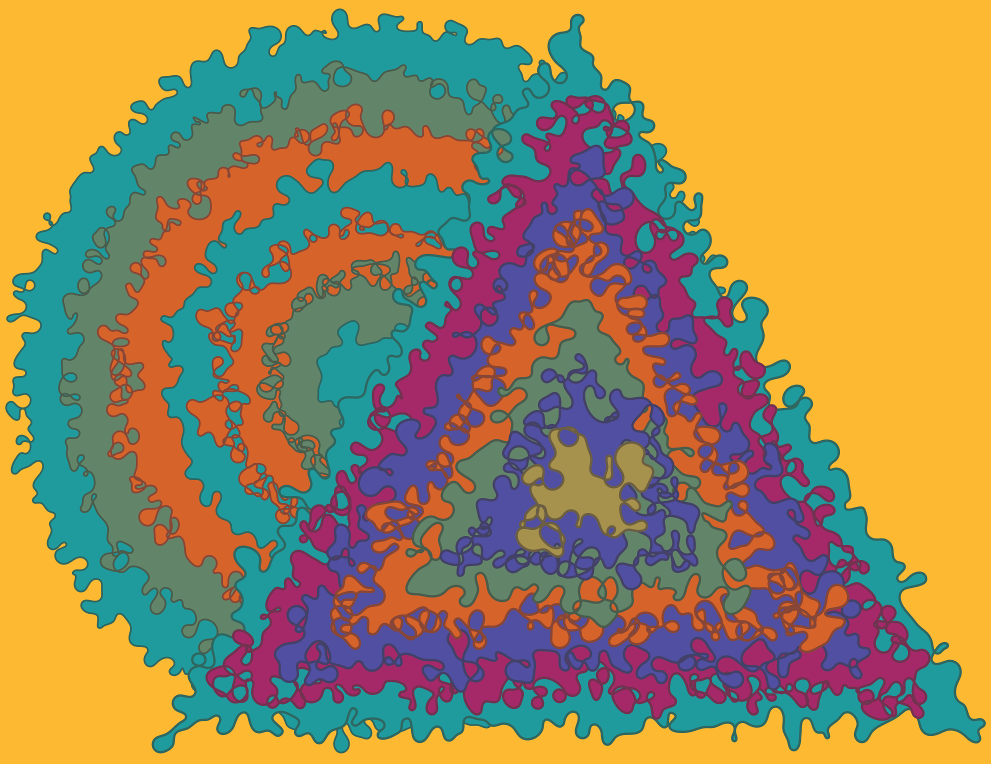
Wiskunde / PGA

2 VMBO

Meetkundige berekeningen

ConTeXt College



Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je werkt dan onder begeleiding van je docent in kleine groepjes aan wiskundige problemen en samen bouw je de theorie op en maak je er een overzicht van.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee je kunt nagaan of je de stof beheerst. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding vind je terug in de marge.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die je alleen hoeft te maken als je er genoeg tijd voor hebt
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die je alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk voor je was

1

Meetkundige berekeningen

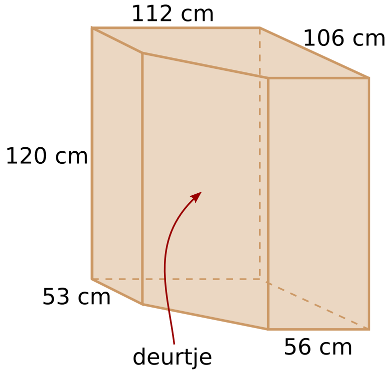
1.1 Pythagoras

Inleiding

Kees gaat later werken in de meubelmakerij bij hem naast de deur. Hij loopt er al regelmatig rond. Ze zijn bezig met een houten hoekkastje waarvan je hier het ontwerp ziet. Kees vraagt zich af hoe je nu vooraf de breedte van het deurtje kunt weten.

De meubelmaker vertelt hem dat je daarvoor de stelling van Pythagoras kunt gebruiken. Dat is een eeuwenoude regel, genoemd naar de beroemde Oudgriekse wijsgeer **Pythagoras**.

