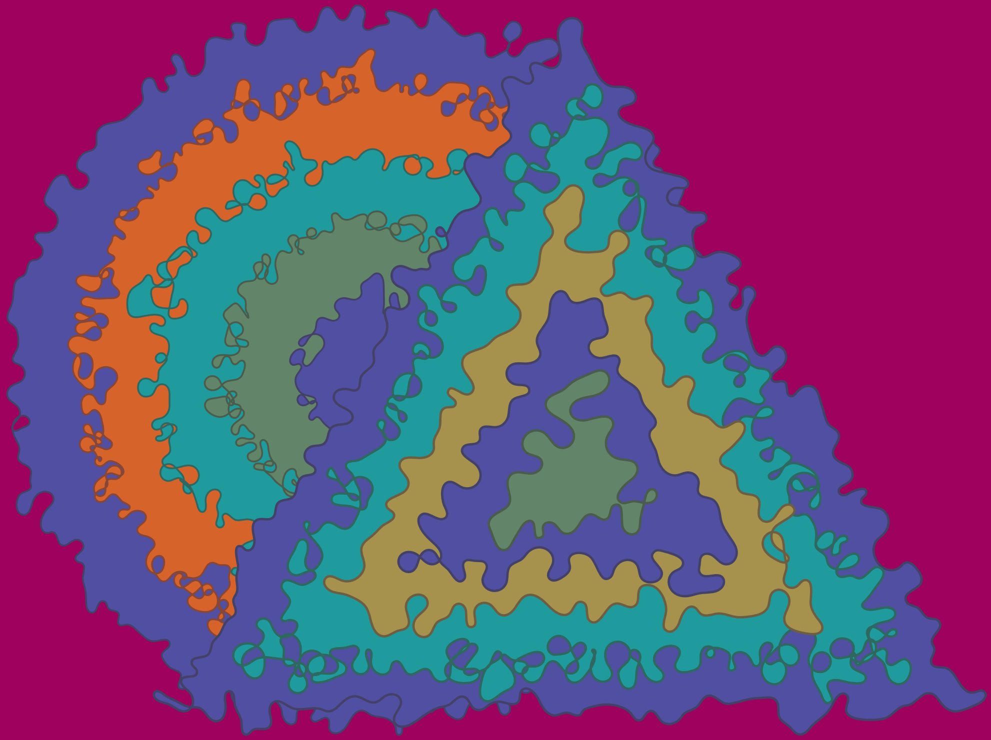
Wiskunde

2 HAVO / VWO

Katern 2 / Opgaven

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

Begrippen

- recht evenredig (verband) — evenredigheidsconstante, hellingsgetal
- lineair verband — hellingsgetal, richtingscoëfficiënt — startgetal
- lineaire vergelijking — balansmethode
- omgekeerd evenredig (verband) — hyperbool
- hyperbolisch verband — asymptoot

Activiteiten

- formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken
- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken
- vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden oplossen
- formules en grafieken bij omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken
- formules en grafieken bij hyperbolische verbanden maken en gebruiken

Recht of gebogen

Domein

Grafieken en formules

Hoofdstuk

Lineair en hyperbolisch

Inhoud

1

1.1 Recht evenredig

Verkennen

Opgave V1

Veel landen hebben een eigen munteenheid. Denemarken bijvoorbeeld heeft de Deense Kroon (DKK). Een Deense Kroon is ongeveer € 0,13.

a Hoeveel euro betaal je bij deze koers voor DKK 600,00?

b Noem de kosten voor het kopen van Deense Kronen E (in €) en het aantal Deense Kronen q. Welke formule geldt er dan als er geen bijkomende kosten zijn?

c Hoe ziet de bijbehorende grafiek er uit?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de formule in de **Uitleg**.

a Hoeveel bedraagt R als $q = 100$ kg?

b Hoeveel bedraagt R als $q = 200$ kg?
Wat gebeurt er dus met de waarde van R als q twee keer zo groot wordt?

c Wat gebeurt er met R als q drie keer zo groot wordt?

d Je hebt nu gezien dat R recht evenredig is met q. Hoe blijkt dat uit de grafiek?

e Hoe wordt het getal $1{,}50$ in de formule ook wel genoemd?

f Wat is de betekenis van het getal $1{,}50$ voor de grafiek?

Opgave 2

In een inkjetprinter gaan inktpatronen. Zo'n inktpatroon kost € 42,50. Je kunt er gemiddeld 500 velletjes papier mee afdrukken.

a Hoeveel kost de inkt voor 1800 afdrukken?

b Met welke formule kun je de relatie tussen de jaarlijkse kosten voor inkt K en het aantal afgedrukte velletjes papier q weergeven?

c Zijn de jaarlijkse kosten voor inkt recht evenredig met het aantal afdrukken? Zo ja, wat is dan de evenredigheidsconstante?

d Teken de bijpassende grafiek. Neem op de horizontale as de waarden 0, 100, 200, ...

e Waarom heb je daar geen tabel bij nodig?

f Welke betekenis heeft de evenredigheidsconstante voor de grafiek?

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe de snelheid in km/uur van een fietser wordt uitgerekend.

a Waarom is s recht evenredig met t?

b Hoe ziet de grafiek uit het voorbeeld van s afhankelijk van t er uit?

c Na hoeveel tijd heeft de fietser uit het voorbeeld 12 km afgelegd?

Opgave 4

Een automobilist is onderweg naar Berlijn en zet zijn cruisecontrol (snelheidsbegrenzer) op 120 km/uur. Dat moment geldt als $t = 0$ waarin t de tijd in uren is.

a Waarom is vanaf dat moment zijn afgelegde afstand s (in km) recht evenredig met t?

b Hoeveel is de evenredigheidsconstante?

c Na hoeveel tijd heeft deze automobilist 300 km afgelegd?

Opgave 5

Marc gaat op vakantie met de auto en hij legt 816 kilometer af. Hij verbruikt 76 liter benzine en de benzineprijs is op dat moment € 1,60.

a Stel de formule op voor het verband tussen de benzinekosten K in euro en de afstand s in km. Rond de evenredigheidsfactor af op twee decimalen.

b Wat betaalt Marc in totaal aan benzine?

Opgave 6

Stel de benzineprijs is op een bepaald moment € 1,70 voor een liter. Iemand tankt voor € 49,30 en kan vervolgens 406 km rijden.

a Hoeveel kilometer kan haar auto rijden op 1 liter benzine?

b Stel de formule op voor het verband tussen de kosten K in euro en de afstand s in km. Rond de evenredigheidsfactor af op twee decimalen.

Verwerken

Opgave 7

Mevrouw Willems krijgt een kilometervergoeding K voor de kilometers die ze voor haar werk met de auto aflegt. Ze krijgt € 0,19 per km. Noem het aantal werkkilometers per maand q.

a Stel de formule op voor K.

b Is K recht evenredig met q? Waarom wel/niet?

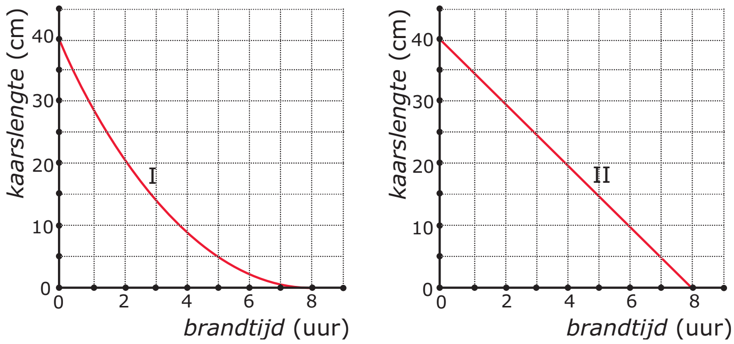
c Hoe ziet de grafiek van K er uit?

Mevrouw Willems heeft berekend dat iedere gereden kilometer $12,5$ cent aan brandstof kost.

d Zijn de brandstofkosten voor het werk ook recht evenredig met q?

Opgave 8

Zuiver cilindervormige kaarsen branden gelijkmatig op: elk uur verdwijnt er (in theorie) evenveel kaarslengte. Hier zie je twee grafieken bij opbrandende kaarsen.



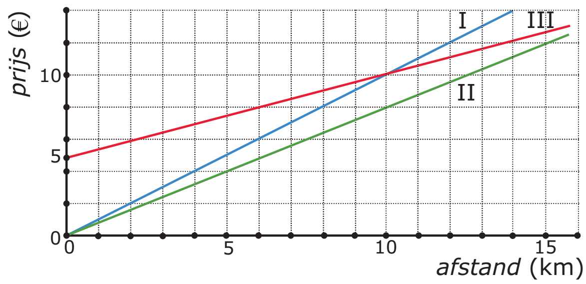
a Welke van deze twee grafieken hoort bij een cilindervormige kaars en waarom?

b Is de kaarslengte recht evenredig met de brandtijd?

c Met hoeveel centimeter per uur brandt de cilindervormige kaars op?

Opgave 9

De prijs die je voor een rit met een taxi betaalt, hangt af van de afstand die je rijdt. Je ziet hieronder van drie taxibedrijven de grafiek van het verband tussen prijs p (in €) en gereden afstand s (in km).



a Bij welke firma's betaal je alleen een bedrag per gereden km?

b Geef bij die twee taxibedrijven een formule voor p afhankelijk van s.

c Ook bij het derde taxibedrijf betaal je een vast bedrag per gereden km. Alleen berekenen zij ook nog voorrijkosten. Hoeveel bedragen die voorrijkosten?

d Stel ook voor die derde firma een formule op voor p.

e Hoe kun je aan de grafiek en de formule zien dat bij die derde firma de prijs p niet recht evenredig is met het aantal gereden km s?

Opgave 10

De volgende formules beschrijven een verband tussen x en y:

- formule I: $y = 0{,}85x$
- formule II: $y = 0{,}85 + x$
- formule III: $y = 8{,}5x$
- formule IV: $y = 8{,}5 - 1{,}5x$

a Bij welke van deze formules is y recht evenredig met x?

b Bereken bij elk van deze formules de waarde van x waarvoor $y = 5$.

Opgave 11

Bij constante snelheid geldt: $s = vt$, waarin

- s de afgelegde weg in m is;
- v de snelheid in m/s is;
- t de tijd in s is.

a Leg uit waarom de afgelegde weg bij constante snelheid recht evenredig is met de tijd.

b Een voorwerp beweegt 20 s met een snelheid van 40 m/s. Hoeveel bedraagt zijn afgelegde weg?

c Een voorwerp beweegt 20 s en legt daarin 700 m af. Met welke snelheid bewoog dit voorwerp?

d Een voorwerp beweegt 1500 m met een snelheid van 60 m/s af. Hoe lang doet het daar over?

e Je kunt de gegeven formule ook in de vorm $v = ...$ schrijven. Hoe ziet de formule er dan uit?

f Schrijf de gegeven formule in de vorm $t = ...$.

Opgave 12

Twee wielrenners rijden een ronde van 178 km. De eerste wielrenner fietst met een constante snelheid van 42 km/h. De tweede komt 3 minuten later binnen dan de eerste wielrenner.

a Hoelang doet de eerste wielrenner over de ronde? Geef je antwoord in seconden nauwkeurig.

b Wat is de constante snelheid van de tweede renner in kilometers per uur? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Veel volwassenen bezitten een auto om zich te verplaatsen. Dat kost geld, met name aan brandstofkosten. Je kunt vrij eenvoudig een schatting maken van het bedrag dat je daar jaarlijks aan kwijt bent.

Neem eens aan dat je dat wilt doen voor een auto die op benzine rijdt. Je maakt dan een lijst met de kilometerstanden (aflezen op de km-teller in de auto) en de hoeveelheid benzine die je tankt op dat moment. En dat houd je een tijdje vol. Daarmee bereken je hoeveel liter benzine de auto gemiddeld per km verbruikt. Verder houd je in dezelfde periode de benzineprijs bij. Op grond daarvan maak je een schatting van de gemiddelde benzineprijs (in euro per liter) voor het jaar waarvoor je de brandstofkosten wilt schatten.

Opgave 13: Auto op benzine

Deze tabel is gemaakt door de bestuurder van een auto die op benzine rijdt. De kilometerstand en de hoeveelheid getankte benzine is steeds op hetzelfde moment opgeschreven. (Je kunt misschien zelf ook wel dergelijke gegevens bemachtigen. Dan heb je nog wat aan het rekenwerk!)

benzinekosten auto	
km-teller	getankt
kilometerstand	aantal L
12115	45
12678	50
13328	50
13477	40
13997	45
14652	50
15301	50
15984	40
16524	50
17264	45
17925	48

a Laat zien dat deze bestuurder gemiddeld ongeveer $0{,}08$ liter benzine per gereden km verbruikte.

b De gemiddelde benzineprijs was in die periode € 1,75 per liter. Hoeveel bedragen zijn brandstofkosten per kilometer?

Voor een schatting van de totale brandstofkosten per jaar (K in euro) neem je aan dat die recht evenredig met het aantal gereden kilometers per jaar (a in km) zijn.

c Waarom is dat een aanname?

d Stel een formule op bij het verband tussen K en a en bereken hiermee de brandstofkosten voor een jaar waarin deze auto ongeveer 18000 km rijdt.

e Is een onkostenvergoeding van € 0,19 per km voor de kilometers die iemand voor zijn werk rijdt dus zonder meer voordelig voor de automobilist? Licht je antwoord toe.

Opgave 14: Auto op benzine, op diesel, op gas, of elektrisch?

Er zijn ook auto's die niet op benzine rijden, zelfs in dezelfde prijsklasse. Ook daarvan kun je de brandstofkosten per jaar schatten. Wat is het voordeligst?

Houd een vergelijkend onderzoek naar de jaarlijkse brandstofkosten van auto's uit dezelfde prijsklasse die op verschillende brandstoffen rijden. Zoek zoveel mogelijk echte gegevens en/of zoek op internet. Kies zelf een prijsklasse.

1.2 Lineaire verbanden

Verkennen

Opgave V1

Niet overal op de wereld kun je met de euro betalen. In Denemarken bijvoorbeeld betaal je met de Deense Kroon (DKK). Een Deense Kroon is ongeveer € 0,13. Wil je bij een bank Deense Kronen kopen dan betaal je vaak ook nog transactiekosten, dat zijn kosten voor het werk dat de bank heeft aan het afhandelen van jouw betalingsopdracht. Stel dat die kosten € 2,50 per transactie zijn.

a Hoeveel betaal je bij deze koers en deze transactiekosten voor DKK 600,00?

b En als je twee keer zoveel Deense Kronen wilt, betaal je dan ook twee keer zoveel?

c Noem de kosten voor het kopen van Deense Kronen E (in €) en het aantal Deense Kronen D. Welke formule geldt er dan? En hoe ziet de bijbehorende grafiek er uit?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet een formule voor het berekenen van de maandelijkse belkosten K afhankelijk van het aantal belminuten t.

t	0	10	20	30	40	50
K	30,00					

a Neem de tabel over, vul de tabel in en teken de grafiek van K afhankelijk van t.

b Geef in je grafiek het startgetal en het hellingsgetal aan.

c De aanbieder van dit abonnement verlaagt de abonnementskosten tot € 20,00. Wat betekent dit voor de grafiek van K?

d De aanbieder van dit abonnement verlaagt de belkosten per minuut tot € 0,20. Wat betekent dit voor de grafiek van K als de abonnementskosten € 30,00 blijven?

Opgave 2

Je vergelijkt twee telecomaanbieders en je hebt een telefoon waarmee je alleen kunt bellen (geen sms, geen internet, enzovoort, heel vroeger bestonden die echt!).

- Bedrijf A: abonnement € 9,90 per maand en € 0,25 per belminuut.
- Bedrijf B: geen abonnementskosten en € 0,36 per belminuut.

a Geef voor beide bedrijven een formule voor het verband tussen de kosten K en het aantal belminuten m.

b Neem de tabel over, vul de tabel in en teken bij beide formules een grafiek in één assenstelsel.

aantal belminuten m	0	50	100
K bedrijf A (euro)			
K bedrijf B (euro)			

c Bij welk van beide bedrijven zijn de kosten recht evenredig met het aantal belminuten?

A. bedrijf A
B. bedrijf B

d Waarom is bij beide bedrijven sprake van een lineair verband? Geef bij elk van beide grafieken de richtingscoëfficiënt.

e Je belt per maand 85 minuten. Bij welk bedrijf neem jij een abonnement?

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe de grootte van het beltegoed afhangt van het aantal minuten a dat je hebt gebeld.

a Bereken je beltegoed na 60 minuten bellen.

b Controleer met een berekening dat na 200 minuten bellen je beltegoed op is. Waarom namen ouders vaak zo'n abonnement voor hun kinderen?

c Wat betekent een negatieve richtingscoëfficiënt voor een lineaire grafiek?

d Wat gebeurt er met de formule en de grafiek als deze aanbieder van mobiele telefonie zijn belkosten per minuut verhoogt naar € 0,30?

Opgave 4

Een cilindervormige kaars brandt gelijkmatig op, t is de brandtijd in uren. De kaars wordt elk uur $1,5$ cm korter. Op een zeker moment ($t = 0$) is hij nog 25 cm lang.

a Waarom is de lengte van het stuk kaars dat is opgebrand recht evenredig met de brandtijd?

b Waarom is de kaarslengte L in centimeters niet recht evenredig met de brandtijd in uren?

c Geef een formule voor L (cm) afhankelijk van t (uur).

Opgave 5

Bekijk de grafiek in **Voorbeeld 2**. Je wilt er een formule bij maken om op bepaalde hoogtes de temperatuur minstens op één graad nauwkeurig te kunnen berekenen.

a Waarom zoek je daarvoor twee ‘mooie’ punten op de grafiek? Wat wordt daarmee bedoeld?

b Waarom is het aflezen van het snijpunt van de grafiek met de verticale T-as erg handig?

c Hoe is in het voorbeeld het hellingsgetal berekend?

d Bereken met behulp van de gevonden formule de temperatuur op $1,5$ km hoogte.

e Stel zelf een formule op voor het verband tussen de temperatuur T (°C) en de hoogte h (km) boven de zeespiegel als op $h = 0$ de temperatuur 15 °C is en op $h = 4$ de temperatuur -9 °C is.

Opgave 6

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $A(2,10)$ en $B(5,12)$.

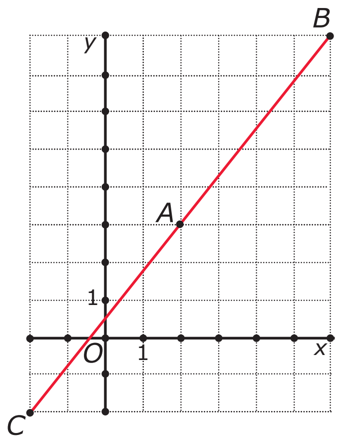
a Stel een formule op voor y afhankelijk van x.

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $C(-10,120)$ en $D(13,51)$.

b Stel een formule op voor y afhankelijk van x.

Opgave 7

Je kunt de formule van een lineair verband ook opstellen als het snijpunt van de grafiek met de verticale as niet goed is af te lezen. In de grafiek zie je zo'n situatie. Verschillende punten zijn goed af te lezen, maar het startgetal niet.



a De punten $A(2,3)$ en $B(6,8)$ liggen op de grafiek.
Bereken met behulp van deze twee punten het hellingsgetal van de lijn.

Met behulp van het hellingsgetal kun je vanuit punt A de coördinaten van de punten van de grafiek op andere roosterlijnen berekenen. Ook de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y-as.

b Welke y-coördinaat hoort bij $x = 1$?

c Geef de coördinaten van het snijpunt van de grafiek met de y-as. Wat is het startgetal van de grafiek?

d Schrijf nu een passende formule voor dit lineaire verband op.

e Controleer of je formule correct is door het punt $(-2,-2)$ in te vullen.

Verwerken

Opgave 8

Tegenwoordig hebben veel mensen een smartphone met internet. Voor een telefoonabonnement betaal je daarom naast abonnementskosten en belkosten ook de kosten voor een internetbundel.
Stel je voor dat je € 20,00 abonnementskosten per maand betaalt en dat de belkosten € 0,22 per minuut zijn. Daarnaast betaal je voor de internetbundel van 1000 MB € 10,00.

a Geef een formule voor het verband tussen de totale maandelijkse kosten K en het aantal belminuten m.

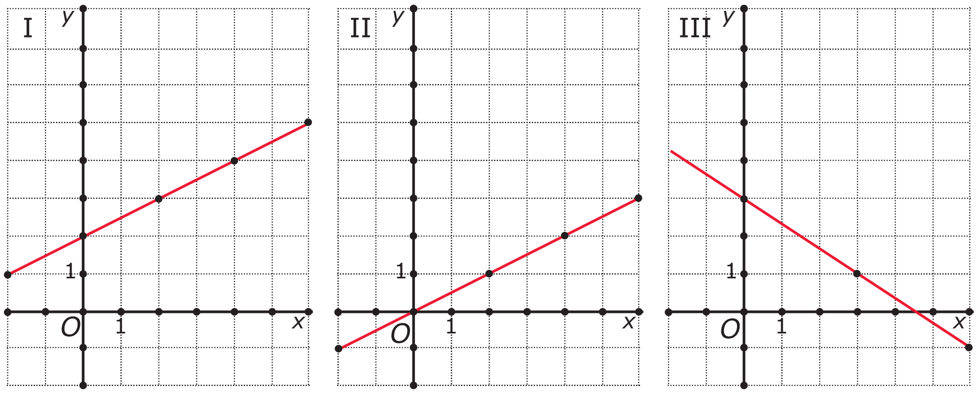
b Maak een tabel bij deze formule.

c Als je geen internetbundel afsluit, betaal je € 0,05 per verbruikte MB. Stel dat je in een bepaalde maand 240 MB verbruikt. Is het dan goedkoper om een internetbundel af te sluiten of om te betalen per verbruikte MB?

A. internetbundel
B. betalen per verbruikte MB

Opgave 9

Je ziet drie grafieken die elk een verband tussen de variabelen x en y weergeven.



a Bij welke van deze grafieken is y recht evenredig met x?

A. grafiek I
B. grafiek II
C. grafiek III

b Wat is bij die grafiek het hellingsgetal?

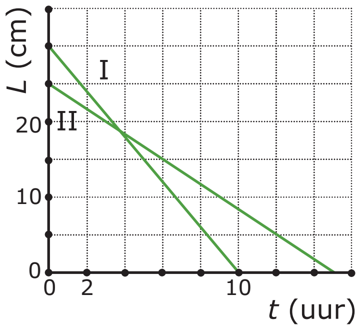
c Bij welke van deze grafieken is het hellingsgetal negatief?

A. grafiek I
B. grafiek II
C. grafiek III

d Maak bij elke grafiek een formule voor y afhankelijk van x.

Opgave 10

Zuiver cilindervormige kaarsen branden gelijkmatig op. Je ziet de grafieken van de lengte L in centimeters van twee van die kaarsen afhankelijk van de brandtijd t in uren.



a Welke grafiek hoort bij de dikste kaars? Licht je antwoord toe.

A. grafiek I
B. grafiek II

b Waarom is er bij beide grafieken sprake van een lineair verband?

c Stel formules op voor het verband tussen L en t.

d Je steekt beide kaarsen tegelijk aan. Welke kaars is het langst na vier branduren?

A. kaars I
B. kaars II

Opgave 11

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $A(0,10)$ en $B(5,12)$.

a Stel een formule op voor y afhankelijk van x.

De grafiek van een lineair verband tussen y en x gaat door de punten $A(0,10)$ en $C(5,0)$.

b Stel een formule op voor y afhankelijk van x.

Opgave 12

Voor het verbruik van water betaal je twee soorten kosten:

- een vast bedrag per jaar, het vastrecht
- een bedrag per m^3 water die je verbruikt

Die bedragen kunnen per gebied verschillend zijn, afhankelijk van de leverancier van het water. In de tabel worden twee gebieden vergeleken:

verbruik v (m^3)	0	50	100	150	200
kosten K in gebied A (euro)	$36,00$	$126,00$	$216,00$		
kosten K in gebied B (euro)	$48,00$	$125,50$	$203,00$		

a In beide gevallen is er sprake van een lineair verband tussen K en v. Leg uit waarom en vul de tabel verder in.

b Uit de tabel kun je afleiden hoeveel je in beide gevallen per m^3 betaalt. Doe dat voor beide gebieden en stel formules op voor K afhankelijk van v.

c Teken de grafieken van K voor beide gebieden in één figuur.

d Bereken de kosten voor een waterverbruik van 120 m^3 in beide gebieden.

e Hoe kun je aan de twee hellingsgetallen zien in welk gebied je het goedkoopste uit bent als je veel water verbruikt?

Opgave 13

Het gewicht van een kabelhaspel hangt af van de lengte van de kabel die er omheen gewonden is. Zo'n grote kabelhaspel bevat nieuw wel 1000 m kabel. Hij weegt dan 800 kg. Als er 200 m kabel af is, weegt de haspel met kabel nog 650 kg.

Hoeveel weegt een lege haspel?

Opgave 14

Op een vliegveld ligt een horizontale rolloopband die 500 meter lang is.
De rolloopband heeft een snelheid van 4 km/h. Emma en Daan stappen tegelijk op de rolloopband.
Emma loopt met een snelheid van 6 km/h op de band, Daan staat stil op de rolloopband.
Hoeveel meter ligt Emma voor op Daan als ze aan het einde van de rolloopband is?

A. 100 m
B. 160 m
C. 200 m
D. 250 m
E. 300 m

Toepassen

Veel volwassenen bezitten een auto om zich te verplaatsen. Dat kost geld, niet alleen aan brandstofkosten, maar ook aan wegenbelasting, verzekering, onderhoud en afschrijving. Je wilt een schatting maken van het bedrag dat je daar jaarlijks aan kwijt bent. Gemakkelijk is dat niet want de bedragen voor de verschillende kostenposten veranderen nogal. Je moet daarom aannames doen die zijn gebaseerd op de gegevens van het moment waarop je de berekening gaat uitvoeren. Hier zie je een aantal schattingen op een bepaald moment voor een auto die op benzine rijdt:

- De prijs van een liter benzine is € 1,68 en je rijdt 12 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 300,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 1900,00 per jaar.

Maar rijdt de auto bijvoorbeeld op gas, of op diesel, of elektrisch, dan liggen deze bedragen anders. Voor een vergelijkbare elektrische auto zijn op hetzelfde moment dit de schattingen:

- De prijs van een kWh (kiloWattuur) elektriciteit is € 0,40 en je verbruikt 18 kWh per 100 km.
- De wegenbelasting is € 0 per jaar.
- De verzekering kost € 400,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 4200,00 per jaar.

Deze verschillen spelen een rol als je wilt kiezen tussen rijden op benzine of elektrisch rijden.

Opgave 15: Benzineauto of elektrische auto?

