijfers zijn op één decimaal nauwkeurig berekend.

klasse	frequentie
3,5– < 4,5	1
4,5– < 5,5	2
5,5– < 6,5	12
6,5– < 7,5	6
7,5– < 8,5	4
8,5– < 9,5	0
totaal	25

- Schat met deze gegevens de mediaan van de cijfers van klas 2B.
- Schat nu ook beide kwartielen van de verdeling van de rapportcijfers van 2B. Teken een bijpassend boxplot.
- Vergelijk de boxplots van de cijfers van klas 2A en klas 2B. Kun je een uitspraak doen?

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je de klassenmiddens bepaalt als er in een klasse alleen gehele waarden voorkomen.

- Leg zelf uit waarom het klassenmidden van de laatste klasse 67 moet zijn en geen $\frac{70-65}{2} = 67,5$.
- Schat het gemiddelde van de bezoekersaantallen.

**Opgave 6**

Deze tabel laat de verdeling zien van de lengtes van 90 meisjes in een vierde klas.

- a** Leg uit waarom de klassenmiddens nu wel kunnen worden berekend vanuit de klassengrenzen.
- b** Schat de mediaan en de twee kwartielen en maak hierbij een boxplot.

lengteklasse	klassenmidden	freq.
150– < 155	152,5	1
155– < 160	157,5	5
160– < 165	162,5	10
165– < 170	167,5	16
170– < 175	172,5	22
175– < 180	177,5	15
180– < 185	182,5	11
185– < 190	187,5	6
190– < 195	192,5	3
195– < 200	197,5	1
	<i>totaal</i>	90

Verwerken**Opgave 7**

In een klas zijn voor een toets de volgende cijfers behaald:

6,5	9,3	5,2	6,1	6,2	6,2	2,6	3,6	9,6	7,9
7,4	8,4	7,1	4,4	9,0	8,3	8,3	4,8	8,2	6,5
6,5	5,8	6,4	5,4	6,0	6,2	7,2	5,8	6,3	6,9

- a** Bepaal de variatiebreedte.
- b** Als je een staafdiagram van deze gegevens wilt maken is het verstandig om eerst een klassenindeling te maken. Waarom is dat?
- c** Maak een klassenindeling van de resultaten en teken het staafdiagram. Welke klassen liggen hier voor de hand?
- d** Bepaal de modale klasse.
- e** In welke klasse ligt de mediaan? Hoeveel wordt de mediaan naar schatting?
- f** Hoeveel wordt het eerste kwartiel naar schatting?

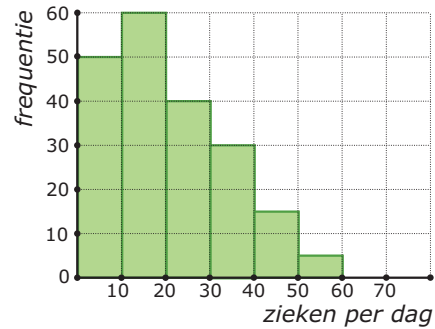
Opgave 8

Bedenk in de volgende situaties wat het klassenmidden is van de gegeven klasse.

- a** De cijfers die klas 2C voor scheikunde heeft gehaald. Klasse $7- < 8$.
- b** Het aantal zieke leerlingen per schooldag. Klasse $10- < 15$.
- c** De lichaamslengtes van een groep kinderen. Klasse $160- < 170$.
- d** Het aantal bezoekers per dag van een winkeltje. Klasse $30- < 45$.

**Opgave 9**

Op een school is gedurende een jaar elke schooldag bijgehouden hoeveel leerlingen er ziek waren. Je ziet de gegevens hier verwerkt in een staafdiagram. De laatste klasse bevat in feite alle dagen dat het aantal zieken 50 of meer was.



- Hoeveel schooldagen waren er dat jaar?
- Schat de mediaan.
- Schat het gemiddelde aantal zieke leerlingen per dag in gehelen. Neem voor de laatste klasse als klassenmidden 55.
- Je hebt voor de laatste klasse als klassenmidden 55 genomen. Voor welke centrummaat is die keuze van belang? Licht je antwoord toe.