Eerst ga je nu - samen met Kees - ontdekken wat die stelling inhoudt...



Figuur 1.1

Je leert in dit onderwerp

- de stelling van Pythagoras kennen en bewijzen;
- de langste zijde van een rechthoekige driehoek berekenen met de stelling van Pythagoras.

Voorkennis

- vanuit de oppervlakte van een vierkant de lengte van de zijden berekenen door worteltrekken;
- de oppervlakte van roosterfiguren bepalen;
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- werken met coördinaten.

Aantekeningen

Theorie

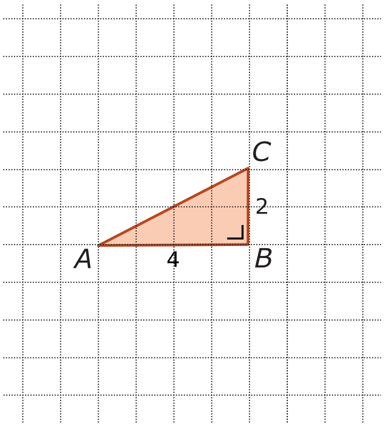
Om te onthouden

Verwerken

★

Opgave 1.1

Hier zie je een rechthoekige driehoek op een rooster. De figuur staat ook op het **Werkblad**.



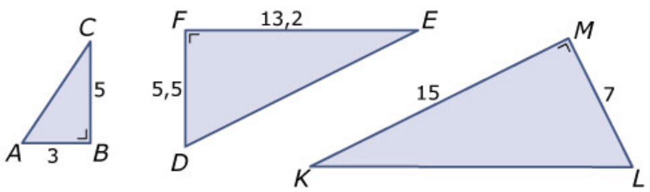
Figuur 1.2

Teken op elk van de zijden een vierkant. Bereken daarmee de lengte van de langste zijde in twee decimalen nauwkeurig.

★

Opgave 1.2

Hier zie je drie rechthoekige driehoeken.



Figuur 1.3

Bereken in elke driehoek de lengte van de langste zijde in één decimaal nauwkeurig.

★

Opgave 1.3

Een glazenwasser moet een raam op de tweede verdieping wassen. De ladder moet daarvoor op 8 m boven de begane grond tegen de muur komen. De voet van de ladder moet op 2 m van het huis af staan.

Maak een schets van de situatie. Bereken hoe lang zijn ladder moet zijn in cm nauwkeurig.

★ ★

Opgave 1.4

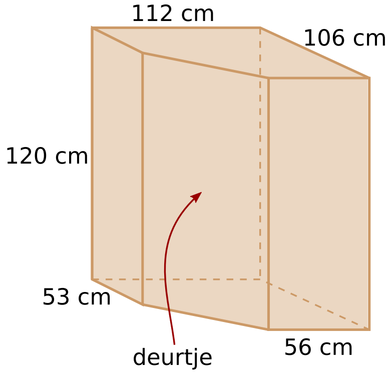
Op een zuiver vierkante tafel met een zijde van 1,60 m wil iemand een zuiver rond tafelkleed leggen.

Hoe groot moet de diameter van dit tafelkleed minstens zijn om de hele tafel te kunnen bedekken? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Toepassen

Hier zie je de schets van het hoekkastje dat in de meubelfabriek bij Kees in de buurt wordt gemaakt.
Om het goed in elkaar te zetten worden de verschillende onderdelen afzonderlijk op schaal getekend.
Je hebt een bovenkant en een precies gelijke onderkant, allebei vijfhoeken met drie rechte hoeken.
Verder heb je vier rechthoekige zijwanden en één rechthoekig deurtje.

Alles wordt getekend op schaal 1 : 10, dus elke cm wordt in de tekening een mm.
De meeste afmetingen staan in de tekening, alleen de breedte van het deurtje ontbreekt.



Figuur 1.4

★ **Opgave 1.5: Het hoekkastje op schaal**

Bekijk de tekening van het hoekkastje.