In de tekst bij **Toepassen** zie je schattingen van de diverse kosten die je maakt als je in een eigen auto wilt rijden. Ga in deze opgave uit van die gegevens.

a Welke van deze kosten zijn vaste kosten per jaar?

b Hoeveel bedragen de energiekosten per kilometer voor de auto op benzine? En voor de elektrische auto?

c Stel voor de auto op benzine een formule op van de totale kosten per jaar (K in euro) afhankelijk van het aantal gereden kilometers per jaar (a in km). Doe dit ook voor de elektrische auto.

d Bereken hiermee de kosten voor een jaar waarin de auto ongeveer 18000 km rijdt. Doe dit zowel voor de auto op benzine als de elektrische auto.

e Maak grafieken bij het verband tussen K en a en bepaal daarmee vanaf hoeveel km per jaar je goedkoper uit bent met een auto die op diesel rijdt.

Opgave 16: Auto op benzine, op gas, of elektrisch?

Je hebt in de voorgaande opgave het verschil in kosten bekeken van een auto die op benzine rijdt en een elektrische auto. Natuurlijk is het beter als je zelf actuele gegevens zoekt en gebruikt voor de berekening. Je kunt daarbij ook denken aan het vergelijken met een auto op gas.

Houd een vergelijkend onderzoek naar de jaarlijkse kosten van auto's uit dezelfde prijsklasse die op verschillende brandstoffen rijden. Zoek zoveel mogelijk echte gegevens en/of zoek op internet. Kies zelf een prijsklasse.

Practicum: Formule van een lineair verband opstellen

Applet

Verplaats de twee punten A en B en stel zelf de formule van y afhankelijk van x op. Ga uit van een lineair verband. De juiste formule staat bij de grafiek.

1.3 Lineaire vergelijkingen

Verkennen

Opgave V1

De productie van een nieuw soort verf kost € 3,50 per liter. Verder zijn er vaste kosten (machines, gebouwen, etc.) van € 24000 per jaar. De fabrikant van deze verf wil de verf verkopen voor € 7,20 per liter.
Hoeveel liter moet hij jaarlijks verkopen om winst te gaan maken?

a Stel een formule op voor de kostprijs per jaar K van a blikken verf.

b Stel ook een formule op voor de opbrengst per jaar R als alle a blikken verf zijn verkocht.

c Bij welke van beide formules is sprake van een recht evenredig verband?

d Leg uit dat de vraag van de fabrikant kan worden vertaald in $7{,}20a > 24000 + 3{,}50 \cdot a$.

e Hoe zou je de ongelijkheid bij d oplossen?

Theorie

Opgave 1

Bekijk het probleem in de **Uitleg**. Er wordt gesteld dat je de vergelijking $7{,}20a = 24000 + 3{,}50a$ kunt oplossen met de balansmethode.

a Waarom hoort bij de aan het begin van de uitleg gestelde vraag een ongelijkheid?

b De oplossing van het probleem is dat het aantal jaarlijks geproduceerde liters 6487 liter of meer zou moeten zijn. Ga na dat bij 6487 liter inderdaad winst wordt gemaakt en bij 6486 niet.

Opgave 2

Bij het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden speelt de balansmethode een grote rol. Die moet je goed beheersen. Los de vergelijkingen op met de balansmethode.

a $15a + 38 = 10a + 53$

b $5a - 36 = -96 - 3a$

c $25g - 150 = 18g$

d $15200 + 0{,}8x = 8400 + 2x$

Opgave 3

Voor de productie van een nieuw soort verf geldt dat de kosten per liter € 4,00 bedragen. De vaste kosten zijn € 21000,00. De fabrikant verkoopt zijn verf voor € 6,40 per liter.

a Stel de formule op voor de productiekosten K en de opbrengst R voor wanneer alle verf wordt verkocht. Beide variabelen zijn afhankelijk van het aantal verkochte liters verf a.

b Hoeveel liter moet de fabrikant verkopen voordat hij winst gaat maken?

Opgave 4

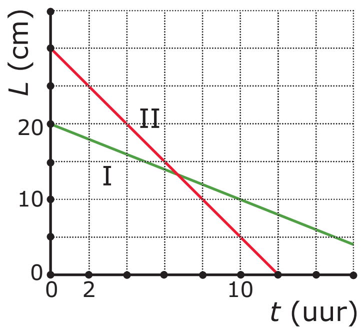
Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je kunt berekenen op welk tijdstip twee verschillende cilindervormige kaarsen (die gelijkmatig opbranden) even lang zijn als ze tegelijk worden aangestoken.

a Hoe zie je aan de grafiek dat beide kaarsen tegelijk worden aangestoken?

b Stel zelf de formules op voor de lengte L van deze kaarsen.

c Met de balansmethode wordt het tijdstip berekend waarop beide kaarsen even lang zijn. Bereken dit tijdstip in seconden nauwkeurig.

Opgave 5



Je ziet de grafieken van twee cilindervormige kaarsen die tegelijk worden aangestoken.

Na hoeveel minuten is kaars I langer dan kaars II?

Opgave 6

Lijn l gaat door de punten $A(3,60)$ en $B(7,40)$ en lijn m gaat door de punten $C(4,50)$ en $D(9,60)$.

Bereken de exacte coördinaten van het snijpunt van beide lijnen.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** de twee uitwerkingen van wat lastiger lineaire vergelijkingen. In de eerste vergelijking komen breuken voor, in de tweede vergelijking haakjes.

Bekijk de eerste vergelijking.

a Wat gebeurt er in de eerste stap van de oplossing?

b In de tweede stap gebeuren er twee dingen tegelijk, welke twee?
Is de volgorde daarbij belangrijk?

Bekijk vervolgens de tweede vergelijking. Zowel links als rechts van het isgelijkteken worden de haakjes weggewerkt.

c Leg uit hoe dit gebeurt.

d Loop de rest van de uitwerking na. Controleer het antwoord.

Opgave 8

Los de vergelijkingen op.

a $\frac{2a+20}{6} = 10$

b $\frac{1}{2}(12 - p) = p - (27 - p)$

c $(5 - 2x) - (x + 4) = 7$

d $\frac{1}{5}t - 0{,}8 = 2 - \frac{1}{2}t$

Opgave 9

Met AlgebraKIT kun je het oplossen van vergelijkingen oefenen. Bekijk het **Practicum**.

Verwerken

Opgave 10

Los de vergelijkingen op.

a $-6k + 55 = 4k - 25$

b $12 - 4x = 36 + 2x$

c $\frac{1}{3}x - 25 = 16 + \frac{1}{2}x$

d $5(4 - 2x) = 5x - (3 + x)$

Opgave 11

Los de vergelijkingen op.

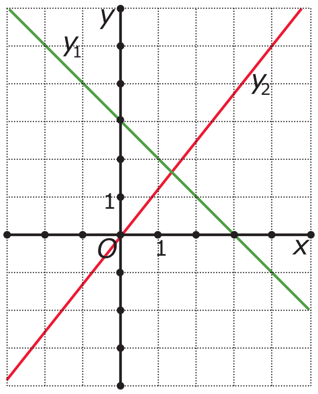
a $\frac{3a \cdot 3}{3} + 2{,}5 = \frac{1}{2}a - 3{,}5$

b $\frac{1}{6}q + 2q = 3q - 0{,}5 + 7$

c $p(3 - 1) + 2 \cdot \frac{1}{6}p = 15p + 30$

Opgave 12

Je ziet de grafieken van twee lineaire verbanden, aangegeven met y_1 en y_2.



a Los op: $y_1 = y_2$.

b Los op: $y_1 > y_2$.

c Controleer je antwoord bij b voor enkele waarden van x.

Opgave 13

Voor de jaarlijkse kosten K (euro) voor het waterverbruik v (m^3) in twee gebieden A en B gelden de formules:

- gebied A: $K = 36 + 1{,}80v$
- gebied B: $K = 48 + 1{,}55v$

Schrijf bij de volgende vragen steeds de bijbehorende ongelijkheid op en los deze vergelijking op. Geef je antwoord in m^3 nauwkeurig.

a Bij welk verbruik zijn de kosten in gebied A lager dan in gebied B?

b Bij welk verbruik zijn de kosten in gebied B hoger dan € 200?

Opgave 14

De temperatuur boven het aardoppervlak hangt onder andere af van de hoogte waarop je je bevindt. Vooral voor bergbeklimmers is het belangrijk om te weten dat elke stijging van 100 m een daling van de temperatuur van ongeveer $0{,}6$ °C betekent.
Twee bergbeklimmers meten een temperatuur van 16 °C.

a Welke temperatuur meten zij als ze nog 120 m omhoog klimmen?

b Het aantal meters dat ze omhoog gaan, kun je h noemen. Welke formule geeft dan het verband weer tussen temperatuur T in °C en h?

c Welke ongelijkheid hoort er bij de vraag: ‘Na hoeveel meter stijgen komt de temperatuur die ze meten, onder het vriespunt?’

d Los de ongelijkheid bij c op. Geef je antwoord in tientallen meters nauwkeurig.

Opgave 15

Twee auto's rijden elkaar op de snelweg tegemoet. Op een zeker moment zijn ze nog 120 km van elkaar verwijderd. Auto A rijdt met een snelheid van 115 km/h en auto B met een snelheid van 105 km/h.

Na hoeveel tijd passeren ze elkaar? Geef je antwoord in seconden nauwkeurig.

Toepassen

Iemand wil een nieuwe auto aanschaffen en twijfelt tussen een auto die op benzine rijdt en een zelfde auto die elektrisch is. Hij heeft deze formules opgesteld voor de kosten K afhankelijk van het aantal km a dat hij jaarlijks rijdt.

Benzineauto: $K = 2400 + 0{,}14a$.
Dieselauto: $K = 4200 + 0{,}072a$.

Welke auto is voor hem voordeliger?

Opgave 16: Benzineauto of elektrische auto?

Gebruik de gegeven formules uit **Toepassen** hierboven.

a Welke ongelijkheid moet er worden opgelost?

b Los deze ongelijkheid op in gehele km nauwkeurig.

c Welk antwoord geef je nu op de vraag die de automobilist zichzelf heeft gesteld.

Opgave 17: Gastank inbouwen?

Je wilt in een auto die op benzine rijdt een gastank inbouwen. Dat kost € 1450. Gas kost € 0,75 per liter en je rijdt 16 km op 1 liter gas. De benzinekosten zijn € 0,11 per kilometer. De totale kosten K_g voor het rijden op gas hangen af van het aantal kilometers a dat je rijdt.

a Stel een formule op voor K_g. Rond het hellingsgetal af op twee decimalen.

b Stel ook een formule op voor K_b, de brandstofkosten aan benzine voor het aantal gereden kilometers a.

c Na hoeveel gereden kilometers heb je de kosten van de gastank terugverdiend?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **vergelijkingen oplossen met de balansmethode**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

1.4 Omgekeerd evenredig

Verkennen

Opgave V1

Je rijdt met de auto 16 km over de snelweg. Hoe sneller je (gemiddeld) rijdt, hoe korter je over die 16 km doet: rijd je (gemiddeld) twee keer zo snel, dan heb je de helft van de reistijd nodig.

a Als je 16 km met 120 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord eerst in uren en dan in minuten.

b Als je 16 km met 60 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord eerst in uren en dan in minuten.

Noem de snelheid in km/uur v en de reistijd in uren t.

c Waarom is hier geen sprake van een recht evenredig verband?

d Welke formule geeft het verband tussen t en v weer?

Opgave V2

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 m^2.

a Hoe groot is de breedte als de lengte 8 m is?

b Hoe groot is de breedte als de lengte 4 m is?

c Hoe groot is de breedte als de lengte x m is?

d Waarom wordt een verband zoals dat tussen de lengte en de breedte van een rechthoek met oppervlakte 24 m^2 wel 'omgekeerd evenredig' genoemd?

Theorie

Opgave 1

Je rijdt 32 km over de snelweg.

a Hoeveel minuten doe je daarover als je 80 km/h rijdt?

b Hoeveel minuten doe je daarover als je 40 km/h rijdt?

Als het goed is, heb je bij a en b ontdekt dat bij een twee keer zo grote snelheid een half keer zo grote reistijd hoort.

c Laat met behulp van de formule in de **Uitleg** zien dat dit altijd waar is door de formules bij v en bij $2v$ met elkaar te vergelijken.

d Controleer de grafiek van $t = \frac{1920}{v}$. Maak daartoe een tabel met voor v de waarden 10, 20, ...

e Wat betekent het voor de reistijd als je snelheid bijna 0 wordt? Wat betekent dit voor de grafiek?

f Wat betekent het voor de reistijd als je snelheid heel groot wordt? Wat betekent dit voor de grafiek?

Opgave 2

Elk omgekeerd evenredig verband heeft een formule van de vorm $y = \frac{c}{x}$ waarin c een constant getal is. Je kunt voor c getallen kiezen. Neem alleen niet $c = 0$.

a Neem $c = 1$ en bekijk de grafiek. De grafiek gaat door de punten $(1{,}1)$, $(2; 0{,}5)$ en $(0{,}5; 2)$. Laat zien dat deze punten ook aan de formule voldoen.

b Welke waarde heeft y als $x = 100$?
En als $x = 100000$?

c Bij welke waarde van x geldt $y = 100$?
En welke als $y = 100000$?

Voor verschillende waarden van c krijg je verschillende grafieken. Het zijn allemaal hyperbolen.

d Bij welke waarde van c gaat die hyperbool door het punt $(2{,}3)$?

e Waarom hebben al deze grafieken geen punt met $x = 0$?

Opgave 3

Het omgekeerde van een getal g is het getal dat met g vermenigvuldigd 1 oplevert.

a Laat zien dat het omgekeerde van g gelijk is aan $\frac{1}{g}$.

b Wat is het omgekeerde van 3?
En van $\frac{3}{7}$?

c Waarom heeft 0 geen omgekeerde?

d Leg uit waarom ‘omgekeerd evenredig’ hetzelfde betekent als ‘recht evenredig met het omgekeerde’.

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe er duidelijk wordt gemaakt dat lengte l en breedte b omgekeerd evenredig zijn.

a Laat dit voor twee andere waarden van b zien.

b Waarom heb je hiermee nog niet echt aangetoond dat dit altijd geldt?

c Vul nu als waarden voor b in: $b = x$ en $b = 2x$. Kun je nu wel concluderen dat l en b omgekeerd evenredig zijn?

d Teken een grafiek van l afhankelijk van b.

Neem aan dat de omtrek van de rechthoek 410 cm is.

e Leg uit dat dit betekent dat $l = 205 - b$.

f Teken in de grafiek die je bij d hebt gemaakt nu ook de grafiek bij de formule van e. Zoek uit welke lengte en breedte de rechthoek heeft die aan beide formules voldoet.

Opgave 5

Bij de productie van bijvoorbeeld verf is er niet alleen sprake van productiekosten per liter, maar ook van vaste kosten (machine, bedrijfshal, enzovoort). Neem aan dat die vaste kosten € 32000 bedragen.

a Laat met een voorbeeld zien dat de vaste kosten per liter gerekend (k in euro/liter) omgekeerd evenredig zijn met het aantal geproduceerde liters a.

b Welke formule kun je opstellen voor k afhankelijk van a?

c Bij welke waarde van a worden de vaste kosten per liter kleiner dan € 0,50?

Verwerken

Opgave 6

Stel je fietst steeds dezelfde route van huis naar school met een constante snelheid.

De tijd die hiervoor nodig is, is omgekeerd evenredig met de snelheid.

a Als de snelheid verdubbelt, wat betekent dit dan voor de tijd?

b Als de tijd verdubbelt, wat betekent dit dan voor de snelheid?

c Welke standaardformule hoort bij deze situatie? Gebruik v voor snelheid, t voor tijd en a voor de afgelegde afstand.

Opgave 7

Bij het rijden in een auto heb je behalve met de brandstofkosten per gereden kilometer ook te maken met vaste jaarlijkse kosten voor onder andere wegenbelasting, verzekering, garagekosten en afschrijving. Wanneer je wilt uitrekenen hoeveel een auto per gereden kilometer kost, dan moet je ook met die vaste kosten rekening houden.

Mevrouw Jansen schat haar vaste kosten op € 3800,00 per jaar. Als ze dit wil omrekenen naar vaste kosten per kilometer, dan moet ze haar vaste kosten delen door het aantal kilometers dat ze per jaar rijdt.

a Wat zijn haar vaste kosten per kilometer als ze 19000 km in een jaar rijdt?

b Leg uit dat haar vaste kosten per km v omgekeerd evenredig zijn met het jaarlijks aantal gereden kilometers a.

c Stel een formule op voor v afhankelijk van a en teken een bijpassende grafiek.

d Bij welk jaarlijks gereden aantal kilometers zijn haar vaste kosten per kilometer minder dan € 0,10?

Opgave 8

Een rechthoek met lengte l en breedte b heeft oppervlakte A.

a Stel je voor dat $l = 10$, maar dat b nog kan variëren. Welke formule geldt dan voor A afhankelijk van b? Is A recht evenredig of omgekeerd evenredig met b?

b Stel je voor dat $A = 200$, maar dat l en b nog kunnen variëren. Welke formule geldt dan voor l afhankelijk van b? Is l recht evenredig of omgekeerd evenredig met b?

c Stel je voor dat $l = 2b$. Welke formule geldt dan voor A afhankelijk van b? Is er nu sprake van een recht of omgekeerd evenredig verband?

Opgave 9

Een boer wil voor zijn paard een rechthoekig weiland van 1200 m^2 afzetten. Hij heeft nog zo veel palen en draad, dat de omheining 182 meter lang kan worden.

a De oppervlakte van het weiland wordt 1200 m^2. Leg uit, dat de lengte l en de breedte b van het weiland daarom omgekeerd evenredig zijn. Stel een bijpassende formule op.

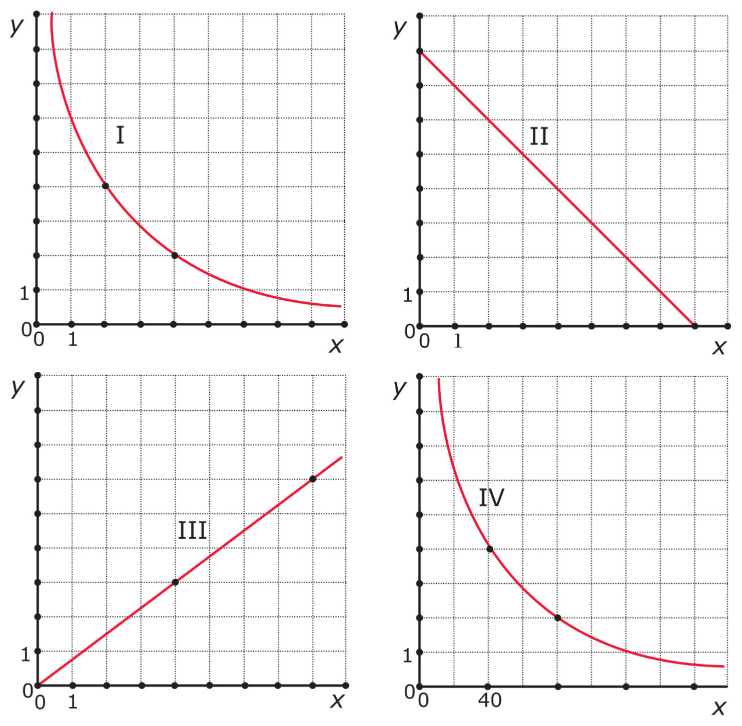
b Omdat de omheining 182 m wordt, kun je nog een formule van de vorm $l = ...$ afleiden. Schrijf die formule op.

c Teken de grafieken bij deze formules in één assenstelsel.

d Bepaal nu met behulp van de grafiek en inklemmen welke afmetingen het weiland krijgt in m nauwkeurig.

Opgave 10

Je ziet twee hyperbolen en twee rechte lijnen. Schrijf bij elk van deze grafieken een passende formule op. Gebruik de aangegeven roosterpunten. Zet erbij of de variabelen recht evenredig of omgekeerd evenredig zijn, of geen van beide.



Opgave 11

Een wandelaar maakt een wandeling van 2 uur. Eerst loopt hij op een vlak stuk weg met snelheid 4 km/h. Daarna moet hij een stuk omhoog. Zijn snelheid is dan 3 km/h. Als hij boven is, dan gaat hij terug. Eerst dus datzelfde stuk omlaag. Dat kan hij snel: 6 km/h. Daarna weer hetzelfde vlakke stuk terug, weer met snelheid 4 km/h.
Hoeveel km heeft de wandelaar gewandeld?

A. 8
B. 9
C. 10
D. 11
E. 12

Toepassen

Opgave 12: Hijskraan

Deze hijskraan kan zware lasten tillen. De last hangt aan een katrol die langs de arm beweegt. De afstand van de plek waaronder de katrol hangt tot het steunpunt van de arm, heet de armlengte a.

Het grootste gewicht G dat deze kraan kan tillen, hangt af van de armlengte.

Voor deze kraan geldt: $G = \frac{120000}{a}$.
Hierin is G in kg en a in meters.

In deze opgave bereken je op welke afstand van de kraan een gewicht van 6 ton (6000 kg) nog kan hangen.

a Welke ongelijkheid moet er worden opgelost?

b Los de bijbehorende vergelijking op.

c Op welke afstand van de kraan kan een gewicht van 6 ton dus nog hangen?

d Om een stapel stenen naar de goede plek te hijsen moet deze stapel 23 m van het steunpunt van de draaiarm kunnen hangen. Hoe zwaar mag die stapel stenen hoogstens zijn?

1.5 Hyperbolische verbanden

Verkennen

Opgave V1

Je rijdt met de auto 16 km over de snelweg. Je hebt een constante (gemiddelde) snelheid. Maar je moet onderweg wel even stoppen om te tanken en dat kost 5 minuten.

a Als je 16 km met 120 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord eerst in uren en dan in minuten.

b Als je 16 km met 60 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord eerst in uren en dan in minuten.

Noem de snelheid in km/uur v en de reistijd in uren t.

c Waarom is hier geen sprake van een omgekeerd evenredig verband?

d Welke formule geeft het verband tussen t en v weer?

Theorie

Opgave 1

Je rijdt 32 km over de snelweg en je stopt onderweg 5 minuten om te tanken.

a Hoeveel minuten doe je over deze 32 km als je 80 km/h rijdt?

b Hoeveel minuten doe je daarover als je 40 km/h rijdt?

c Leg met behulp van je antwoorden bij a en b uit waarom nu de reistijd t en de constante snelheid v niet omgekeerd evenredig zijn.

d Teken een grafiek van $t = \frac{1920}{v} + 5$. Maak eerst een tabel met voor v de waarden 10, 20, ..., 120.

e Wat betekent het voor de reistijd als je snelheid bijna 0 wordt? Wat betekent dit voor de grafiek?

f Wat betekent het voor de reistijd als je snelheid heel groot wordt? Wat betekent dit voor de grafiek?

Opgave 2

Elk hyperbolisch verband heeft de vorm $y = \frac{c}{x} + d$ waarin c en d constanten zijn. Je kunt deze constanten aanpassen en bijpassende grafieken maken. Gebruik eventueel de applet in het **Practicum**.

a Neem $c = 1$ en $d = 2$. De grafiek gaat door de punten $(1{,}3)$, $(2; 2{,}5)$ en $(0{,}5; 4)$. Laat zien dat deze punten ook aan de formule voldoen.

b Welke waarde heeft y als $x = 100$?
En als $x = 100000$?

c Welke waarde heeft y als $x = 0{,}01$?
En welke als $x = 0{,}00001$?

Voor verschillende waarden van c en d krijg je verschillende grafieken. Het zijn allemaal hyperbolen. Neem $d = 2$.

d Bij welke waarde van c gaat die hyperbool door het punt $(2,3)$?

e Waarom hebben al deze grafieken geen punt met $x = 0$? Geldt dit ook voor andere waarden van d?

Neem nu $c = 1$.

f Wat gebeurt er met de grafiek als d verandert?

Opgave 3

Bekijk welk probleem er in **Voorbeeld 1** aan de orde wordt gesteld.

a Van welk soort verband is er sprake?

b Maak een tabel (in drie decimalen nauwkeurig) en een grafiek bij deze formule.

c Je wilt weten bij welk aantal folders a geldt $k \leq 0{,}06$. Welke waarde voor a levert precies $0{,}06$ op? En wat wordt dus je antwoord?

In het voorbeeld staat dat je het antwoord op d ook kunt vinden door te redeneren.

d Leg uit hoe je dan de vergelijking $0{,}04 + \frac{10}{a} = 0{,}06$ oplost.

Opgave 4

Bij de productie van verf is er sprake van productiekosten per liter, maar ook van vaste kosten (machine, bedrijfshal, enzovoort) die niet van het geproduceerde aantal liter verf afhangen. Bij het berekenen van de prijs die de fabrikant per liter verf gaat berekenen moet hij ook met deze vaste kosten rekening houden. Neem aan dat die vaste kosten € $32000{,}00$ bedragen. De productiekosten per liter bedragen € 5,60.

a Stel een formule op voor de totale kosten per liter (K in euro/liter) afhankelijk van het aantal geproduceerde liters a.

b Bereken hiermee de totale kosten per liter bij een productie van 10000 liter van deze verf.

c Bij welke waarde van a worden de totale kosten per liter kleiner dan € 6,00?

Opgave 5

Wanneer je een auto huurt betaal je een vast bedrag van € 55,00 en daar bovenop € 0,45 per gereden kilometer.

a Stel een formule op voor de totale kosten per kilometer (k in euro/km) afhankelijk van het aantal gereden kilometer q.

b Bereken voor welke waarde van q de kosten per gereden kilometer € 0,98 bedragen.

Opgave 6

Los de vergelijkingen op.

a $\frac{600}{x} + 10 = 22$

b $\frac{180}{k} = 4{,}5$

c $4 + \frac{4400}{x-20} = 15$

d $\frac{2p-50}{1500} - 0{,}4 = 0{,}1$

Opgave 7

Je wilt de ongelijkheid $\frac{960}{v} + 5 < 17$ oplossen.

a Maak eerst een schets van de grafiek van $y = \frac{960}{v} + 5$ en geef daarin aan hoe je de waarde van v kunt vinden waarvoor geldt $y = 17$.

b Bereken de waarde van v waarvoor geldt $\frac{960}{v} + 5 = 17$.

c Lees uit je schets de oplossing van de ongelijkheid af.

Verwerken

Opgave 8

Op veel scholen kun je ook als leerling kopieën maken. De maandelijkse kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 150,00
- de kosten per kopie: € 0,02

Noem de maandelijkse kosten per kopie K en het aantal kopieën a.

a Welke formule geldt voor K afhankelijk van a?

b Waarom zijn K en a niet omgekeerd evenredig?

c Teken een grafiek bij deze formule.

d Stel dat je als leerling € 0,05 per kopie betaalt. Hoeveel kopieën moeten er dan maandelijks minstens worden gemaakt als de school geen verlies wil draaien? Los de bijbehorende ongelijkheid systematisch op.

