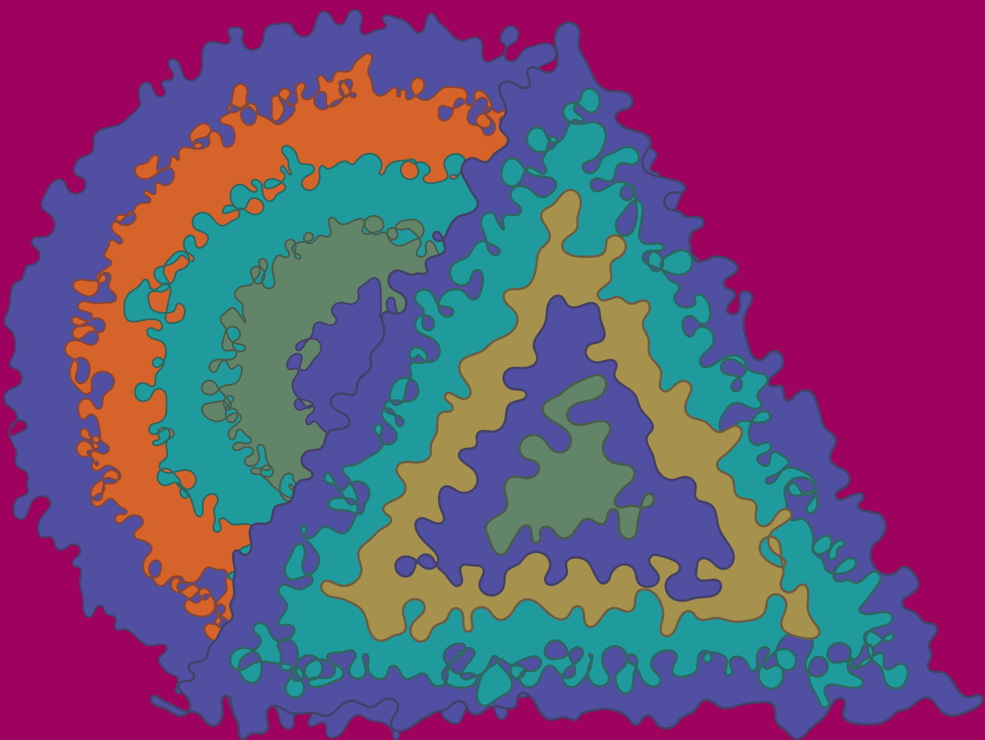
Wiskunde

2 HAVO / VWO

Katern 2 / Theorie

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

Begrippen

- recht evenredig (verband) — evenredigheidsconstante, hellingsgetal
- lineair verband — hellingsgetal, richtingscoëfficiënt — startgetal
- lineaire vergelijking — balansmethode
- omgekeerd evenredig (verband) — hyperbool
- hyperbolisch verband — asymptoot

Activiteiten

- formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken
- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken
- vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden oplossen
- formules en grafieken bij omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken
- formules en grafieken bij hyperbolische verbanden maken en gebruiken

Recht of gebogen

Domein

Grafieken en formules

Hoofdstuk

Lineair en hyperbolisch

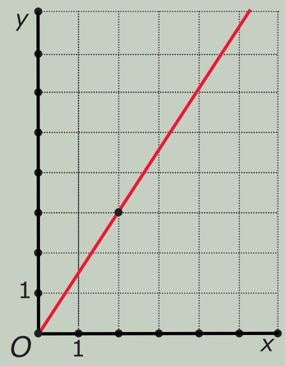
Inhoud

1

1.1 Recht evenredig

Inleiding

Je hebt al met formules kennisgemaakt. Nu ga je werken met formules met twee variabelen. Je kunt daar een grafiek bij maken. De eenvoudigste grafieken zijn rechte lijnen door de oorsprong van het assenstelsel. Dus daar begin je mee.



Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken;
- de begrippen evenredigheidsconstante en hellingsgetal;
- van een formule en/of grafiek bepalen of er sprake is van een recht evenredig verband.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode gebruiken.

Opgave V1

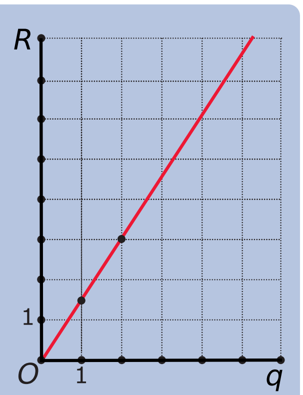
Uitleg

Applet

Een winkelier koopt een bepaald artikel in voor € 0,50 per kg en verkoopt het voor € 2,00 per kg.

De opbrengst R (in euro) is dan afhankelijk van de hoeveelheid q die hij verkoopt. Er geldt: $R = 1{,}50q$.

Bij $q = 0$ hoort $R = 1{,}50 \cdot 0 = 0$.
Bij $q = 5$ hoort $R = 1{,}50 \cdot 5 = 7{,}50$.
Bij $q = 10$ hoort $R = 1{,}50 \cdot 10 = 15$.



Hierbij hoort een grafiek die door (0,0) gaat: als er niets wordt verkocht, is er ook geen opbrengst. De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong van het assenstelsel. Hier staan de waarden van q op de horizontale x-as en die van R op de y-as.

Je zegt dat de variabele R recht evenredig is met de variabele q.
Als q verdubbelt, dan wordt ook R twee keer zo groot.

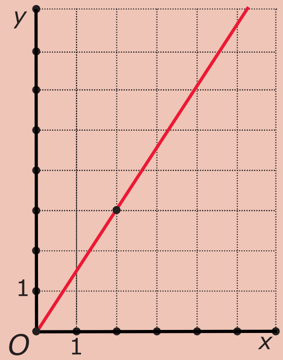
Het getal $1{,}50$ heet de evenredigheidsconstante. Maar omdat het de helling van de grafiek bepaalt, noem je het ook wel het hellingsgetal.

Opgave 1 Opgave 2

Applet

Theorie

In de wiskunde is het gebruikelijk om voor de variabelen de letters x en y te gebruiken in formules. Je zegt dat de variabele y **recht evenredig** is met de variabele x als een verdubbeling van x ook altijd een verdubbeling van y betekent. Hierbij hoort een formule van de vorm $y = a \cdot x$. De grafiek bij een recht evenredig verband is een rechte lijn door de oorsprong $(0,0)$.



- a heet de **evenredigheidsconstante**.
- a bepaalt hoe steil de rechte lijn loopt en heet daarom wel het **hellingsgetal** van die rechte lijn.

Meestal is y de afhankelijke variabele en dus komt y op de verticale as. Die as heet daarom de **y-as**. De horizontale as is de **x-as**.

Voorbeeld 1

Een fietser rijdt met een constante snelheid op een rechte polderweg van A naar B. Op tijdstip $t = 0$ startte hij bij A, en 12 minuten en 26 seconden later heeft hij precies 5 km afgelegd.

- Met hoeveel km/uur fietst hij?
- Geef een formule voor de afgelegde afstand s vanaf A in km afhankelijk van de tijd t in uren.

Antwoord

Hij legt 5 km in 12 minuten en 26 seconden af.

Dat zijn 5 km in $12 \cdot 60 + 26 = 746$ seconden.

Hij heeft dan een snelheid van $\frac{5}{746}$ km/seconde.

Dat is $\frac{5}{746} \cdot 60$ km/minuut en $\frac{5}{746} \cdot 60 \cdot 60$ km/uur. Zijn snelheid is dus ongeveer 24,1 km/uur.

Bij een constante snelheid is de afgelegde afstand recht evenredig met de tijd. De bijbehorende formule is dus $s = 24{,}1t$ met t in uren.

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

Pieter gaat op vakantie met de auto en hij legt 1105 kilometer af. Zijn auto rijdt 13 kilometer op één liter benzine. De benzineprijs is op dit moment € 1,75 per liter.

- Stel de formule op voor het verband tussen de benzinekosten K in euro en de afstand s in km. Rond de evenredigheidsconstante af op twee decimalen.
- Wat kost de vakantie Pieter aan benzine?

Antwoord

Hij kan 13 km rijden met 1 liter benzine en deze kost € 1,75.

13 km kost Pieter dus € 1,75 = 175 eurocent.

Per kilometer is dit dan $\frac{175}{13} \approx 13{,}46 \approx 13$ cent.

Voor de kosten K geldt dan $K = 0{,}13 \cdot s$ euro.

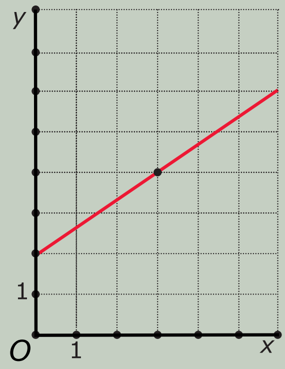
Pieter zal in totaal $\frac{1105}{13} = 85$ liter benzine verbruiken. De benzine kost € 1,75 per liter. De vakantie kost Pieter dus aan benzine: $85 \cdot 1{,}75 = 148{,}75$ euro. Met de formule zou dit $0{,}13 \cdot 1105 = 143{,}65$ euro zijn. Het verschil zit hem in het afronden.

Opgave 5 Opgave 6

1.2 Lineaire verbanden

Inleiding

Er zijn natuurlijk ook situaties waarbij rechte lijn grafieken niet door de oorsprong van het assenstelsel gaan. Je gaat nu zien wanneer dat het geval is. Rechte lijn grafieken horen bij lineaire verbanden.



Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken;
- de begrippen hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) en startgetal;
- bij een lineaire grafiek een formule opstellen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige verbanden herkennen en de evenredigheidsconstante, het hellingsgetal, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode gebruiken.

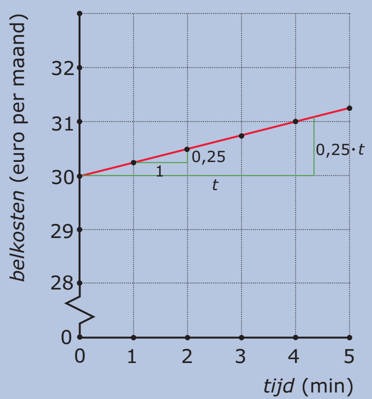
Opgave V1

Uitleg

Met een glasvezelabonnement ben je voorzien van t.v., internet en vaste telefonie. Je betaalt maandelijkse abonnementskosten en daar bovenop belkosten.
Stel je betaalt € 30,00 abonnementskosten per maand en nog € 0,25 per gebelde minuut. Van de kosten per maand kun je een grafiek maken. Je kosten per maand zijn:

- 0 minuten gebeld: 30,00 euro
- 1 minuut gebeld: $30 + 1 \cdot 0{,}25 = 30{,}25$ euro
- 2 minuten gebeld: $30 + 2 \cdot 0{,}25 = 30{,}50$ euro
- 3 minuten gebeld: $30 + 3 \cdot 0{,}25 = 30{,}75$ euro
- 4 minuten gebeld: $30 + 4 \cdot 0{,}25 = 31{,}00$ euro
- t minuten gebeld: $30 + t \cdot 0{,}25$ euro

Dus geldt de formule: $K = 30 + 0{,}25t$
K stelt de belkosten per maand voor.



Omdat de grafiek een rechte lijn is, spreek je van een lineair verband. Het getal 30 is het startgetal en het hellingsgetal $0{,}25$ bepaalt de helling van de grafiek. Het hellingsgetal is de vaste toename (of afname) van K bij een toename van t met 1 eenheid. Omdat dit getal de richting van de lijn bepaalt, heet het ook wel de richtingscoëfficiënt.

Opgave 1 Opgave 2

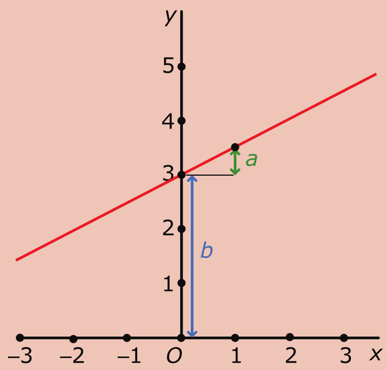
Applet

Theorie

Als er een **lineair verband** tussen y en x is, heeft de bijbehorende formule de vorm $y = a \cdot x + b$, waarin:

- a het **hellingsgetal**, dus de toe- of afname van y per stap van 1 van x;
- b het **begingetal**, de uitkomst bij $x = 0$.

De grafiek bij zo'n lineair verband is een rechte lijn door $(0,b)$. Als je de waarde van x daarna met 1 verhoogt, neemt de uitkomst met a toe en als a negatief is, af. Het hellingsgetal a heet ook wel de **richtingscoëfficiënt**, want dit getal bepaalt de richting van de grafiek.

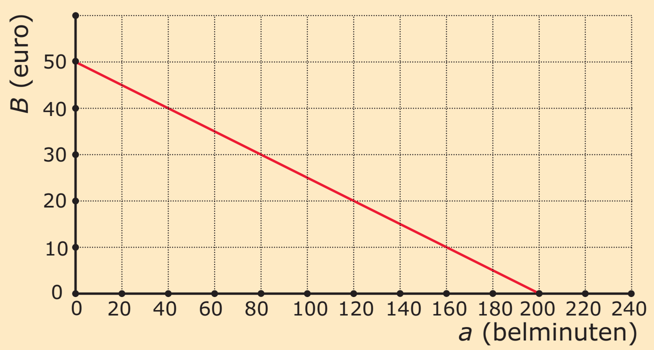


Voorbeeld 1

Bij een prepaid telefoonabonnement koop je vooraf beltegoed. Bijvoorbeeld een tegoed van € 50,00.
Als elke minuut bellen € 0,25 kost, is je beltegoed B nog uitsluitend afhankelijk van het aantal belminuten a. Er geldt: $B = 50 - 0{,}25a$.