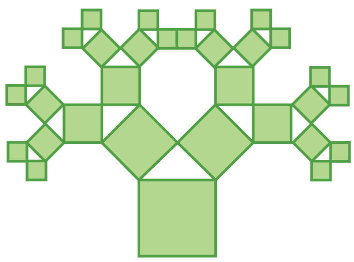
a Teken de bovenkant (en daar mee ook de onderkant) op schaal 1 : 10.

Om de breedte van het deurtje te berekenen kun je de tekening van de bovenkant gebruiken.

b Leg uit waarom en hoe je daarbij de stelling van Pythagoras gebruikt.

★ ★ **Opgave 1.6: Pythagorasbomen**

Je ziet hier het begin van een Pythagorasboom. Hij bestaat uit vierkanten die steeds gelijkbenige rechthoekige driehoeken insluiten. Hij is in 1942 bedacht door de Nederlandse ingenieur en wiskundeleraar Albert Bosman.



Figuur 1.5

a Teken zelf zo'n Pythagorasboom als deze hiernaast. Begin met een grootste vierkant van 4 bij 4 cm. Hoe groot zijn de kleinste vierkanten?

b Je kunt je Pythagorasboom nog met volgende stappen uitbreiden, alleen in het midden van de figuur ontstaat een probleem. Welk probleem?

c Teken de Pythagorasboom verder tot je vierkantjes hebt van 0,5 bij 0,5 cm.

d Het lijkt wel of de totale boom steeds breder en hoger wordt. Is dat ook zo? Of past de hele boom binnen een rechthoek? En welke afmetingen heeft die rechthoek dan?

Practicum

Bekijk de applet: stelling van Pythagoras gebruiken

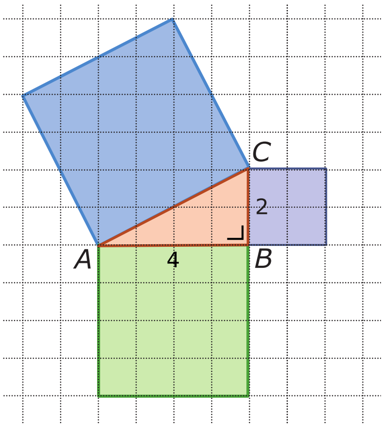
In deze applet kun je de punten A, B en C verplaatsen. Als je twee zijden van ΔABC een gehele waarde geeft, krijgt de derde zijde vaak geen gehele waarde.

- Controleer de benadering van de lengte van die derde zijde met de stelling van Pythagoras.
- Wanneer hebben alle drie de zijden een gehele lengte?

Antwoorden

1.1 Oppervlakte vierkant op AB is 16.
Oppervlakte vierkant op BC is 4
Oppervlakte vierkant op AC is 20 ("hokjes tellen")>

Dus $AC = \sqrt{20} \approx 4{,}47$.



1.2 $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 3^2 + 5^2 = 34$, dus $AC = \sqrt{34}$.

$DE^2 = DF^2 + EF^2$
$DE^2 = 5{,}5^2 + 13{,}2^2 = 204{,}49$, dus $DE = \sqrt{204{,}49} \approx 14{,}3$.

$KL^2 = KM^2 + LM^2$

$KL^2 = 15^2 + 7^2 = 274$, dus $KL = \sqrt{274}$.

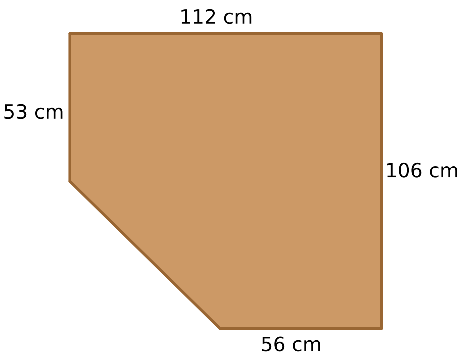
1.3 De ladder zelf is de langste zijde van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 2 m en 8 m.
Noem de lengte van de ladder l, dan is $2^2 + 8^2 = l^2$.

Dus $l = \sqrt{68} \approx 8{,}25$ m.