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op:

a $\frac{2400}{x} + 3{,}6 = 6{,}8$

b $200 + \frac{50}{x} = 450$

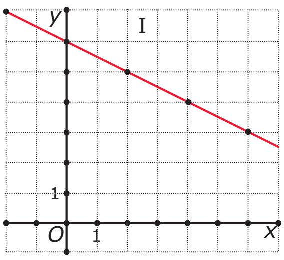
c $\frac{t-15}{300} - 0{,}5 = 0{,}8$

d $\frac{800}{d-5} = 50$

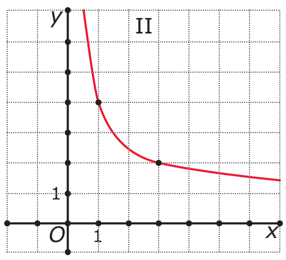
Opgave 10

Je ziet grafieken bij vier formules.

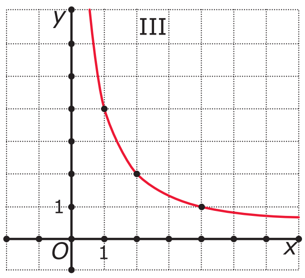
- $y_1 = \frac{4}{x}$
- $y_2 = 6 - 0{,}5x$
- $y_3 = \frac{3}{x} + 1$
- $y_4 = 0{,}2x + 4$



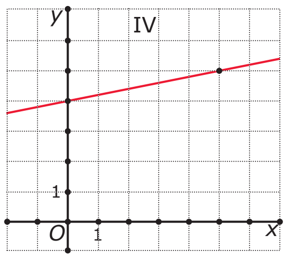
grafiek I



grafiek II



grafiek III



grafiek IV

Welke formule hoort bij welke grafiek?

Opgave 11

Je wilt de vergelijking $\frac{4}{x} + 2 = x + 1$ oplossen. Een vergelijking zoals deze kun je op dit moment alleen grafisch en met inklemmen oplossen.

a Teken de grafieken van $y_1 = \frac{4}{x} + 2$ en $y_2 = x + 1$ in één figuur. Houd ook rekening met negatieve waarden van x.

b Aan de grafieken zie je dat er twee snijpunten zijn. Bereken de coördinaten van die snijpunten door inklemmen in één decimaal nauwkeurig.

c Schrijf de oplossingen van deze vergelijking op in één decimaal nauwkeurig.

d Schrijf de oplossingen van de ongelijkheid $\frac{4}{x} + 2 > x + 1$ op in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 12

Los de vergelijkingen op.

a $2 - \frac{4}{x} = 8$

b $\frac{80}{2-0{,}5x} = 10$

c $5 + \frac{25}{x^2} = 6$

d $\frac{20}{-0{,}25x} = 10$

Opgave 13

Bij een hyperbolisch verband tussen x en y hoort een formule van de vorm $y = \frac{c}{x} + d$. Hierin zijn c en d constanten.

a Bereken de waarde van y die hoort bij $x = 10$ als de grafiek bij dit hyperbolische verband als horizontale asymptoot $y = 5$ heeft en door het punt $(2{,}7)$ gaat.

b Bereken de waarde van y die hoort bij $x = 10$ als de grafiek bij dit hyperbolische verband door de punten $(2{,}9)$ en $(4{,}8)$ gaat.

Toepassen

De standaard vergoeding voor kilometers die je voor een werkgever rijdt in de eigen auto bedraagt € 0,19 cent per kilometer. Een automobilist die voor zijn baas af en toe een ritje maakt is natuurlijk nieuwsgierig of daarmee inderdaad de kosten zijn gedekt. Het mooiste is als je dit voor een werkelijke situatie kunt narekenen, misschien heb je in je familie of kennissenkring wel iemand die in zo'n situatie zit. En anders kun je met de gegevens hieronder rekenen.

Voor een bepaalde auto die op benzine rijdt worden de volgende schattingen gedaan:

- De prijs van een liter benzine is € 1,68 en je rijdt 12 km op elke liter benzine.
- De wegenbelasting is € 300,00 per jaar.
- De verzekering kost € 200,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 1900,00 per jaar.

Maar rijdt de auto bijvoorbeeld op gas, of op diesel, of elektrisch, dan liggen deze bedragen anders. Voor een vergelijkbare elektrische auto zijn op hetzelfde moment dit de schattingen:

- De prijs van een kWh (kiloWattuur) elektriciteit is € 0,40 en je verbruikt 18 kWh per 100 km.
- De wegenbelasting is € 0 per jaar.
- De verzekering kost € 400,00 per jaar.
- De kosten voor afschrijving, onderhoud en dergelijke zijn € 4200,00 per jaar.

Je kunt dit probleem oplossen met behulp van lineaire verbanden, maar ook met een hyperbolisch verband...

Opgave 14: Kilometervergoeding

In de tekst in **Toepassen** zie je schattingen van de diverse kosten die je maakt als je in een eigen auto wilt rijden. Ga in deze opgave uit van die gegevens.

In deze opgave ga je op zoek naar een formule voor de kosten per jaarlijks gereden kilometer. Je vergelijkt een auto op benzine met een elektrische auto. De kosten per km noem je k en het jaarlijkse aantal gereden km noem je a.

Ga eerst uit van een auto die op benzine rijdt.

a Stel op grond van de schattingen een formule op voor k afhankelijk van a.

b Vanaf hoeveel gereden km per jaar is de kilometervergoeding kostendekkend?

Ga nu uit van een elektrische auto.

c Stel op grond van de schattingen een formule op voor k afhankelijk van a.

d Vanaf hoeveel gereden km per jaar is de kilometervergoeding kostendekkend?

Opgave 15: Evenredig met een kwadraat

Je hebt tot nu toe de begrippen 'recht evenredig' en 'omgekeerd evenredig' geleerd. Onthoud deze begrippen goed, ze komen regelmatig voor in toepassingen van de wiskunde. Een variabele kan echter ook wel recht evenredig zijn met het kwadraat van een andere variabele. Of omgekeerd evenredig met een kwadraat...

Wanneer y recht evenredig is met het kwadraat van x, dan hoort daarbij een formule van de vorm $y = c \cdot x^2$. Hierin is c een constante.

a Neem eerst $c = 1$. Maak een tabel voor gehele waarden van x vanaf -3 tot en met 3 en teken een bijpassende grafiek.

b Je kunt deze grafiek ook maken in **GeoGebra** of in **Desmos** door op de invoerbalk de formule in te voeren. Doe dat en ga na of je grafiek overeenkomt met de grafiek die je bij a hebt getekend.

c Onderzoek nu met behulp van GeoGebra/Desmos of de grafiek bij andere waarden van c dezelfde vorm heeft. Probeer te beschrijven hoe de grafiek verandert afhankelijk van de gekozen waarde voor c.

Wanneer y omgekeerd evenredig is met het kwadraat van x, dan hoort daarbij een formule van de vorm $y = \frac{c}{x^2}$. Hierin is c een constante.

d Neem eerst $c = 1$. Maak een tabel zoals deze en teken een bijpassende grafiek.

x	-4	-2	-1	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	1	2	4
x											

e Je kunt deze grafiek ook maken in **GeoGebra** of in **Desmos** door op de invoerbalk de formule in te voeren. Doe dat en ga na of je grafiek overeenkomt met de grafiek die je bij d hebt getekend.

f Onderzoek nu met behulp van GeoGebra/Desmos of de grafiek bij andere waarden van c dezelfde vorm heeft. Probeer te beschrijven hoe de grafiek verandert afhankelijk van de gekozen waarde voor c.

Practicum

Applet

Hier zie je de grafiek van een **hyperbolisch verband**.
Je kunt de invloed van de waarden van c en d op de grafiek bekijken.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Vaak is het zo dat als je van iets twee keer zoveel hebt, dat dit dan ook twee keer zoveel waard is (of heeft gekost). Je zegt dan dat hoeveelheid en waarde (kosten) recht evenredig zijn. Maar het komt ook wel voor dat er bijkomende vaste kosten zijn zoals een telefoon-abonnement, een abonnement op gas, water en elektra, en dergelijke. Dan zijn hoeveelheid en kosten niet meer recht evenredig.
En dan kun je behalve naar de totale waarde (kosten) ook nog kijken naar de waarde (kosten) per eenheid, per stuk. Dan moet er worden gedeeld en krijg je formules met breuken er in. Over deze zaken gaat dit onderwerp.

De volgende opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Lineair en hyperbolisch** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

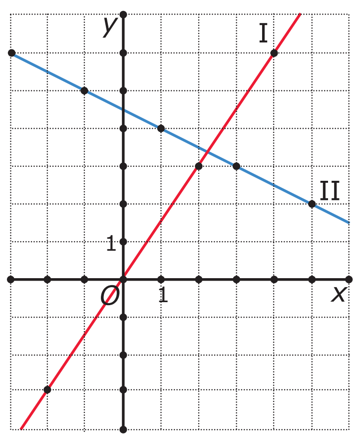
- recht evenredig (verband) — evenredigheidsconstante, hellingsgetal
- lineair verband — hellingsgetal, richtingscoëfficiënt — startgetal
- lineaire vergelijking — balansmethode
- omgekeerd evenredig (verband) — hyperbool
- hyperbolisch verband — asymptoot

Activiteiten

- formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken
- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken
- vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden oplossen
- formules en grafieken bij omgekeerd evenredige verbanden maken en gebruiken
- formules en grafieken bij hyperbolische verbanden maken en gebruiken

Opgave 1

Hiernaast zie je twee rechte lijnen in een assenstelsel. Het zijn grafieken van y afhankelijk van x.



a Bij welk van beide grafieken is sprake van een recht evenredig verband tussen x en y? En waarom?

b Bij de in a bedoelde grafiek hoort een formule van de vorm $y = c \cdot x$. Welke waarde heeft de evenredigheidsconstante c?

c Als de waarde van x tien keer zo groot wordt, hoeveel keer zo groot wordt de waarde van y dan? Toon dit aan door de waarden van y bij x en bij $10x$ met elkaar te vergelijken.

Opgave 2

In de vorige opgave zie je twee rechte lijnen in een assenstelsel. Het zijn grafieken van y afhankelijk van x. Bij beide grafieken is sprake van een lineair verband tussen x en y.

a Waarom?

b Bepaal de richtingscoëfficiënt (het hellingsgetal) van grafiek II. Stel een formule op bij deze grafiek.

c Ga met behulp van een berekening na of het punt $(41, -16)$ op grafiek II ligt.

Opgave 3

Gebruik weer de grafieken uit **Opgave 1**.

a Met welke vergelijking kun je de x-waarde van het snijpunt van beide grafieken berekenen?

b Los de in a bedoelde vergelijking op.

c Bereken de coördinaten van het snijpunt van beide grafieken.

d Oefen het oplossen van lineaire vergelijkingen in het **Practicum**.

Opgave 4

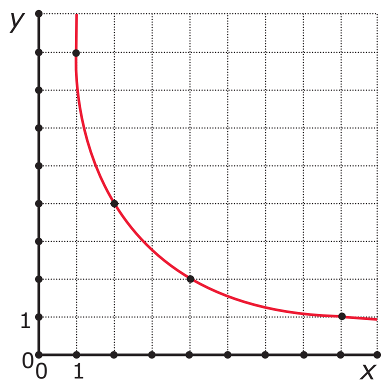
Als je alle waarden van x wilt bepalen waarvoor $1{,}5x < 4{,}5 - 0{,}5x$, dan los je een ongelijkheid op. Daarbij gebruik je de grafieken van $y_1 = 1{,}5x$ en $y_2 = 4{,}5 - 1{,}5x$. Die vind je bij **Opgave 1**.

a Waarom moet je eerst de vergelijking $1{,}5x = 4{,}5 - 0{,}5x$ oplossen?

b Los de ongelijkheid op.

Opgave 5

Hier zie je een deel van de grafiek bij de formule $y = \frac{8}{x}$.



a Waarom is hier sprake van een omgekeerd evenredig verband?

b Welk punt op de grafiek heeft x-waarde 16?

c Welk punt op de grafiek heeft y-waarde 32?

d Wat gebeurt er met de grafiek als x steeds groter wordt?

e Wat gebeurt er met de grafiek als x steeds dichter bij 0 komt?

f Je kunt in deze formule ook negatieve waarden voor x invullen. De grafiek is daarom niet compleet. Hoe ziet de complete grafiek er uit?

Opgave 6

Gegeven is de formule $y = \frac{8}{x} + 2$.

a Teken een grafiek bij deze formule. Welk soort verband beschrijft deze formule?

b Welk punt op de grafiek heeft x-waarde 16?

c Welk punt op de grafiek heeft y-waarde 34?

d Wat gebeurt er met de grafiek als x steeds groter wordt?

e Wat gebeurt er met de grafiek als x steeds dichter bij 0 komt?

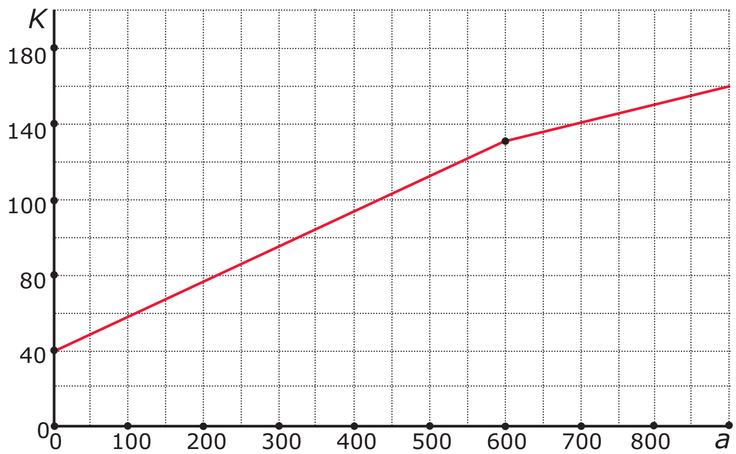
f Bekijk de vergelijking $\frac{8}{x} + 2 = 5$. Laat duidelijk zien hoe je deze vergelijking oplost.

g Welke oplossing heeft de ongelijkheid $\frac{8}{x} + 2 > 5$.

Toepassen

Opgave 7: Grootverbruikstarief

Als je meer dan 600 m^3 gas per jaar verstookt, ben je een grootverbruiker. Dat geldt bijvoorbeeld voor de glastuinbouw. Om zijn kassen warm te houden verstookt een tuinder nogal wat gas. Om dit betaalbaar te houden heeft het gasbedrijf een grootverbruikstarief. In de grafiek zie je wat gegevens (in €).



a Waarom vertoont de grafiek een knik?

b Hoeveel bedragen de vaste kosten per jaar en de prijs per m^3 voor een kleinverbruiker? Schrijf je berekening op.

c Beantwoord dezelfde vraag voor een grootverbruiker.

d Als a het aantal verbruikte m^3 gas is en K zijn de jaarlijkse kosten (in €) bij grootverbruik, welke formule kun je dan opstellen voor K?

e Bij welk grootverbruik komen de jaarlijkse kosten boven de € 200?

Opgave 8: Schaal van Richter

De kracht van een aardbeving wordt gemeten op de schaal van Richter. Een kracht van 6 op de schaal van Richter is al een behoorlijke aardschok. Maar die kracht neemt snel af als je verder van het centrum van de aardbeving af bent. Stel dat voor de kracht k van een bepaalde aardbeving geldt:

$$k = 1 + \frac{100}{r^2+20}$$

Hierin is r de afstand in km vanaf het centrum van de beving.

a Hoeveel bedraagt de kracht van deze aardbeving in het centrum? Rond af op één decimaal nauwkeurig.

b Hoeveel bedraagt de kracht van deze aardbeving op 5 km van het centrum?

c Bij welk getal op de schaal van Richter is er geen sprake van een aardbeving? Leg uit hoe je aan dit antwoord komt.

d Teken een grafiek van k afhankelijk van r. Neem voor r getallen van 0 tot en met 20.

e Als $k < 1{,}1$ is de aardbeving niet voelbaar. Bereken in één decimaal nauwkeurig hoeveel km je daarvoor van het centrum af moet zitten.

Begrippen

- stelling van Pythagoras — rechthoekszijden, hypotenusa (langste zijde)
- hulplijn
- oppervlakte van ruimtelijke figuren
- inhoud (volume) van ruimtelijke figuren
- doorsnede — op ware grootte
- lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor — gelijkvormige figuren

Activiteiten

- werken met de stelling van Pythagoras om lengtes te berekenen;
- lengtes in het platte vlak en in ruimtelijke figuren berekenen;
- de oppervlakte van ruimtelijke figuren berekenen;
- het volume (de inhoud) van ruimtelijke figuren berekenen;
- eenvoudige doorsnijdingen van ruimtelijke figuren tekenen, ook op ware grootte;
- ruimtelijke figuren vergroten (verkleinen) — vergrotingsfactoren omrekenen.

Rekenen aan een zomerhuisje

Domein

Meten en tekenen

Hoofdstuk

Meetkundige berekeningen

Inhoud

2

2.1 Pythagoras

Verkennen

Opgave V1

Applet

Je ziet in de applet een driehoek ABC op een rooster. Op elke zijde is een vierkant getekend. In elk van die vierkanten staat zijn oppervlakte.

a Controleer de oppervlaktes van die vierkanten.

b Hoe bereken je de lengtes van de drie zijden van ΔABC?

c Maak de driehoek rechthoekig. Wat valt je dan op aan de oppervlaktes van de vierkanten?

d Controleer of dit telkens klopt als de driehoek rechthoekig is en dat het niet uitmaakt welke hoek recht is.

Theorie

Opgave 1

Bekijk ΔABC in de **Uitleg**.

a Welke zijde is de hypotenusa? Hoe heten de andere zijden?

Teken zo'n rechthoekige driehoek met $AC = 5$ cm en $BC = 3$ cm op een rooster met hokjes van 1 cm bij 1 cm.

b Reken de oppervlakte van het vierkant op de hypotenusa (de lange zijde) AB uit.

c Hoe lang is AB? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

d Meet de lengte van AB in de tekening na.

Opgave 2

Teken op een rooster een rechthoekige driehoek met $AC = 4$ cm en $BC = 3$ cm op ware grootte.

a Reken de oppervlakte van het vierkant op de hypotenusa (de lange zijde) AB uit.

b Hoe lang is AB? Waarom is nu geen benadering nodig?

c Meet de lengte van AB in de tekening na.

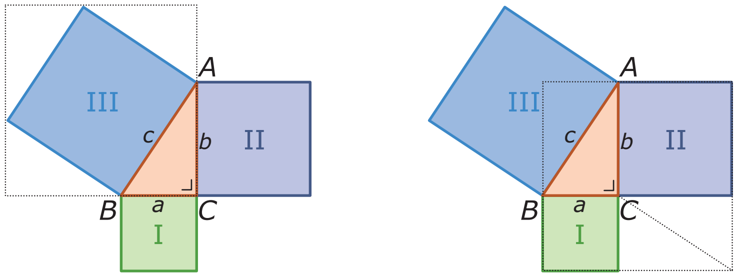
Opgave 3

Van een rechthoekige driehoek PQR met $\angle Q = 90°$ is $PQ = 12$ cm en $QR = 10$ cm.

Bereken hoe lang PR is in mm nauwkeurig.

Opgave 4

Je kunt nu de stelling van Pythagoras wel gebruiken, maar hoe zeker ben je er van dat hij altijd correct is? Bekijk daartoe deze twee figuren.



a Bekijk eerst de linker figuur. Daarin staat een vierkant met gestippelde zijden. Leg uit dat de oppervlakte van dit vierkant gelijk is aan $(a+b)^2$.

b Bekijk nu de rechter figuur. Daarin staat ook een vierkant met gestippelde zijden. Leg uit dat de oppervlakte van dit vierkant ook gelijk is aan $(a+b)^2$.

c De oppervlakte van het gestippelde vierkant in de linker figuur is gelijk aan de oppervlakte van vierkant III plus vier gelijke rechthoekige driehoeken die allemaal gelijk zijn aan ΔABC. Hoe zit dat met de oppervlakte van het gestippelde vierkant in de rechter figuur?

d Welke conclusie kun je uit het voorgaande trekken?

e Heb je nu de stelling van Pythagoras afdoende bewezen?

Opgave 5

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 1** nog eens. In deze rechthoekige driehoek is de hypotenusa steeds zijde AB.

a Neem $AC = 6$ en $BC = 4$ en bereken AB. Laat de wortel in het antwoord staan.

b Oefen dit (samen met een medeleerling) voor andere waarden van AC en BC.

Opgave 6

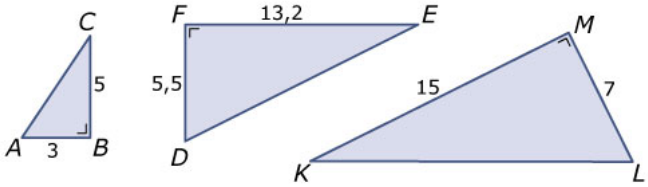
Van een rechthoekige driehoek PQR met $\angle Q = 90°$ is $PQ = 18$ cm en $QR = 30$ cm. Neem als hypotenusa PR.

a Schets deze driehoek en schat de lengte van PR.

b Bereken de lengte van PR met behulp van de stelling van Pythagoras in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 7

Hier zie je drie rechthoekige driehoeken.



Bereken in elke driehoek de exacte lengte van de hypotenusa.

Opgave 8

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 2**.

a Zet de voet van de ladder op $1,5$ m van de muur. Hoe hoog komt hij nu? Geef het antwoord weer in twee decimalen nauwkeurig.

b Je wilt dat de bovenkant van je ladder op 3 m hoogte boven de grond tegen de muur komt. Hoeveel cm moet je de voet van de ladder van de muur zetten?

Opgave 9

Van een rechthoekige driehoek PQR met $\angle Q = 90°$ is $PQ = 16$ cm en $PR = 30$ cm.

a Schets deze driehoek en schat de lengte van QR.

b Bereken de lengte van QR in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 10

Je kunt met de applet in het **Practicum** alleen rechthoekige driehoeken maken.

Maak er één waarvan twee zijden een geheel getal zijn. Reken dan zelf de derde zijde uit in twee decimalen nauwkeurig. Herhaal dit tot je geen fouten meer maakt in de berekening.

Opgave 11

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 3**. Je ziet hoe de lengte van AB van een roosterfiguur wordt uitgerekend. Neem een blad roosterpapier.

a Maak daarop een assenstelsel met de punten $A(1,3)$, $B(7,1)$ en $C(5,5)$. Bereken zelf de lengte van AC en van BC.

b Je kunt nu het berekenen van lijnstukken en de zijden van een driehoek oefenen door andere punten A, B en C te kiezen. Doe dat tot je geen fouten meer maakt.

Gebruik de applet van **Voorbeeld 3**.

Opgave 12

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 3**. Je hebt al geleerd hoe je de andere twee zijden berekend.

a Waarom weet je zeker dat de ΔABC van het voorbeeld rechthoekig is?

b Maak nu ΔABC met $A(0,3)$, $B(10,1)$ en $C(9,5)$. Waarom weet je zeker dat deze driehoek niet rechthoekig is?

c Maak nu ΔABC met $A(0,3)$, $B(9,1)$ en $C(8,5)$. Is deze driehoek rechthoekig?

Opgave 13

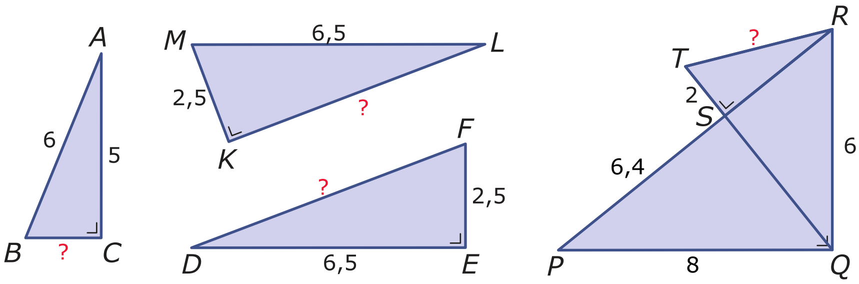
a Teken op papier een driehoek met zijden van 4 cm, 5 cm en 6 cm. Waarom weet je zeker dat het geen rechthoekige driehoek is?

b Teken op papier een driehoek met zijden van 5 cm, 12 cm en 13 cm. Waarom weet je zeker dat het een rechthoekige driehoek is?

Verwerken

Opgave 14

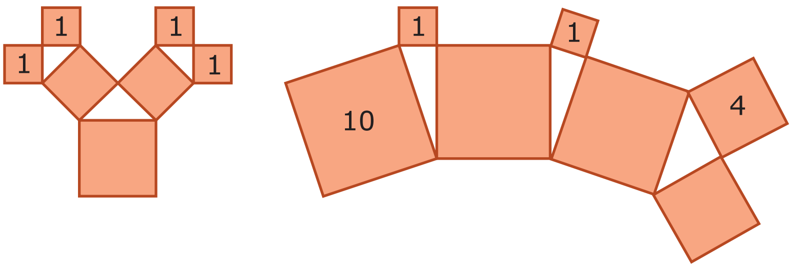
Hier zie je vier figuren met rechthoekige driehoeken.



Bereken in elke figuur de exacte lengte van de zijde met het vraagteken.

Opgave 15

Deze twee figuren bestaan uit vierkanten die zo tegen elkaar zijn gelegd dat de tussenruimtes rechthoekige driehoeken vormen. Van sommige vierkanten is de oppervlakte gegeven.



Bereken ook de oppervlakte van de andere vierkanten.

Opgave 16

Een glazenwasser moet een raam op de tweede verdieping wassen. De ladder moet daarvoor op 8 m boven de begane grond tegen de muur komen. De voet van de ladder moet op 2 m van het huis af staan.

Maak een schets van de situatie. Bereken hoe lang zijn ladder moet zijn.

Opgave 17

Een computer heeft een 17 inch monitor. Dit betekent dat de diagonaal van het zuiver rechthoekige beeldscherm 17 inch is. De hoogte van het beeld is dan 10 inch. 1 inch $= 2{,}54$ cm.

Maak een schets van de situatie. Bereken de afmetingen van het beeldscherm. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Opgave 18

Op een zuiver vierkante tafel met een zijde van $1{,}60$ m wil iemand een zuiver rond tafelkleed leggen.

Hoe groot moet de diameter van dit tafelkleed minstens zijn om de hele tafel te kunnen bedekken? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Opgave 19

Welke van deze driehoeken zijn rechthoekig? Welke hoek is dan recht?

a Driehoek ABC met $AB = 10$, $BC = 7{,}5$ en $AC = 12{,}5$.

b Driehoek DEF met $DE = 2$, $DF = 2$ en $EF = 3$.

c Driehoek GHI met $GH = 10$, $GI = 26$ en $HI = 24$.

d Driehoek KLM met $KL = 5$, $KM = 5$ en $LM = \sqrt{50}$.

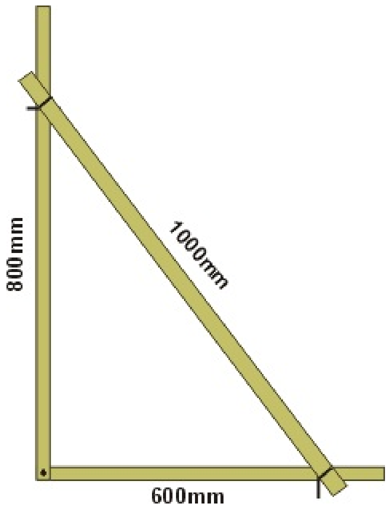
Opgave 20

Je ziet hier een Zweeds huis. Let op de rode dakpannen van het huis, niet die van de uitbouw aan de voorkant. Stel dat de bovenste verdieping 6 m breed en 10 m lang is. (Die 10 m is de lengte van één dakgoot.) Stel verder dat de nok van het dak 3 m boven het midden van de vloer van de bovenste verdieping zit. Van de gebruikte dakpannen zijn er ongeveer $17{,}5$ nodig per m^2 dak.