Opgave 10

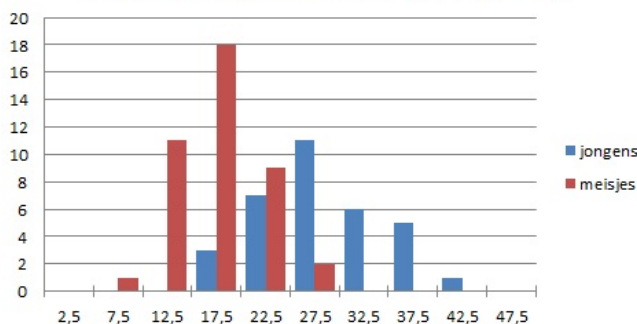
De lengtes in cm van 60 leerlingen zijn in klassen ingedeeld. Je kunt nu het gemiddelde alleen nog schatten want je weet de ruwe data niet.

lengteklasse	frequentie
150– < 160	3
160– < 170	17
170– < 180	34
180– < 190	4
190– < 200	2
totaal	60

- Bepaal de modale klasse.
- Hoe schat je het gemiddelde? Bereken deze schatting.
- Schat de mediaan.
- Schat de kwartielen en teken een bijpassend boxplot.

Opgave 11

Hier zie je in één staafdiagram de resultaten van het gooien met een 200 grams kogel van een groep van 74 brugklasleerlingen. Er zijn afzonderlijke diagrammen voor de jongens en de meisjes. Alle geworpen afstanden zijn tot op 0,5 m nauwkeurig gemeten. Elke klasse is door het klassenmidden aangegeven.

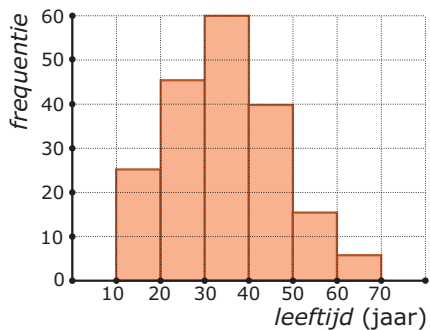
Vergooien (gewicht 200 gram, in m)

- Maak bij beide staafdiagrammen een boxplot.
- Maak een schatting van het gemiddelde van de jongens en de meisjes afzonderlijk.
- Kun je concluderen dat jongens van die leeftijd verder gooien dan meisjes? Licht je antwoord toe.



Opgave 12

In het staafdiagram zie je de leeftijdsverdeling van een groep reizigers die met bussen op weg is naar de Costa del Sol.



- Maak bij het staafdiagram een frequentieverdeling. Neem dezelfde klassen als in het staafdiagram.
- Bepaal de spreidingsbreedte.
- Schat de gemiddelde leeftijd van de reizigers in gehele jaren.
- Geef een schatting van de mediaan. Beredeneer je schatting.
- Geef een schatting van de kwartielen en bereken de kwartielafstand.
- Hoeveel procent van de buspassagiers was jonger dan de gemiddelde leeftijd?
- De reisorganisatie geeft korting aan alle reizigers die ouder zijn dan 55 jaar of jonger dan 15 jaar. Geef een schatting van het percentage reizigers dat korting kreeg.
- Welke klasse is de modale klasse?
- Tijdens de vakantie zijn twaalf van de reizigers jarig. Verandert hierdoor de gemiddelde leeftijd in gehelen?

Toepassen

Opgave 13: Uren huiswerk per week

Je hebt de belangrijkste vaardigheden met MS-Excel in de voorgaande onderdelen voorbij zien komen. Je hebt centrummaten en spreidingsmaten berekend (dat doe je het liefst vanuit de ruwe data) en je hebt diagrammen getekend. Voor een boxplot gebruik je ook het liefst de ruwe data, maar voor een staafdiagram of een lijndiagram of een cirkeldiagram werk je meestal met een klassenindeling. In de volgende opgaven werk je met het bestand [Gegevens154Leerlingen.xls](#).

In dit bestand vind je een tabel met het aantal uren huiswerk per week. Je gaat de jongens en de meisjes van deze vierde klas met elkaar vergelijken.

Denk er wel om dat je op een pc het bijbehorende Excel-bestand eerst moet downloaden.

- Maak een geschikte frequentieverdeling van het aantal uren dat de jongens aan hun huiswerk besteden. Doe dit ook voor de meisjes.
- Maak met Excel een bijpassend lijndiagram van de jongens en meisjes in één figuur.
- Probeer een conclusie te trekken.

**Opgave 14: Uren huiswerk per week en boxplots**

Werk met hetzelfde Excel-bestand als in de voorgaande opgave.