1.4 De diameter van het ronde tafelkleed moet een minimale lengte hebben die gelijk is aan de diagonaal van het vierkante tafelblad.
De diagonaal d kan worden berekend in centimers:

$d^2 = 160^2 + 160^2$ geeft $d = \sqrt{51200} \approx 226{,}3$ cm.
De diameter van het tafelkleed moet dus minimaal 226,3 cm zijn. Afgerond op gehele centimeters is dat 227 cm.

1.5 a Zie figuur. Maak jouw tekening écht op de goede schaal.

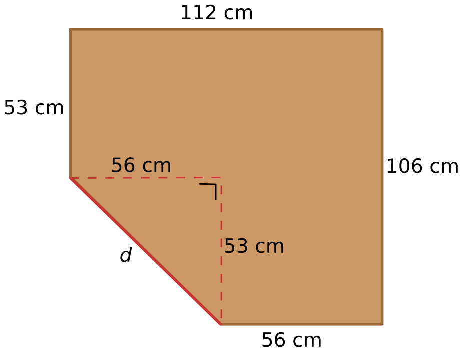


b Bekijk de figuur hieronder. De breedte van het deurtje d is de langste zijde van de getekende rechthoekige driehoek.

Ga na, dat de rechthoekszijden van die driehoek inderdaad 56 cm en 53 cm moeten zijn.

Stelling van Pythagoras: $d^2 = 53^2 + 56^2 = 5945$, dus $d = \sqrt{5945} \approx 77{,}1$ cm.

De stelling van Pythagoras is nodig om die breedte tot op de mm nauwkeurig te kunnen berekenen. In een tekening op schaal is nameten niet nauwkeurig genoeg.

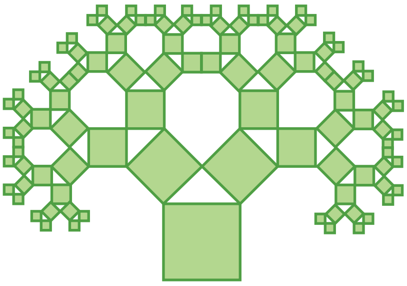


1.6 a Teken de figuur na.

De kleinste vierkanten zijn 1 bij 1 cm.

b In het midden komen er vierkanten tegen elkaar en daar is de boom dus niet meer uit te breiden of je moet vierkantjes over elkaar heen leggen.

c Je moet heel nauwkeurig tekenen. Er komen nog twee stappen bij, maar er zijn nu meer plekken waar 'takken' over elkaar gaan lopen.



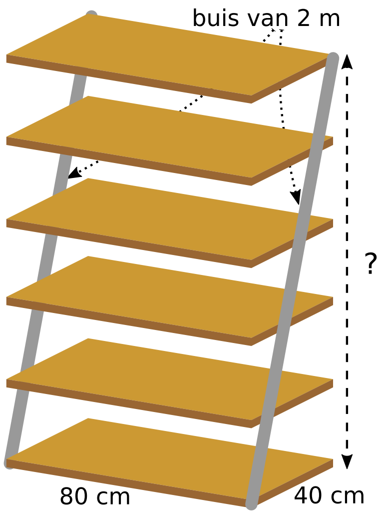
d Leuk om zelf eens uit te zoeken. Misschien ontdek je wel dat de hele Pythagorasboom altijd binnen een rechthoek past die 6 keer zo lang is als het vierkantje waarmee je begint en 4 keer zo breed.

1.2 Lengtes berekenen

Inleiding

De meubelmaker heeft een opdracht gekregen voor een wat bijzondere boekenkast. Hij heeft zelf nog twee stalen buizen van 2 m lengte liggen en de klant heeft nog zes boekenplanken van 80 cm bij 40 cm liggen. Je ziet hier hoe de boekenkast moet gaan worden. Tussen de buizen worden strips gelast waar de planken op worden bevestigd. Op de bovenste plank kunnen geen zware boeken, alleen een leuke vaas of zoiets. De boekenkast komt tegen een verticale muur.

De vraag is nu wel hoe ver de planken uit elkaar moeten. Kees vertelt hem dat je ook daarvoor de stelling van Pythagoras kunt gebruiken.



Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- lengtes berekenen met de stelling van Pythagoras;
- de omgekeerde stelling van Pythagoras gebruiken om rechte hoeken te maken.

Voorkennis

- de stelling van Pythagoras in rechthoekige driehoeken toepassen;
- werken met coördinaten.

Aantekeningen

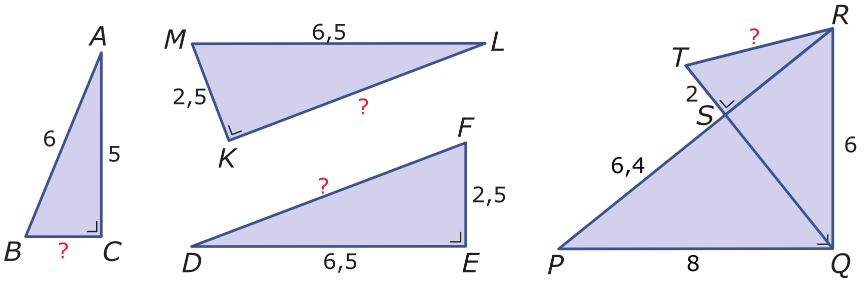
Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 2.1**

Hier zie je vier figuren met rechthoekige driehoeken.



Figuur 2.2

Bereken in elke figuur de exacte lengte van de zijde met het vraagteken.

★ **Opgave 2.2**

Een glazenwasser moet een raam op de tweede verdieping wassen. De ladder moet daarvoor op 5,5 m boven de begane grond tegen de muur komen. De ladder is helemaal uitgeschoven 6 m lang.

Maak een schets van de situatie. Bereken hoe ver hij deze ladder van de voet van de muur moet zetten.

★ **Opgave 2.3**

Een computer heeft een 17 inch monitor. Dit betekent dat de diagonaal van het zuiver rechthoekige beeldscherm 17 inch is. De hoogte van het beeld is dan 10 inch. 1 inch = 2,54 cm.

Maak een schets van de situatie. Bereken de afmetingen van het beeldscherm. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

★ **Opgave 2.4**

Welke van deze driehoeken zijn rechthoekig? Welke hoek is dan recht?

a Driehoek ABC met $AB = 10$, $BC = 7{,}5$ en $AC = 12{,}5$.

b Driehoek DEF met $DE = 2$, $DF = 2$ en $EF = 3$.

c Driehoek GHI met $GH = 10$, $GI = 26$ en $HI = 24$.

d Driehoek KLM met $KL = 5$, $KM = 5$ en $LM = \sqrt{50}$.

★ **Opgave 2.5**

Je ziet hier een Zweeds huis. Let op de rode dakpannen van het huis, niet die van de uitbouw aan de voorkant. Stel dat de bovenste verdieping 6 m breed en 10 m lang is. (Die 10 m is de lengte van één dakgoot.) Stel verder dat de nok van het dak 3 m boven het midden van de vloer van de bovenste verdieping zit. Van de gebruikte dakpannen zijn er ongeveer 17,5 nodig per m^2 dak.

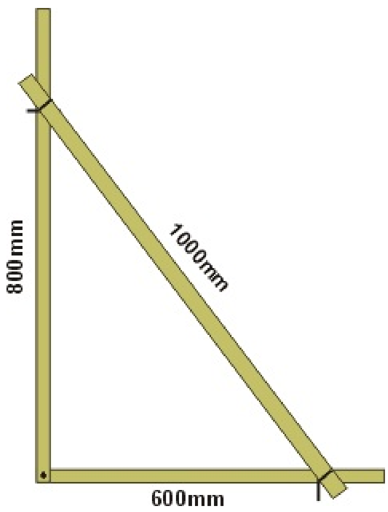
Hoeveel rode dakpannen zijn er voor dit huis ongeveer nodig?

Figuur 2.3

Toepassen

In de bouw wordt voor het maken van rechte hoeken soms een bouwhaak gebruikt. Hier zie je er één. Je maakt hem met de zogenaamde 3,4,5-steek.