Hoeveel rode dakpannen zijn er voor dit huis ongeveer nodig?

Toepassen

In de bouw wordt voor het maken van rechte hoeken soms een bouwhaak gebruikt. Hier zie je er één. Je maakt hem met de zogenaamde 3,4,5-steek.



- Bevestig twee latten met de uiteinden als een hoek aan elkaar. Maak ze vast met bout en moer, zodat je de latten nog kunt draaien ten opzichte van elkaar.
- Meet op de éne lat 600 mm af ($3 \cdot 200$) en op de andere 800 mm ($4 \cdot 200$).
- Meet op een derde langere lat 1000 mm af ($5 \cdot 200$).
- Schuif de langste lat over de gemaakte hoek tot de maatstrepen precies op elkaar liggen. Nagel de schuine lat vast met 1 of 2 nagels en sla nog een nagel in de haakse hoek.

Je hebt nu een rechte hoek gekregen, want in de driehoek die ontstaat geldt de stelling van Pythagoras. **Bekijk deze videoclip over een rechte hoek uitzetten.**

Opgave 21: 3,4,5-steek

Bekijk hierboven wat de 3,4,5-steek is en hoe die in de bouw wordt gebruikt. Bekijk ook de videoclip over het maken van een rechte hoek in de praktijk.

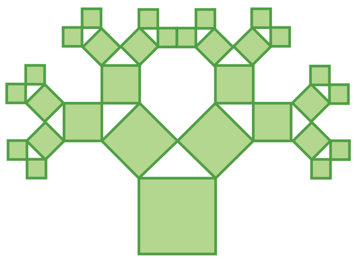
a Laat zien, dat een 3,4,5-driehoek een rechte hoek oplevert.

Vroeger werd voor de 3,4,5-steek een aaneengesloten touw met twaalf knopen gebruikt. Die twaalf knopen zaten op onderling gelijke afstand van elkaar.

b Laat met een figuur zien hoe je daarmee een 3,4,5-steek maakt. Leg ook uit waarom het niet uit maakt hoe lang dit twaalfknopentouw is.

Opgave 22: Pythagorasbomen

Je ziet hier het begin van een Pythagorasboom. Hij bestaat uit vierkanten die steeds gelijkbenige rechthoekige driehoeken insluiten. Hij is in 1942 bedacht door de Nederlandse ingenieur en wiskundeleraar Albert Bosman.



a Teken zelf zo'n Pythagorasboom als deze hiernaast. Begin met een grootste vierkant van 4 bij 4 cm. Hoe groot zijn de kleinste vierkanten?

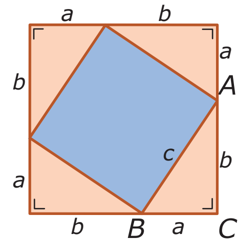
b Je kunt je Pythagorasboom nog met volgende stappen uitbreiden, alleen in het midden van de figuur ontstaat een probleem. Welk probleem?

c Teken de Pythagorasboom verder tot je vierkantjes hebt van $0{,}5$ bij $0{,}5$ cm.

d Het lijkt wel of de totale boom steeds breder en hoger wordt. Is dat ook zo? Of past de hele boom binnen een rechthoek? En welke afmetingen is die rechthoek dan?

Opgave 23: Stelling van Pythagoras bewijzen

Een bewijs is een redenering waaruit blijkt dat een bewering altijd waar is. En een bewering waar een bewijs voor bestaat heet dan een stelling.



Als het goed is, heb je al een bewijs van de stelling van Pythagoras gezien.

Maar er bestaan nogal wat bewijzen van de stelling van Pythagoras. Uit de figuur hiernaast kun je ook een bewijs afleiden.

a Leg uit dat het grote vierkant een oppervlakte van $A = (a + b)^2$ heeft.

b De oppervlakte van het grote vierkant is ook de som van de oppervlaktes van het kleine vierkant en vier rechthoekige driehoeken. Schrijf hierbij een formule op voor A afhankelijk van a, b en c.

c Laat zien (door haakjes uitwerken) dat uit c en d volgt $a^2 + b^2 = c^2$.

d Is dit een waterdicht bewijs van de stelling van Pythagoras?

Practicum

In deze applet kun je de punten A, B en C verplaatsen. Als je twee zijden van ΔABC een gehele waarde geeft, krijgt de derde zijde vaak geen gehele waarde.

Applet

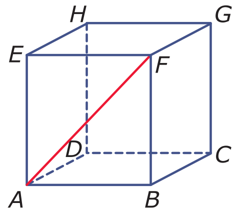
- Controleer de benadering van de lengte van die derde zijde met de stelling van Pythagoras.
- Wanneer hebben alle drie de zijden een gehele lengte?

2.2 Lengtes berekenen

Verkennen

Opgave V1

Van een kubus $ABCD.EFGH$ zijn alle ribben 6 cm. Over de voorkant van deze kubus loopt zijvlaksdiagonaal AF.



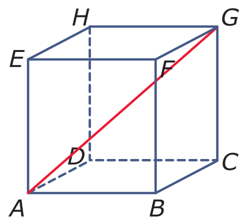
a Van welke rechthoekige driehoek is AF de hypotenusa?

b Bereken de lengte van AF in twee decimalen nauwkeurig.

c Hoe lang is zijvlaksdiagonaal AC?

Opgave V2

Van een kubus $ABCD.EFGH$ zijn alle ribben 6 cm. Dwars door deze kubus loopt lichaamsdiagonaal AG.



a Van welke rechthoekige driehoek is AG de hypotenusa? (Pak er een draadmodel van een kubus bij.)

b Hoe bereken je de lengte van AG in twee decimalen nauwkeurig?

Theorie

Opgave 1

Bekijk de berekening van de lichaamsdiagonaal in een balk in de **Uitleg**. Er wordt twee keer gebruik gemaakt van de stelling van Pythagoras.

a Geef aan in welke driehoek de lengte van AC wordt berekend en welke rechte hoek die driehoek heeft?

b Geef aan in welke driehoek de lengte van AG wordt berekend en welke rechte hoek die driehoek heeft?

Een andere lichaamsdiagonaal is DF. Je kunt de lengte van deze lichaamsdiagonaal berekenen in ΔEFD.

c Bereken met behulp van de stelling van Pythagoras in ΔEFD de lengte van lichaamsdiagonaal DF.

Opgave 2

Gegeven is een houten blok in de vorm van balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 20$ cm, $AD = 10$ cm en $AE = 5$ cm.

a Een mier kruipt over deze balk via de kortste weg van A naar F. Hoeveel cm is zijn route? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

b Een mier kruipt over deze balk via de kortste weg van A naar G. Hoeveel cm is zijn route? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

c Een houtworm boort door deze balk een kortste weg van A naar G. Hoeveel cm is zijn route? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Opgave 3

Hier zie je een pakje frisdrank. Neem aan dat elk van die pakjes de vorm heeft van een balk van $5{,}5$ cm bij $4{,}0$ cm bij $9{,}5$ cm.

In elk van die pakjes zit vlak bij een hoekpunt van het bovenvlak een plek waar je het rietje in kunt steken. Hoe lang moet zo'n rietje minstens zijn?

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je de uitslag van een piramide tekent. Om de lengte van TM te berekenen, wordt de stelling van Pythagoras gebruikt.

a Welke driehoek wordt gebruikt en welke hoek is dan de rechte hoek?

b Hoe teken je de gewenste uitslag?

Je kunt ook in plaats van TM de lengte berekenen van de vier opstaande ribben AT, BT, CT en DT. Daarvoor moet je echter eerst bijvoorbeeld AS berekenen.

c Doe dat en bereken vervolgens de lengte van AT.

d Hoe teken je nu de gewenste uitslag?

Opgave 5

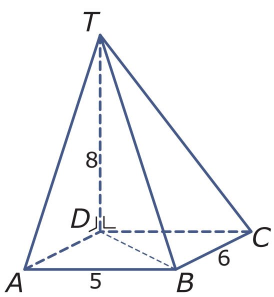
Van een regelmatige vierzijdige piramide zijn alle zijden 6 cm. De hoogte van elk van de vier opstaande zijvlakken is p en de hoogte van de piramide zelf is h.

a Bereken de hoogte van elk van de vier opstaande zijvlakken.

b Bereken de hoogte van de piramide.

Opgave 6

Van deze piramide is TD de hoogte, dus punt T zit loodrecht boven punt D.



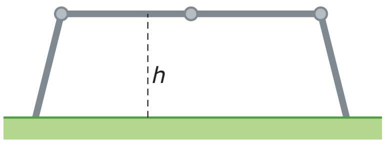
a Bereken de lengte van TC.

b Bereken de lengte van TA.

c Bereken de lengte van TB.

Opgave 7

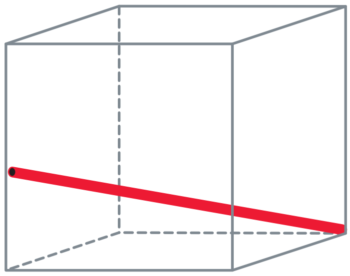
Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe de hoogte van een scharnierende ladder wordt uitgerekend. Deze ladder kan op drie plaatsen scharnieren waarna de ladder in die stand kan worden vastgezet. Die drie plaatsen zitten op gelijke afstanden van elkaar. De totale lengte van de ladder als hij helemaal uitgeklapt is (en dus nergens scharniert) bedraagt $4{,}80$ m.



In het midden scharniert de ladder niet, in de beide andere scharnierpunten wel. (Zie figuur.) De poten van de ladder staan op de grond 3 m uit elkaar. Er ontstaat een soort van loopbrug. Op welke hoogte boven de grond?

Opgave 8

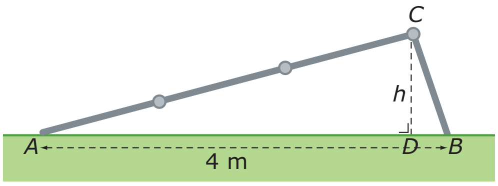
In een glazen plastic bakje is een dun rietje gevallen. Het bakje is een kubus met ribben van 15 cm en het rietje is 23 cm. De éne kant van het rietje zit precies in een hoek van het bakje, de andere kant rust tegen een opstaande ribbe.



Op welke hoogte boven de bodem van het bakje?

Opgave 9

Je kunt de scharnierende ladder uit **Voorbeeld 2** ook zo neerzetten als je in de tekening hieronder ziet. De afstanden tussen de scharnierpunten zijn elk $1{,}20$ m. Je wilt weer de hoogte h berekenen die het hoogste punt boven de grond zit. Nu staan de poten van de ladder op de grond 4 m uit elkaar.



a Dit is geen eenvoudige opdracht. Je kunt er natuurlijk altijd zelf eerst even op puzzelen...

Als je geen oplossing hebt gevonden, loop dan de rest van deze opgave door.

b Stel $DB = p$. Leg uit waarom dan $h^2 = 1{,}2^2 - p^2$ en ook $h^2 = 3{,}6^2 - (4 - p)^2$.

Uit b volgt $1{,}2^2 - p^2 = 3{,}6^2 - (4 - p)^2$.

c Los deze vergelijking op.

d Bereken nu h.

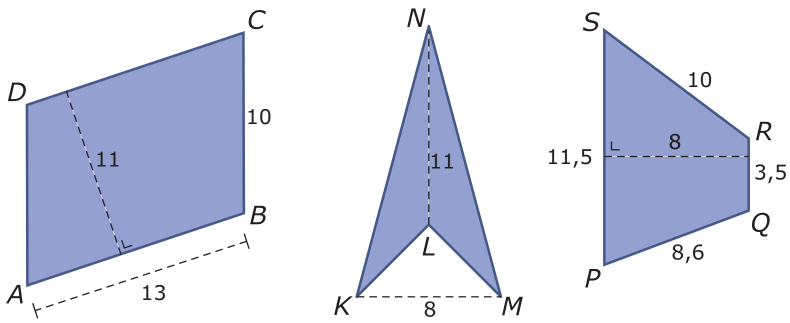
Opgave 10

Een gelijkbenige driehoek heeft een omtrek van 30 cm en een basis van 8 cm.

Bereken de oppervlakte van deze gelijkbenige driehoek.

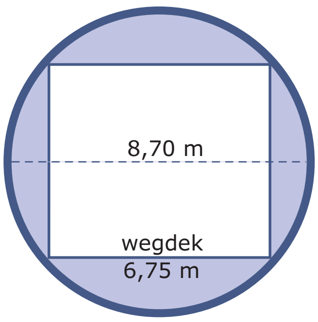
Opgave 11

Bereken van deze vierhoeken de oppervlakte.



Opgave 12

De Waaslandtunnel is de oudste voertuigentunnel onder de Schelde die Antwerpen verbindt met de linkeroever van die rivier. De tunnel bestaat uit een cilindervormige buis met een (inwendige) diameter van $8{,}70$ m. Daarin is een wegdek aangelegd met een breedte van $6{,}75$ m. Je ziet hier een vooraanzicht van de tunnelbuis. De rechthoek in de buis stelt de ruimte voor waar het verkeer kan rijden, de rest is afgesloten en bestemd voor allerlei voorzieningen zoals luchtverversing, elektra, e.d.



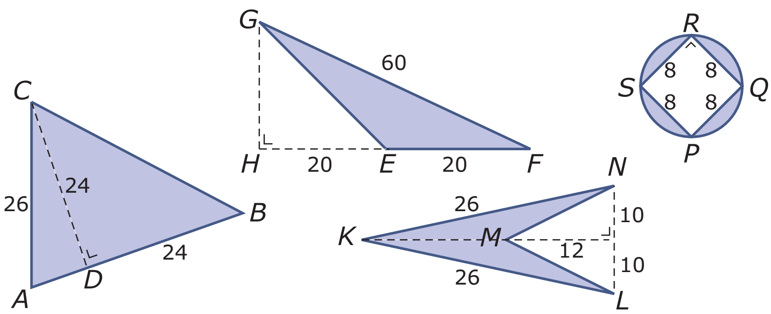
a Bereken de hoogte van deze rechthoek in cm nauwkeurig.

b Hoeveel procent van de tunnelbuis is niet bestemd voor het verkeer?

Verwerken

Opgave 13

Bereken van elk van deze figuren de exacte oppervlakte en de exacte omtrek.



Opgave 14

Van ΔPQR is $PQ = 4$ cm en $QR = 6$ cm. De oppervlakte van deze driehoek is 6 cm^2.

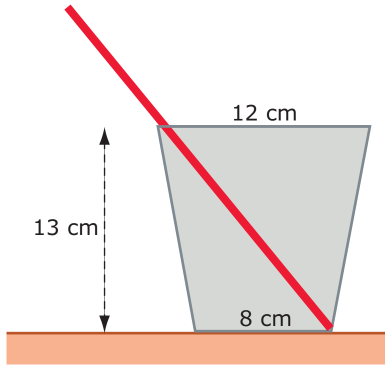
a Neem QR als basis en bereken de bijbehorende hoogte PS van deze driehoek.

b Bereken nu de lengte van PR in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 15

In een glas staat een rietje van 24 cm lengte dat tegen de bovenrand van het glas rust, zie figuur. De diameter van de cirkelvormige bovenrand van het glas is 12 cm en die van de cirkelvormige onderrand is 8 cm. De hoogte van het glas is 13 cm.

Hoe lang is het deel van het rietje dat buiten het glas steekt?



Opgave 16

De kooi van een lift heeft de vorm van een balk met een breedte van $1{,}5$ m, een diepte van 2 m en een hoogte van $2{,}5$ m.

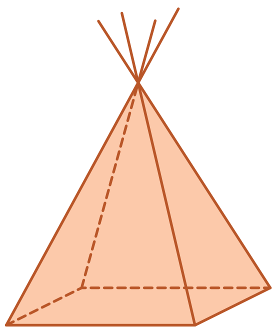
a Hoe lang is de langste onbuigzame paal die je in die lift kunt vervoeren? Geef je antwoord in meters op één decimaal nauwkeurig.

b Je hebt een vlak rechthoekig paneel met een breedte van $1{,}45$ m en een lengte van $3{,}15$ m. Kan dat in de lift?

Opgave 17

Deze figuur stelt een wigwam voor die de vorm heeft van een regelmatige vierzijdige piramide. Het grondvlak is een vierkant met een oppervlakte van 50 m^2. De vier opstaande stokken waarover het tentdoek is gespannen hebben alle vier een lengte van 12 m, waarvan telkens 2 m buiten de wigwam steekt.

Hoe hoog is deze wigwam?



Opgave 18

Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 200$, $BC = 80$ en $CG = 60$ mm. Punt P is het midden van ribbe AB.

Onderzoek of driehoek HPG rechthoekig is.

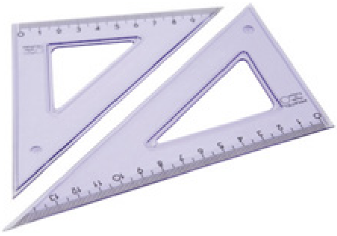
Opgave 19

Van een driehoek ABC is $AB = 6$ cm, $AC = 3$ cm en $BC = 4$ cm.

Bereken de oppervlakte van driehoek ABC in mm^2 nauwkeurig.

Toepassen

Je ziet hier de twee klassieke tekendriehoeken.



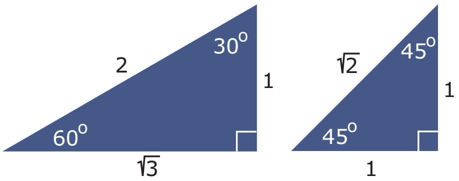
De éne driehoek heeft hoeken van $45°$, $45°$ en $90°$ en is daarom een gelijkbenige rechthoekige driehoek.
Deze driehoek heeft bij rechthoekszijden van 1 een hypotenusa van $\sqrt{2}$.

De andere driehoek heeft hoeken van $30°$, $60°$ en $90°$.
Deze driehoek is een halve gelijkzijdige driehoek en heeft bij een kleinste rechthoekszijde van 1 een lange zijde van 2 en een grootste rechthoekszijde van $\sqrt{3}$.

Dit is allemaal te beredeneren met de stelling van Pythagoras...

Opgave 20: Tekendriehoeken

Hier zie je beide tekendriehoeken nog eens.



De ene tekendriehoek heeft dezelfde vorm als een geodriehoek.

a Waarom is deze tekendriehoek gelijkbenig?

b Laat bij deze driehoek zien, dat bij rechthoekszijden van 1 de hypotenusa $\sqrt{2}$ is.

Een geodriehoek heeft een lange zijde van 16 cm.

c Hoe lang zijn dan de twee rechthoekszijden?

De tweede tekendriehoek is een halve gelijkzijdige driehoek.

d Waarom betekent dit dat de hypotenusa 2 is als de kleinste rechthoekszijde 1 is?

e Laat nu zien dat de langste rechthoekszijde van de tweede tekendriehoek een lengte van $\sqrt{3}$ heeft.

f Hoe groot zijn de zijden van deze tweede tekendriehoek als de kortste rechthoekszijde een lengte van 15 cm heeft.

Opgave 21: De bolling van de Aarde

De planeet Aarde is (ongeveer) bolvormig en heeft een omtrek van 40000 km. Vat de planeet op als een perfecte bol.

a Bereken de straal van de Aarde in km nauwkeurig.

In het dagelijks leven merk je niet veel van de bolling van de Aarde. Maar stel je eens voor dat je een kaarsrechte tunnel wilt boren van Groningen naar Maastricht met een lengte van 300 km.

b Bereken hoe diep de bovenkant van die tunnel in het midden onder het aardoppervlak zou zitten.

Opgave 22: Uitgebreide stelling van Pythagoras

Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = a$, $AD = b$ en $AE = c$.

a Bereken de lengte van lichaamsdiagonaal AG als $a = 5$, $b = 4$ en $c = 3$.

Waarschijnlijk heb je bij a twee keer de stelling van Pythagoras toegepast. Maar dat is niet nodig: je kunt deze stelling uitbreiden naar drie dimensies.

b Laat zien, dat $AG^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

c Bereken de lengte van lichaamsdiagonaal AG als $a = 5$, $b = 4$ en $c = 3$ door de stelling van Pythagoras in drie dimensies toe te passen.

2.3 Oppervlakte ruimtefiguur

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een nestkast voor een koolmees.
De invliegopening heeft een diameter van 32 mm. De onderkant is een vierkant van 12 bij 12 cm. De opstaande zijvlakken zijn rechthoeken van 12 bij 18 cm. Het voorvlak (met de invliegopening) is een symmetrische vijfhoek waarvan het hoogste punt 24 cm boven het grondvlak ligt.

a Teken het voorvlak op schaal $1 : 4$.

b Hoe groot is de oppervlakte van dit voorvlak? (Houd geen rekening met de invliegopening.)

Je ziet dat de twee dakdelen oversteken. Ze zijn nog verschillend ook vanwege de dikte van het hout. Omdat het voorvlak ook bovenin bij het hoogste punt een rechte hoek heeft, staan beide dakdelen recht op elkaar.

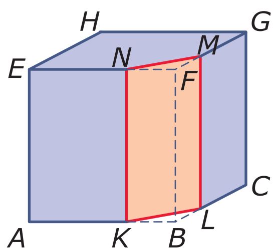
c Waarom weet je zeker dat bij het hoogste punt van het voorvlak een rechte hoek zit?

d Hoe ziet het dak van de nestkast er uit? Welke afmetingen heeft dit dak als het aan drie kanten 2 cm oversteekt en het hout 1 cm dik is?

Theorie

Opgave 1

Je ziet hier een kubus waar een stuk van af is gezaagd. Het zaagvlak is $KLMN$. De kubus heeft ribben van 6 cm. De lijnstukken AK, CL, EN en GM zijn allemaal 4 cm lang. De overblijvende figuur is een prisma.



a Welke vorm heeft het zaagvlak $KLMN$?

b Bereken de lengte van KL.

c Bereken de totale oppervlakte van het prisma.

Opgave 2

De balk $ABCD.EFGH$ heeft ribben $AB = 12$, $AD = 6$ en $AE = 8$ cm. Punt P is het midden van EF en punt Q is het midden van GH.

Bereken de totale oppervlakte van het prisma $ABPE.DCQH$.

Opgave 3

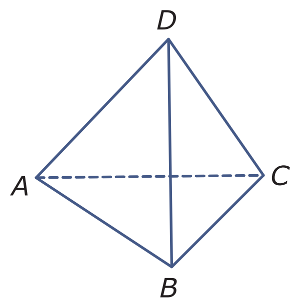
Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je de oppervlakte van een piramide berekent.

Bereken zelf de oppervlakte van een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben 10 cm lang zijn.

Opgave 4

Een tetraëder is een regelmatige piramide waarvan alle grensvlakken gelijkzijdige driehoeken zijn. Neem aan dat alle ribben 4 cm lang zijn.

Bereken de oppervlakte van dit tetraëder im mm^2 nauwkeurig.



Opgave 5

Van piramide $ABCD.T$ is het grondvlak een vierkant met ribben van 6 cm en ligt de top recht boven punt D. $DT = 4$ cm.

Teken een uitslag van deze piramide en bereken de oppervlakte ervan.

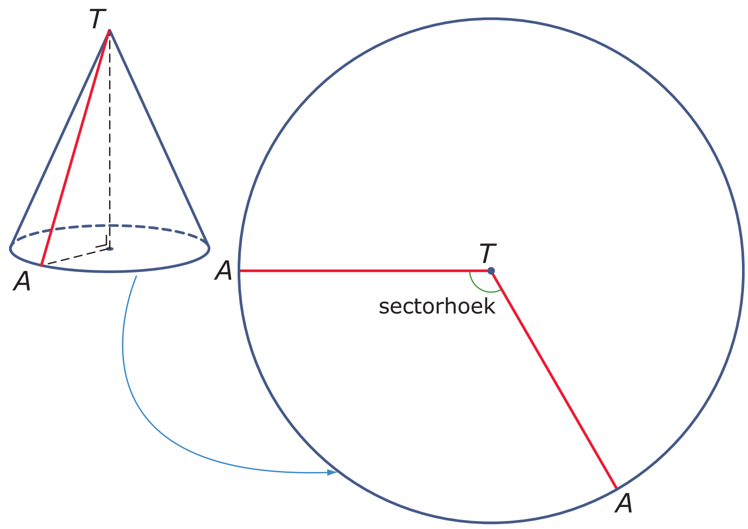
Opgave 6

Een cilindervormige plastic buis heeft een diameter van 16 mm en een lengte van 1 m.

Bereken de oppervlakte van deze buis in mm^2 nauwkeurig.

Opgave 7

Van deze kegel heeft de grondcirkel een diameter van 4 cm. Ga er van uit dat de kegel aan de onderkant open is. Als je deze kegel openknipt langs AT en je vouwt de kegelmantel plat, dan krijg je een cirkelsector met straal AT. Neem aan dat $AT = 6$ cm. Je gaat zelf deze kegelmantel maken.



a Teken een cirkel met een straal van $AT = 6$ en middelpunt T.

Op de rand van de cirkel die je hebt getekend geef je twee keer het punt A aan. Tussen die twee punten zit een cirkelboog die even lang is als de omtrek van de grondcirkel. Waarom moet dat? Bepaal de grootte van de sectorhoek.

b Knip de juiste sector uit. Vouw hem in elkaar tot je de gewenste kegelmantel krijgt.

Hoe groot is de oppervlakte van de grote cirkel? En van de kegelmantel?

Je hebt nu de oppervlakte van een kegelmantel berekend. Bedenk wat je daarvoor (in gedachten) moest doen.

c Hoe groot is de oppervlakte van een kegelmantel waarvan de diameter van de grondcirkel 10 cm en de hoogte 12 cm is?

Opgave 8

Bekijk de berekening van de oppervlakte van het dak van het huisje in **Voorbeeld 3**.

a Waaruit blijkt dat de schoorsteen niet is meegerekend? Waarom is dat niet erg als je wilt weten hoeveel dakbedekking er nodig is?

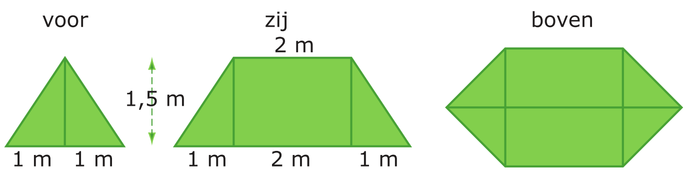
b Reken zelf de lengte van de langste rechthoekszijde van elk dakdeel na.

c Controleer nu de rest van de berekening van de oppervlakte van het dak.

d Tussen twee dakdelen die geen gemeenschappelijke nok hebben zit een dakgoot. Bereken hoe lang die dakgoot is. Houd weer geen rekening met de schoorsteen.