- a** Maak nu twee boxplots naast elkaar voor het aantal uren huiswerk dat de jongens per week besteden en het aantal uren huiswerk dat de meisjes per week besteden.
- b** Probeer opnieuw conclusies te trekken, betrek ook de gemiddelden erbij.

2.5 Statistische uitspraken

Verkennen

Opgave V1

Niet elke bewering is een statistische uitspraak, een uitspraak die je met behulp van statistiek kunt nagaan. Geef van elk van de volgende uitspraken aan of het een statistische uitspraak betreft.

- a "40% van de leerlingen in klas 2C van school X is een meisje."
- b "40% van de Nederlanders heeft bloedgroep O-positief."
- c "85% van alle jongeren tussen 12 en 18 jaar internet dagelijks."
- d "Ik heb zojuist in 360 worpen met twee dobbelstenen precies 60 keer 7 ogen gegooid."
- e "Als je met twee dobbelstenen gooit zul je in 16,7% van alle worpen 7 ogen gooien."
- f "Jongens kunnen verder gooien dan meisjes."

Verwerken

Opgave 1

Bij statistisch onderzoek wil je een uitspraak doen over een grote groep (de populatie) op grond van de resultaten van een steekproef uit die groep.

- a Waar moet een goede steekproef aan voldoen?
- b Welke twee soorten statistisch onderzoek ken je op dit moment? Geef van beide een voorbeeld.

Opgave 2

Als je onderzoek wilt doen naar de hobby's van Nederlanders van 18 jaar en ouder, dan zijn belangrijke kenmerken van de populatie: geslacht, leeftijd, regio, en opleiding.

Bedenk bij elk van de volgende uitspraken om welke populatie het gaat en welke kenmerken voor die populatie belangrijk zijn om na te gaan of de steekproef representatief is.

- a "De boeren in Europa die kippeneieren produceren zitten in een crisis."
- b "Er zijn veel mensen in Nederland van plan om komend jaar hun huis te gaan verbouwen."
- c "Nederlandse jongens zijn beter in atletiek dan Nederlandse meisjes."
- d "Vrouwen gaan minder vaak naar de kapper dan mannen."



Opgave 3

Je bent journalist en wilt een artikel schrijven over studenten. Je bent vooral nieuwsgierig naar mensen die een vwo diploma behaald hebben en daarna een hbo studie gaan doen in plaats van naar de universiteit te gaan. Je hebt al wat rondgevraagd en krijgt het vermoeden dat vooral veel meisjes deze keuze maken, en dat veel minder jongens dat doen.

Je hebt inmiddels met 25 studenten gesproken die een hbo opleiding zijn gestart nadat ze hun vwo diploma gehaald hebben. 15 van deze studenten zijn vrouw en 10 zijn man. Je schrijft als kop boven je artikel: "Meisjes met een vwo diploma kiezen veel vaker voor een hbo opleiding dan jongens met een vwo diploma."

- a Is dit een statistische uitspraak? Leg uit waarom wel of niet.
- b Via de website van het **Centraal Bureau voor de Statistiek** kun je aan meer informatie komen voor je artikel. Bekijk de statistieken over instroom, doorstroom, en uitstroom in het onderwijs.

Je kunt kiezen bij Geslacht voor het totaal aantal, het aantal mannen of het aantal vrouwen.

Je kunt kiezen bij Periode voor meerdere jaren.

Je kunt kiezen bij Onderwijspositie basisjaar voor 6 vwo met/zonder diploma.

Hoe zou je deze gegevens gebruiken voor je artikel?

Toepassen

Opgave 4: Een eigen onderzoeksvraag bedenken

Bekijk het **Practicum** en het bestand 'Gegevens 154 Leerlingen'. Dit bestand bevat informatie over een groep 4 vwo leerlingen. Deze gegevens ga je gebruiken om een statistische onderzoeksvraag te beantwoorden die jij zelf bedenkt.

De enige voorwaarde is dat het een onderzoek moet zijn waarbij je 'op zoek gaat naar het percentage van een bepaalde populatie dat een zekere eigenschap heeft.'

- a Bekijk de gegevens in het bestand en formuleer een goede statistische onderzoeksvraag.
- b Gebruik de gegevens uit het bestand om één duidelijke grafiek te maken die past bij je onderzoeksvraag.
- c Trek aan de hand van je grafiek conclusies en beantwoord je onderzoeksvraag.