- Bevestig twee latten met de uiteinden als een hoek aan elkaar. Maak ze vast met een draadnagel, zodat je de latten nog kunt draaien ten opzichte van elkaar.
- Meet op de éne lat 600 mm af ($3 \cdot 200$) en op de andere 800 mm ($4 \cdot 200$).
- Meet op een derde langere lat 1000 mm af ($5 \cdot 200$).
- Schuif de langste lat over de gemaakte hoek tot de maatstrepen precies op elkaar liggen. Nagel de schuine lat vast met 1 of 2 nagels en sla nog een nagel in de haakse hoek.



Figuur 2.4

Je hebt nu een rechte hoek gekregen, want in de driehoek die ontstaat geldt de stelling van Pythagoras. **Bekijk deze videoclip over een rechte hoek uitzetten.**

★ Opgave 2.6: 3,4,5-steek

Bekijk hierboven wat de 3,4,5-steek is en hoe die in de bouw wordt gebruikt. Bekijk ook de videoclip over het maken van een rechte hoek in de praktijk.

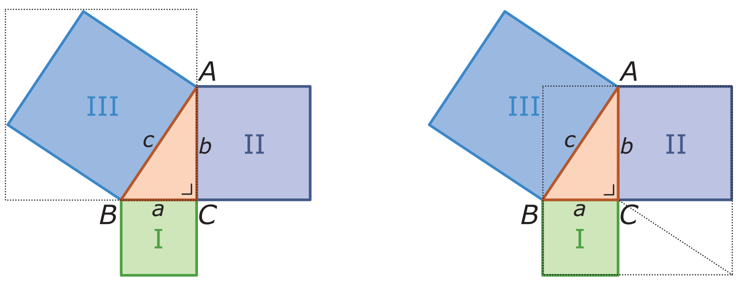
a Laat zien, dat een 3,4,5-driehoek een rechte hoek oplevert.

Vroeger werd voor de 3,4,5-steek een aaneengesloten touw met twaalf knopen gebruikt. Die twaalf knopen zaten op onderling gelijke afstand van elkaar.

b Laat met een figuur zien hoe je daarmee een 3,4,5-steek maakt. Leg ook uit waarom het niet uitmaakt hoe lang dit twaalfknopentouw is.

★ Opgave 2.7: Altijd checken of iets echt waar is...

Je kunt nu de stelling van Pythagoras wel gebruiken, maar hoe zeker ben je er van dat hij altijd correct is? Bekijk daartoe deze twee figuren.



Figuur 2.5

a Bekijk eerst de linker figuur. Uit welke vijf delen bestaat de oppervlakte van het gestippelde vierkant?

b Bekijk nu de rechter figuur. Uit welke zes delen bestaat de oppervlakte van het gestippelde vierkant?

c Welke conclusie kun je uit het voorgaande trekken?

d Heb je nu de stelling van Pythagoras afdoende bewezen?

Practicum

Bekijk de applet: stelling van Pythagoras gebruiken

In deze applet kun je de punten A, B en C verplaatsen. Als je twee zijden van ΔABC een gehele waarde geeft, krijgt de derde zijde vaak geen gehele waarde.

- Controleer de benadering van de lengte van die derde zijde met de stelling van Pythagoras.
- Wanneer hebben alle drie de zijden een gehele lengte?

Antwoorden

2.1 $BC^2 + AC^2 = AB^2$

$BC^2 = 6^2 - 5^2 = 11$, dus $BC = \sqrt{11}$.

$KL^2 + KM^2 = LM^2$

$KL^2 = 6{,}5^2 - 2{,}5^2 = 36$, dus $KL = \sqrt{36} = 6$.

$DE^2 + EF^2 = DF^2$
$DF^2 = 6{,}5^2 + 2{,}5^2 = 48{,}5$, dus $DF = \sqrt{48{,}5}$.

Als eerste geldt $PQ^2 + QR^2 = PR^2$.

$6^2 + 8^2 = PR^2$, dus $PR = \sqrt{100} = 10$.