Opgave 9

Hier zie je aanzichten van een eenvoudige tent.



a Maak een tekening van deze tent en zet alle maten in je figuur. Bereken de lengte van alle ribben die nog niet zijn gegeven.

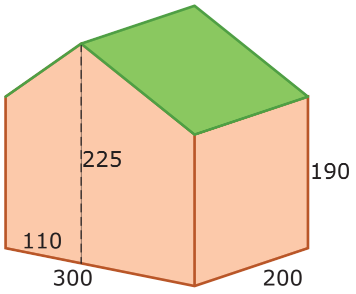
b Bereken hoeveel m^2 tentdoek er voor deze tent nodig is. (Reken het grondzeil niet mee.)

Verwerken

Opgave 10

Je ziet hier een vereenvoudigde tekening van een tuinhuisje. Het grondvlak is een rechthoek, evenals de twee opstaande zijwanden. De voorwand en de achterwand zijn vijfhoeken. Alle afmetingen in de figuur zijn in cm.

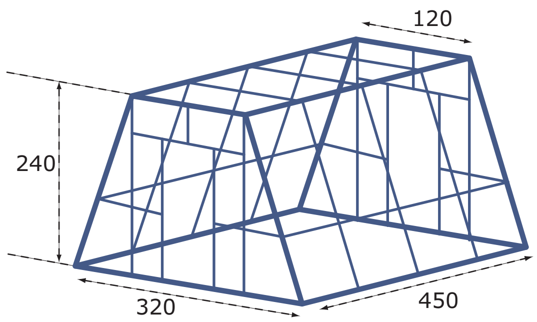
Bereken de oppervlakte van het dak van dit tuinhuisje en geef je antwoord in m^2 in twee decimalen nauwkeurig.



Opgave 11

Je ziet hier een bijzondere plantenkas. De afmetingen zijn gegeven in cm. De kas heeft de vorm van een symmetrisch prisma en de bodem is uiteraard niet van glas.

Bereken de totale hoeveelheid glas in m^2 die voor deze plantenkas nodig is.



Opgave 12

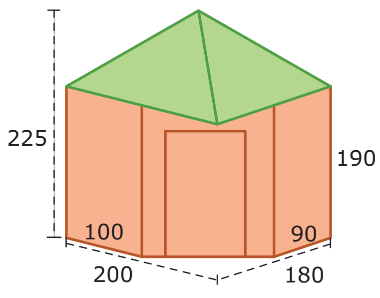
Je ziet hier een zogenaamde Romneyloods. Het is een loods in de vorm van een halve cilinder met een diameter van 11 m. De bodem is een rechthoek van 11 bij 20 m.

Je hebt zo'n loods laten plaatsen. De halve cilinder die het dak vormt wordt rood geschilderd, de voorkant en de achterkant worden wit gemaakt. Bereken hoeveel m^2 er rood moet worden geschilderd. Omdat het dak van golfplaat is gemaakt moet je er rekening mee houden dat je voor golfplaat ongeveer 1,5 keer zoveel verf nodig hebt per m^2.

Opgave 13

Dit is een vereenvoudigde tekening van een hoekblokhut. Het dak van die blokhut is een vierzijdige piramide waarvan de top boven het midden van het grondvlak zit. De blokhut zelf is een balk waarvan een hoek is afgesneden om een toegangsdeur in te maken. De afmetingen bij de figuur zijn in cm.

Bereken de oppervlakte van het dak van de blokhut.



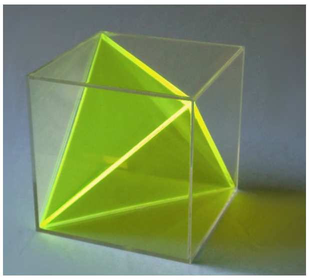
Opgave 14

Dit feesthoedje bestaat uit een kegel waarvan de grondcirkel een diameter van 20 cm heeft en de hoogte (de afstand van de top van de kegel naar het middelpunt van de grondcirkel) ook 20 cm is. Let verder niet op de groene sierrand.

Bereken de oppervlakte aan stevig papier die je voor dit feesthoedje nodig hebt.

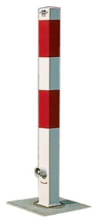
Opgave 15

In een kubus met ribben van 6 cm wordt een regelmatig viervlak geplaatst. Hoeveel mm^2 is de oppervlakte van dat tetraëder?



Toepassen

De gemeente D heeft 240 van deze palen op zijn grondgebied. Ze hebben een vierkant profiel van 70 mm bij 70 mm en zijn 90 cm hoog. De bovenkant is een kunststof kapje. De rood geverfde gedeeltes zijn 20 cm hoog.
Deze palen worden dit jaar van nieuwe witte en rode verf voorzien. Er is 5 liter verf nodig voor 40 m^2.



Hoeveel liter witte verf en hoeveel liter rode verf is nodig om alle paaltjes in deze gemeente te verven?

Opgave 16: Paaltjes verven

Bekijk het probleem van het verven van de paaltjes.

a Hoeveel oppervlakte witte verf heeft één paal? Hoeveel liter witte verf is er dus nodig?

b Hoeveel oppervlakte rode verf heeft één paal? Hoeveel liter rode verf is er dus nodig?

Opgave 17: Zouttoren

Vroeger werd in Twente naar zout geboord met boortorens die er zo uitzagen als je op deze oude foto ziet. Ze werden gemaakt van hout. Om te berekenen hoeveel hout ervoor nodig is, is nog een behoorlijke klus.

Daarom let je maar beter niet op de twee bijgebouwtjes op de grond, maar alleen op de toren zelf. Het grondvlak daarvan is een vierkant van 6 bij 6 m, het bovenvlak een vierkant van 2 bij 2 m. De vier opstaande zijvlakken zijn symmetrische trapezia. De hoogte van dit deel van de toren is 20 m. Daar bovenop staat een balk van 2 bij 2 bij $1{,}5$ m.

a Bereken oppervlakte aan hout van de toren zoals die hierboven wordt beschreven.

Je hebt nu een redelijke schatting van de oppervlakte aan hout van het hele bouwwerk, inclusief de voorkanten van de twee bijgebouwtjes. Alleen hun vier zijvlakken ontbreken nog.

b Hoe zou je daarvan nog een goede schatting kunnen maken? Maak een redelijke schatting van de totale oppervlakte aan hout nodig voor zo'n boortoren.

2.4 Inhoud ruimtefiguur

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een nestkast voor een koolmees.

De invliegopening heeft een diameter van 32 mm. De onderkant is een vierkant van 12 bij 12 cm. De opstaande zijvlakken zijn rechthoeken van 12 bij 18 cm. Het voorvlak (met de invliegopening) is een symmetrische vijfhoek waarvan het hoogste punt 24 cm boven het grondvlak ligt.

a Om de inhoud van dit hokje te berekenen, verdeel je het in balken en halve balken. Beschrijf hoe je dat hier doet.

b Hoe groot is de inhoud van dit vogelhokje? (Houd geen rekening met de dikte van het hout.)

Opgave V2

Stel je eens een brood voor dat in 32 gelijke plakken is gesneden die allemaal 1 cm dik zijn. Elke plak heeft een oppervlakte van ongeveer 18 cm^2.

a Leg uit waarom het volume van elk plakje brood 18 cm^3 is.

b Maakt het verschil welke vorm de plakken brood hebben?

c Hoeveel bedraagt het volume van het hele brood?

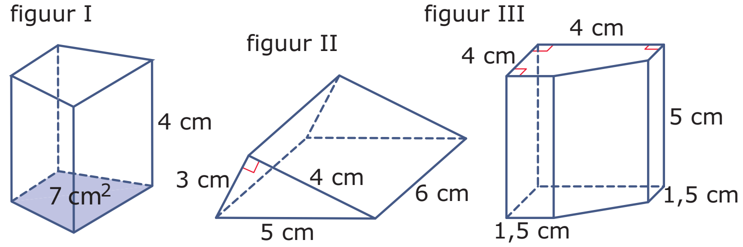
d Hoe bereken je de inhoud van een prisma? Wat heeft dit met de voorgaande vragen te maken?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je het volume van een prisma uitrekent.

Bereken de inhoud van de volgende figuren.



Opgave 2

Stel je een cilinder voor met een diameter van 16 cm en een hoogte van 20 cm.

a Wat heeft een cilinder gemeenschappelijk met een prisma?

b Bereken de oppervlakte van het grondvlak van deze cilinder.

c Bereken de inhoud van deze cilinder.

Opgave 3

Bekijk de **Uitleg 2**.

a Laat zien dat je de inhoud van elk van de drie piramides die de kubus vormen kunt berekenen met $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Als je vier van deze piramides met hun hoogtes tegen elkaar zet krijg je een regelmatige vierzijdige piramide met een grondvlak van 10 bij 10 cm en een hoogte van 5 cm.

b Laat zien dat de inhoud daarvan $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ is.

De inhoud van elke piramide is $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

c Bereken de inhoud van een piramide waarvan het grondvlak een rechthoek van 80 bij 60 m en de hoogte 65 m is.

Opgave 4

Stel je een kegel voor met een diameter van 18 cm en een hoogte van 20 cm.

a Wat heeft een kegel gemeenschappelijk met een piramide?

b Bereken de oppervlakte van het grondvlak van deze kegel.

c Bereken de inhoud van deze kegel.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je een prisma en een cilinder met dezelfde inhoud.

a Bereken zelf de oppervlakte van het grondvlak van het prisma.

b Uit het gegeven dat beide figuren dezelfde inhoud hebben volgt een vergelijking. Los die vergelijking op.

Opgave 6

Van een prisma is het grondvlak een gelijkbenige driehoek met twee zijden van 8 cm en één zijde van 6 cm. De drie opstaande ribben zijn 13 cm.

Bereken de inhoud van dit prisma.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Bereken zelf de hoogte van de piramide.

b Bereken nu de exacte inhoud van de piramide.

Opgave 8

Van een piramide is het grondvlak een rechthoek van 8 bij 6 cm en de opstaande ribben zijn 13 cm.

Bereken de inhoud van deze piramide.

Opgave 9

In een kubus met ribben van 10 cm past precies een cilinder.

Hoeveel procent van die kubus zit buiten de cilinder?

Opgave 10

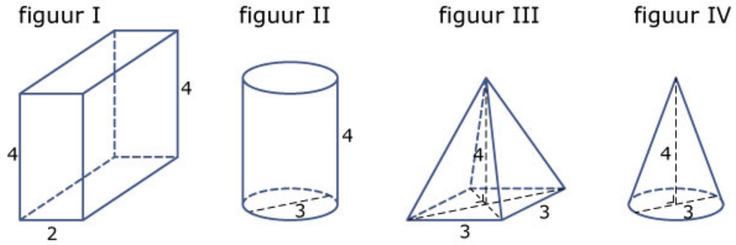
Een regelmatige vierzijdige piramide past precies in een kegel met een diameter van 20 cm en een hoogte van 20 cm.

Hoeveel procent van die kegel zit buiten de piramide?

Verwerken

Opgave 11

Bereken de inhoud van deze vier figuren, waar nodig in twee decimalen nauwkeurig.

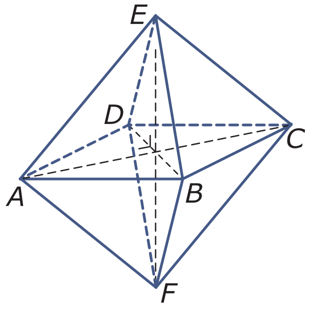


Opgave 12

Een octaëder bestaat uit twee regelmatige vierzijdige piramides die een gemeenschappelijk grondvlak hebben maar verschillende top, zie figuur. Alle ribben van het octaëder zijn 8 cm.

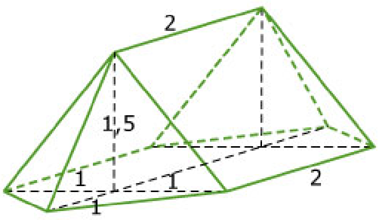
a Bereken de inhoud van het octaëder.

b Bereken de oppervlakte van het octaëder.



Opgave 13

Hier zie je een tent. De afmetingen zijn in de figuur in meter gegeven. Bereken de inhoud van deze tent.



Opgave 14

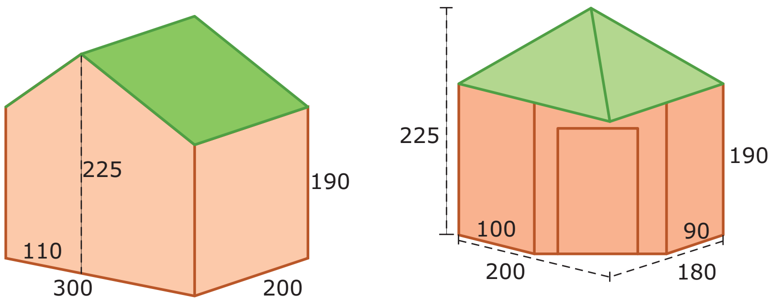
Neem aan dat dit blikje tomatenblokjes zuiver cilindrisch is. De binnenmaten zijn: hoogte 10,4 cm en diameter 7,3 cm. Je ziet dat er 425 milliliter in moet kunnen.

a Bereken de inhoud van dit blik en ga na of er echt 425 milliliter in kan.

b Bereken de oppervlakte van het etiket op het blik.

Opgave 15

Bereken de inhoud van elk van deze twee tuinhuisjes in m^3 in één decimaal nauwkeurig. Het linker tuinhuisje is een prisma, het rechter tuinhuisje is een hoekblokhut waarvan de onderkant een vijfzijdig prisma is en het dak een vierzijdige piramide met een rechthoekig grondvlak. De afmetingen zijn in centimeter.



Opgave 16

Stel je moet een miljoen briefjes van € 100 in één keer meenemen. De afmeting van zo'n briefje is 147 bij 82 mm met een dikte van ongeveer 0,05 mm. Het papier weegt 1,2 gram/cm^3.

Hoe ga je dat vervoer regelen? Neem je een schoenendoos, een flinke koffer of een grote vrachtwagen? Licht je antwoord toe.

Opgave 17

Een moderne stoel bestaat uit een gebogen frame waarop een zitting en een rugleuning zijn gemonteerd. Het frame is een gebogen ronde buis met een totale lengte van 8 m. Deze buis heeft een buitendiameter van 20 mm en een binnendiameter van 16 mm. Hij is gemaakt van staal van $7{,}6$ gram per cm^3 en daarna verchroomd.

Hoeveel kg staal is er voor deze stoel nodig?

Opgave 18

Dit ijshoorntje is kegelvormig. Het heeft een hoogte van 13 cm en de fabrikant beweert dat het ijsje een volume van 125 milliliter heeft.

a Hoe groot is dan de diameter van de bovenkant van zo'n ijsje? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

b Hoeveel ijsjes passen er theoretisch in een doos van $6{,}1$ bij 13 bij $24{,}4$ cm? En hoeveel passen er in de praktijk in als alle ijsjes netjes heel moeten blijven?

Toepassen

Een silo is een opslagplaats voor stort- of bulkgoederen in de vorm van poeders of korrelvormige producten zoals graan, kolen, cement, veevoer, zand, grint, kunstmest, enz. Hier zie je er één in de vorm van een stalen cilinder met een kegelvormige onderkant waar ook de uitstroomopening zit. het geheel staat op vier poten.

De cilinder is (inclusief poten) $3{,}00$ m hoog. De uitstroomopening zit $1{,}67$ m boven de grond en de onderrand van de cilinder zit op $3{,}07$ m boven de grond. De diameter van de cilinder is $1{,}48$ m.

Je kunt berekenen dat er ongeveer 6 m^3 graan in deze silo kan.

Opgave 19: Graansilo

Bekijk de graansilo hierboven. Je kunt de inhoud ervan berekenen.

a Laat zien dat de inhoud inderdaad ongeveer 6 m^3 is.

b Je wilt de silo zelf (dus zonder de poten) rood schilderen. Hoeveel bedraagt de oppervlakte die je moet schilderen?

Opgave 20: Zouttoren

Vroeger werd in Twente naar zout geboord met boortorens die er zo uitzagen als je op deze oude foto ziet. Ze werden gemaakt van hout.

Let niet op de twee bijgebouwtjes op de grond, maar alleen op de toren zelf. Het grondvlak daarvan is een vierkant van 6 bij 6 m, het bovenvlak een vierkant van 2 bij 2 m. De vier opstaande zijvlakken zijn symmetrische trapezia. De hoogte van dit deel van de toren is 20 m. Daar bovenop staat een balk van 2 bij 2 bij $1{,}5$ m.

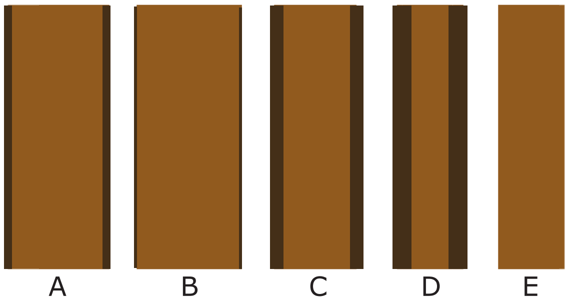
Bereken de inhoud van de toren zoals die hierboven wordt beschreven.

2.5 Doorsneden

Verkennen

Opgave V1

Hieronder zie je vijf planken die allemaal uit dezelfde ronde en kaarsrechte boomstam zijn gezaagd. De planken worden van links naar rechts van de stam gezaagd. Daarom is de eerste plank onbruikbaar, daar zit overal nog schors aan.



In welke volgorde zijn de planken uit de boomstam gezaagd?

Opgave V2

Hier zie je de dwarsdoorsnede van een jonge kastanjeboom. De jaarringen zijn duidelijk zichtbaar. Het aantal jaarringen is gelijk aan de leeftijd van de boom.

a Hoe oud is deze boom geworden?

b Is de boom elk jaar evenveel gegroeid?

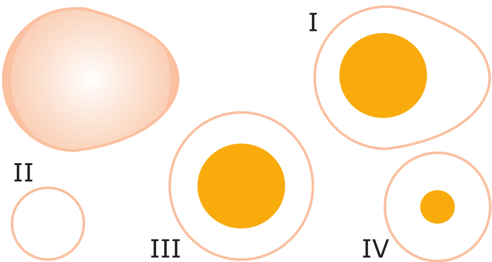
c Groeide deze boom naar alle zijden even snel?

d Waarom spreek je hier van een dwarsdoorsnede van de boom? Hoe zou je de planken in de voorgaande opgaven noemen?

Theorie

Opgave 1

Hieronder en op het **werkblad** zie je een ei en vier doorsneden van een ei.

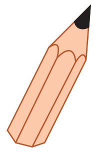


Welke doorsnede is waar gemaakt? Geef dit met behulp van stippellijnen op het ei zelf aan.

Opgave 2

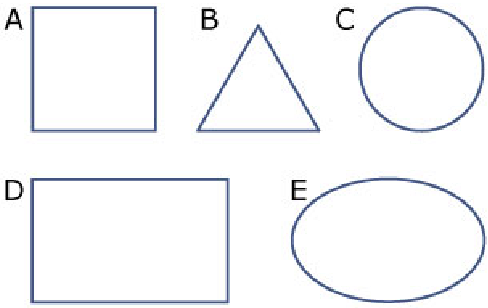
Dit is een zeskantig potloodje.

Teken een dwarsdoorsnede en een lengtedoorsnede door de centrale as van het potloodje.



Opgave 3

Hier zie je een aantal doorsneden in hun werkelijke vorm getekend.



a Welke doorsneden kunnen van een kubus zijn?

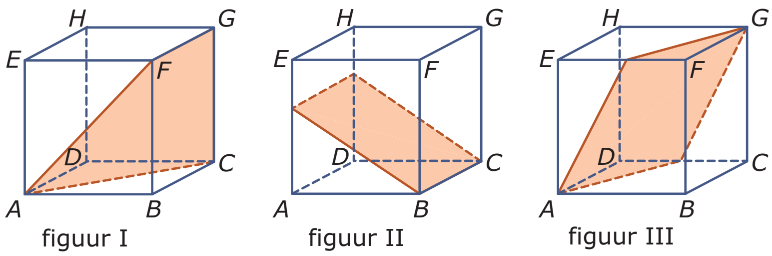
b Welke doorsneden kunnen van een cilinder zijn?

c Welke doorsneden kunnen van een bol zijn?

d Welke doorsneden kunnen van een vierzijdige piramide zijn?

Opgave 4

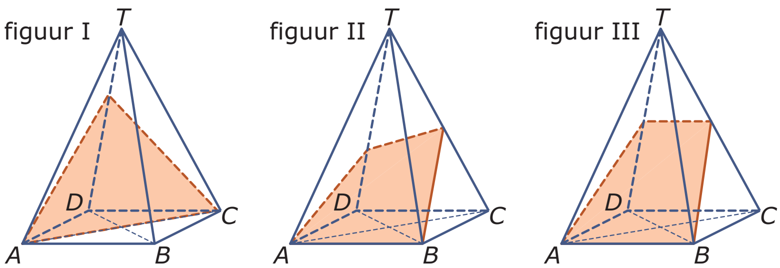
Hieronder zie je drie keer een kubus met een schijnbare doorsnede.



Welke doorsneden zijn niet goed? En hoe zou je die moeten verbeteren?

Opgave 5

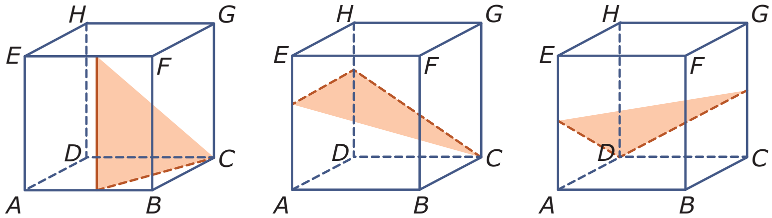
Hieronder zie je drie keer een piramide met een schijnbare doorsnede.



Welke doorsneden zijn niet goed? En hoe zou je die moeten verbeteren?

Opgave 6

Hieronder zie je drie keer een kubus met een begin van een doorsnede.



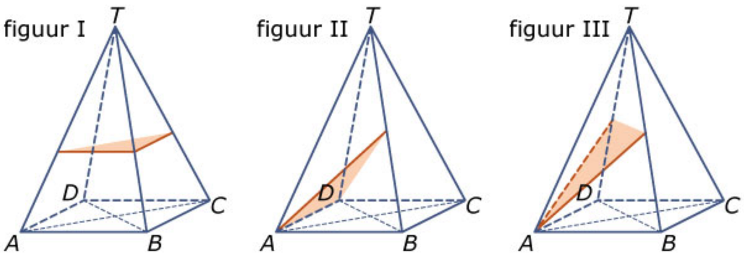
figuur I figuur II figuur III

Maak die doorsnede af op het **werkblad**.

Opgave 7

Hieronder zie je drie keer een piramide met een begin van een doorsnede.

figuur I figuur II figuur III



Maak die doorsnede af op het **werkblad**.

Opgave 8

Bekijk de doorsnede $APGQ$ van een vlak en een kubus in **Voorbeeld 3**.

a Bereken de lengte van alle zijden van vlak $APGQ$.

b Waarom kun je nu de doorsnede $APGQ$ nog niet op ware grootte tekenen?

c Bereken de lengte van diagonaal PQ.

d Leg uit hoe je nu de ruit $APGQ$ op ware grootte kunt tekenen.

e Hoe kon je de ruit $APGQ$ op ware grootte tekenen door de lengte van beide diagonalen uit te rekenen?

Opgave 9

Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 6$, $AD = 4$ en $AE = 3$ cm. Punt P is het midden van ribbe AB. Punt Q ligt van ribbe CD en $QC = 1$ cm. Punt S is het midden van EF.

a Teken de balk en daarin de doorsnede van het vlak door P, Q en S.

b De doorsnede is een vierhoek $PQRS$. Welke vorm heeft deze vierhoek?

c Bereken de lengtes van de zijden van deze vierhoek.

d Teken de vierhoek op ware grootte en bereken de oppervlakte ervan.

Opgave 10

Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 6$, $AD = 4$ en $AE = 3$ cm. Punt P ligt op ribbe AB en $AP = 2$ cm. Punt Q is het midden van ribbe EF.

a Teken de balk en daarin de doorsnede van het vlak door P, Q en G.

b De doorsnede is een vierhoek $PRGQ$. Welke vorm heeft deze vierhoek?

c Bereken de lengtes van de zijden van deze vierhoek.

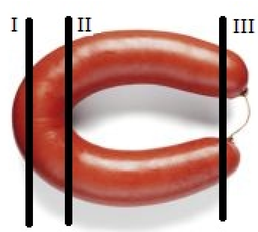
d Van welk lijnstuk moet je nu de lengte nog berekenen om de vierhoek $PRGQ$ op ware grootte te kunnen tekenen? Doe dat en teken de vierhoek op ware grootte.

Verwerken

Opgave 11

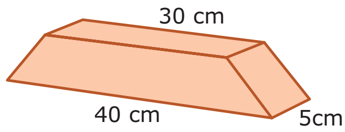
Dit is een rookworst. De zwarte lijnen geven aan waar hij wordt doorgesneden.

Maak een schets van die drie verschillende doorsneden.



Opgave 12

Van een balkje van 200 bij 5 bij 5 cm wordt een vierkant schilderijlijstje gemaakt. Uit het balkje worden daartoe vier van deze afgeschuinde lijstdelen gezaagd.



a Hoe groot kan het schilderijtje maximaal zijn?

b Je hebt niet de volle 2 m van de lengte van de balk nodig. Hoeveel houd je maximaal over?

c De schuine kanten van de lijstdelen worden aan elkaar verbonden, onder andere door ze aan elkaar te lijmen. Welke vorm heeft zo'n schuine kant? Bereken de afmetingen ervan.

d Hoeveel cm^2 moet met lijm worden ingesmeerd? Geef je antwoord in gehele cm^2 nauwkeurig.

Opgave 13

Een balk $ABCD.EFGH$ heeft een lengte van 20 cm, een breedte van 6 cm en een hoogte van 8 cm.

a Bereken de oppervlakte van het grootste diagonaalvlak.

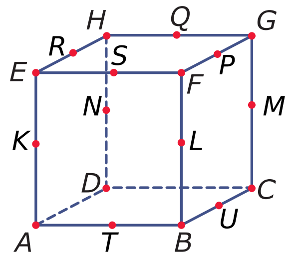
Punt P is het midden van ribbe BF en punt Q is het midden van ribbe DH.

b Teken de doorsnede van het vlak door A, P en Q met de balk.

c Teken de doorsnede $APGQ$ op ware grootte.

Opgave 14

Hier zie je kubus $ABCD.EFGH$ met een aantal punten die telkens het midden vormen van de ribbe waar ze op liggen. Alle ribben zijn 4 cm lang.



a Teken de doorsnede van het vlak door S, T en U en bereken er de oppervlakte van in één decimaal nauwkeurig.

b Teken de doorsnede van het vlak door A, B en M en bereken er de oppervlakte van in één decimaal nauwkeurig.

c Teken de doorsnede van het vlak door P, S en L en bereken er de oppervlakte van in één decimaal nauwkeurig.