Ook hier is sprake van een lineair verband. Het startgetal is 50.
De richtingscoëfficiënt is $-0{,}25$.

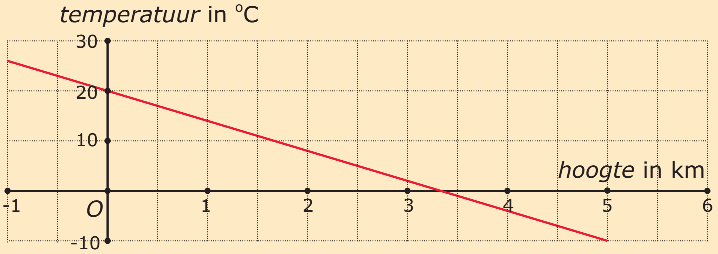
De bijbehorende grafiek is een dalende rechte lijn. Na $\frac{50}{0{,}25} = 200$ minuten is het beltegoed op.



Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

In de grafiek is te zien hoe de temperatuur T afhangt van de hoogte h boven de zeespiegel.



Welke formule hoort bij het lineaire verband tussen T en h?

Antwoord

Het startgetal is 20 °C, dat is het punt waar de grafiek de verticale as snijdt.
Om het hellingsgetal te weten te komen, zoek je twee ‘mooie’ punten op de grafiek. Hier zijn dat $(0{,}20)$ en $(5, \text{-}10)$. Deze coördinaten gebruik je om het hellingsgetal te berekenen. Als de hoogte toeneemt van $h = 0$ tot $h = 5$, dan neemt de temperatuur af van 20 °C naar $\text{-}10$ °C. Bij elke hoogtestijging van $5 - 0 = 5$ km, verandert de temperatuur met $\text{-}10 - 20 = \text{-}30$ °C. Per km dus met $\frac{\text{-}30}{5} = \text{-}6$ °C.

Het hellingsgetal per kilometer is daarom $\text{-}6$.

De gevraagde formule is:

$T = 20 - 6h$ met h in kilometers en T in °C.

Je kunt nu een tabel maken.

h	0	1	2	3	4	5
T	20	14	8	2	-4	-10

Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7

1.3 Lineaire vergelijkingen

Inleiding

Soms wil je lineaire verbanden met elkaar vergelijken. Bijvoorbeeld als je wilt weten welke aanbieder het goedkoopst is, of welke kaars langer brandt, of...

Gelukkig ken je de balansmethode nog wel!?

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden opstellen en oplossen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige en lineaire verbanden herkennen en het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige en lineaire verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Opgave V1

Uitleg

De productie van een nieuw soort verf kost € 3,50 per liter. Verder zijn de vaste kosten (machines, gebouwen, enzovoort) berekend op € 24000 per jaar. De fabrikant van deze verf wil de verf verkopen voor € 7,20 per liter.
Hoeveel liter moet hij jaarlijks verkopen om winst te gaan maken?

Je begint met het opstellen van de formules voor de jaarlijkse kosten en de jaarlijkse opbrengst.

De productiekosten K hangen af van het geproduceerde aantal liters a: $K = 24000 + 3{,}50a$.
Als alle geproduceerde verf verkocht wordt, hangt de opbrengst R ook van a af: $R = 7{,}20a$.

Om winst te maken, moet de opbrengst hoger zijn dan de kosten, dus $R > K$. Vul je voor R en K de betreffende formules in, krijg je een lineaire ongelijkheid:

$7{,}20a > 24000 + 3{,}50a$

Om de vraag te beantwoorden: "Hoeveel liter moet hij jaarlijks verkopen om winst te gaan maken?" moet je deze lineaire ongelijkheid oplossen. Daarvoor los je eerst de bijbehorende lineaire vergelijking op:

$7{,}20a = 24000 + 3{,}50a$

Voor zo'n vergelijking gebruik je de balansmethode:

$$\begin{aligned} 7{,}20a &= 24000 + 3{,}50a && \text{beide zijden } -3{,}50a \\ 3{,}70a &= 24000 && \text{beide zijden delen door } 3{,}70 \\ a &= \frac{24000}{3{,}70} \approx 6486{,}5 \end{aligned}$$

Als je ervan uitgaat dat de fabrikant alleen hele liters verkoopt, zijn de opbrengsten bij een jaarlijkse verkoop van 6487 liter gelijk aan de kosten. Wordt er meer verkocht, worden de opbrengsten groter dan de kosten. Dan maakt de fabrikant dus winst. De oplossing van de lineaire ongelijkheid $7{,}20a > 24000 + 3{,}50a$ is dus $a > 6486{,}5$.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

Soms heb je met twee (of meer) lineaire verbanden te maken en wil je weten wanneer de uitkomsten bij het éne verband meer, minder zijn dan die bij het andere verband. Je krijgt dan een **lineaire ongelijkheid**.

Daarvoor los je eerst de bijbehorende **lineaire vergelijking** op.

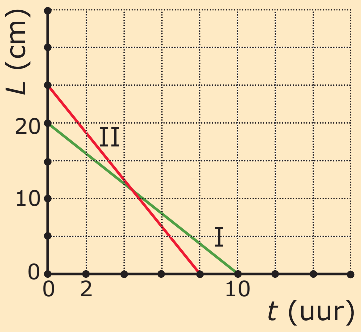
Voor zo'n vergelijking gebruik je de **balansmethode**:

- aan beide zijden van het isgelijkteken mag je hetzelfde optellen of aftrekken;
- aan beide zijden van het isgelijkteken kun je met hetzelfde vermenigvuldigen of door hetzelfde delen als dit maar ongelijk is aan 0.

Heb je de vergelijking opgelost, dan kijk je naar de grafieken van beide verbanden om antwoord op de gestelde vraag te kunnen geven.

Voorbeeld 1

Deze grafieken laten zien hoe twee cilindervormige kaarsen opbranden als ze tegelijk worden aangestoken. L is de lengte van de kaars in centimeter en t is de brandtijd in uren.



Bereken in minuten nauwkeurig het moment waarop beide kaarsen even lang zijn.

Antwoord

Stel bij elke grafiek een formule op:

- kaars I: $L = 20 - 2t$
- kaars II: $L = 25 - 3{,}125t$

Beide kaarsen zijn even lang als: $20 - 2t = 25 - 3{,}125t$. Oplossen geeft:

$$\begin{aligned} 20 - 2t &= 25 - 3{,}125t && \text{beide zijden } -20 \\ -2t &= 5 - 3{,}125t && \text{beide zijden } +3{,}125t \\ 1{,}125t &= 5 && \text{beide zijden : } 1{,}125t \\ t &= \frac{5}{1{,}125} && \text{berekenen} \\ t &= 4\tfrac{4}{9} \end{aligned}$$

Beide kaarsen zijn even lang na ongeveer 4 uur en 27 minuten ($\frac{4}{9} \cdot 60 \approx 27$, omgerekend naar minuten).

Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6

Voorbeeld 2

Je ziet hier twee voorbeelden van het oplossen van lineaire vergelijkingen die wat lastiger zijn. Kijk goed wat er elke stap gebeurt.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x - 5 &= \tfrac{5}{6}x + \tfrac{1}{2} && \text{stap 1} \\ 2x - 30 &= 5x + 3 && \text{stap 2} \\ -3x &= 33 && \text{stap 3} \\ x &= \frac{33}{-3} && \text{stap 4} \\ x &= -11 \end{aligned}$$

Eerste voorbeeld

$$\begin{aligned} 6 - (x - 12) &= 3(12 - 3x) && \text{stap 1} \\ 6 - x + 12 &= 36 - 9x && \text{stap 2} \\ 18 - x &= 36 - 9x && \text{stap 3} \\ 8x &= 18 && \text{stap 4} \\ x &= \frac{18}{8} = 2{,}25 \end{aligned}$$

Tweede voorbeeld

Opgave 7 Opgave 8 Opgave 9

1.4 Omgekeerd evenredig

Inleiding

Hoe sneller je loopt, fietst, of rijdt, hoe minder tijd je nodig hebt om een bepaalde afstand af te leggen. Daarom bestaat er tussen afstand en tijd vaak geen recht evenredig of lineair verband. Je gaat nu kennismaken met omgekeerd evenredige verbanden.

$$y = a \cdot x$$

recht evenredig

omgekeerd evenredig

$$y = \frac{a}{x}$$

Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken.

Voorkennis

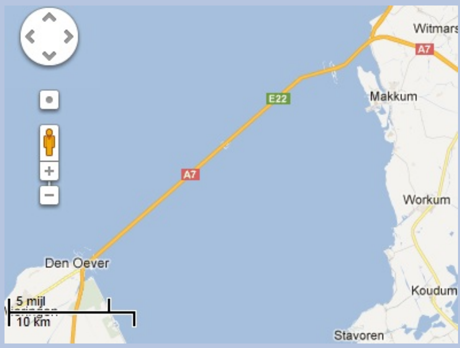
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige en lineaire verbanden herkennen en het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige en lineaire verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Op de Afsluitdijk ligt een snelweg met een lengte van 32 km. Hoe hoger je snelheid, hoe korter de tijd dat je op de Afsluitdijk rijdt. De tijd die je nodig hebt, is omgekeerd evenredig met de snelheid: rijd je twee keer zo snel, dan heb je de helft van de reistijd nodig:

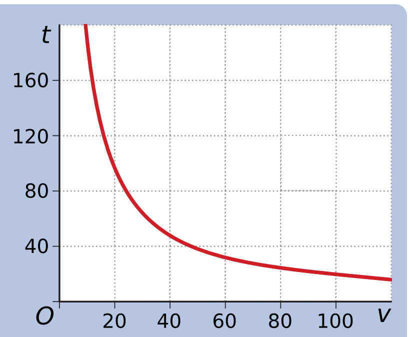
- Rijd je 60 km/h, dan ben je $\frac{32}{60} \cdot 60 = 32$ minuten onderweg.
- Rijd je 120 km/h, dan ben je $\frac{32}{120} \cdot 60 = 16$ minuten onderweg.



Je ziet dat je de reistijd t in minuten kunt berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid v (in km/h) en met 60 te vermenigvuldigen: $t = \frac{32}{v} \cdot 60 = \frac{1920}{v}$. Ook geldt $v \cdot t = 1920$.

Bij een formule zoals $t = \frac{1920}{v}$ spreek je van een omgekeerd evenredig verband.

De grafiek van zo'n omgekeerd evenredig verband is een hyperbool. Je ziet de hyperbool bij de formule $t = \frac{1920}{v}$ voor positieve waarden van t en v.

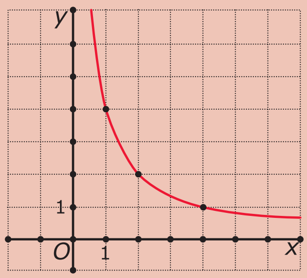


Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Applet

Theorie

Bij een formule van de vorm $y = \frac{c}{x}$ met c een constant getal, spreek je van een **omgekeerd evenredig verband**. Je zegt wel dat de variabelen x en y **omgekeerd evenredig** zijn.



In het algemeen geldt:

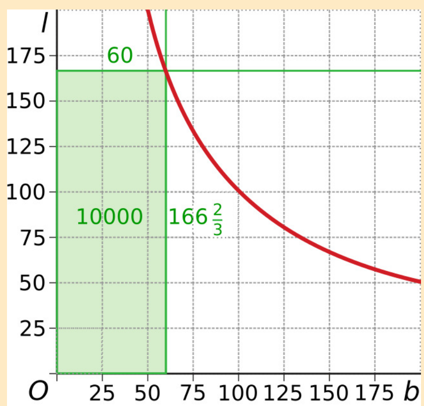
- Twee variabelen x en y zijn omgekeerd evenredig als het vermenigvuldigen van x met een getal k tot gevolg heeft dat y met $\frac{1}{k}$ wordt vermenigvuldigd. Bijvoorbeeld: wordt x twee keer zo groot, dan wordt y een half keer zo groot.
- Je kunt de formule $y = \frac{c}{x}$ ook schrijven als $xy = c$.

De grafiek van zo'n omgekeerd evenredig verband is een **hyperbool**.

Applet

Voorbeeld 1

Als een rechthoekig tafelblad een oppervlakte van 1 m^2 heeft, kunnen lengte l en breedte b nog variëren. Laat zien dat l en b omgekeerd evenredig zijn en stel een passende formule op met l en b in centimeters.



Antwoord

Voor de oppervlakte van de rechthoek geldt: $l \cdot b = 10000$ cm^2.

Dit kun je schrijven als: $l = \frac{10000}{b}$.

- Bij $b = 100$ hoort $l = \frac{10000}{100} = 100$.
- Bij $b = 200$ hoort $l = \frac{10000}{200} = 50$.

Wordt b twee keer zo groot, dan wordt l gehalveerd. Dit kun je ook voor andere waarden nagaan.
l en b zijn omgekeerd evenredig.