Er geldt ook dat $SR = PR - 6{,}4 = 3{,}6$.
Vervolgens geldt: $SR^2 + TS^2 = TR^2$.
$3{,}6^2 + 2^2 = TR^2$, dus $TR = \sqrt{16{,}96} \approx 4{,}12$.

2.2 Teken een driehoek ABC, waarin AC de ladder is en AB de gevraagde afstand.
Dan is $AB^2 + 5{,}5^2 = 6^2$, zodat $AB^2 = 6^2 - 5{,}5^2 = 5{,}75$.

Dus $AB = \sqrt{5{,}75} \approx 2{,}40$ m.

2.3 Het beeldscherm is $\sqrt{17^2 - 10^2} = \sqrt{189}$ inch lang en dat is ongeveer 34,9 cm.
Dit beeldscherm heeft een lengte van 349 mm en een breedte van 254 mm.

2.4 a $10^2 + 7{,}5^2 = 12{,}5^2$, dus deze driehoek is rechthoekig met $\angle B$ als rechte hoek.

b $2^2 + 2^2 \neq 3^2$, dus deze driehoek is niet rechthoekig.

c $10^2 + 24^2 = 26^2$, dus deze driehoek is rechthoekig met $\angle H$ als rechte hoek.

d $5^2 + 5^2 = 50$, dus deze driehoek is rechthoekig met $\angle K$ als rechte hoek.

2.5 Aan de zijkant van het huis is een rechthoekige driehoek te zien: van de nok recht naar beneden tot de vloer van de bovenste verdieping, van het midden van de vloer van de bovenverdieping naar de dakgoot en van de dakgoot naar de nok. De zijkant z van het pannendak is dus te berekenen met de stelling van Pythagoras: $3^2+3^2 = z^2$, zodat $z = \sqrt{18}$.

Het dak bestaat uit twee rechthoeken van 10 m bij $\sqrt{18} \approx 4{,}24$ m. De totale dakoppervlakte is daarom ongeveer 84,8 m^2.
Daarvoor zijn $84{,}8 \cdot 17{,}5 = 1484$ dakpannen nodig (naar beneden afronden kan vanwege de schoorsteen).
(De maten van het dak zullen ongetwijfeld in werkelijkheid zo worden gekozen dat het met gehele dakpannen kan worden bedekt.)

2.6 a $3^2 + 4^2 = 5^2$, dus in zo'n driehoek geldt de stelling van Pythagoras. Het is dus een rechthoekige driehoek.

b Noem de tussenruimtes tussen de knopen x cm. Je kunt dan een driehoek maken met zijden van $3x$, $4x$ en $5x$. Omdat $(3x)^2 + (4x)^2 = (5x)^2$, geldt in deze driehoek altijd de stelling van Pythagoras en dus is hij altijd rechthoekig.

2.7 a Uit vierkant III en uit vier keer rechthoekige driehoek ABC.

b Uit de vierkanten I en II en uit vier keer rechthoekige driehoek ABC.

c Dat de oppervlakte van vierkant III gelijk moet zijn aan die van de vierkanten I en II samen.

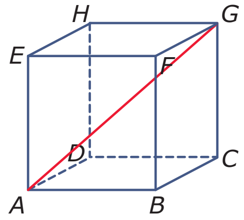
d De redenering hiervoor ziet er wel sterk uit. Maar er zijn wat haken en ogen...

Hoe weet je bijvoorbeeld zeker dat al die rechthoekige driehoeken binnen de gestippelde vierkanten ook echt gelijk zijn aan ΔABC? Een echt zorgvuldig bewijs kun je in de wiskunde alleen leveren binnen een goed opgebouwde theorie.

1.3 Lengtes in 3D

Inleiding

Kees kent nu de stelling van Pythagoras. Die gebruik je voor het berekenen van lengtes. Dat kun je toepassen in allerlei situaties in twee dimensies, in het platte vlak. Maar in een meubelfabriek wordt gewerkt aan echte ruimtelijke, driedimensionale objecten.
Kees gaat uitzoeken hoe je ook dan de stelling van Pythagoras kunt gebruiken.
Hoe kun je bijvoorbeeld in zo'n kubus de lengte van een lichaamsdiagonaal uitrekenen?