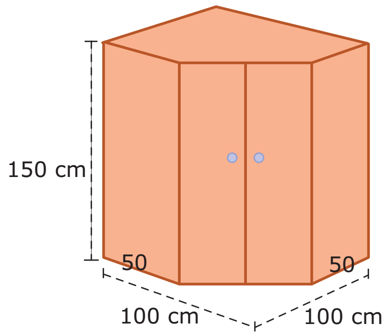
d Teken de doorsnede van het vlak door B, K en M en bereken er de oppervlakte van in één decimaal nauwkeurig.

e Teken de doorsnede van het vlak door T, U en M en bereken er de oppervlakte van in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 15

Je ziet hier een houten hoekkast. Hij heeft de vorm van een balk waarvan een driehoekig prisma is afgezaagd. Alle afmetingen zijn in cm. In de kast zit onder andere een verticale plank tussen de achterste ribbe en het midden van de twee deurtjes.

Teken deze houten kastplank op schaal $1 : 20$.



Opgave 16

Een zuiver ronde boomstam heeft een doorsnede van 52 cm. Er moet een balk van 10 cm dikte uit worden gezaagd.

Hoe breed kan deze balk maximaal zijn?

Opgave 17

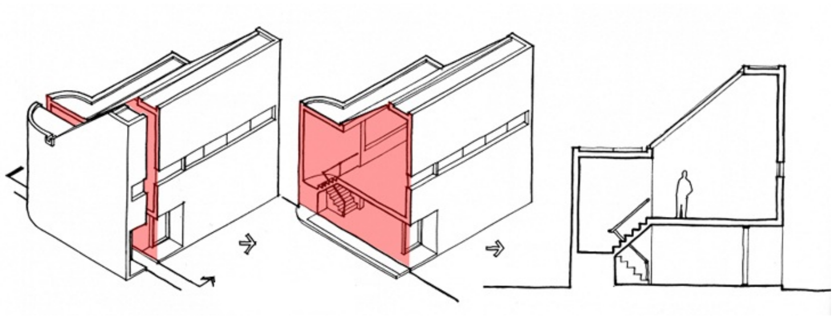
Een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ heeft een vierkant grondvlak van 4 bij 4 cm en een hoogte $TS = 6$ cm. Punt P is het midden van ribbe AT.

a Teken de piramide met daarin doorsnede $BCQP$.

b Teken deze doorsnede op ware grootte en bereken er de oppervlakte van.

Toepassen

Hier zie je hoe een doorsnede van een huis wordt getekend.



Ook in de biologie en de instrumentmakerij wordt regelmatig gebruik gemaakt van een doorsnede. Het gaat er dan vooral om te laten zien hoe objecten er van binnen uitzien.

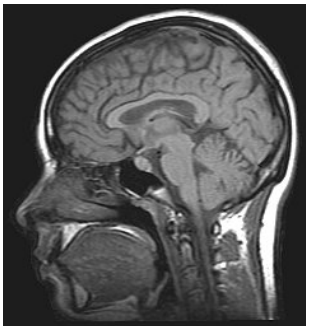
Opgave 18: Doorsnede van een huis

Je ziet in **Toepassen** de doorsnede van een huis.

a Welke informatie geeft een doorsnede die een aanzicht niet geeft?

b Je ziet hier een 'huis' met een dakkapel. Teken zelf een dwarsdoorsnede van dit huis, kies geschikte afmetingen en een passende indeling.

Opgave 19: MRI scanner



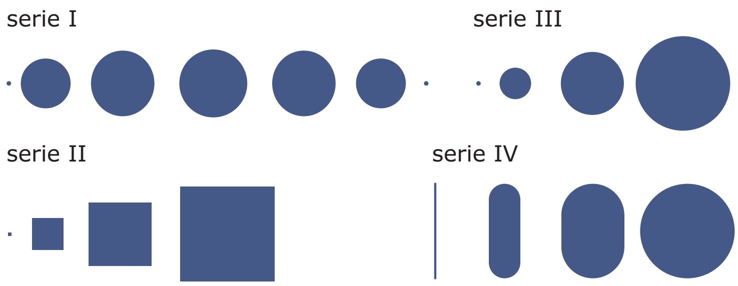
Een **MRI scanner** maakt een doorsnede foto van (delen van) levend weefsel, zoals het menselijk lichaam, met behulp van een techniek die 'magnetic resonance imaging' heet. Dit wordt veel toegepast in de medische wetenschap. Zo'n doorsnede foto heet een 'mri-scan'.

a Welke informatie geeft zo'n doorsnede zoals je die hiernaast ziet? En welk nut heeft die informatie?

In het artikel uit de Wikipedia (juni 2012) waar dit plaatje uit komt vind je ook een animatie van een serie mri-scans na elkaar.

b Waarom wordt er vaak een serie evenwijdige doorsneden gemaakt?

Hier zie je vier series evenwijdige doorsneden van ruimtelijke objecten. De doorsneden zijn op gelijke afstanden van elkaar gemaakt.



c Beschrijf bij elke serie doorsneden om welk voorwerp het (waarschijnlijk) gaat. Leg ook uit waarom je nooit absoluut zeker kunt zijn van je antwoord.

d Hoe ziet een serie evenwijdige doorsneden van een kubus met ribben van 6 cm er uit als alle doorsneden evenwijdig zijn aan een grensvlak?

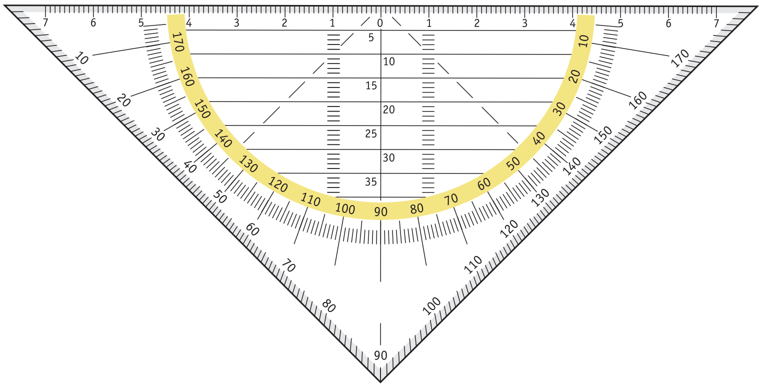
e Hoe ziet een serie van vijf evenwijdige doorsneden van een kubus met ribben van 6 cm er uit als ze loodrecht op een lichaamsdiagonaal worden gemaakt?

2.6 Vergroten

Verkennen

Opgave V1

De meeste geodriehoeken hebben een lange zijde van 16 cm.



a Hoe lang zijn de andere twee zijden? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

b Stel je eens voor dat je een geodriehoek zou kunnen kopen waarvan de lange zijde 2 keer zo groot is. Hoe lang zijn dan de andere twee zijden? Wat gebeurt er met de schaalverdeling op de lange zijde?

c Alle afmetingen van die tweede geodriehoek worden 2 keer zo groot. Wat verandert er echter niet?

d Wordt nu ook de oppervlakte van de geodriehoek 2 keer zo groot?

Opgave V2

Je hebt twee kubussen: één met ribben van 2 cm lengte en één met ribben van 6 cm.

a Hoeveel keer zo groot zijn alle afmetingen van de grote kubus ten opzichte van de kleine?

b Hoeveel keer zo groot zijn alle afmetingen van de kleine kubus ten opzichte van de grote?

c De kubus met ribben van 6 is een vergroting van de kleinere kubus. Wat verandert er echter niet?

d Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de grootste kubus ten opzichte van de kleinste?

e Hoeveel keer zo groot is de inhoud van de grootste kubus ten opzichte van de kleinste?

Theorie

Opgave 1

Een rechthoek is 6 cm lang en 4 cm breed. Een tweede rechthoek heeft 3 keer zo grote afmetingen.

a Hoe groot is de oppervlakte van de eerste rechthoek?

b Bereken eerst de afmetingen en met behulp daarvan de oppervlakte van de tweede rechthoek.

c Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de tweede rechthoek in vergelijking met de eerste?

Opgave 2

Een driehoek wordt op schaal getekend: elke cm is in werkelijkheid 10 m.

a De kortste zijde van de driehoek is op de tekening $4{,}25$ cm. Hoe lang is die zijde in werkelijkheid?

b De langste zijde van de driehoek is in werkelijkheid 118 m. Hoe lang wordt die zijde op de tekening?

c De hoek tussen deze twee zijden is op de tekening $60°$. Hoeveel is die hoek in werkelijkheid?

d De oppervlakte van de driehoek is op de tekening ongeveer $21{,}72$ cm^2. Hoe groot is die oppervlakte in werkelijkheid?

e Vergelijk de driehoek op de tekening met de werkelijke driehoek. Hoe groot is de lengtevergrotingsfactor van de driehoek op de tekening? En de oppervlaktevergrotingsfactor?

Opgave 3

Boer Brandwijk heeft een stuk grond van $2{,}4$ hectare. Op een kaart op schaal $1 : 50.000$ is dat stukje land getekend.

a Hoeveel bedraagt de lengtevergrotingsfactor van werkelijkheid naar de kaart?

b Hoeveel m^2 is boer Brandwijk's stuk land?

c Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van boer Brandwijk's stuk land op de kaart?

Opgave 4

Een kubus heeft ribben van 5 cm. Een tweede kubus heeft 4 keer zo grote afmetingen.

a Hoe groot zijn de ribben van de tweede kubus?

b De oppervlakte van de eerste kubus is $6 \cdot 25 = 150$ cm^2, waarom?

c Hoeveel bedraagt de inhoud van de eerste kubus?

d Hoeveel bedraagt de inhoud van de tweede kubus?

e Geef de lengtevergrotingsfactor, de oppervlaktevergrotingsfactor en de inhoudsvergrotingsfactor van de eerste kubus naar de tweede.

Opgave 5

Een kunstenaar maakt eerst een schaalmodel, alvorens het definitieve beeld wordt gemaakt. De afmetingen van het echte beeld moeten 20 keer zo groot worden als die van het schaalmodel. Het schaalmodel heeft een oppervlakte van 1400 cm^2 en een volume van 3000 cm^3.

Bereken de oppervlakte en de inhoud van het echte beeld.

Opgave 6

Bekijk het schaalmodel van een kist in **Voorbeeld 1** nog eens.

a Bereken de oppervlakte en de inhoud van dit schaalmodel zelf na.

b Hoeveel keer zo dik worden de wanden van de werkelijke kist?

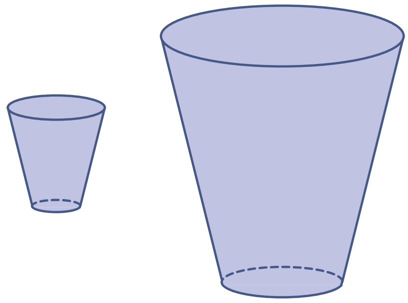
Er wordt een tweede kist gemaakt van dit zelfde schaalmodel. De schaal daarvan is $1 : 5$.

c Is die kist groter of kleiner dan de eerste? Hoeveel bedraagt de lengtevergrotingsfactor van deze kist ten opzichte van de eerste?

d Bereken de oppervlakte van de tweede kist vanuit die van de eerste kist.

e Bereken de inhoud van de tweede kist vanuit die van de eerste kist.

Opgave 7



Twee bekers zijn gelijkvormig. De hoogte van de rechter beker is $2{,}5$ keer zo groot als die van de linker.

a Hoeveel bedraagt de lengtevergrotingsfactor als je de grote beker opvat als een vergroting van de kleine beker?

b Hoeveel bedraagt de lengtevergrotingsfactor als je de kleine beker opvat als een ‘vergroting’ van de grote?

Er gaat $63{,}3$ cm^3 in de grote beker.

c Hoeveel gaat er in de kleine beker?

Opgave 8

Een rechthoekig weiland van 25 hectare heeft op een kaart een oppervlakte van 100 cm^2.

Hoeveel bedraagt de schaal van die kaart?

Opgave 9

De gemeente Deventer heeft (in 2010) een oppervlakte van $134{,}37$ km^2.
Op een kaart is die oppervlakte nog $1{,}3437$ cm^2.

Hoeveel bedraagt de schaal van die kaart?

Opgave 10

Je kunt een bepaalde drank kopen in kleine flesjes van $0{,}25$ L en in grote flessen van $1{,}5$ L. Beide soorten flessen zijn gelijkvormig.

a Hoeveel keer zo groot is de hoogte van de grote fles als de hoogte van de kleine fles?

b Hoeveel keer zoveel glasoppervlakte heeft de grote fles als de kleine fles?

Opgave 11

Je hebt twee maatbekers: de grootste heeft een $3{,}375$ keer zo grote inhoud als de kleinere. De kleinere maatbeker wordt gemaakt van 400 cm^2 metaalplaat.

Hoeveel metaal is er nodig voor de grotere maatbeker?

Verwerken

Opgave 12

Een voetbalveld is getekend op schaal $1 : 1000$. In de tekening is het 12 cm lang en $7{,}5$ cm breed.

a Hoe groot is dit voetbalveld in werkelijkheid?

b Met welk getal moet je de afmetingen van dit veld vermenigvuldigen om de werkelijke afmetingen te krijgen?

c Hoe groot is de oppervlakte van het voetbalveld op de tekening?

d Met welk getal moet je de oppervlakte van dit veld vermenigvuldigen om de werkelijke oppervlakte te krijgen?

e Hoeveel m^2 is de oppervlakte van het voetbalveld in werkelijkheid?

Opgave 13

Op een kaart met een schaal van $1 : 200$ heeft een bouwkavel een oppervlakte van 32 cm^2. Hoeveel m^2 is de oppervlakte van dit kavel in werkelijkheid?

Opgave 14

Een raam heeft een oppervlakte van $1{,}2$ m^2. Een tweede raam heeft afmetingen die precies $2{,}5$ keer zo groot zijn als het eerste.

a Hoeveel m^2 is de oppervlakte van dit tweede raam?

Een derde raam heeft een oppervlakte van $4{,}80$ m^2.

b Hoeveel keer zo groot zijn de afmetingen van dit derde raam ten opzichte van het eerste?

c Hoeveel keer zo groot zijn de afmetingen van dit derde raam ten opzichte van het tweede raam?

Opgave 15

Er lopen drie koeien in de wei. Ze zitten elk aan een touw dat met een pin in de grond vast zit. Het touw van koe Antje is 10 m lang.

a Hoeveel m^2 gras kan zij eten?

Het touw van Bertha is twee maal zo lang.

b Hoeveel m^2 gras kan zij meer eten dan Antje?

Carrie kan vijf maal zoveel gras eten als Antje.

c Hoeveel keer zo lang is het touw van Carrie als dat van Antje?

Opgave 16

Bij een schaalmodel van een voorwerp worden alle lengtes met een vaste vergrotingsfactor verkleind. Dit model van een Smart ForTwo heeft een schaal van $1:18$.
De afmetingen van een echte Smart ForTwo van deze versie zijn: lengte 250 cm, breedte 152 cm en hoogte 155 cm. De cilinderinhoud van de motor is 698 cc (1 cc $= 1$ cm^3) en er past 33 L benzine in de tank. De totale glasoppervlakte is ongeveer $3{,}2$ m^2.

a Bereken de lengte, de breedte en de hoogte van het schaalmodel in cm nauwkeurig.

b Bereken de glasoppervlakte van het schaalmodel in mm^2 nauwkeurig.

c Bereken de cilinderinhoud van het schaalmodel in mm^3 nauwkeurig.

d Bereken hoeveel mm^3 benzine er in de tank van het schaalmodel past.

Opgave 17

De spoorlijn van Arnhem naar Leeuwarden was in september 1868 geheel klaar. De lengte van deze spoorlijn is 166 km.
Op een kaart is deze lijn $16{,}6$ cm lang.

Hoeveel bedraagt de schaal van die kaart?

Opgave 18

Tandpasta kun je in tubes van 25 mL en 150 mL kopen. Deze tubes zijn gelijkvormig.

a Hoeveel keer zo lang is de grote tube ten opzichte van de kleinere?

b De kleinste tube is 12 cm lang. Hoe lang is de grootste tube?

c De tubes zijn van plastic cilinders gemaakt. Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de grote tube vergeleken met de kleine tube?

Opgave 19

Een ringslang met lengte van 1 m heeft een gewicht van 240 gram en een huidoppervlakte van 483 cm^2. Een boa constrictor is een slang die veel groter is. Een bepaalde boa weegt $51{,}84$ kg.

Hoe groot is de huidoppervlakte van deze boa?

Toepassen

Onze planeet **Aarde** heeft een omtrek van ongeveer 40.000 km, een oppervlakte van ongeveer $5{,}11 \cdot 10^8$ km^2 en een inhoud van ongeveer $1{,}087 \cdot 10^{12}$ km^3. Je maakt een schaalmodel op schaal $1 : 10.000.000$.

Je kunt dan de omtrek, de diameter, de oppervlakte en de inhoud van het schaalmodel berekenen.

Opgave 20: Schaalmodel van de Aarde

Je ziet in **Toepassen** enkele gegevens van de Aarde.

a Over welke vergrotingsfactor gaat het in de tekst, uitgaande van de planeet Aarde?

b Bereken de omtrek en de diameter van je schaalmodel.

c Bereken de oppervlakte en de inhoud van je schaalmodel.

Opgave 21: Maan en Aarde

De maan past ongeveer 64 keer in de aarde. (Het volume van de aarde is dus ongeveer 64 keer dat van de maan.)

Hoeveel keer zo groot is de diameter van de aarde als die van de maan?

2.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Bij het werken met 2D- en 3D-figuren leer je steeds meer technieken en formules om lengtes, afstanden, oppervlaktes en inhouden te berekenen. In dit onderwerp voeg je daar de stelling van Pythagoras aan toe. Met die stelling kun je in rechthoekige driehoeken de lengte van de derde zijde berekenen als er twee gegeven zijn. Ook leer je de oppervlakte en de inhoud van ruimtelijke figuren berekenen en met behulp van doorsneden een beeld te krijgen van het binnenste van dergelijke lichamen. Tenslotte maak je kennis met vergrotingen en/of verkleiningen van figuren waar je mee te maken hebt als je met schaalmodellen van grote objecten werkt.

De volgende opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Meetkundige berekeningen** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4, 5 en 6 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken.

Begrippen

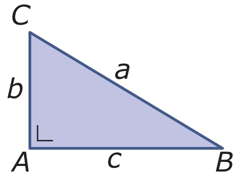
- stelling van Pythagoras — rechthoekszijden, hypotenusa (langste zijde)
- hulplijn
- oppervlakte van ruimtelijke figuren
- inhoud (volume) van ruimtelijke figuren
- doorsnede — op ware grootte
- lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor — gelijkvormige figuren

Activiteiten

- werken met de stelling van Pythagoras om lengtes te berekenen;
- lengtes in het platte vlak en in ruimtelijke figuren berekenen;
- de oppervlakte van ruimtelijke figuren berekenen;
- het volume (de inhoud) van ruimtelijke figuren berekenen;
- eenvoudige doorsnijdingen van ruimtelijke figuren tekenen, ook op ware grootte;
- ruimtelijke figuren vergroten (verkleinen) — vergrotingsfactoren omrekenen.

Opgave 1

Je ziet hier een rechthoekige driehoek ABC. In zo'n driehoek geldt de stelling van Pythagoras.



a Teken zelf zo'n figuur en geef er bij aan welke hoek de rechte hoek is, welke zijden de rechthoekszijden zijn en welke zijde de hypotenusa (of lange zijde) is. Zet ook de stelling van Pythagoras in deze driehoek ernaast.

b Laat met een voorbeelduitwerking zien hoe je a berekent als $b = 4$ en $c = 7$. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Laat met een voorbeelduitwerking zien hoe je b berekent als $a = 9$ en $c = 7$. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Ten opzichte van een xy-assenstelsel zijn de punten $A(-2,5)$, $B(1,0)$ en $C(8,5)$ gegeven.

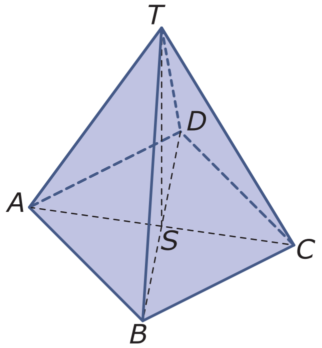
a Teken deze punten in het assenstelsel en teken ΔABC.

b Laat met een voorbeelduitwerking zien hoe je kunt nagaan of ΔABC rechthoekig is.

c Wat voor soort hoek is $\angle B$? En waarom?

Opgave 3

Van deze regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ heeft vierkant $ABCD$ zijden met een lengte van 4 cm en is $ST = 6$ cm.



a Laat zien hoe je de lengte van AT berekent.

b Punt M is het midden van ribbe CT. Laat zien hoe je de lengte van AM berekent.

Opgave 4

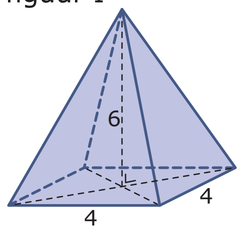
Bekijk de regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ van de vorige opgave.

Laat zien hoe je de oppervlakte van deze piramide (inclusief het grondvlak) berekent.

Opgave 5

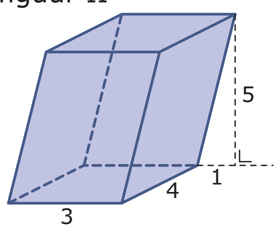
Laat zien hoe je de inhoud van elk van deze lichamen berekent.

figuur I



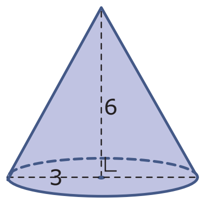
vierkant grondvlak

figuur II



rechthoekig grondvlak

figuur III

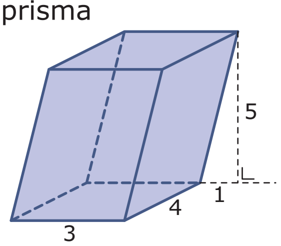


cirkelvormig grondvlak

Opgave 6

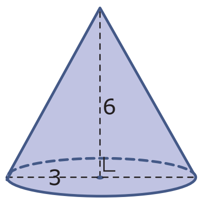
Laat zien hoe je de oppervlakte van elk van deze lichamen berekent.

prisma



rechthoekig grondvlak

kegel

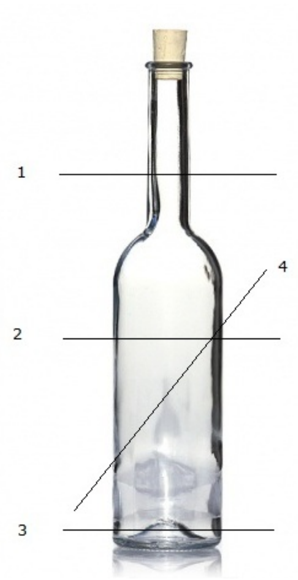


cirkelvormig grondvlak

Opgave 7

Je ziet hier een fles waarvan de bodem in het midden een uitstulping kent, de ‘ziel’ van de fles. Door middel van een streep is een viertal doorsneden door deze fles aangegeven.

Maak een schets van die vier doorsneden.



Opgave 8

Kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribben van 6 cm. Punt P is het midden van AE.

a Teken de kubus met daarin de doorsnede van het vlak door P, F en G met de kubus.

b Teken deze doorsnede op ware grootte.

De figuur die je nu hebt gekregen is een schaalmodel van een veel grotere kubus met dezelfde doorsnede er in. De gebruikte schaal is $1 : 50$.

c Hoeveel bedraagt de lengtevergrotingsfactor van dit schaalmodel naar de werkelijke kubus?

d Hoeveel keer zo groot worden de oppervlakte en de inhoud van de werkelijke kubus?

e Wat van de doorsnede $PFGQ$ verandert wel en wat verandert niet door deze vergroting?

Toepassen

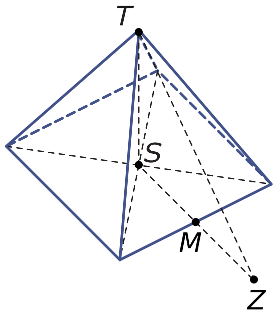
Opgave 9: Piramide van Cheops

De **piramide van Cheops** is het enige van de zeven klassieke wereldwonderen dat tot op de dag van vandaag bewaard is gebleven. De piramide is ongeveer 230 meter breed en 147 meter hoog en bevat circa $2{,}3$ miljoen stenen met een gemiddeld gewicht van 2500 kilogram.

a Bereken het volume van de piramide.

b Bereken de oppervlakte van de piramide.

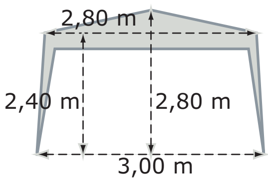
Hoe zou men in de Egyptische Oudheid de hoogte van de piramide hebben berekend? Welnu, dat gebeurde met de zon. Je wacht gewoon tot de schaduw van de top van de piramide midden voor de piramide op de grond komt en meet dan hoe ver het is naar de piramide. Daarnaast zet je een stok en je meet ook daarvan de schaduw.
In deze figuur is Z het schaduwpunt van T, midden voor de piramide. Je wilt nu TS berekenen, je weet SM en je hebt MZ gemeten.



c Je zet de stok zo in de grond dat hij verticaal staat en precies 1 m boven de grond uitsteekt. Stel dat de schaduw van de stok $0{,}90$ m is en $MZ = 17{,}3$ m, klopt dan de opgegeven hoogte van deze piramide?

Opgave 10: Partytent

Deze partytent bestrijkt een vloeroppervlak van $3{,}00$ bij $3{,}00$ m. De grootste hoogte is $2{,}80$ m. In dit vooraanzicht zie je nog een paar afmetingen.



a Bereken de totale lengte aan tentstokken die er voor nodig is.

Neem aan dat de vier uitgesneden lappen stof de vorm hebben van een symmetrisch trapezium met een onderkant van $3{,}00$ m en een bovenkant van $2{,}60$ m. De breedte van de rand stof boven die uitsnedes is 20 cm.

b Bereken de totale hoeveelheid tentdoek die voor deze partytent nodig is.

Opgave 11: Pythagoreïsche tripels

Een Pythagoreïsch tripel is een drietal gehele getallen dat aan de stelling van Pythagoras voldoet. Een voorbeeld is het tripel 3, 4, 5. Voor deze drie getallen geldt $3^2 + 4^2 = 5^2$.

a Ga na dat ook 5, 12, 13 een Pythagoreïsch tripel is.

b Zoek zelf nog een stuk of wat Pythagoreïsche tripels.

c Laat zien dat als $m > n$ geldt dat $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ een Pythagoreïsch tripel is.

d Welk Pythagoreïsch drietal krijg je als $m = 3$ en $n = 2$? En voor $m = 5$ en $n = 3$?

e Probeer nog enkele Pythagoreïsch tripels te vinden die niet eenvoudig een veelvoud zijn van de al gevonden tripels.