Opgave 4 Opgave 5

1.5 Hyperbolische verbanden

Inleiding

Hoe sneller je loopt, fietst, of rijdt, hoe minder tijd je nodig hebt om een bepaalde afstand af te leggen. Vaak is er sprake van een omgekeerd evenredig verband. Maar wat als er een tussenstop is? Je gaat nu kennismaken met hyperbolische verbanden.

Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij hyperbolische verbanden maken en gebruiken;
- vergelijkingen oplossen waarin hyperbolische verbanden voorkomen.

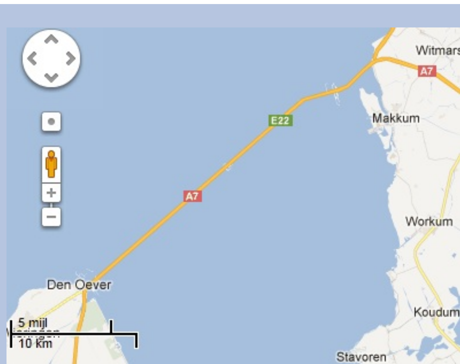
Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige, lineaire en omgekeerd evenredige verbanden herkennen en het hellingsgetal, de richtingscoëfficiënt, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige, lineaire en omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Opgave V1

Uitleg

Je rijdt weer op de Afsluitdijk, die 32 km lang is. Je stapt dit keer onderweg 5 minuten uit om van het uitzicht te genieten. Bereken je nu de reistijd bij verdubbeling van de snelheid, zie je het volgende:

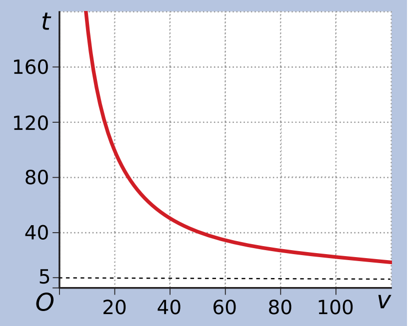


- Bij een snelheid van 120 km/h ben je $\frac{32}{120} \cdot 60 + 5 = 21$ minuten onderweg.
- Bij een snelheid van 60 km/h ben je $\frac{32}{60} \cdot 60 + 5 = 37$ minuten onderweg.

Nu betekent verdubbeling van de snelheid geen halvering van de reistijd. Snelheid en reistijd zijn niet omgekeerd evenredig.

Je ziet dat je de reistijd t in minuten kunt berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid v (km/h), met 60 te vermenigvuldigen en ten slotte nog 5 bij de uitkomst op te tellen:

$t = \frac{32}{v} \cdot 60 + 5 = \frac{1920}{v} + 5$



Je spreekt ook nu van een hyperbolisch verband.

Voor snelheden dicht bij 0 wordt de reistijd heel erg groot. Voor hele grote snelheden komt de reistijd in de buurt van de 5 minuten.

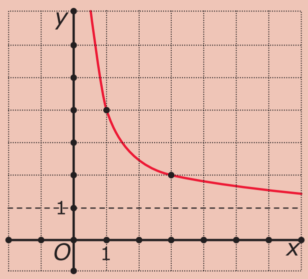
De grafiek nadert naar de y-as (de verticale asymptoot) en naar de horizontale lijn $t = 5$ (de horizontale asymptoot).

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Applet

Tussen twee variabelen x en y bestaat een **hyperbolisch verband** als er een formule van de vorm $y = \frac{c}{x} + d$ met c en d constant bij hoort.



De grafiek van zo'n hyperbolisch verband is een **hyperbool**.

De grafiek benadert twee lijnen steeds dichter zonder ze ooit te snijden: de y-as en de lijn $y = d$. Dergelijke lijnen noem je **asymptoten**:

- De y-as is de **verticale asymptoot** van de grafiek.
- De lijn $y = d$ is de **horizontale asymptoot** van de grafiek.

Voorbeeld 1

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daarbovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig folders laat drukken.

Noem het aantal folders dat je wilt laten drukken a en de kosten per folder k. Maak een bijpassende formule van k afhankelijk van a en teken de grafiek. Je wilt niet meer dan € 0,06 per folder betalen. Hoeveel folders a moet je dan laten drukken?

Antwoord

Per folder betaal je in ieder geval € 0,04. Verder betaal je per folder $\frac{10}{a}$ euro.

In totaal dus $k = 0{,}04 + \frac{10}{a}$ euro per folder.

Om een goede bijpassende grafiek te maken moet je bedenken dat je veel folders wilt laten maken om de kosten per folder laag te houden. Misschien wel zo'n 1000 stuks. a komt op de horizontale as en laat je daarom bijvoorbeeld lopen vanaf 0 tot en met 1000. Voor 1000 folders betaal je € 0,05 per stuk, maar voor 100 folders betaal je € 0,14 per stuk. Maak zelf een goede tabel en grafiek.

Je moet vervolgens oplossen $0{,}04 + \frac{10}{a} = 0{,}06$. Dat kun je doen met behulp van de grafiek en inklemmen, maar je kunt ook de balansmethode toepassen. Daarna los je de hyperbolische ongelijkheid $0{,}04 + \frac{10}{a} \leq 0{,}06$ op.

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

Wanneer je een auto huurt, betaal je een vast bedrag van € 40,00 en daarbovenop € 0,60 per gereden kilometer.
Noem je het aantal gereden kilometers q en de kosten per kilometer k, dan geldt: $k = 0{,}60 + \frac{40}{q}$.
Bereken voor welke waarde van q de kosten per gereden kilometer € 1,13 bedragen.

Antwoord

Je moet de volgende vergelijking oplossen: $0{,}60 + \frac{40}{q} = 1{,}13$.

$$\begin{aligned} 0{,}60 + \frac{40}{q} &= 1{,}13 \\ \frac{40}{q} &= 0{,}53 \\ q &= \frac{40}{0{,}53} \\ q &\approx 75{,}47 \end{aligned}$$

Dus bij $75{,}47$ gereden kilometers bedragen de kosten € 1,13 per kilometer.

Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7

Begrippen

- stelling van Pythagoras — rechthoekszijden, hypotenusa (langste zijde)
- hulplijn
- oppervlakte van ruimtelijke figuren
- inhoud (volume) van ruimtelijke figuren
- doorsnede — op ware grootte
- lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor — gelijkvormige figuren

Activiteiten

- werken met de stelling van Pythagoras om lengtes te berekenen;
- lengtes in het platte vlak en in ruimtelijke figuren berekenen;
- de oppervlakte van ruimtelijke figuren berekenen;
- het volume (de inhoud) van ruimtelijke figuren berekenen;
- eenvoudige doorsnijdingen van ruimtelijke figuren tekenen, ook op ware grootte;
- ruimtelijke figuren vergroten (verkleinen) — vergrotingsfactoren omrekenen.

Rekenen aan een zomerhuisje

Domein

Meten en tekenen

Hoofdstuk

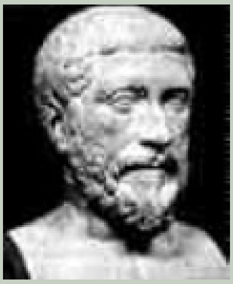
Meetkundige berekeningen

Inhoud

2

2.1 Pythagoras

Inleiding



Vanuit de oppervlakte van een vierkant kun je met behulp van worteltrekken berekenen hoe lang de zijden ervan zijn. Al eeuwen geleden ontdekte de mens dat je dit kunt toepassen op het berekenen van lengtes. Er ontstond een regel die later de stelling van Pythagoras is genoemd, naar de beroemde wijsgeer **Pythagoras** uit de Griekse oudheid.

Je leert in dit onderwerp

- de stelling van Pythagoras kennen en bewijzen;
- lengtes berekenen met de stelling van Pythagoras;
- met de stelling van Pythagoras nagaan of een driehoek rechthoekig is.

Voorkennis

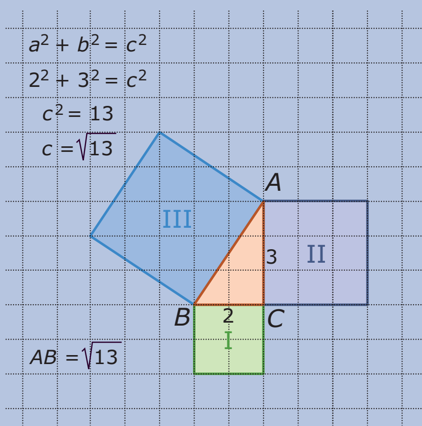
- vanuit de oppervlakte van een vierkant de lengte van de zijden berekenen door worteltrekken;
- de oppervlakte van roosterfiguren bepalen;
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- werken met coördinaten.

Opgave V1

Uitleg

Applet

Je hebt bij hopelijk ontdekt dat bij rechthoekige driehoeken de oppervlakte van het vierkant op de langste zijde even groot is dat de oppervlaktes van de vierkanten op de twee andere zijden samen.



Als van ΔABC hoek C de rechte hoek is, dan heet de zijde c tegenover die rechte hoek de hypotenusa, dat is de langste zijde. De twee andere zijden, in dit geval a en b, zijn rechthoekszijden, want ze liggen op de benen van de rechte hoek.
In de rechthoekige ΔABC geldt dan altijd dat:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

ofwel:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dit heet de stelling van Pythagoras. Bijvoorbeeld als $BC = a = 2$ en $AC = b = 3$:

$2^2 + 3^2 = c^2$

dus:

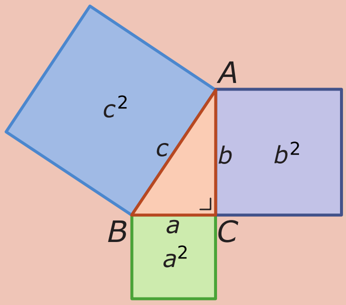
$c^2 = 4 + 9 = 13$ en $c = \sqrt{13} \approx 3{,}61$.

Zo heb je de stelling van Pythagoras gebruikt om de langste zijde van de rechthoekige ΔABC te berekenen.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Theorie

Als van ΔABC hoek C de rechte hoek is, dan heet de zijde c tegenover die rechte hoek de **hypotenusa**, dat is de langste zijde. De twee andere zijden, in dit geval a en b, noem je **rechthoekszijden**, want ze liggen op de benen van de rechte hoek.



In de rechthoekige ΔABC met $\angle C = 90°$ geldt dan altijd dat:

$BC^2 + AC^2 = AB^2$

ofwel:

$a^2 + b^2 = c^2$

In het algemeen geldt in elke rechthoekige driehoek de **stelling van Pythagoras**:

(rechthoekzijde)^2 + (rechthoekzijde)^2 = (hypotenusa)^2

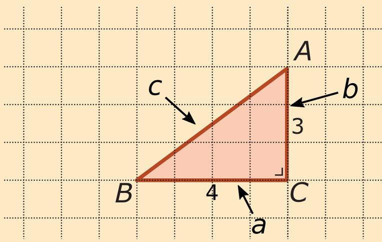
Je kunt deze stelling goed gebruiken om de lengte van een zijde van een rechthoekige driehoek te berekenen als de twee andere zijden zijn gegeven. In de figuur zie je hoe dat gaat, bekijk ook de voorbeelden.

Voorbeeld 1

Applet

Je ziet hier de rechthoekige driehoek ABC met $BC = a = 4$ en $AC = b = 3$ en $\angle C = 90°$.

Bereken de lengte van de hypotenusa AB.



Antwoord

De stelling van Pythagoras met $AB = c$ geeft:

$4^2 + 3^2 = c^2$

$16 + 9 = 25 = c^2$

zodat $c = \sqrt{25} = 5$.

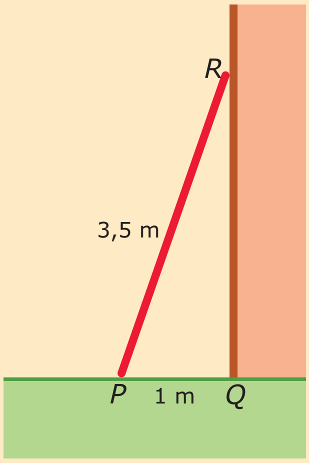
Merk op dat de kwadraten van de gegeven rechthoekszijden worden opgeteld. Vierkanten op de zijden tekenen is niet nodig.

Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 2

Applet

Iemand zet een ladder van $3{,}5$ m schuin tegen de muur van een huis. Hier zie je een zijaanzicht van de situatie. Het punt waar de ladder op de grond staat is 1 m van de muur verwijderd. Hoe hoog komt de ladder?



Antwoord

Je gaat er van uit dat de muur loodrecht op de grond staat, dus dat ΔPQR een rechthoekige driehoek is met een rechte hoek bij Q. De stelling van Pythagoras in ΔPQR is:

(rechthoekzijde)^2 + (rechthoekzijde)^2 = (hypotenusa)^2

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

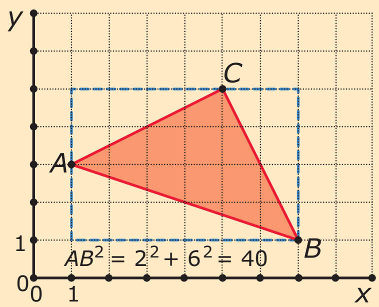
Je weet: $PQ = 1$ m en $PR = 3{,}5$ m.
Dan krijg je: $1^2 + QR^2 = 3{,}5^2$.
Dit geeft:
$QR^2 = 3{,}5^2 - 1^2 = 11{,}25$.
En dus is:
$QR = \sqrt{11{,}25} \approx 3{,}35$ m.