Opgave 5: Een eigen statistisch onderzoek doen

Het is nu tijd om zelf een statistisch onderzoek te doen. Kies een onderwerp gebaseerd op de twee soorten statistische onderzoeksvragen waar je tot nu toe mee hebt kennism gemaakt. Bedenk vervolgens hoe je het onderzoek kunt uitvoeren, hoe je de gegevens kunt verzamelen en overzichtelijk weergeven. En bedenk tenslotte hoe je conclusies kunt trekken en verwoorden.

Hieronder kun je zien welke stappen je moet zetten om een goed resultaat te krijgen.

- a Bedenk een eigen statistische onderzoeksvraag.
- b Stel een plan van aanpak op. Daarin beschrijf je hoe de steekproef wordt samengesteld en hoe je het onderzoek gaat aanpakken.



- c** Voer je onderzoek uit en verzamel alle gegevens (bijvoorbeeld in MS-Excel).
- d** Bedenk een manier om je gegevens goed te presenteren, denk aan tabellen en grafieken.
- e** Trek een conclusie.
- f** Kijk terug op je onderzoek en op de aanpak. Wat had beter gekund?

Practicum: Statistiek met een spreadsheet

Een **spreadsheet of rekenbladprogramma** kan centrummaten en spreidingsmaten voor je berekenen vanuit de ruwe data, je hebt daarvoor geen frequentietabellen nodig. Maar frequentietabellen zijn handig bij het maken van diagrammen. En vooral als je over veel gegevens beschikt is groeperen in klassen erg handig.

In de volgende practica leer je werken met statistiek in een spreadsheet:

- **Data presenteren met behulp van MS-Excel**
- **Data presenteren met behulp van Open Office Calc**
- **Data presenteren met behulp van Google spreadsheets**

2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Statistiek is uit het huidige leven bijna niet meer weg te denken. Veel beslissingen worden genomen op basis van statistieken of het nu gaat om woningbouw, het aanleggen van wegen of het bepalen welke smartphone het beste is, altijd worden er gegevens verzameld en gepresenteerd in tabellen en diagrammen. En om de conclusies die daaruit worden getrokken nog een beetje te begrijpen (en vooral ook om hun beperkingen te begrijpen) is kennis van statistische methoden nodig.

In dit onderwerp wordt daar een klein begin mee gemaakt. Het is zelfs de bedoeling dat je zelf een statistisch onderzoekje doet. Je werkt daarbij met MS-Excel (of een ander rekenbladprogramma op de computer, maar dan moet je wel zelf kijken hoe dat precies werkt).

De volgende opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Statistiek** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- ▶ frequentietabel — centrummaat — modus — mediaan — gemiddelde
- ▶ boxplot — kwartiel — spreidingsbreedte — (inter)kwartielafstand
- ▶ klassenindeling — klassengrenzen, klassenmidden, klassenbreedte
- ▶ schatten
- ▶ statistisch onderzoek — populatie — steekproef — representatief

Activiteiten

- ▶ gegevens samenvatten in frequentietabellen en beschrijven met behulp van centrummaten;
- ▶ gegevens samenvatten in frequentietabellen en beschrijven met behulp van spreidingsmaten en boxplots;
- ▶ klassenindelingen gebruiken, het gemiddelde schatten;
- ▶ centrummaten en spreidingsmaten schatten vanuit een klassenindeling;
- ▶ kennismaken met statistisch onderzoek, populatie en representatieve steekproef

Opgave 1

In deze frequentietabel zie je de resultaten van tellingen van het aantal eieren dat dagelijks in een hok vol kippen werd geraapt.

aantal eieren	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
frequentie	1	2	3	6	12	15	27	35	23	12

Deze gegevens kun je samenvatten met behulp van een drietal centrummaten.

- a** Welk aantal eieren per dag is de modus?



- b** Welk aantal eieren per dag is de mediaan?
- c** Bereken het gemiddelde aantal eieren per dag.

Opgave 2

In deze frequentietabel zie je de schoenmaten van 124 volwassen mannen.

aantal eieren	39	40	41	42	43	44
frequentie	12	15	27	35	23	12

Bij deze gegevens kun je behalve de drie centrummaten ook een paar spreidingsmaten vaststellen.

- a** Bepaal de spreidingsbreedte.
- b** Bepaal de mediaan en de kwartielafstand.
- c** Teken een bijpassend boxplot.