Begrippen

- kwadratisch verband — dal- of bergparabool — top, symmetrieas
- kwadratische vergelijking
- kwadraat afsplitsen
- kwadratische vergelijkingen systematisch oplossen

Activiteiten

- bij een door de formule gegeven kwadratisch verband de top van de bijbehorende parabool bepalen en tabellen en grafieken maken;
- kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen;
- een kwadraat afsplitsen en daarmee de formule van een kwadratisch verband zo schrijven dat je de top van de parabool kunt aflezen;
- kwadratische vergelijkingen systematisch oplossen door een kwadraat af te splitsen — kwadratische vergelijkingen opstellen in situaties die zich daartoe lenen.

Mooie bogen

Domein

Grafieken en formules

Hoofdstuk

Kwadratische verbanden

Inhoud

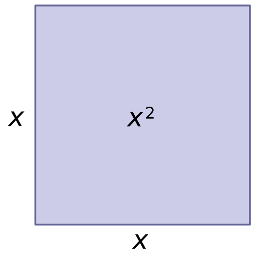
3

3.1 Kwadratische verbanden

Verkennen

Opgave V1

Een voorbeeld van een kwadraat is de oppervlakte van een vierkant. Als de zijde een lengte x heeft, is de oppervlakte y gegeven door $y = x^2$.



a Vul de volgende tabel in.

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

b Stel je eens voor dat x ook negatief zou kunnen zijn. (Bij een vierkant gaat dat niet.) En vul nu deze tabel in.

x	-1	-2	-3	-4	-5	-6
y						

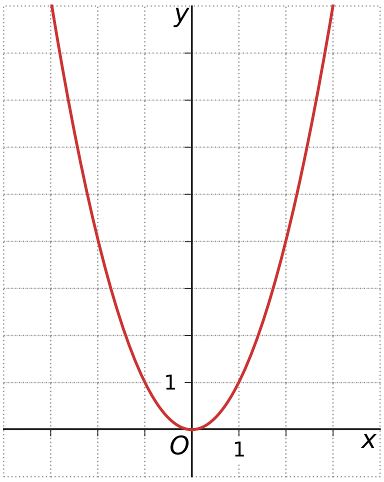
c Teken een grafiek van y afhankelijk van x waarbij x loopt vanaf -4 tot en met 4. (Verbind de punten uit beide tabellen tot een vloeiende lijn.)

Hopelijk vraag je jezelf af waarom je hier niet gewoon de punten uit de tabel door (rechte) lijnstukjes met elkaar verbindt.

d Welke waarde heeft y als $x = 2{,}5$ volgens de formule? En welke waarde zou dat zijn als je de grafiek uit (rechte) lijnstukjes laat bestaan?

Opgave V2

Hier zie je een grafiek bij de formule $y = x^2$.



a Je ziet maar een klein deel van de grafiek. Waarom is dat? Kun je ooit de hele grafiek zien?

b Kunnen de uitkomsten, de y-waarden, elke waarde aannemen?

c Voor welke waarden van x geldt $y = 9$?

d Voor welke exacte waarden van x geldt $y = 10$?

Theorie

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. Neem nu de formule $y = 2 \cdot x^2$ hebt.

a Vul de volgende tabel in:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

b Teken de grafiek bij deze formule. Is er verschil met de rode grafiek in de uitleg?

c De grafiek is lijnsymmetrisch. Welke lijn is de symmetrieas?

d Welk punt is de top van deze parabool?

Opgave 2

Ga uit van de formule $y = x^2$ in **Uitleg 1**. Gebruik de tabel erbij.

a Teken de grafiek van $y_2 = (x-3)^2$. Hoe pas je de tabel in de uitleg aan? Wat is er aan deze grafiek anders dan aan die van $y = x^2$? Wat wordt bijvoorbeeld de top van deze grafiek?

b Teken nu de grafiek van $y_3 = 0{,}5 \cdot (x-3)^2$. Hoe pas je de tabel bij a aan? Wat is er aan deze grafiek anders dan aan die bij a?

c Teken tenslotte de grafiek van $y_4 = 0{,}5 \cdot (x-3)^2 + 1$. Hoe pas je de tabel bij b aan? Wat is er aan deze grafiek anders dan aan die bij b?

Je ziet dat de grafiek van $y = 0{,}5 \cdot (x-3)^2 + 1$ uit die van $y = x^2$ kan ontstaan door verschuiven en door uitkomsten met een bepaald getal te vermenigvuldigen. Vandaar dat beide grafieken dezelfde vorm hebben: de paraboolvorm.

d Welke verschuivingen moet je toepassen en met welk getal moet je uitkomsten vermenigvuldigen? En in welke volgorde moet dit allemaal gebeuren?

Opgave 3

In **Uitleg 2** zie je dat grafieken van de vorm $y = a \cdot (x-p)^2 + q$ dezelfde vorm hebben.

Deze grafieken kunnen allemaal ontstaan uit die van $y = x^2$. Je verschuift eerst evenwijdig aan de x-as, dan vermenigvuldig je alle uitkomsten met hetzelfde getal en ten slotte verschuif je evenwijdig aan de y-as.

a Neem $a = 2$ en $p = 1$ en $q = -3$. Welke formule krijg je dan? Welke verschuivingen en vermenigvuldiging moet je op de grafiek van $y = x^2$ toepassen om de nieuwe grafiek te krijgen?

b Neem $a = 0{,}5$ en $p = 1$ en $q = 3$. Welke formule krijg je dan? Welke verschuivingen en vermenigvuldiging moet je op de grafiek van $y = x^2$ toepassen om de nieuwe grafiek te krijgen?

c Neem $a = -1$ en $p = 2$ en $q = 4$. Welke formule krijg je dan? Welke verschuivingen en vermenigvuldiging moet je op de grafiek van $y = x^2$ toepassen om de nieuwe grafiek te krijgen?

Opgave 4

De formule $y = -0{,}5(x-5)^2 + 8$ beschrijft een kwadratisch verband.

a Hoe kan de grafiek bij deze formule ontstaan uit die van $y = x^2$?

b Welke lijn is de symmetrieas van de bijbehorende parabool?

c Welk punt is de top van de parabool?

d Door de parabool te tekenen kun je de snijpunten van de parabool met de twee assen van het assenstelsel vinden. Bepaal die punten.

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**. Je ziet een formule voor de baan die een tennisbal onder bepaalde omstandigheden aflegt.

a Neem de tabel over en vul de tabel voor de gegeven formule in.

x	-4	0	4	8	10	12	16	20	24
h									

b Teken nu zelf de grafiek bij deze formule. Teken ook de lijn $h = 1$ en ga na, dat de bal inderdaad op 1 m hoogte zit als $x \approx 3$ en $x \approx 17$.

c De grafiek is lijnsymmetrisch. Welke lijn is de symmetrieas?

d Welk punt is de top van deze parabool?

e Laat zien dat uit de tabel volgt dat de bal inderdaad over het net gaat.

f Bepaal met behulp van inklemmen in één decimaal nauwkeurig op welke afstand van het tenniskanon de bal op de grond komt.

Opgave 6

Gegeven is de kwadratische formule $y = 2 \cdot (x-1)^2 - 4$.

Gebruik eventueel de applet in het **Practicum**.

a Neem de tabel over en vul in. Teken een grafiek bij de gegeven formule.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y							

b Welke symmetrieas heeft de parabool die je bij a hebt getekend? Welk punt is de top?

c Los met behulp van de grafiek de vergelijking $2 \cdot (x-1)^2 - 4 = 0$ op in één decimaal nauwkeurig. Controleer je oplossingen door invullen.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je aan de kwadratische formule kunt zien welke top de bijbehorende parabool heeft. Dat is nuttig als je een geschikte tabel wilt maken om de parabool te kunnen tekenen.

a Gebruik de formule uit het voorbeeld. Waaraan zie je dat de grafiek een bergparabool wordt?

b Hoe lees je de coördinaten van de top van die parabool uit de formule af?

Opgave 8

Bepaal bij de volgende kwadratische formules of de grafiek een dal- of een bergparabool is en bepaal de top.

a $y = 0{,}5 \cdot (x+2)^2 - 1$

b $y = (x-4)^2 + 1$

c $y = 3x^2 + 4$

d $y = 4 - x^2$

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe de vergelijking $0{,}5(x-1)^2 - 1 = 2x + 3$ wordt opgelost.

a Maak een tabel zoals deze en teken zelf de grafiek van y_1. Teken ook de rechte lijn die de grafiek van y_2 voorstelt in je figuur.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y_1									

b Breid de tabel en de grafiek uit totdat je ook het tweede snijpunt ziet.

c Je hebt nu gezien dat de gegeven vergelijking twee oplossingen heeft. Laat zien dat beide oplossingen de vergelijking waar maken.

Opgave 10

Je wilt de vergelijking $x^2 = 5 - x$ oplossen.

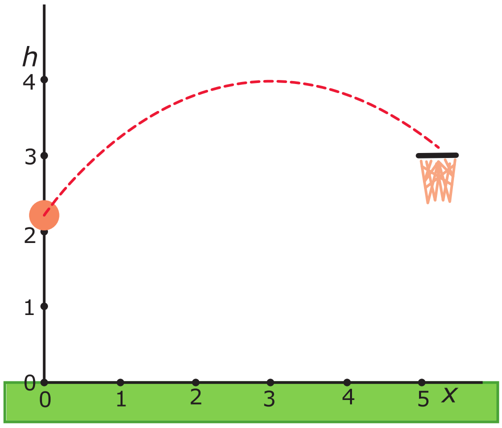
a Teken de bijpassende grafiek en ga na, dat er twee snijpunten zijn.

b Lees uit de grafiek de twee snijpunten af, op één decimaal nauwkeurig. Welke oplossingen heeft de vergelijking?

c Waarom kun je nu je antwoord niet precies controleren?

Verwerken

Opgave 11



Een basketballer gooit de bal precies in de basket. De baan van het middelpunt van de bal is (bij benadering) een deel van een parabool.

Je ziet in de figuur dit deel van de parabool in een assenstelsel. Zowel x als h worden in meter uitgedrukt. Bij de parabool hoort de formule: $h = -0{,}2 \cdot (x-3)^2 + 4$

a Op het moment dat de speler de bal loslaat, is $x = 0$. Je kunt in de figuur de hoogte die daarbij hoort schatten. Bereken met behulp van de formule de precieze hoogte waarop de bal wordt losgelaten. Het gaat daarbij om het middelpunt van de bal.

b Bereken de coördinaten van het hoogste punt van de parabool.

c Teken nu zelf de baan van (het middelpunt van) de bal. Maak eerst een geschikte tabel. De ring van de basket hangt op 3 m boven de grond. De speler scoort, want het middelpunt van de bal gaat door het midden van deze ring. Laat de baan stoppen bij het middelpunt van de ring.

d Op hoeveel meter voor de basket laat deze speler de bal los?

Opgave 12

Je ziet een aantal kwadratische formules.

Geef bij elke formule:

- de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool;
- de symmetrieas;
- of het een dalparabool of een bergparabool is;
- hoe de grafiek ontstaat uit die van $y = x^2$.

a $y = (x-6)^2 + 1$

b $y = -2(x+1)^2$

c $y = 100 - 0{,}01(x-10)^2$

d $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$

Opgave 13

Een vuistregel voor de remweg van een motor is $R = \frac{v^2}{16}$. Hierin is R de remweg in m en v de rijsnelheid in m/s.

a Boris rijdt op een motor met een snelheid van 90 km/uur. Hoe lang is zijn remweg?

b Teken een grafiek bij deze formule. Maak eerst een tabel met voor v de waarden 0, 10, 40.

c Even later moet Boris remmen, zijn remweg is 65 m. Je wilt weten hoe hoog zijn snelheid was. Welke vergelijking moet je dan oplossen?

d Los de in c bedoelde vergelijking op met behulp van de grafiek. Hoe hoog was Boris' snelheid in km/uur?

e Je kunt de in c bedoelde vergelijking ook oplossen zonder de grafiek te gebruiken. Laat zien hoe.

Opgave 14

Bekijk de formule $y = 0{,}5(x + 1{,}5)^2 - 3$.

a Er bestaat een kwadratisch verband tussen x en y. Waaraan zie je dat?

b Maak een geschikte tabel en teken de grafiek die bij deze formule hoort. Hoe heet zo'n grafiek?

c Welke symmetrieas heeft de grafiek?

d Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $0{,}5(x + 1{,}5)^2 - 3 = 1{,}5$? Bepaal de oplossing(en) met behulp van je grafiek.

e Controleer de oplossing(en).

f Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $0{,}5(x + 1{,}5)^2 - 3 = \text{-}5$?

Opgave 15

Je wilt de vergelijking $(x - 2)^2 = 7{,}25 - 1{,}75x$ oplossen.

a Teken een grafiek waaruit je de oplossing(en) kunt aflezen.

b Bepaal de oplossing(en) van de gegeven vergelijking.

c Controleer je antwoord door invullen.

Opgave 16

Een bergparabool heeft in een xy-assenstelsel het punt $(4{,}10)$ als top en gaat door het punt $(0{,}6)$.

Stel voor deze parabool een formule op.

Toepassen

Een beroemde hangbrug is de **Golden Gate Bridge** in San Francisco. De rijbanen zijn met tuidraden opgehangen aan twee staalkabels die tussen de twee torens van de brug hangen. Die staalkabels (met een diameter van 92,7 cm) hangen in de vorm van een parabool.

De afstand tussen beide torens bedraagt 1280 m en de staalkabels zijn ongeveer 152 m boven het wegdek bevestigd. Neem aan dat het wegdek recht is. Kies je de y-as midden tussen de torens en de x-as op het wegdek, dan geldt voor de paraboolvorm van de staalkabels de formule

$$y = \frac{149}{409600}x^2 + 3$$

Hierin is x in m en y de hoogte van de staalkabel boven de x-as.

Opgave 17: Golden Gate Bridge

Je ziet in **Toepassen** welke formule je kunt opstellen voor de staalkabels waaraan een brug als de Golden Gate Bridge hangt.

Ga er in deze opgave van uit dat de dikte van de staalkabels verwaarloosbaar is.

a Laat door berekening zien dat de hoogte waarop de staalkabels zijn opgehangen volgens de formule inderdaad 152 m boven het wegdek is.

b Hoe hoog boven de x-as zit het laagste punt van deze kabel?

Je kunt nu met behulp van de formule voor de parabool de lengtes berekenen van alle tuidraden van één staalkabel tussen beide torens. Deze 84 tuidraden zitten op 15 m afstand van elkaar aan het wegdek vast. De dikte van deze tuidraden wordt buiten beschouwing gelaten. De twee kortste tuidraden zijn even lang.

c Bereken de lengte van de twee kortste tuidraden in het midden in twee decimalen nauwkeurig.

d Bereken de lengte van de twee langste tuidraden in m nauwkeurig.

Opgave 18: Eerste en tweede verandering

Bij een lineair verband zie je per eenheid waarmee de x-waarde oploopt ook de y-waarde met steeds hetzelfde getal groter of kleiner worden: er is een constante verandering per eenheid (de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende lijn).

a Vul bij de lineaire formule $y = 2x + 5$ deze tabel in en ga na dat de verandering constant is.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y							
verandering							

Bij een kwadratisch verband moet je naar de verandering der veranderingen kijken om net zo'n regelmaat te vinden. Je noemt dit wel de tweede verandering. Bij elk kwadratisch verband is de tweede verandering constant.

b Vul bij de kwadratische formule $y = 2x^2 + 5$ deze tabel in en ga na dat de verandering der veranderingen constant is.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y							
verandering							
tweede verandering							

c Ga nu met behulp van de tweede verandering na dat $y = (x+2)(x-3)$ een kwadratisch verband beschrijft.

Practicum

Applet

Bedenk een kwadratisch verband zoals $y = -0{,}5(x-3)^2 + 4$.
Bepaal eerst zelf de top en de symmetrieas en maak een goede tabel en grafiek. Controleer met de applet.

3.2 Terugrekenen

Verkennen

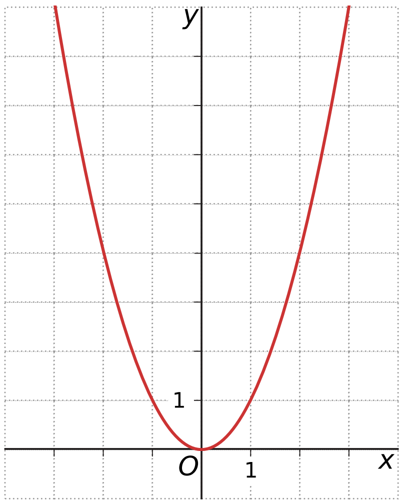
Opgave V1

Applet

Hier zie je een grafiek bij de formule $y = x^2$.

Daarbij kun je vergelijkingen krijgen zoals $x^2 = 9$, $x^2 = 8$, $x^2 = 0$, $x^2 = -3$, enzovoorts.

In de applet kun je de oplossing zien van dergelijke vergelijkingen. Ze hebben de vorm $x^2 = p$.



a Welke oplossing heeft de vergelijking $x^2 = 9$?

b Welke exacte oplossing heeft de vergelijking $x^2 = 8$?

c Welke oplossing heeft de vergelijking $x^2 = 0$?

d Welke oplossing heeft de vergelijking $x^2 = -3$?

e De oplossing van de vergelijking $x^2 = p$ kan uit meerdere waarden voor x bestaan. Uit hoeveel maximaal? En wat betekent dit voor p?

Theorie

Opgave 1

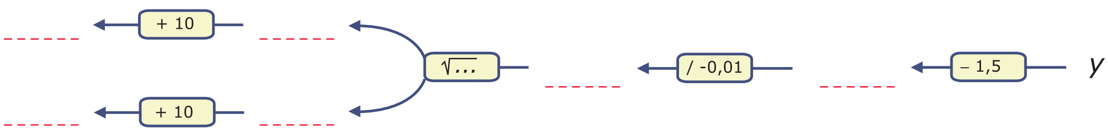
Bekijk de **Uitleg**. Je ziet een formule voor de baan die een tennisbal onder bepaalde omstandigheden aflegt. De speler slaat de bal aan de andere kant van het net terug voor hij de grond raakt. Hij raakt de bal op $0{,}29$ m boven de grond.

a Je wilt weten op welke punten in zijn baan de bal op $0{,}29$ m hoogte zit. Welke vergelijking hoort daarbij?

Bij de formule voor de parabolische baan van de bal kun je een rekenschema maken.

b Neem het rekenschema over en vul de juiste uitdrukkingen in.

Bij het rekenschema hoort een terugrekenschema zoals dit.



c Neem nu $y = 0{,}29$ en vul het terugrekenschema met getallen in.

d Hoe ver staat de speler van het tenniskanon verwijderd?

Opgave 2

Je wilt ook weten of de bal ‘in’ zou zijn geweest. Dat betekent dat je wilt berekenen waar de bal op de grond zou zijn gekomen als er geen speler was geweest om hem terug te slaan. Je wilt dus een nulpunt van de parabool vinden.

a Welke vergelijking hoort daarbij?

b Hoeveel nulpunten heeft de parabool?

Bij het rekenschema, kun je nu ook een terugrekenschema maken. De wortel komt nu niet op een geheel getal uit, dus die laat je in het antwoord staan.

c Neem $y = 0$ en maak een terugrekenschema met getallen. Welke oplossing heeft deze vergelijking?

d Hoe ver van het tenniskanon komt de bal op de grond?

e Was de bal ‘in’?

Opgave 3

De grafiek van $y = -0{,}5(x+1)^2 + 5$ heeft twee nulpunten.

a Welke vergelijking moet je oplossen om de nulpunten te vinden?

b Los de vergelijking op. Gebruik een terugrekenschema.

c Welke coördinaten hebben de snijpunten met de x-as?

d Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $-0{,}5(x+1)^2 + 5 = 5$?

e Bepaal de oplossing(en) van de vergelijking bij d. Heb je voor het bepalen van die oplossing(en) een terugrekenschema nodig?

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $x^2 = 17$

b $2{,}5x^2 = 50$

c $2{,}5x^2 + 5 = 10$

d $5(x - 8{,}5)^2 - 12{,}5 = 100$

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen exact op met de balansmethode.

a $0{,}5x^2 + 1 = 5{,}5$

b $8 - x^2 = 3$

c $4{,}5x^2 = 50 - 0{,}5x^2$

d $0{,}5 \cdot (x-4)^2 + 3 = 11$

e $6 - (x+2)^2 = 0$

Opgave 6

Bekijk de kwadratische formule $y = 2{,}5(x + 1)^2 - 5$.

a Bepaal de top van de bijbehorende parabool en maak bij deze formule een geschikte tabel. Teken vervolgens de grafiek.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de nulpunten van deze parabool door de bijbehorende vergelijking op te lossen.

c Bekijk de vergelijking $2{,}5(x + 1)^2 - 5 = a$. Voor welke waarde van a heeft deze vergelijking precies één oplossing?

d Voor welke waarden van a heeft de vergelijking uit c geen oplossing?

Opgave 7

In de applet in het **Practicum** kun je zien wat je doet als je een vergelijking van de vorm $a(x - p)^2 + q = r$ oplost.

a Neem eerst $a = 1{,}5$, $p = 1$, $q = -4$ en $r = 2$ en los de bijbehorende vergelijking op. Controleer je antwoord met de applet.

b Neem eerst $a = -2$, $p = 2$, $q = 3$ en $r = -5$ en los de bijbehorende vergelijking op. Controleer je antwoord met de applet.

Opgave 8

Bekijk hoe de vergelijking in **Voorbeeld 3** wordt opgelost.

a Waarom is terugrekenen nu niet mogelijk?

b Ga na of je nog weet hoe haakjes wegwerken ook alweer in zijn werk gaat. Werk de haakjes weg van $(x - 2)^2 - 9$.

c Waarom los je de vergelijking $(x - 2)^2 - 9 = 5$ niet op door eerst de haakjes weg te werken?

d Los de vergelijking uit c op door gebruik te maken van terugrekenen.

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op met de balansmethode.

a $x^2 + 5 = (4 - x)^2$

b $2x^2 + 5 = 14 - x^2$

c $0{,}5x^2 = 6 + 0{,}5(x - 2)^2$

Opgave 10

Niet alle kwadratische vergelijkingen hebben oplossingen.

a Waarom heeft de vergelijking $(x + 4)^2 + 12 = 5$ geen oplossingen?

b Waarom heeft de vergelijking $(x + 4)^2 + 12 = 8x$ geen oplossingen?

Verwerken

Opgave 11

Bekijk de kwadratische formule $y = 0{,}5(x-2)^2 + 3$.

a Bepaal de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool. Gaat het om een dal- of een bergparabool?

b Hoeveel nulpunten heeft deze parabool?

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de oplossing van de vergelijking: $0{,}5(x-2)^2 + 3 = 7$.

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen op. Geef exacte antwoorden.

a $(x+15)^2 - 20 = 5$

b $4 - 2x^2 = 0$

c $2(x-7)^2 + 15 = 21$

d $6 + 5x^2 = 3x^2 + 18$

e $8 - (x+1)^2 = -8$

f $-0{,}05(x-20)^2 + 100 = 0$

Opgave 13

De baan van een afgeschoten vuurpijl wordt bij benadering gegeven door $h = 33{,}5 - 0{,}5(x-8)^2$.
Hierin is h de hoogte in meter boven de begane grond en x de afstand van de plek waar de pijl werd afgeschoten tot het punt op de grond dat recht onder de vuurpijl zit. De vuurpijl spat nadat hij op zijn hoogste punt is geweest op 30 m hoogte uit elkaar.

a Op welke hoogte wordt de vuurpijl afgeschoten?

b Hoe hoog komt de vuurpijl maximaal? En bij welke waarde van x is dat?

c Bij welke waarde van x spat de vuurpijl uiteen? Geef je antwoord exact en in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 14

Los de vergelijkingen op. Geef exacte antwoorden.

a $(x+5)^2 = x^2$

b $x^2 = 12x^2$

c $(x-4)^2 = (x-5)^2$

d $2x^2 + 5 = 1 - x^2$

Opgave 15

Een bioscoop heeft twee zalen met evenveel stoelen. In zaal I zijn er evenveel rijen stoelen als er stoelen in een rij zitten. In zaal II zijn er 8 rijen stoelen meer dan in zaal I, maar elke rij heeft 6 stoelen minder dan in zaal I. Hoeveel stoelen heeft elke zaal?

a Stel hierbij een passende vergelijking op.

b Los deze vergelijking op en geef antwoord op de vraag.

Opgave 16

Acapulco in Mexico is onder andere beroemd om zijn 'cliff divers'. Dat zijn mensen die vanaf hoge kliffen het water in duiken. Het verband tussen de hoogte boven het water h en het aantal meters vooruit m kun je weergeven met de formule:

$h = 88 - 0{,}12m^2$

a Als je een bijpassende grafiek tekent, wat stelt dan het nulpunt (snijpunt met de m-as) voor?

b Vanaf welke hoogte springt de duiker vanaf de klif?

Je wilt weten hoeveel meter de duiker in totaal vooruit springt tot de plaats waar hij het water raakt. Dat is nuttig omdat zo'n klif vaak niet echt loodrecht naar beneden gaat.

c Welke vergelijking moet je oplossen?

d Los die vergelijking op en bereken hoeveel meter de duiker vooruit springt. Geef je antwoord in meters.

Een andere duiker springt van een rots die 96 m hoog is en is op het moment dat hij het water raakt ongeveer 30 m vooruit gesprongen.

e Welke formule kun je voor zijn sprong opstellen als je ook nu van een kwadratisch verband tussen h en m uitgaat?

Toepassen

Je ziet weer de beroemde hangbrug de Golden Gate Bridge in San Francisco. De rijbanen zijn met tuidraden opgehangen aan twee staalkabels die tussen de twee torens van de brug hangen. Die staalkabels (met een diameter van 92,7 cm) hangen in de vorm van een parabool.

De afstand tussen beide torens is 1280 m. En de afstand van het wegdek tot de bovenkant van de torens is ongeveer 152 m.

Neem aan dat het wegdek recht is.

Kies je de y-as midden tussen de torens en de x-as op het wegdek, dan geldt voor de paraboolvorm van de staalkabels de formule:

$$y = \frac{149}{409600}x^2 + 3$$

Hierin is x de afstand tot het midden van de torens en y de hoogte van de staalkabel boven het wegdek, beide in meters.

Ga ervan uit dat de dikte van de staalkabels verwaarloosbaar is.

Opgave 17: Golden Gate Bridge

Je ziet in **Toepassen** welke formule je kunt opstellen voor de staalkabels waaraan een brug als de Golden Gate Bridge hangt.

a Er zijn twee even lange tuidraden die 615 m uit elkaar aan de brug zijn bevestigd. Hoe lang zijn die tuidraden?

b Er zijn twee tuidraden die $111{,}2$ m lang zijn. Hoe ver zitten die twee tuidraden uit elkaar aan de brug bevestigd? Bepaal het antwoord door een bijpassende vergelijking op de lossen.

Practicum

Een vergelijking van de vorm $a(x-p)^2+q=r$ heet een **kwadratische vergelijking**. Zo'n vergelijking heeft soms twee, soms één en soms geen oplossingen.

Applet

De vergelijking $1{,}5(x-1)^2-4=2$ bijvoorbeeld heeft als oplossing $x = \text{-}1 \vee x = 3$.