Opgave 8 Opgave 9 Opgave 10

Voorbeeld 3

Applet

Met de stelling van Pythagoras kun je ook lengtes van lijnstukken op een rooster berekenen. Je maakt dan een rechthoekige driehoek op de roosterlijnen. Hier zie je hoe de lengte van AB kan worden berekend.
Om te onderzoeken of deze ΔABC een rechte hoek heeft, ga je na of de stelling van Pythagoras in die driehoek geldt. Als het kwadraat van de langste zijde gelijk is aan de som van de kwadraten van de twee andere zijden, dan is de hoek tegenover die langste zijde recht.

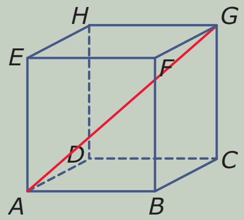


Opgave 11 Opgave 12 Opgave 13

2.2 Lengtes berekenen

Inleiding

Je kent nu de stelling van Pythagoras. Die gebruik je voor het berekenen van lengtes. Dat kun je toepassen in allerlei situaties in twee dimensies, in het platte vlak. Maar je kunt die stelling ook gebruiken in ruimtelijke figuren, in drie dimensies. Vaak moet je dan wel goed zoeken naar geschikte rechthoekige driehoeken. Bekijk deze kubus maar eens. Hoe zou je de lengte van een lichaamsdiagonaal berekenen?



Je leert in dit onderwerp

- de stelling van Pythagoras toepassen in berekeningen, onder andere ook in ruimtelijke figuren.

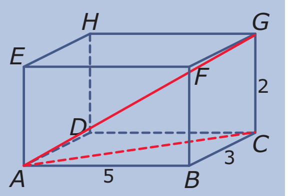
Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- werken met coördinaten.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Met behulp van de stelling van Pythagoras bereken je lengtes van zijden in rechthoekige driehoeken. Dat kun je ook toepassen in ruimtelijke figuren. De moeilijkheid is dan vaak het herkennen van de juiste rechthoekige driehoek.



Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm en $AE = 2$ cm. Je wilt de lichaamsdiagonaal AG berekenen.

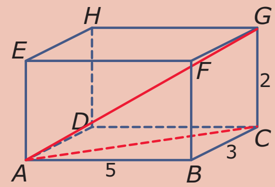
Je tekent eerst hulplijn AC, driehoek ACG is bij C rechthoekig.
Je berekent de lengte van AC in driehoek ABC.
De stelling van Pythagoras in die driehoek luidt: $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
Vul de waarden in die zijn gegeven en bereken AC:
$5^2 + 3^2 = AC^2$
$AC^2 = 34$
$AC = \sqrt{34} \approx 5{,}83$.

De lengte van AG bereken je nu in ΔACG.
De stelling van Pythagoras in die driehoek is: $AC^2 + CG^2 = AG^2$.
Vul de bestaande en gevonden waarden in:

$\left(\sqrt{34}\right)^2 + 2^2 = AG^2$, zodat $AG^2 = 38$ en $AG = \sqrt{38} \approx 6{,}16$.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

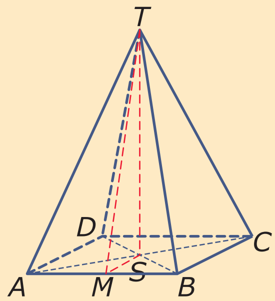


Met behulp van de stelling van Pythagoras bereken je lengtes van zijden in rechthoekige driehoeken. Dat kun je ook toepassen in ruimtelijke figuren. De moeilijkheid is dan vaak het herkennen van de juiste rechthoekige driehoek. Soms moet je dan eerst een **hulplijn** tekenen...

Je kunt bijvoorbeeld in een balk $ABCD.EFGH$ de **lichaamsdiagonaal** AG berekenen. Dat kan zo:

1. Eerst hulplijn AC berekenen in de rechthoekige driehoek ABC.
2. Vervolgens AG berekenen in de rechthoekige driehoek ACG.

Voorbeeld 1



Hier zie je een regelmatig vierzijdige piramide $T.ABCD$ met grondvlak 4 cm bij 4 cm en hoogte 6 cm. Zo'n piramide heet regelmatig omdat het grondvlak een veelhoek is waarvan alle zijden en hoeken gelijk zijn en omdat bovendien de top T loodrecht boven het midden S van het grondvlak zit.

Hoe maak je van zo'n piramide een uitslag?

Antwoord

Ga na dat de hoogte TS van de piramide kleiner is dan de hoogte van de driehoeken TAB, TBC, TCD en TDA. Van ΔTAB is de hoogte TM waarin M het midden van AB is.
Ga na dat $TM^2 = 2^2 + 6^2$.

En dus is $TM = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6{,}3$ cm.
Nu is de uitslag gemakkelijk te tekenen.

Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6

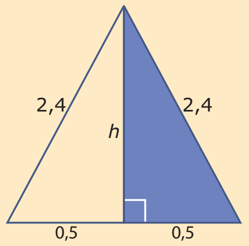
Voorbeeld 2

Deze ladder kan op drie plaatsen scharnieren. Nu scharniert hij alleen halverwege. De totale lengte van de ladder als hij helemaal uitgeklapt is (en dus nergens scharniert) bedraagt $4{,}80$ m. In deze stand staan de poten 1 m uit elkaar.

Hoe hoog komt de ladder nu?

Antwoord

Bekijk de in het midden scharnierende ladder van de zijkant. Je ziet dan een gelijkbenige driehoek met een basis van 1 m en benen van $2{,}40$ m. De hoogte h is een rechthoekszijde van een rechthoekige driehoek.



De stelling van Pythagoras levert op $0{,}5^2 + h^2 = 2{,}4^2$.

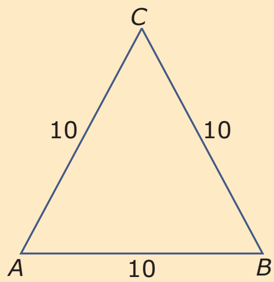
En dus is $h = \sqrt{2{,}4^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{5{,}51} \approx 2{,}35$ m.

Opgave 7 Opgave 8 Opgave 9

Voorbeeld 3

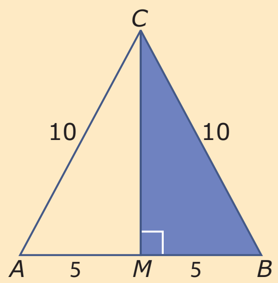
Van een gelijkzijdige driehoek is de omtrek 30.

Hoeveel bedraagt de oppervlakte van deze driehoek?



Antwoord

Voor de oppervlakte van ΔABC moet je een hoogte berekenen, bijvoorbeeld CM.



In de rechthoekige driehoek MBC geldt:
$CM^2 + MB^2 = BC^2$
$CM^2 + 5^2 = 10^2$

Dus is $CM = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75}$ cm.

De oppervlakte van ΔABC is nu $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{75} = 5\sqrt{75}$ cm^2.

Opgave 10 Opgave 11 Opgave 12

2.3 Oppervlakte ruimtefiguur

Inleiding

Als je zo'n nestkast wilt bouwen moet je weten hoeveel materiaal ervoor nodig is. Als je hout gebruikt dat overal even dik is, betekent dit dat je de oppervlakte aan hout wilt uitrekenen. Dat kun je vast al.
Je zult zien, dat hierbij af en toe de stelling van Pythagoras goed van pas komt.

Je leert in dit onderwerp

- de oppervlakte berekenen van een ruimtelijke figuur waarvan je een uitslag kunt tekenen.

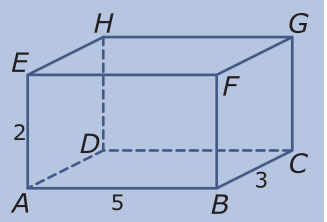
Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- werken met coördinaten.

Opgave V1

Uitleg

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm en $AE = 2$ cm. Je wilt de oppervlakte bepalen.
Die oppervlakte is de som van de oppervlaktes van alle afzonderlijke grensvlakken:



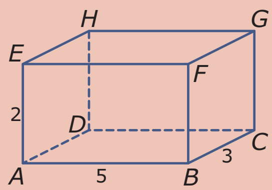
- ondervlak en bovenvlak zijn elk $5 \cdot 3 = 15$ cm^2
- voorvlak en achtervlak zijn elk $5 \cdot 2 = 10$ cm^2
- linker en rechter zijvlak zijn elk $3 \cdot 2 = 6$ cm^2

De totale oppervlakte is $2 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 62$ cm^2.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

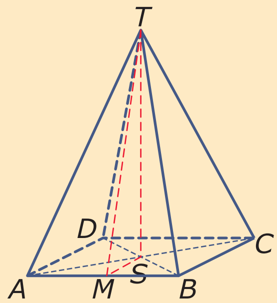
De **oppervlakte van een ruimtelijke figuur** is de som van de oppervlaktes van alle afzonderlijke grensvlakken. Dat klinkt niet al te moeilijk, vooral niet als alle grensvlakken (vlakke) veelhoeken zijn. Wanneer de grensvlakken gebogen zijn (zoals bij een bol, een kegel, een cilinder, ...) dan is dat meteen al veel moeilijker. Voorlopig kun je de oppervlakte alleen bepalen van ruimtelijke figuren waar je een **uitslag** van kunt maken.



Bekijk de voorbeelden.

Voorbeeld 1

Hier zie je een regelmatig vierzijdige piramide $T.ABCD$ met grondvlak 4 cm bij 4 cm en hoogte 6 cm. Zo'n piramide heet regelmatig omdat het grondvlak een veelhoek waarvan alle zijden en hoeken gelijk zijn en omdat bovendien de top T loodrecht boven het midden S van het grondvlak zit.



Bereken de totale oppervlakte van deze piramide.

Antwoord

Het grondvlak is $4 \cdot 4 = 16$ cm^2.

De vier opstaande grensvlakken zijn gelijkbenige driehoeken met een basis van 4 cm en een hoogte die je kunt uitrekenen met de stelling van Pythagoras. Ga na dat deze hoogte $\sqrt{40}$ is.

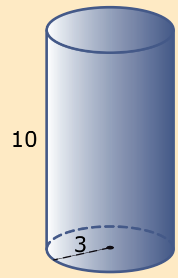
De oppervlakte van één opstaand grensvlak is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{40} = 2\sqrt{40}$ cm^2.

De totale oppervlakte van de piramide is $16 + 4 \cdot 2\sqrt{40} = 16 + 8\sqrt{40}$ cm^2.

Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Bereken de oppervlakte van deze cilinder inclusief grondvlak en bovenvlak.

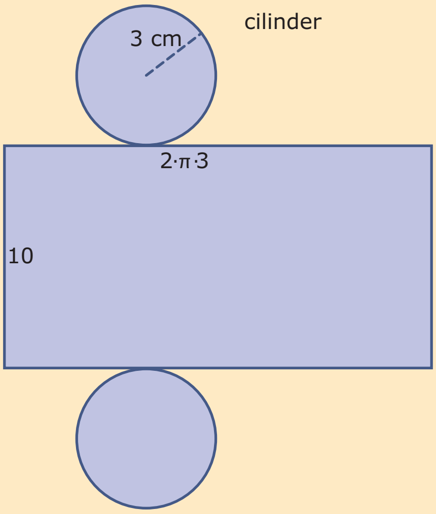


Antwoord

Het grondvlak en het bovenvlak van deze cilinder zijn cirkels met een straal van 3.
Ze hebben daarom elk een oppervlakte van $\pi \cdot 3^2 = 9\pi$.

Het gebogen zijvlak (de zogenaamde ‘mantel’ van de cilinder) kun je openknippen en plat voor je neerleggen. De cilindermantel is dan een rechthoek waarvan de lengte gelijk is aan de omtrek van de grondcirkel en de breedte gelijk is aan de hoogte van de cilinder.
De cilindermantel is dus een rechthoek van $2\pi \cdot 3 = 6\pi$ bij 10. Hij heeft een oppervlakte van $6\pi \cdot 10 = 60\pi$.

De totale oppervlakte van de cilinder is $78\pi \approx 245{,}0$.



Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 3

Bereken de dakoppervlakte van dit huis. Het grondvlak is 8 bij 8 m. De nok van het dak zit 8 m boven de grond. Houd geen rekening met de schoorsteen.

Antwoord

Het dak bestaat uit 8 rechthoekige driehoeken.
Elk van die driehoeken heeft een rechthoekszijde van 4 m (de halve nok van het dak) en een rechthoekszijde die één van de twee benen van een driehoekige gevel is. De benen van die driehoekige gevels kun je uitrekenen met de stelling van Pythagoras.
Ga na dat ze $\sqrt{80}$ meter lang zijn.

De oppervlakte van één zo'n dakdeel is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{80} = 2\sqrt{80}$ m^2.

Het totale dak heeft een oppervlakte van $8 \cdot 2\sqrt{80} = 16\sqrt{80} \approx 143{,}11$ m^2.

Opgave 8 Opgave 9

2.4 Inhoud ruimtefiguur

Inleiding

Als je zo'n nestkast wilt ophangen, moet hij groot genoeg zijn voor een koolmezengezin. De inhoud ervan is dus belangrijk voor het dierenwelzijn.
Je zult zien, dat hierbij af en toe de stelling van Pythagoras goed van pas komt.