Opgave 3

De lengtes in cm van 60 leerlingen zijn in klassen ingedeeld. Je kunt nu het gemiddelde alleen nog schatten want je weet de ruwe data niet.

- a** Bepaal de modale klasse.
- b** Hoe schat je het gemiddelde? Bereken deze schatting.

lengteklasse	frequentie
150– < 160	3
160– < 170	17
170– < 180	34
180– < 190	4
190– < 200	2
totaal	60

Opgave 4

Gebruik de frequentietabel van **Opgave 3**. Door de mediaan en de kwartielen te schatten kun je een boxplot maken.

- a** Schat de mediaan.
- b** Schat de kwartielen en teken een bijpassend boxplot.

Opgave 5

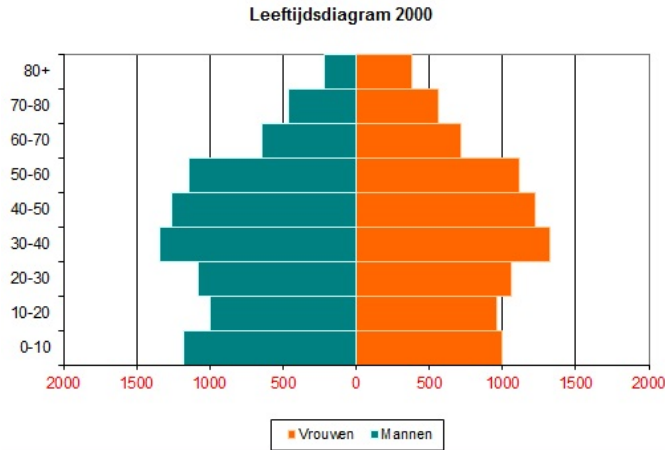
Bij statistisch onderzoek wil je een uitspraak doen over een grote groep (de populatie) op grond van de resultaten van een steekproef uit die groep.

- a** Waar moet een goede steekproef aan voldoen?
- b** Welke twee soorten statistisch onderzoek ken je op dit moment? Geef van beide een voorbeeld.



Toepassen

Hier zie je een zogenaamde **bevolkingspiramide**, een leeftijdsdiagram. Daarin is de bevolkingsopbouw van Nederland in het jaar 2000 weergegeven. Het lijkt wel een staafdiagram, maar dan op zijn kant.



Opgave 6: Bevolkingspiramide in 2000

In **Toepassen** zie je een bevolkingspiramide, een leeftijdsdiagram van de Nederlandse bevolking in het jaar 2000. Alle aantallen zijn duizendtallen.

Je kunt er bijvoorbeeld in aflezen dat de groep 0-10-jarigen in 2000 uit ongeveer 1.200.000 jongens en ongeveer 1.000.000 meisjes bestond.

- Om wat voor soort diagrammen gaat het hier?
- Hoeveel mannen en vrouwen van 10– < 20 waren er in Nederland in 2000?
- In de jaren na de Tweede Wereldoorlog werden er nogal veel kinderen geboren. Dat werd de ‘baby-boom’ genoemd. Hoe vind je dat in de bevolkingspiramide van 2000 terug?
- Wat was in 2000 de modale leeftijdscategorie?
- Schat de gemiddelde leeftijd van de Nederlanders in 2000.
- Het woord ‘bevolkingspiramide’ is wat verouderd. Waarom is dat woord niet meer zo van toepassing als vroeger, denk je?

Opgave 7: Bevolkingspiramide vervolg

Bekijk de bevolkingspiramide van de voorgaande opgave nog eens.

- Schat de mediaan van de leeftijden van de Nederlandse mannen in 2000. Doe hetzelfde voor de vrouwen.
- Teken boxplots voor zowel de mannen als de vrouwen in één figuur. Kun je een conclusie trekken?

Via de website **CBS: bevolkingspiramide** kun je zien hoe de bevolkingsopbouw in Nederland voor dit jaar er uitziet.

- Beschrijf het verschil van de bevolkingsopbouw in Nederland in dit jaar met die in 2000.

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

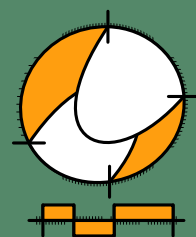
Inhoud Katern 3

19. Exponentiële verbanden

20. Statistiek



www.math4all.nl



Werkblad bij Opgave 1 op pagina 38.