In deze applet kun je die oplossing controleren.

3.3 Kwadraat afsplitsen

Verkennen

Opgave V1

Aan een tennistoernooi doen n deelnemers mee. Ze spelen allemaal precies twee keer tegen elkaar, dus het aantal wedstrijden is $w = n(n-1) = n^2 - n$.

a Is hier sprake van een kwadratisch verband? Licht je antwoord toe.

b Laat zien dat de formule $w = (n - 0{,}5)^2 - 0{,}25$ hetzelfde verband beschrijft.

c Waarom weet je nu zeker dat het om een kwadratisch verband gaat tussen w en n?

Theorie

Opgave 1

Lees in **Uitleg 1** hoe je een kwadraat afsplitst.

a Gebruik de formule $y = x^2 + 6x$ uit de uitleg. Neem de tabel over en vul de tabel voor die formule in. Teken de grafiek bij deze formule.

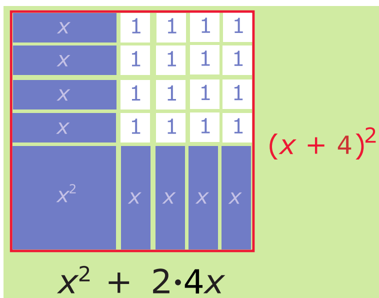
x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y											

b Bekijk in de uitleg hoe $y = x^2 + 6x$ herleid kan worden tot $y = (x+3)^2 - 9$. Controleer deze herleiding door in de tweede vorm de haakjes weg te werken.

c Waarom is de vorm $y = (x+3)^2 - 9$ voor deze formule handiger?

Opgave 2

Het afsplitsen van een kwadraat is een nuttige vaardigheid die je goed moet oefenen.



a Gebruik de figuur om van $x^2 + 8x$ een kwadraat af te splitsen.

b Splits een kwadraat af van $y = x^2 + 16x$.

c Splits een kwadraat af van $y = x^2 + 16x + 10$.

d Splits een kwadraat af van $y = x^2 - 6x = x^2 + {-6x}$.

Opgave 3

Bij kwadraat afsplitsen maak je gebruik van $x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$.

a Laat zien dat dit klopt door de haakjes weg te werken.

b Laat zien dat $x^2 + px = \left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 - \frac{1}{4}p^2$.

Stel je hebt de formule $y = 3x^2 + 6x$.
Je kunt ook dan een kwadraat afsplitsen. Daartoe schrijf je $y = 3(x^2 + 2x)$.

c Laat zien dat dit klopt door de haakjes weg te werken.

d Splits nu binnen de haakjes een kwadraat af en schrijf de formule in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$.

e Welke top heeft de bijbehorende parabool?

Opgave 4

Lees in **Uitleg 2** hoe je een kwadraat afsplitst door eerst een factor buiten haakjes te halen.

Schrijf op dezelfde manier de volgende formules in de vorm $y = a(x + p)^2 + q$. Bepaal ook of er sprake is van een dalparabool of een bergparabool en schrijf de coördinaten van de top op.

a $y = 3x^2 + 6x + 1$

b $y = 3x^2 - 6x$

c $y = -0{,}5x^2 - 6x + 2$

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Waarom wordt er een kwadraat afgesplitst?

b Waaraan zie je dat er sprake is van een dalparabool met top $(3, -1)$?

c Waarom is het nuttig om de top van de parabool te weten?

d Waarom heeft deze parabool nulpunten? Bereken zelf deze nulpunten.

Opgave 6

Splits een kwadraat af.

a $y = x^2 + 2x$

b $y = x^2 - 4x$

c $y = x^2 - 10x + 20$

d $y = 12 - 8x + x^2$

Opgave 7

Gegeven is de formule $y = x^2 + 5x - 6$. Er bestaat een kwadratisch verband tussen x en y.

a Laat dat zien en bepaal de top van de parabool die de grafiek bij deze formule is.

b Teken de grafiek bij deze formule.

c Bereken de nulpunten van deze grafiek.

Opgave 8

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je de top van een bergparabool kunt vinden.

a Kun je al meteen aan de formule zien dat er sprake is van een bergparabool?

b Bekijk nog eens goed hoe de formule is herleid tot een vorm waaruit je de top kunt aflezen. Doe dit zelf zonder naar het voorbeeld te kijken.

c Welke coördinaten heeft de top van deze parabool?

d Bereken de nulpunten van deze parabool.

Opgave 9

Schrijf de volgende kwadratische formules in de vorm $y = a(x-p)^2 + q$ en bepaal de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

a $y = 2x^2 - 8x + 6$

b $y = 3x^2 - 15x$

c $y = 0{,}1x^2 - 4x + 1$

Verwerken

Opgave 10

Gegeven is de formule $y = x^2 - 10x + 5$.

Laat zien dat er een kwadratisch verband bestaat tussen y en x en bereken de top van de bijbehorende parabool.

Opgave 11

Splits een kwadraat af.

a $x^2 + 12x$

b $x^2 + 13x$

c $x^2 - 12x + 46$

d $5x + x^2$

e $2x^2 - 14x - 24$

Opgave 12

Gegeven is de formule $y = 0{,}1x^2 - 10x + 5$.

Laat zien dat er een kwadratisch verband bestaat tussen y en x en bereken de top van de bijbehorende parabool.

Opgave 13

Los de volgende vergelijkingen op door eerst een kwadraat af te splitsen.

a $x^2 + 4x = 0$

b $2x^2 - 6x + 4 = 0$

Opgave 14

Als je een tennistoernooi organiseert waarbij alle spelers één keer tegen elkaar moeten spelen, dan kun je berekenen hoeveel wedstrijden er nodig zijn afhankelijk van het aantal spelers.

a Er zijn n spelers. Leg uit dat het aantal wedstrijden w afhankelijk van n is volgens de formule: $w = \frac{1}{2}n(n-1)$.

b Laat door haakjes wegwerken en kwadraat afsplitsen zien dat er sprake is van een kwadratisch verband tussen w en n.

c Er kunnen maximaal 300 wedstrijden in deze competitie worden gespeeld. Hoeveel deelnemers kunnen er dan maximaal zijn?

Opgave 15

Een kogelstootster stoot haar kogel volgens een mooie parabolische baan. Die baan is door haar coach gefilmd en hij heeft er een formule van op laten stellen. Bij deze baan past de formule $h = -0{,}026x^2 + 0{,}52x + 1{,}80$.
Hierin is h de hoogte van het midden van de kogel boven een punt op de grond dat x m verwijderd is van het punt recht onder het midden van de kogel op het moment van loslaten.

a Op welke hoogte werd de kogel losgelaten?

b Bereken het hoogste punt van de baan van de kogel.

c Bereken de afstand die deze kogelstootster haalt.

Toepassen

Opgave 16: Portieken

Deze twee portieken zijn ontworpen door een architect die hoorde tot de Amsterdamse School. Er wordt beweerd dat ze een mooie paraboolvorm hebben. Je zou die vorm van de rand van het metselwerk langs beide kozijnen moeten kunnen beschrijven met formules. Neem je in het midden tussen beide portieken een verticale h-as en verder de horizontale x-as precies over de stoep, dan vind je $h_1 = -5x^2 + 11x - 2{,}85$ en $h_2 = -5x^2 - 11x - 2{,}85$.

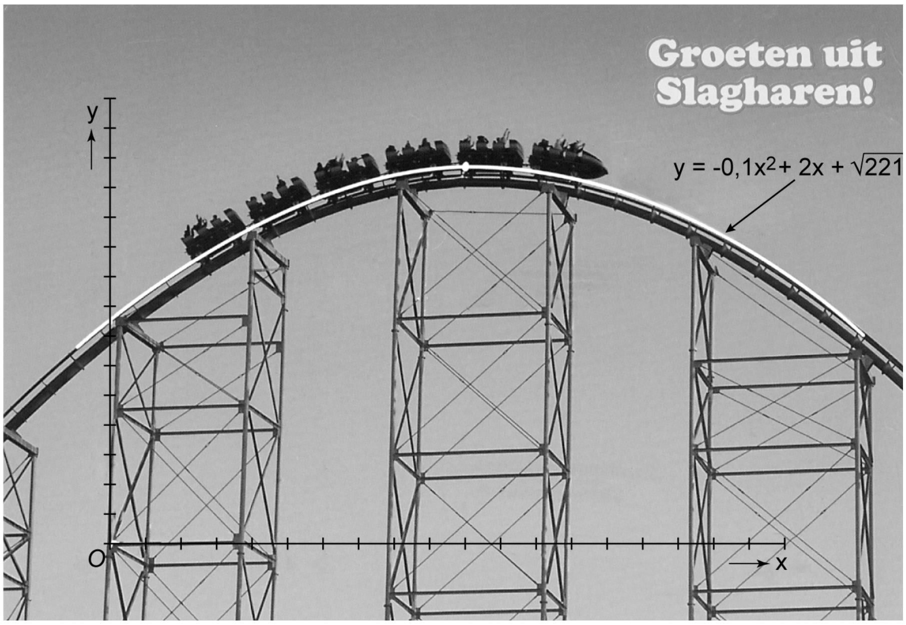
a Van welke hoogte van de kozijnen is daarbij uitgegaan?

b Hoe breed is dan de opening van elk portiek op de grond?

c Teken beide portieken als deze formules kloppen. Is er werkelijk sprake van een parabool-vorm?

Opgave 17: Groeten uit Slagharen

Een fabrikant van practicummateriaal voor natuurkunde heeft in 2009 als reclame deze ansichtkaart verstuurd aan alle scholen in Nederland.



De formule die hoort bij de vorm van de achtbaan is: $H = -0{,}1a^2 + 2a + \sqrt{221}$.

a Hoe hoog is de achtbaan bij een horizontale afstand van 0 m?

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de hoogte van het hoogste punt van dit deel van de achtbaan.

c Welke nulpunten heeft deze grafiek? Rond je antwoorden af op een decimaal.

(naar: examen wiskunde vmbo-tl in 2011, tweede tijdvak)

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **kwadraat afsplitsen en vergelijkingen daarmee oplossen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

3.4 Kwadratische vergelijkingen

Verkennen

Opgave V1

Twee getallen zijn opgeteld 21 en vermenigvuldigd 108. Om welke getallen gaat dit?

a Probeer deze vraag vast te beantwoorden door een of twee tabellen te maken.

Je hebt nu waarschijnlijk wel het paar geschikte getallen gevonden. Je kunt dit probleem ook oplossen met een vergelijking.

b Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?

c Kun je die vergelijking oplossen? Hoe?

d Wat is het voordeel van het werken met een vergelijking ten opzichte van een tabel maken en de antwoorden zoeken door proberen?

Theorie

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je een kwadratische vergelijking oplost door een kwadraat af te splitsen.

a Laat zien dat uit $x^2 - 21x = -108$ volgt $(x - 10{,}5)^2 = 2{,}25$.

b Los de vergelijking verder op met de balansmethode.

c Geef antwoord op de vraag: “Twee getallen zijn opgeteld 21 en vermenigvuldigd 108.” Om welke getallen gaat dit?

Opgave 2

Los op dezelfde manier als in de **Uitleg** de volgende vergelijkingen op.

Schrijf de oplossingen op met de wortel erin. Als de oplossing een geheel getal is, schrijf die oplossing er dan ook bij.

a $x^2 - 6x = 16$

b $x^2 - 6x = 17$

c $x^2 + 9x = 11$

d $x^2 = 5x$

Opgave 3

Een parabool wordt gegeven door de formule $y = x^2 + 14x + 2$.

a Bereken de snijpunten van deze parabool met de x-as.

b Los op: $y = 2$.

Opgave 4

Je ziet in **Voorbeeld 1** hoe je een kwadratische vergelijking systematisch oplost. Los de volgende vergelijkingen op met behulp van kwadraat afsplitsen.

a $2x^2 - 8x = 12$

b $x^2 - 5x = 7x$

c $0{,}5x^2 - x = 2x + 3$

d $4 - x^2 = 3x$

Opgave 5

Van een rechthoek is de lengte 6 eenheden groter dan 2 keer de breedte. De oppervlakte is 30.

Bereken de exacte breedte van deze rechthoek.

Opgave 6

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 2**.

a Waarom moet je alleen op een hoogte van $2{,}11$ m nagaan of een deur van die breedte past?

b Laat zien hoe de vergelijking kan worden opgelost.

c Hoe kom je nu aan het getal $1{,}24$?

d Bereken hoeveel ruimte er aan weerszijden van de deur op de begane grond is.

Opgave 7

Twee getallen verschillen 2 van elkaar. Hun product is $55{,}25$. Welke getallen zijn dit?

Je kunt dit probleem systematisch aanpakken door voor een van beide getallen een variabele te kiezen, bijvoorbeeld x.

a Wat weet je dan van het andere getal?

b Welke vergelijking kun je hiermee maken?

c Los de vergelijking uit b op.

Opgave 8

Boer Klein Harmelink heeft een rechthoekig weiland van 190 m bij 110 m. De smalle kant ligt tegen de weg en bevat het toegangshek. Aan de andere drie kanten moet een boswal op zijn land komen, die wordt overal even breed. De boer wil de breedte van de boswal zo bepalen dat hij nog 90% van de oppervlakte van het weiland overhoudt.
Hoe breed moet deze boswal worden?

Je kunt dit probleem systematisch aanpakken door voor de breedte van de boswal een variabele te kiezen, bijvoorbeeld x (m).

a Wat weet je dan van de lengte en de breedte van het overblijvende stuk land?

b Welke vergelijking kun je hiermee maken?

c Schrijf je vergelijking zo dat je een kwadraat kunt afsplitsen en de vergelijking kunt oplossen.

Verwerken

Opgave 9

Los de kwadratische vergelijkingen op.

a $x^2 + 6x = 16$

b $x^2 - 5x - 8 = 0$

c $2x^2 = 8x + 1$

d $0{,}1x^2 + x = 4$

Opgave 10

Twee getallen verschillen 5 en hun product is 204. Je wilt deze getallen berekenen.

a Stel een passende vergelijking bij dit probleem op.

b Bereken deze getallen met behulp van de vergelijking die je hebt gevonden.

Opgave 11

Los op.

a $x - x^2 = 0{,}25$

b $x(x + 4) = 2x + 8$

c $2x(x - 4) = 3 - 8x$

d $0{,}01x^2 - x = 0$

Opgave 12

Een parabolische boog is gegeven door de formule: $y = -0{,}1x^2 + 5x + 1$

a Bereken de coördinaten van de top van deze parabool.

b Los de kwadratische vergelijking op: $-0{,}1x^2 + 5x + 1 = 53{,}5$.

c Waarom heeft de vergelijking $-0{,}1x^2 + 5x + 1 = 73{,}5$ geen oplossing?

d De vergelijking $-0{,}1x^2 + 5x + 1 = p$ heeft precies één oplossing. Welke waarde moet p dan hebben?

Opgave 13

Stel dat je een rechthoekig stuk land hebt van 50 m lengte en 30 m breedte. Je krijgt er in de lengte x meter bij als je in de breedte x meter inlevert.

a Schrijf een bijpassende formule op voor de oppervlakte van je nieuwe stuk land.

Je stuk land is nu 69 m^2 kleiner geworden.

b Bereken welke waarden x dan kan hebben.

c Is het ook mogelijk dat je stuk land even groot blijft? Zo ja, welke waarden kan x dan hebben?

Toepassen

Opgave 14: De p,q-formule

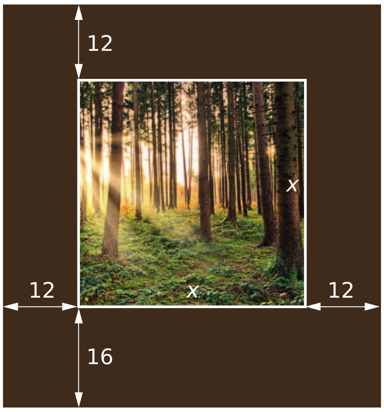
Het oplossen van een kwadratische vergelijking door het afsplitsen van een kwadraat gaat telkens op dezelfde manier.

a Los de vergelijking $x^2 + px = q$ op deze manier op.

b Laat zien hoe je het resultaat bij a kunt gebruiken om de vergelijking $x^2 + 6x = 20$ op te lossen.

Opgave 15: Fotolijst

Om een vierkante foto komt een brede rechthoekige lijst. De breedte van de lijst aan de onderkant van de foto is 16 cm. Aan de andere drie kanten is de lijst 12 cm breed. De foto met lijst krijgt daardoor een twee keer zo grote oppervlakte als de foto zonder lijst heeft.



a Schrijf een bijpassende formule op voor de oppervlakte van de foto met lijst. Noem de lengte en de breedte van de foto x.

b Bereken de waarde van x in mm nauwkeurig.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **kwadratische vergelijkingen oplossen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

AlgebraKIT

3.5 Totaalbeeld

Samenvatten

De baan van een tennisbal is bij benadering een parabool. Die paraboolvorm kom je ook tegen bij hangbruggen. Je kunt ze beschrijven met formules die een kwadratisch verband weergeven. En daarmee kun je dan rekenen.

De volgende opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Kwadratische verbanden** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3 en 4 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippen

- kwadratisch verband — dal- of bergparabool — top, symmetrieas
- kwadratische vergelijking
- kwadraat afsplitsen
- kwadratische vergelijkingen systematisch oplossen

Activiteiten

- bij een door de formule gegeven kwadratisch verband de top van de bijbehorende parabool bepalen en tabellen en grafieken maken;
- kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen;
- een kwadraat afsplitsen en daarmee de formule van een kwadratisch verband zo schrijven dat je de top van de parabool kunt aflezen;
- kwadratische vergelijkingen systematisch oplossen door een kwadraat af te splitsen — kwadratische vergelijkingen opstellen in situaties die zich daartoe lenen.

Opgave 1

Van een kwadratisch verband is de formule $y = 2(x - 0{,}5)^2 - 1{,}5$.

a Vul de tabel in en teken de bij de formule horende parabool.

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

b Welke coördinaten heeft de top van de parabool?

c Met behulp van de grafiek kun je de vergelijking $2(x - 0{,}5)^2 - 1{,}5 = 4$ oplossen.
Bepaal beide oplossingen in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 2

Je kunt sommige kwadratische vergelijkingen oplossen door terugrekenen.
Bekijk de vergelijking $2(x-0{,}5)^2 - 1{,}5 = 4$ uit de vorige opgave.

a Maak hierbij een rekenschema en een terugrekenschema.

b Welke exacte oplossingen heeft de vergelijking dus?

c Ga na, dat deze twee oplossingen overeenkomen met die uit de voorgaande opgave.

Opgave 3

Bekijk de formule $y = -x^2 - 8x + 3$.

a Laat zien dat hier van een kwadratisch verband sprake is door een kwadraat af te splitsen.

b De grafiek bij deze formule is dus een parabool. Welke top heeft deze parabool?

c Teken de parabool.

d Los op: $-x^2 - 8x + 3 = 18$.

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen op door een kwadraat af te splitsen.

a $x^2 - 12x = 36$

b $x^2 + 5x = 6$

c $x(x-4) = 6x - 24$

d $(x-4)^2 = 4x$

Opgave 5

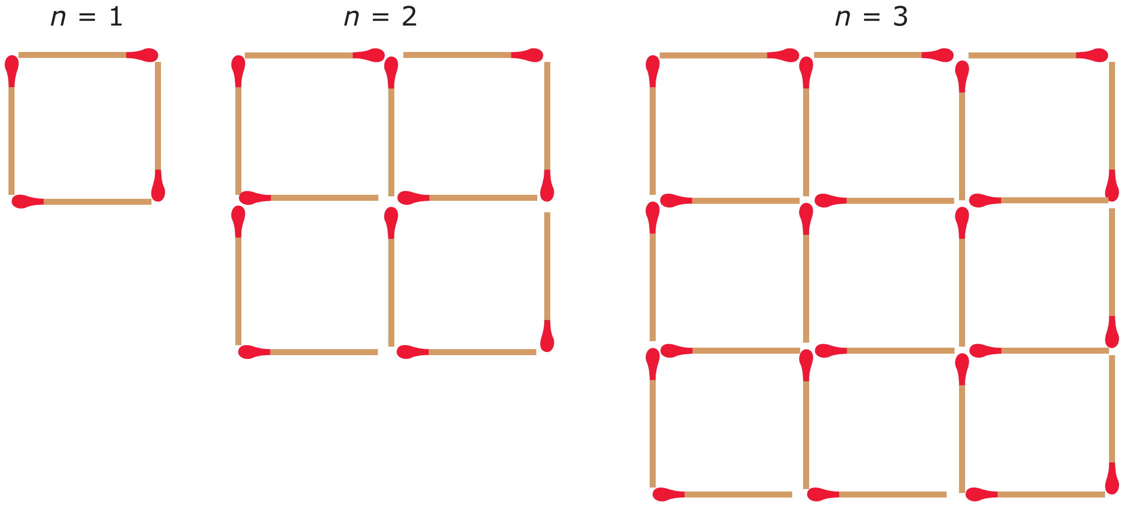
Een rechthoekig terrein is anderhalf keer zo lang als het breed is. In de lengte gaat een strook van 3 m breedte af en in de breedte komt een strook van 4 m breedte bij. De oppervlakte van het terrein blijft daardoor even groot.

Bereken de afmetingen van dit terrein voordat deze stroken er af gaan en erbij komen.

Toepassen

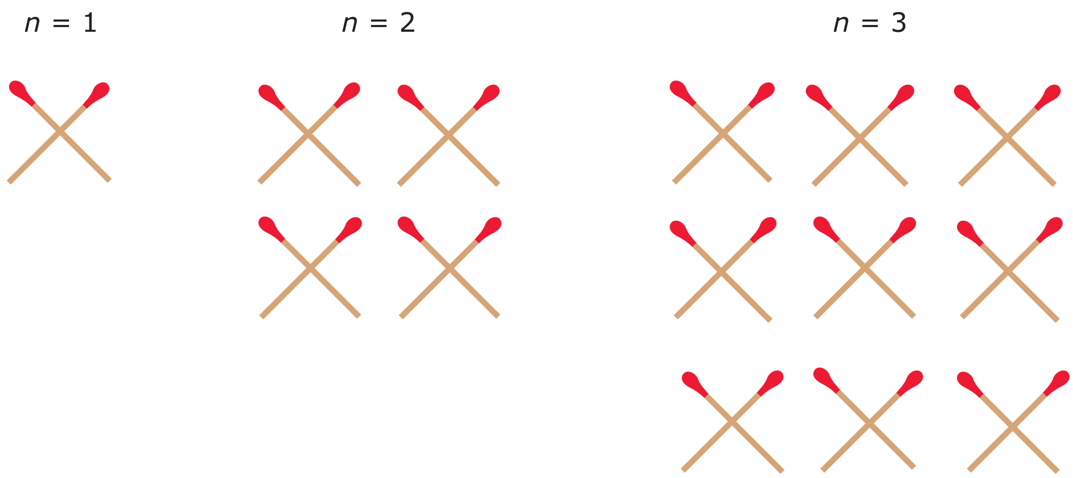
Opgave 6: Luciferfiguren

Bekijk deze drie luciferfiguren. Dit zijn de eerste drie figuren van een serie van luciferfiguren die op dezelfde manier zijn opgebouwd. Vanwege de regelmaat kun je het aantal lucifers uitrekenen als je het figuurnummer weet, en omgekeerd.



a Het aantal lucifers l hangt af van het figuurnummer n. De formule die hierbij hoort, is $L = n(2n + 2)$. Bereken het aantal lucifers voor figuur 6.

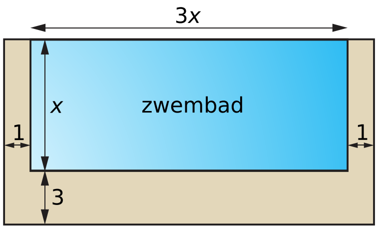
Je ziet opnieuw de eerste drie van een serie luciferfiguren.



b Welk verband tussen l en n bestaat er bij deze tweede serie luciferfiguren?

c Bij welk figuurnummer zitten er $1{,}25$ keer zo veel lucifers in de figuur uit serie 1 als in de figuur uit serie 2?

Opgave 7: Zwembad



Kyra heeft een rechthoekig zwembad in haar tuin. De lengte van haar zwembad is drie keer zo lang als de breedte. Aan een lange kant van het zwembad staan bomen, dat laat ze zo. Aan de andere drie kanten laat ze tegels leggen. Aan de twee korte kanten van het zwembad komen de tegels 1 m breed te liggen, en aan de lange kant komen de tegels 3 m breed te liggen zodat ze daar ligstoelen neer kan zetten.

De oppervlakte van het zwembad met de tegels erbij wordt anderhalf keer de oppervlakte van het zwembad zonder tegels.

Bereken de afmetingen van het zwembad in meters in twee decimalen nauwkeurig.

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

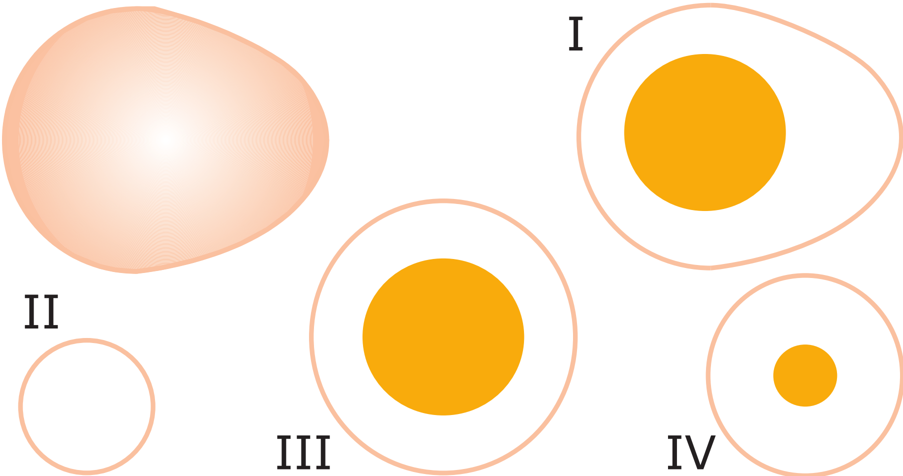
De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

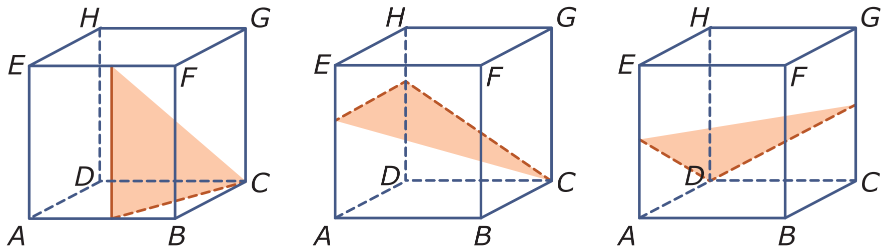
Inhoud Katern 2

Math4all
www.math4all.nl

Werkblad bij Opgave 1 op pagina 69.



Werkblad bij Opgave 6 op pagina 71.



figuur I figuur II figuur III

Werkblad bij Opgave 7 op pagina 71.