Je leert in dit onderwerp

- de inhoud berekenen van de volgende ruimtelijke figuren: balk, prisma, cilinder, piramide, kegel.

Voorkennis

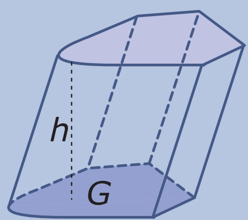
- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- de oppervlakte berekenen van een ruimtelijke figuur waarvan je een uitslag kunt tekenen.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg 1

De inhoud (het volume) van een ruimtelijke figuur is het aantal kubussen van $1 \cdot 1 \cdot 1$ dat er in past. Soms heb je daarbij ook delen van zo'n kubus nodig.

Er bestaan lichamen waarvan grondvlak en bovenvlak evenwijdig zijn en dezelfde vorm hebben als elke andere doorsnede evenwijdig aan die vlakken. Van die lichamen bepaal je de inhoud door eerst het grondvlak te bedekken met eenheidskubussen: als de oppervlakte van het grondvlak G is, dan passen er precies G van die eenheidskubussen op.



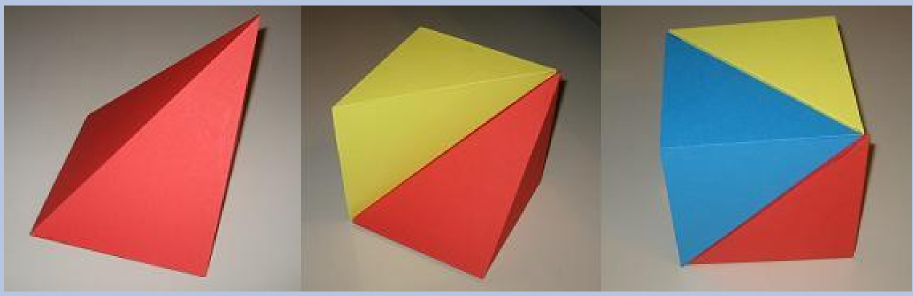
Vervolgens kijk je hoeveel van die even grote lagen er op elkaar moeten worden gelegd om tot het bovenvlak te komen. Als de hoogte van het lichaam h is, dan passen er precies h lagen op elkaar.

In totaal heb je dan $G \cdot h$ eenheidskubussen (of delen ervan).
De inhoud van zo'n lichaam is daarom $G \cdot h$.

Dit betekent dat de inhoud van een balk, een prisma en een cilinder $G \cdot h$ is.

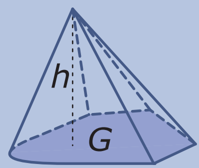
Uitleg 2

Deze serie foto's is afkomstig van **Wikipedia: Piramide**. Hij laat zien hoe drie gelijke piramides een kubus vormen.



Deze vierzijdige piramides hebben een vierkant grondvlak van (bijvoorbeeld) 5 cm en een hoogte die ook 5 cm is. De top zit recht boven een hoekpunt van het grondvlak van zo'n piramide. Drie van die piramides passen in elkaar tot een kubus.

De inhoud van zo'n piramide moet dus wel éénderde van de inhoud van de kubus zijn: $\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.



Je kunt deze inhoud schrijven als $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarin $G = 5 \cdot 5$ de oppervlakte van het grondvlak van de kubus en $h = 5$ de hoogte van de kubus is.

Wiskundigen hebben aangetoond dat de inhoud van figuren die bestaan uit een grondvlak met daarop ribben die allemaal in één punt samenkomen gelijk is aan $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

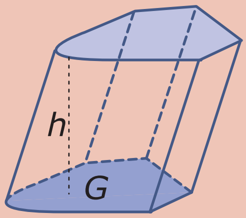
Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Theorie

De **inhoud van een ruimtelijke figuur** is het aantal kubussen van $1 \cdot 1 \cdot 1$ dat er in past. Soms heb je daarbij ook delen van zo'n kubus nodig.

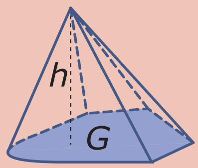
De **inhoud van een balk** is daarom eenvoudig te berekenen: *lengte* × *breedte* × *hoogte*.

Van veel lichamen is de inhoud alleen te berekenen door het in een balkvormige bak water onder te dompelen en dan te bepalen hoeveel het water stijgt. De extra hoeveelheid water is een balk waarvan je weer de inhoud kunt berekenen en dat is dan de inhoud van het lichaam.



De **inhoud van een prisma** (en dus ook een balk) is: $G \cdot h$.
De **inhoud van een cilinder** is: $G \cdot h$.

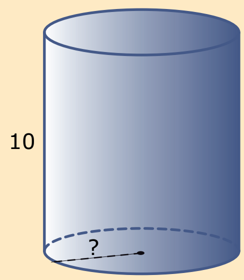
De **inhoud van een piramide** is: $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

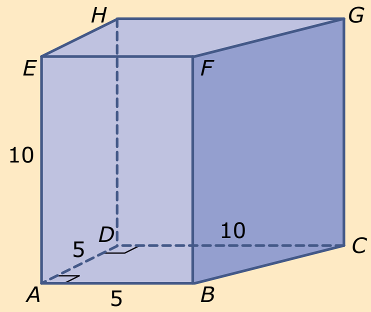


De **inhoud van een kegel** is: $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een prisma en een cilinder met dezelfde inhoud en dezelfde hoogte van 10.
Het grondvlak van het prisma is een trapezium met twee rechte hoeken.
Hoe groot is de straal van de cilinder?





Antwoord

Het grondvlak van het prisma heeft een oppervlakte van $G = 37{,}5$.
Het prisma heeft een hoogte van $h = 10$.
De inhoud is $G \cdot h = 37{,}5 \cdot 10 = 375$.

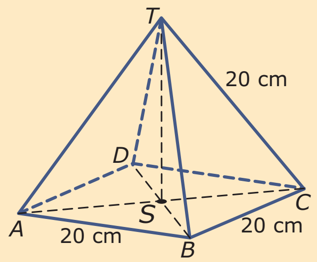
De straal van de cilinder is r dus de oppervlakte van het grondvlak $G = \pi \cdot r^2$.
De cilinder heeft een hoogte van $h = 10$.
De inhoud is $G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Beide inhouden gelijk geeft: $\pi r^2 \cdot 10 = 375$. Hieruit volgt $r \approx 3{,}46$.

Opgave 5 Opgave 6

Voorbeeld 2

Dit is een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$. Grondvlak $ABCD$ is dus een vierkant. Alle ribben zijn 20 cm lang.
Hoeveel bedraagt de inhoud van deze piramide?



Antwoord

Het grondvlak van deze piramide is vierkant $ABCD$ van 20 bij 20 cm.
De oppervlakte van het grondvlak is dus $G = 400$ cm^2.

De hoogte h van de piramide is de lengte van de stippellijn vanuit T loodrecht op het grondvlak die je in de figuur ziet. Die stippellijn komt uit in punt S, het snijpunt van AC en BD.
Met de stelling van Pythagoras bereken je die hoogte:

- Eerst in ΔASB: $AS = BS = \sqrt{200}$.
- Dan in ΔAST: $TS = \sqrt{200} = h$.

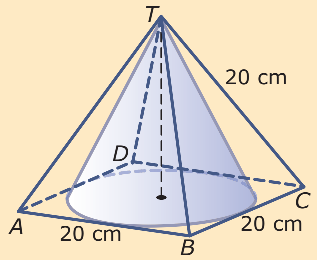
De inhoud van de piramide is dus $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 400 \cdot \sqrt{200} \approx 1886$ cm^3.

Opgave 7 Opgave 8

Voorbeeld 3

In de regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ past precies een kegel met top T. De grondcirkel van die kegel past precies in vierkant $ABCD$.

Hoeveel % van de inhoud van de piramide zit buiten de kegel?



Antwoord

In **Voorbeeld 2** is de hoogte van de piramide (en dus ook de kegel) berekend: $h = \sqrt{200}$.
Ook vind je daar dat de inhoud van de piramide $200\sqrt{200} \approx 1886$ cm^3 is.

De kegel heeft als grondvlak een cirkel met straal 10. De oppervlakte van het grondvlak is $G = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$.

De inhoud van de kegel is $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 100\pi \cdot \sqrt{200} \approx 1481$ cm^3.

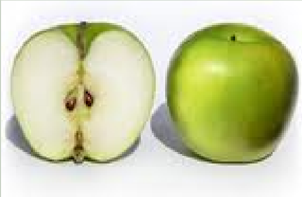
Omdat $\frac{1481}{1886} \approx 0{,}79$ zit 79% van de inhoud van de piramide binnen de kegel. En 21% zit er dus buiten.

Opgave 9 Opgave 10

2.5 Doorsneden

Inleiding

Je ziet hier een doorsnede van een appel. Zo'n doorsnede is bedoeld om te laten zien hoe de appel er van binnen uitziet.
Van allerlei (massieve) ruimtelijke figuren kun je doorsneden maken, een goede zaag is voldoende...



Je leert in dit onderwerp

- doorsneden van ruimtelijke figuren tekenen;
- doorsneden van ruimtelijke figuren op ware grootte tekenen;

Voorkennis

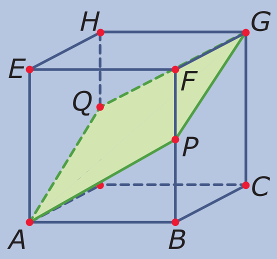
- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- de oppervlakte en de inhoud berekenen van de volgende ruimtelijke figuren: balk, prisma, cilinder, piramide, kegel.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Als je een ruimtelijke figuur doorsnijdt, dan moet je je voorstellen dat je met een mes of een zaag een vlakke doorsnijding maakt.

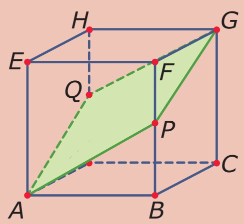
Een doorsnede van een lichaam is de vlakke figuur die wordt gevormd door alle punten die het lichaam en een vlak door dat lichaam gemeen hebben. Van zo'n doorsnede wil je in ieder geval alle snijlijnen (recht of krom) met de grensvlakken (vlak of gebogen) van het lichaam laten zien.



Hier zie je de doorsnede van een kubus en het vlak door A, P, G en Q. P is het midden van BF en Q het midden van DH. Let er op dat alle punten van een doorsnede in één vlak moeten liggen. Bij een driehoek in de ruimte gaat dat altijd wel goed, maar bij figuren met meer hoekpunten moet je dat wel nagaan.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie



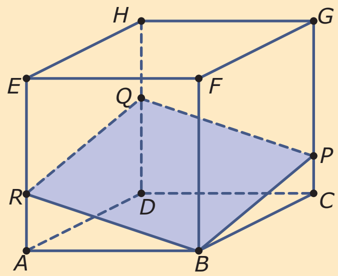
In de wiskunde is een **doorsnede** van een lichaam de vlakke figuur die bestaat uit alle punten die het lichaam en een vlak door dat lichaam gemeen hebben. Van zo'n doorsnede wil je in ieder geval alle snijlijnen (recht of krom) met de grensvlakken (vlak of gebogen) van het lichaam laten zien.

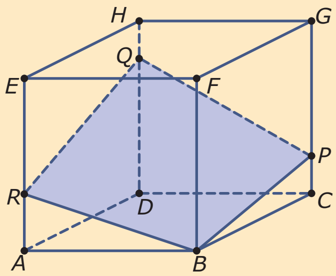
Hier zie je de doorsnede van een kubus en het vlak door A, P, G en Q. P is het midden van BF en Q het midden van DH. Let er op dat alle punten van een doorsnede in één vlak moeten liggen.

Deze doorsnede van de kubus is een ruit. Als je de afmetingen van de kubus weet, kun je de diagonalen van de ruit berekenen. Daarmee kun je de doorsnede **op ware grootte tekenen**.

Voorbeeld 1

Waarom is in de linker figuur wel en in de rechterfiguur niet een doorsnede van een kubus en een vlak getekend?





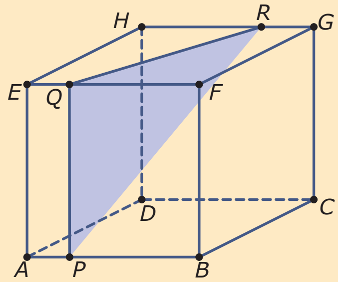
Antwoord

$BPQR$ moet een vlakke vierhoek zijn. Als deze vierhoek vlak is en je brengt je oog naast zijde RB en je kijkt in de richting van BP dan zie je PQ precies achter BR liggen. Je ziet dan de vierhoek van opzij als een lijnstukje. In de linker figuur is dat het geval omdat $PQ//BR$. In de rechter figuur niet (P ligt dan wel recht achter B, maar Q ligt niet recht achter R maar hoger).

Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

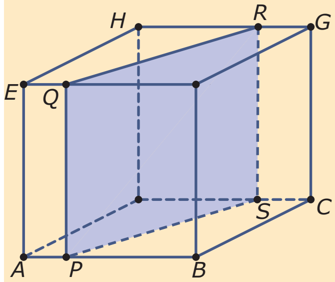
Maak de doorsnede van vlak PQR met de kubus af.



Antwoord

Er is wel een punt (P) van de doorsnede in het ondervlak $ABCD$ getekend, maar nog geen snijlijn met $ABCD$. Datzelfde geldt voor het achtervlak: daarin ligt wel een punt (R) maar er is geen snijlijn getekend.

Omdat de snijlijn met het voorvlak (PQ) verticaal loopt, moet ook de snijlijn met het achtervlak verticaal lopen. Dat wordt RS. En dan wordt PS de snijlijn met het ondervlak.

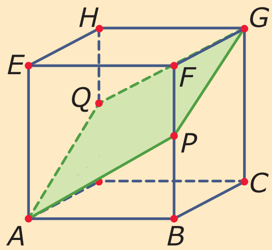


Vierhoek $PQRS$ is de complete doorsnede.

Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 3

Hier zie je de doorsnede van een kubus en het vlak door A, P, G en Q nog eens.
De ribben van deze kubus hebben een lengte van 4 cm. P en Q zijn de middens van de ribben waar ze op liggen.
Teken deze doorsnede op ware grootte.



Antwoord

Omdat de overstaande zijden evenwijdig zijn en even lang zijn kun je beredeneren dat $APGQ$ een ruit is. Om een ruit op ware grootte te tekenen kun je het beste de lengte van de diagonalen uitrekenen of de lengte van de zijden en van één diagonaal uitrekenen...

Opgave 8 Opgave 9 Opgave 10

2.6 Vergroten

Inleiding

Dit is een model van een Smart ForTwo, schaal $1 : 18$.

Alle afmetingen zijn dus $\frac{1}{18}$ deel van de werkelijke afmetingen. Maar wat gebeurt er dan met de oppervlakte en de inhoud?

Je leert in dit onderwerp

- werken met vergrotingen en verkleiningen van figuren en daarbij de begrippen lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor gebruiken.

Voorkennis

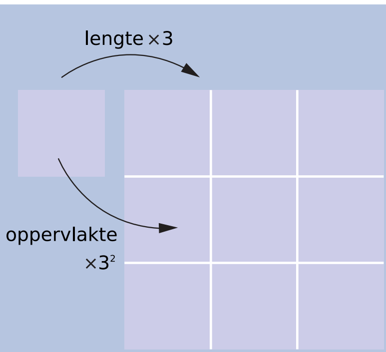
- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- de oppervlakte en de inhoud berekenen van de volgende ruimtelijke figuren: balk, prisma, cilinder, piramide, kegel.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg 1

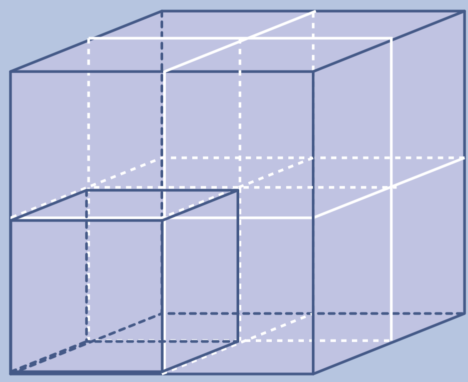
Hier zie je wat er gebeurt als je van een vierkant alle zijden 3 keer zo groot maakt:

- alle lengtes worden 3 keer zo groot;
- de oppervlakte wordt $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ keer zo groot.



Omdat de oppervlakte van een figuur niet meer is dan de som van een (niet altijd geheel) aantal eenheidsvierkanten, geldt dit voor elke figuur. Bovendien kun je het veralgemeniseren tot een lengtevermenigvuldiging met factor k:
Als alle lengtes k keer zo groot worden, worden alle oppervlaktes k^2 keer zo groot.
Omdat de vorm van beide figuren bij vergroten hetzelfde blijft heten ze gelijkvormig.

Uitleg 2



Hier zie je wat er gebeurt als je van een kubus alle ribben 2 keer zo groot maakt:

- alle lengtes worden 2 keer zo groot;
- alle oppervlaktes wordt $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ keer zo groot;
- de inhoud wordt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ keer zo groot.

Omdat een inhoud niet meer is dan de som van een (niet altijd geheel) aantal eenheidskubussen, geldt dit voor elk lichaam. Bovendien kun je het veralgemeniseren tot een lengtevermenigvuldiging met factor k:
Als alle lengtes k keer zo groot worden, worden alle oppervlaktes k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

Theorie

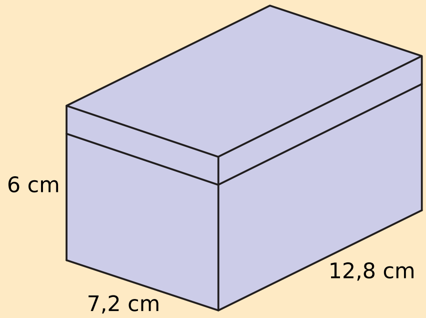
Als je een figuur vergroot (of verkleint) door alle afmetingen met factor k te vermenigvuldigen, dan krijg je een nieuwe figuur die **gelijkvormig** is met de oorspronkelijke.

Verder geldt bij twee gelijkvormige figuren: als de **lengtevergrotingsfactor** k is, dan is de **oppervlaktevergrotingsfactor** k^2 en de **volumevergrotingsfactor** k^3.

Bij een object op schaal $1 : a$ is de lengtevergrotingsfactor $\frac{1}{a}$.

Voorbeeld 1

Hier zie je een model van een houten kist. Van de werkelijke kist zijn alle afmetingen 10 keer zo groot, de gebruikte schaal is dus $1 : 10$. De hoeveelheid hout die je voor deze kist nodig hebt wordt bepaald door de oppervlakte: van het model is de oppervlakte $424{,}32$ cm^2. De inhoud van het model is $511{,}56$ cm^3, want de wanden zijn 10 mm dik.
Hoe zit het nu met de oppervlakte en de inhoud van de werkelijke kist?



Antwoord

De lengtevergrotingsfactor is 10.
De oppervlaktevergrotingsfactor is daarom $10^2 = 100$.
De oppervlakte van de werkelijke kist is dus $424{,}32 \cdot 100 = 42432$ cm^2.

De inhoudsvergrotingsfactor is $10^3 = 1000$.
De inhoud van de werkelijke kist is dus $511{,}56 \cdot 1000 = 511560$ cm^3 en dat is $511{,}56$ L.

Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 2

Op een kaart is een rechthoekig weiland van 5 hectare maar 5 cm^2 groot.
Hoeveel bedraagt de schaal van de kaart?

Antwoord

1 hectare is 1 hm^2 en dat is 10.000 m^2 en dus $100.000.000$ cm^2.

De oppervlakte van het weiland is op de kaart 5 cm^2 en in werkelijkheid $500.000.000$ cm^2.
Dat is $100.000.000$ keer zo groot.

De oppervlaktevergrotingsfactor is $100.000.000$, dus de lengtevergrotingsfactor is 10.000.
Immers: $k^2 = 100.000.000$ geeft $k = \sqrt{100.000.000} = 10.000$.

De schaal van de kaart is daarom $1 : 10.000$.

Opgave 8 Opgave 9

Voorbeeld 3

Een bronzen beeld weegt 240 kg. Het schaalmodel is van hetzelfde materiaal gemaakt en weegt 240 gram. Op welke schaal is het schaalmodel gemaakt?

Antwoord

240 kg is 240.000 gram.

Het werkelijke beeld weegt 1000 keer zoveel als het schaalmodel. Omdat het van hetzelfde materiaal is gemaakt is de inhoudsvergrotingsfactor dus ook 1000.

Omdat $\sqrt[3]{1000} = 10$, is de lengtevergrotingsfactor 10.

De schaal is $1 : 10$.

Opgave 10 Opgave 11

Begrippen

- kwadratisch verband — dal- of bergparabool — top, symmetrieas
- kwadratische vergelijking
- kwadraat afsplitsen
- kwadratische vergelijkingen systematisch oplossen

Activiteiten

- bij een door de formule gegeven kwadratisch verband de top van de bijbehorende parabool bepalen en tabellen en grafieken maken;
- kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen;
- een kwadraat afsplitsen en daarmee de formule van een kwadratisch verband zo schrijven dat je de top van de parabool kunt aflezen;
- kwadratische vergelijkingen systematisch oplossen door een kwadraat af te splitsen — kwadratische vergelijkingen opstellen in situaties die zich daartoe lenen.

Mooie bogen

Domein

Grafieken en formules

Hoofdstuk

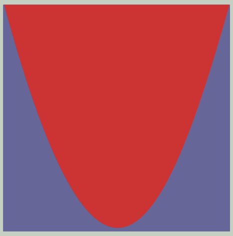
Kwadratische verbanden

Inhoud

3

3.1 Kwadratische verbanden

Inleiding



Dit is een kenmerkende gebogen vorm. In sommige bouwwerken kom je dergelijke bogen tegen. Je spreekt van een parabool, van het Griekse παραβολή, wat 'vergelijking' betekent.

Ook in de sport kom je (bij benadering, vanwege de luchtweerstand) parabolen tegen in de banen van voorwerpen die worden geworpen, getrapt, of afgeschoten. Maar dan meestal ondersteboven...

Je leert in dit onderwerp

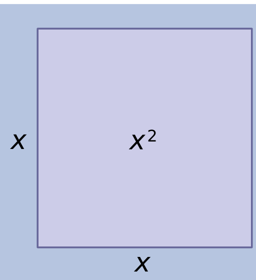
- herkennen dat een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband beschrijft en daaruit de top en de vorm van grafiek van de bijbehorende parabool (berg- of dalparabool) afleiden;
- grafieken bij kwadratische verbanden tekenen en die gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- formules en grafieken bij recht evenredige, lineaire, omgekeerd evenredige en hyperbolische verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg 1



De oppervlakte van een vierkant is een kwadraat. Als de zijde van het vierkant een lengte x heeft, is de oppervlakte y gegeven door $y = x^2$.

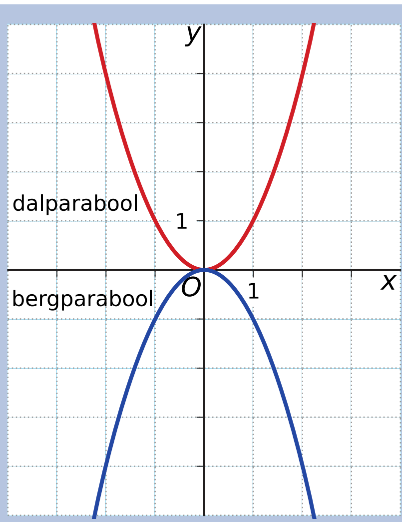
Stel je voor dat x zowel positief als negatief kan zijn. (Bij een vierkant kan dat niet, want lengte en breedte kunnen niet negatief zijn). Je kunt dan deze tabel maken:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

De formule $y = x^2$ beschrijft een kwadratisch verband. De grafiek bij deze formule zie je in de figuur. Het is de rode lijn. Je noemt dit een dalparabool. Elke parabool heeft een top. In dit geval is de top het laagste punt $(0,0)$.

De formule $y = -x^2$ beschrijft ook een kwadratisch verband.
Als je de waarden $x = -3$ tot en met $x = 3$ invult, krijg je:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9



De grafiek bij de formule $y = -x^2$ is blauw getekend. Het is een bergparabool. In dit geval is de top het hoogste punt $(0,0)$.

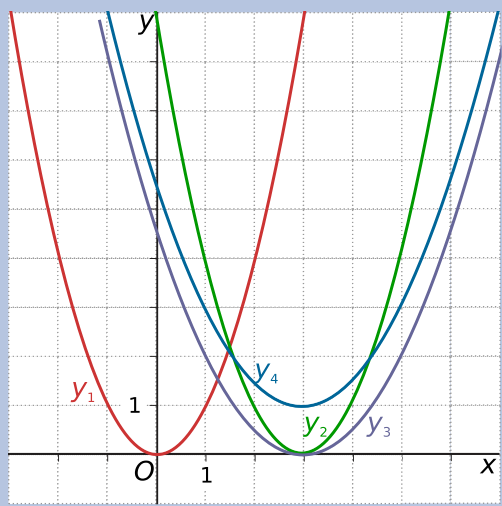
Deze dal- en bergparabool hebben beide de verticale as als symmetrieas. Voor deze symmetrieas geldt $x = 0$.

Misschien vraag je je af waarom de punten uit de twee tabellen niet door (rechte) lijnstukjes met elkaar verbonden zijn. Wel, neem $y = x^2$. Bij $x = 2{,}5$ vind je dan $y = 2{,}5^2 = 6{,}25$. Trek je een lijnstukje tussen $(2,4)$ en $(3,9)$, dan gaat dat bij $x = 2{,}5$ door het punt $(2{,}5; 6{,}5)$. Dat klopt niet met de waarde die je met de formule hebt uitgerekend. Als je meer punten uitrekent, zie je dat je echt de getekende figuur krijgt.

Uitleg 2

Applet

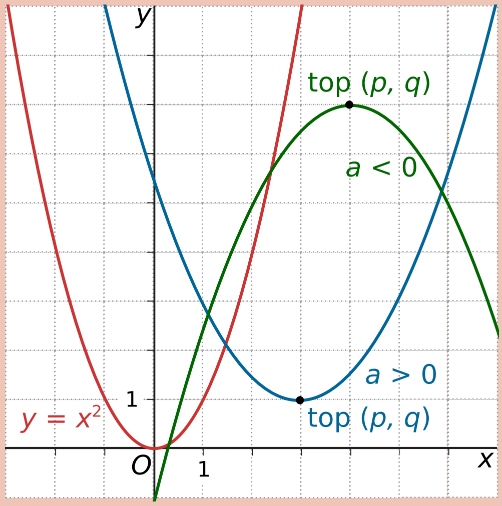
In de figuur zie je $y_1 = x^2$.
Als je deze grafiek 3 opschuift naar rechts, evenwijdig aan de x-as, dan krijg je de grafiek $y_2 = (x-3)^2$.
Als je de uitkomsten daarna vermenigvuldigt met 0,5, krijg je de grafiek $y_3 = 0{,}5 \cdot (x-3)^2$.
Wanneer je tenslotte de grafiek evenwijdig aan de y-as nog 1 omhoog schuift, krijg je de grafiek $y_4 = 0{,}5 \cdot (x-3)^2 + 1$.



Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Theorie

Applet



In het algemeen beschrijft een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband en is de bijbehorende grafiek een **parabool** met **top** (p,q). De waarde van a bepaalt of er sprake is van een bergparabool of een dalparabool: als $a > 0$ dan is de grafiek een **dalparabool**, als $a < 0$ dan is de grafiek een **bergparabool**.

Deze formule heet een **kwadratisch verband**, omdat de onbekende x wordt gekwadrateerd.

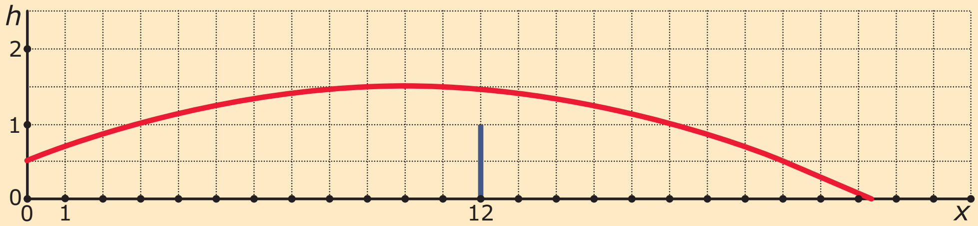
Alle grafieken van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ kunnen ontstaan uit die van $y = x^2$.

Daarvoor moet de grafiek eerst p horizontaal (evenwijdig aan de x-as) verschuiven, daarna moeten de uitkomsten allemaal met a vermenigvuldigd worden en ten slotte wordt de grafiek q omhoog (evenwijdig aan de y-as) verschoven.

Voorbeeld 1

Applet

Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies over de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog.



De tennisser slaat de bal terug via een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule $h = -0{,}01 \cdot (x - 10)^2 + 1{,}5$. Hierin is x de horizontale afstand die de bal heeft afgelegd ten opzichte van het tenniskanon en h de hoogte van de tennisbal, beide in meter.

Waar zit de bal hoger dan 1 m boven de grond?

Antwoord

Je maakt eerst een tabel met geschikte waarden voor x. Bij elke waarde van x reken je de bijpassende waarde voor h uit, bijvoorbeeld:

- $x = 0$ geeft $h = -0{,}01 \cdot (0 - 10)^2 + 1{,}5 = -0{,}01 \cdot 100 + 1{,}5 = 0{,}5$
- $x = 2$ geeft $h = -0{,}01 \cdot (2 - 10)^2 + 1{,}5 = -0{,}01 \cdot 64 + 1{,}5 = 0{,}86$

Zo krijg je een tabel en kun je de grafiek tekenen.

Teken in de grafiek van h een lijn op hoogte van $h = 1$.

Je ziet dat beide grafieken elkaar op twee plaatsen snijden. De x-coördinaten van deze snijpunten zijn de oplossingen van deze vergelijking.

Ga na dat de oplossingen zijn: $x \approx 3$ en $x \approx 17$.

Opgave 5 Opgave 6

Voorbeeld 2

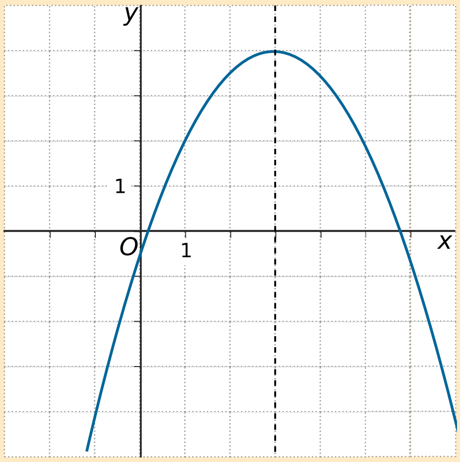
Bij de formule $y = -0{,}5 \cdot (x - 3)^2 + 4$ kun je zelf een grafiek tekenen.
Je maakt eerst een tabel met geschikte waarden voor x.
Maar hoe weet je vooraf welke waarden van x geschikt zijn om in te vullen?

Antwoord

Bedenk eerst dat het een bergparabool wordt.
De top van die bergparabool lees je uit de formule af: top $(3{,}4)$.
De lijn met $x = 3$ is de symmetrieas van de parabool.

Voor je tabel kies je daarom x-waarden links en rechts van $x = 3$.

Je maakt dus zo'n tabel en vult hem in. Daarmee teken je de grafiek.



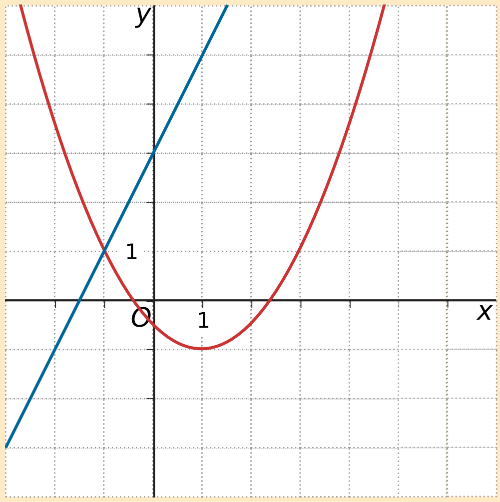
x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-4	-0,5	2	3,5	4	3,5	2	-0,5	-4

Opgave 7 Opgave 8

Voorbeeld 3

De formule $y_1 = 0{,}5(x-1)^2 - 1$ beschrijft een kwadratisch verband, de formule $y_2 = 2x+3$ een lineair verband. Bij de eerste formule hoort een parabool als grafiek, bij de tweede een rechte lijn.
Je wilt de vergelijking $0{,}5(x-1)^2 - 1 = 2x+3$ oplossen. Hoe doe je dat?

Antwoord



Je tekent beide grafieken in één assenstelsel. Maak een tabel.

Je ziet duidelijk een snijpunt, namelijk $(-1,1)$.
Je kunt zien dat er waarschijnlijk nog een snijpunt is. Dus moet je de grafieken uitbreiden. Je breidt daartoe eerst je tabel uit.

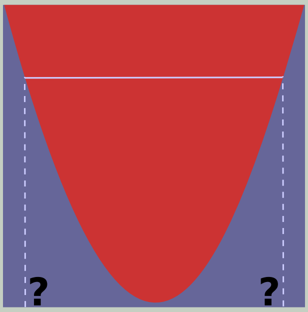
Ga zelf na dat het andere snijpunt $(7,17)$ is. Dat kun je doen door de grafiek uit te breiden, maar ook door het snijpunt in beide vergelijkingen in te vullen.
De gevraagde vergelijking heeft twee oplossingen, namelijk $x = -1$ en $x = 7$. Beide waarden voor x maken de vergelijking kloppend.

Opgave 9 Opgave 10

3.2 Terugrekenen

Inleiding

Ook bij kwadratische verbanden wil je vaak weten welke invoerwaarden er bij bepaalde uitkomsten horen. Tot nu toe deed je dat met behulp van grafieken. Maar er bestaan ook rekentechnieken voor. Je hebt daar al eerder kennis mee gemaakt.



Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen van de vorm $a \cdot (x - p)^2 + q = c$ oplossen door terugrekenen of de balansmethode;
- kwadratische vergelijkingen gebruiken om (een) snijpunt(en) te bepalen.

Voorkennis

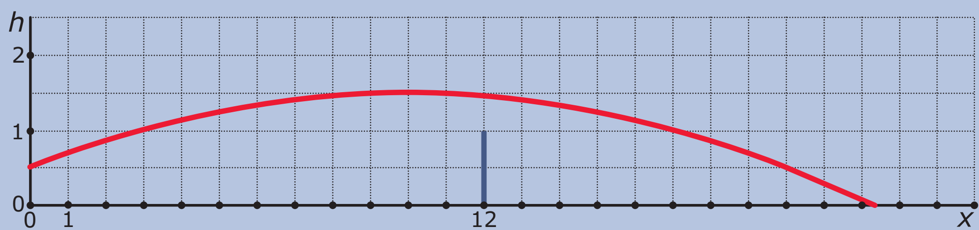
- herkennen dat een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband beschrijft en daaruit de top en de vorm van grafiek van de bijbehorende parabool (berg- of dalparabool) afleiden;
- grafieken bij kwadratische verbanden tekenen en die gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen;
- vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode en terugrekenen (dus ook worteltrekken).

Opgave V1

Uitleg

Applet

Een tennisser is aan het trainen. Op de baseline tegenover hem schiet een tenniskanon met grote snelheid een bal op hem af, precies over de lengte van het veld. Het tennisveld is 24 m lang en het net is 1 m hoog.
De baan van de bal is een kromme lijn. In het getekende assenstelsel geldt voor die baan de formule: $h = -0{,}01 \cdot (x - 10)^2 + 1{,}5$.



Wil je weten na hoeveel meter (bij welke x-waarde) de bal op de grond komt, dan moet je oplossen:

$-0{,}01 \cdot (x - 10)^2 + 1{,}5 = 0$

Dit is een voorbeeld van een kwadratische vergelijking die je kunt oplossen door terugrekenen. Terugrekenen van een kwadraat doe je met worteltrekken.

De exacte oplossing is $x = 10 - \sqrt{150} \vee x = 10 + \sqrt{150}$.
Je ziet hoe je dit kort kunt opschrijven met behulp van het teken $\vee$. Dat betekent “en/of”.

Deze waarden van x waar de y-coördinaat 0 is heten nulpunten van de parabool. In het voorbeeld van de tennisbaan is het nulpunt de x-waarde van de plek waar de tennisbal op de grond komt.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Een **kwadratische vergelijking** van de vorm $a(x - p)^2 + q = c$ kun je systematisch oplossen door **terugrekenen** (of met de balansmethode). Terugrekenen vanuit een kwadraat doe je met worteltrekken.
Zie **Voorbeeld 1**.

De oplossing bestaat vaak uit twee x-waarden. Je gebruikt dan het teken $\vee$ om aan te duiden dat de éne x-waarde en/of de andere x-waarde juist is.

De x-waarde van een punt van de parabool waarvoor geldt dat $y = 0$ is heet een **nulpunt** van de parabool. Let op! Een nulpunt is een getal en dus geen punt met coördinaten.

Voorbeeld 1

De vergelijking $1{,}5(x - 1)^2 - 4 = 5$ kun je oplossen door terugrekenen.

Eerst maak je een rekenschema:

$$x \xrightarrow{\boxed{-1}} x - 1 \xrightarrow{\boxed{(\dots)^2}} (x - 1)^2 \xrightarrow{\boxed{\times 1{,}5}} 1{,}5(x - 1)^2 \xrightarrow{\boxed{-4}} 5$$

Daarbij past een terugrekenschema. Vul meteen de getallen in:

$$\sqrt{6} + 1 \xleftarrow{\boxed{+1}} \sqrt{6}$$
$$-\sqrt{6} + 1 \xleftarrow{\boxed{+1}} -\sqrt{6}$$
$$\sqrt{6} \text{ en } -\sqrt{6} \xleftarrow{\boxed{\sqrt{\dots}}} 6 \xleftarrow{\boxed{/\,1{,}5}} 9 \xleftarrow{\boxed{+4}} 5$$

De exacte oplossing van de vergelijking is: $x = -\sqrt{6} + 1 \vee x = \sqrt{6} + 1$.

Soms wordt een benadering gevraagd. In dat geval benader je met de rekenmachine deze twee waarden in het gewenste aantal decimalen nauwkeurig.

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

De vergelijking $1{,}5(x-1)^2-4=5$ kun je ook oplossen met de balansmethode.

$$\begin{aligned} 1{,}5(x-1)^2-4 &= 5 && \text{beide zijden } +4 \\ 1{,}5(x-1)^2 &= 9 && \text{beide zijden delen door } 1{,}5 \\ (x-1)^2 &= 6 && \text{beide zijden worteltrekken} \\ x-1 &= \pm\sqrt{6} && \text{beide zijden } +1 \\ x &= 1\pm\sqrt{6} \end{aligned}$$

De exacte oplossing is $x=1-\sqrt{6} \vee x=1+\sqrt{6}$. Je ziet hoe je dit kort kunt opschrijven met $\pm$.

Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 3

Los op: $x^2=(x+3)^2$.

Antwoord

Gebruik de balansmethode en werk eerst de haakjes weg:

$$\begin{aligned} x^2 &= (x+3)^2 && \text{haakjes wegwerken} \\ x^2 &= x^2+6x+9 && \text{beide zijden } -x^2 \\ 0 &= 6x+9 && \text{beide zijden omwisselen en } -9 \\ 6x &= -9 && \text{beide zijden delen door } 6 \\ x &= -\tfrac{9}{6} = -1{,}5 \end{aligned}$$

Controleer je oplossing door invullen. $x=-1{,}5$ geeft:

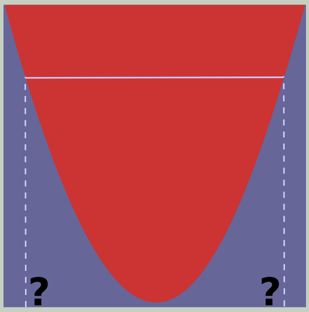
$(-1{,}5)^2=(-1{,}5+3)^2$ en dus $2{,}25=2{,}25$.

Opgave 8 Opgave 9 Opgave 10

3.3 Kwadraat afsplitsen

Inleiding

Ook bij kwadratische verbanden wil je vaak weten welke invoerwaarden er bij bepaalde uitkomsten horen. Je hebt met enkele rekentechnieken eerder kennisgemaakt. Nu ga je leren een kwadraat af te splitsen.



Je leert in dit onderwerp

- bij formules van de vorm $y = x^2 + 2kx$ een kwadraat afsplitsen;
- de top van een parabool bepalen door in de bijbehorende formule een kwadraat af te splitsen.

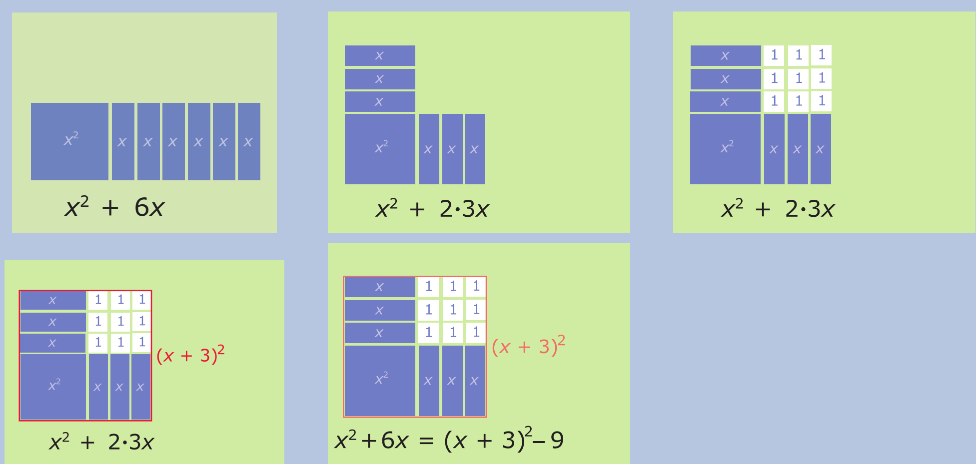
Voorkennis

- herkennen dat een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband beschrijft en daaruit de top en de vorm van grafiek van de bijbehorende parabool (berg- of dalparabool) afleiden;
- vergelijkingen van de vorm $a \cdot (x - p)^2 + q = c$ oplossen door terugrekenen of de balansmethode;
- kwadratische vergelijkingen gebruiken om (een) snijpunt(en) te bepalen.

Opgave V1

Uitleg 1

Een formule als $y = x^2 + 6x$ beschrijft ook een kwadratisch verband. Door herleiden kun je de formule de juiste kwadratische vorm geven, zodat je hierin de top en de verschuiving ten opzichte van $y = x^2$ kunt aflezen.



Hier zie je hoe je $x^2 + 6x$ in een aantal stappen kunt ‘ombouwen’ tot de juiste kwadratische vorm.

Het herleiden van $y = x^2 + 6x$ tot $y = (x+3)^2 - 9$ heet kwadraat afsplitsen. Je splitst van de uitdrukking $x^2 + 6x$ een kwadraat af, namelijk $(x+3)^2$.

In het algemeen gebruik je bij kwadraat afsplitsen: $x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$.

Omdat $y = (x+3)^2 - 9$, kun je zien dat er sprake is van een kwadratisch verband. De grafiek ontstaat door de grafiek van $y = x^2$ te verschuiven: 3 naar links en 9 naar beneden. De grafiek is een dalparabool met top $(-3, -9)$.

Uitleg 2

Een formule als $y = 2x^2 + 12x + 5$ beschrijft ook een kwadratisch verband.
Om deze formule in de vorm $y = a(x-p)^2 + q$ te brengen maak je eerst gebruik van het werken met haakjes.

Je weet al, dat $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$. Dat heb je gebruikt bij haakjes wegwerken.
Omgekeerd is $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)$.
Je zegt dan dat je de factor a buiten haakjes hebt gebracht.

Bekijk met dit in gedachten de formule $y = 2x^2 + 12x + 5$.
De formule kun je schrijven als:
$2x^2 + 12x + 5 = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot 6x + 2 \cdot 2{,}5 = 2 \cdot \left(x^2 + 6x + 2{,}5\right)$.
En nu kun je een kwadraat afsplitsen:

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 12x + 5 \\ &= 2 \cdot \left(x^2 + 6x + 2{,}5\right) \\ &= 2 \cdot \left((x+3)^2 - 9 + 2{,}5\right) \\ &= 2 \cdot (x+3)^2 - 18 + 5 \\ &= 2 \cdot (x+3)^2 - 13 \end{aligned}$$

Nu kun je concluderen dat de grafiek van $y = 2x^2 + 12x$ een bergparabool is met top $(-3, -13)$.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Theorie

Een formule van de vorm $y = x^2 + 2kx$ kun je herleiden tot $y = (x+k)^2 - k^2$.
Dit heet **kwadraat afsplitsen**: $x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$.

Omdat $y = x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$, kun je zien dat er sprake is van een kwadratisch verband.
De grafiek ontstaat door de grafiek van $y = x^2$ te verschuiven: k naar links en k^2 naar beneden. De grafiek is een dalparabool met top $\left(-k, -k^2\right)$.

Je kunt dit heel goed gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen waarin kwadraten voorkomen.

Bij formules van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ kun je ook een kwadraat afsplitsen.

Je begint dan met het schrijven van de formule als $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

Dit heet **een factor buiten haakjes halen**.
Vervolgens splits je op de vorm binnen de haakjes een kwadraat af. Zie **Voorbeeld 2**.

Voorbeeld 1

Laat zien dat de formule $y = x^2 - 6x + 8$ een kwadratisch verband beschrijft.
Bereken ook de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool en bereken de nulpunten.

Antwoord

Splits een kwadraat af van de vorm $x^2 - 6x$.

Je krijgt: $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$.

De formule kun je daarmee herleiden tot: $y = (x - 3)^2 - 1$.

Nu zie je dat er sprake is van een dalparabool met top $(3, \text{-}1)$.

Voor de snijpunten met de x-as moet je $y = 0$ oplossen.
Door het kwadraat afsplitsen kun je dit schrijven als $(x - 3)^2 - 1 = 0$.
En die vergelijking kun je oplossen door terugrekenen.
Ga na, dat je krijgt: $x = 2 \vee x = 4$.

Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 2

Bereken de top van de parabool die wordt gegeven door de formule $y = \text{-}2x^2 - 16x + 2$.

Antwoord

Je wilt de formule in de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ brengen, dan kun je de top uit de formule aflezen. Daarvoor moet je een kwadraat afsplitsen.

Gebruik: $\text{-}2x^2 - 16x + 2 = \text{-}2 \cdot \left(x^2 + 8x - 1\right)$.

Nu kun je binnen de haakjes een kwadraat afsplitsen.

Je herleidt de formule dan zo:

$$\begin{aligned} y &= \text{-}2x^2 - 16x + 2 \\ y &= \text{-}2\left(x^2 + 8x - 1\right) \\ y &= \text{-}2\left((x + 4)^2 - 16 - 1\right) \\ y &= \text{-}2(x + 4)^2 + 34 \end{aligned}$$

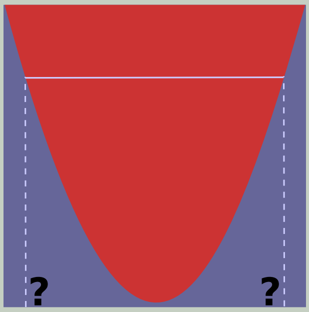
Nu kun je de top aflezen en daarmee een geschikte tabel maken om de parabool te tekenen.

Opgave 8 Opgave 9

3.4 Kwadratische vergelijkingen

Inleiding

Ook bij kwadratische verbanden wil je vaak weten welke invoerwaarden er bij bepaalde uitkomsten horen. Je hebt met enkele rekentechnieken eerder kennisgemaakt. Nu ga je deze technieken gebruiken bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen.



Je leert in dit onderwerp

- kwadratische vergelijkingen opstellen en systematisch oplossen.

Voorkennis

- herkennen dat een formule van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ een kwadratisch verband beschrijft en daaruit de top en de vorm van grafiek van de bijbehorende parabool (berg- of dalparabool) afleiden;
- bij formules van de vorm $y = x^2 + 2kx$ een kwadraat afsplitsen;
- kwadratische vergelijkingen oplossen door kwadraat afsplitsen en terugrekenen of de balansmethode;
- kwadratische vergelijkingen gebruiken om (een) snijpunt(en) te bepalen.

Opgave V1

Uitleg

Twee getallen zijn opgeteld 21 en vermenigvuldigd 108. Om welke getallen gaat dit?

Je kunt dit oplossen door het uit te proberen of door systematisch inklemmen, maar dat is nogal wat werk.

Een andere aanpak is het opstellen van een vergelijking. Je kiest voor het ene getal bijvoorbeeld de letter x. Het andere moet dan $21 - x$ zijn. De uitkomst van hun vermenigvuldiging is gegeven, dus je krijgt de vergelijking: $x(21 - x) = 108$.

Als je de haakjes wegwerkt, zie je dat dit een kwadratische vergelijking is:

$$\begin{aligned} x(21-x) &= 108 & &\text{haakjes wegwerken} \\ 21x - x^2 &= 108 & &\text{kwadraat voorop zetten} \\ -x^2 + 21x &= 108 & &\text{beide zijden} \times -1 \\ x^2 - 21x &= -108 \end{aligned}$$

Je hebt geleerd hoe je een kwadraat kunt afsplitsen. Met die methode kun je deze vergelijking schrijven als $(x - 10{,}5)^2 = 2{,}25$ en verder oplossen met de balansmethode.

Opgave 1 **Opgave 2** **Opgave 3**

Theorie

Een **kwadratische vergelijking** is een vergelijking die in de vorm $ax^2 + bx = c$ is te schrijven. Hierin moet $a \neq 0$, want anders verdwijnt het kwadraat. Je kunt dergelijke vergelijkingen systematisch oplossen door:

- beide zijden door a te delen;
- de vergelijking door kwadraat afsplitsen te schrijven in de vorm $(x - p)^2 = q$;
- daarna terugrekenen of de balansmethode toepassen.

Op deze manier kun je elke kwadratische vergelijking oplossen, al is het soms wel een flink gereken.

Voorbeeld 1

Los de volgende vergelijking op:
$2x^2 - 10x = 2x - 3$

Antwoord

Het oplossen van zo'n vergelijking pak je systematisch aan.

$$\begin{aligned}
2x^2 - 10x &= 2x - 3 && \text{beide zijden -}2x\\
2x^2 - 12x &= \text{-}3 && \text{beide zijden delen door 2}\\
x^2 - 6x &= \text{-}1{,}5 && \text{kwadraat afsplitsen}\\
(x-3)^2 - 9 &= \text{-}1{,}5 && \text{beide zijden +9}\\
(x-3)^2 &= 7{,}5 && \text{worteltrekken aan beide zijden}\\
x - 3 &= \pm\sqrt{7{,}5} && \text{beide zijden +3}\\
x &= 3 \pm \sqrt{7{,}5}
\end{aligned}$$

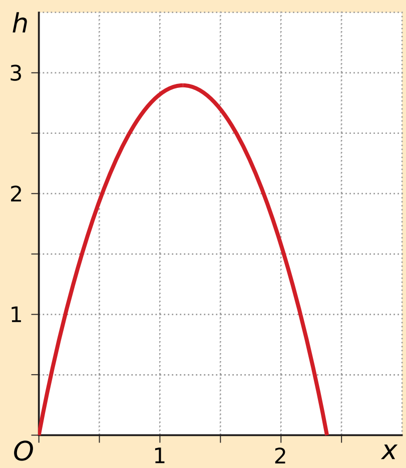
Er zijn dus twee oplossingen, namelijk $x = 3 - \sqrt{7{,}5}$ en $x = 3 + \sqrt{7{,}5}$.

Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Aan de voorkant van een huis bevindt zich een boogvormig kozijn. De parabolische boog wordt beschreven door $h = \text{-}2x^2 + 4{,}8x$.

Een voordeur is 2,11 m hoog en 1,00 m breed. Controleer met een berekening of hij in dit kozijn past.



Antwoord

Op 2,11 m hoogte moet een breedte van 1 m beschikbaar zijn.

Los op: $h = \text{-}2x^2 + 4{,}8x = 2{,}11$.

Deze vergelijking levert in centimeters twee waarden voor x op: $x \approx 0{,}58$ en $x \approx 1{,}82$.

Daartussen zit een breedte van 1,24 m. Dus er is ruimte genoeg voor de deur.

Opgave 6 Opgave 7 Opgave 8

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 2

Math4all
www.math4all.nl