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- de stelling van Pythagoras gebruiken in berekeningen van lengtes in ruimtelijke figuren;
- dit toepassen in praktische situaties.

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras.
- werken met ruimtelijke figuren en de namen van de belangrijkste ruimtelijke figuren;
- de begrippen diagonaal en lichaamsdiagonaal.

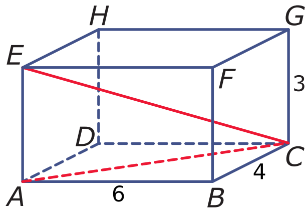
Aantekeningen

Theorie

Om te onthouden

Verwerken

★ **Opgave 3.1**



Figuur 3.2

Bereken van deze balk de lichaamsdiagonaal EC in twee decimalen nauwkeurig.

★ **Opgave 3.2**

De kooi van een lift heeft de vorm van een balk met een breedte van 1,5 m, een diepte van 2 m en een hoogte van 2,5 m.

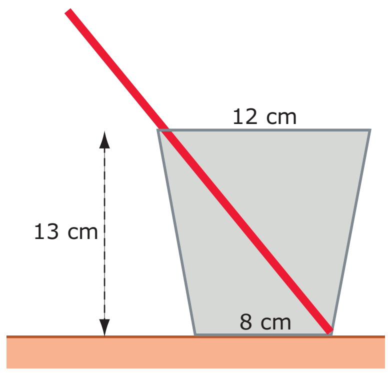
a Hoe lang is de langste onbuigzame paal die je in die lift kunt vervoeren? Geef je antwoord in meters op één decimaal nauwkeurig.

b Je hebt een vlak rechthoekig paneel met een breedte van 1,45 en een lengte van 3,15 m. Kan dat in de lift?

★ **Opgave 3.3**

In een glas staat een rietje van 24 cm lengte dat tegen de bovenrand van het glas rust, zie figuur. De diameter van de cirkelvormige bovenrand van het glas is 12 cm en die van de cirkelvormige onderrand is 8 cm. De hoogte van het glas is 13 cm.

Hoe lang is het deel van het rietje dat buiten het glas steekt?

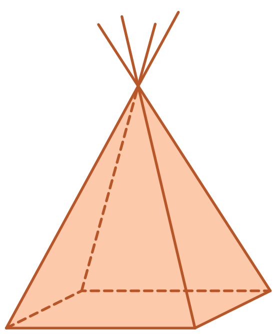


Figuur 3.3

★ **Opgave 3.4**

Deze figuur stelt een wigwam voor die de vorm heeft van een regelmatige vierzijdige piramide. Het grondvlak is een vierkant met een oppervlakte van 50 m^2. De vier opstaande stokken waarover het tentdoek is gespannen hebben alle vier een lengte van 12 m, waarvan telkens 2 m buiten de wigwam steekt.

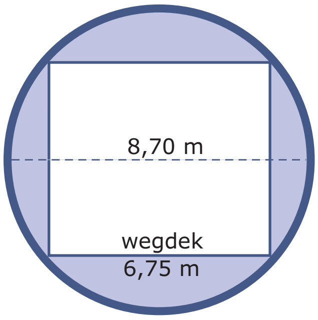
Hoe hoog is deze wigwam?



Figuur 3.4

★★ **Opgave 3.5**

De Waaslandtunnel is de oudste voertuigentunnel onder de Schelde die Antwerpen verbindt met de linkeroever van die rivier. De tunnel bestaat uit een cilindervormige buis met een (inwendige) diameter van 8,70 m. Daarin is een wegdek aangelegd met een breedte van 6,75 m. Je ziet hier een vooraanzicht van de tunnelbuis. De rechthoek in de buis stelt de ruimte voor waar het verkeer kan rijden, de rest is afgesloten en bestemd voor allerlei voorzieningen zoals luchtverversing, elektra, e.d.



Figuur 3.5

a Bereken de hoogte van deze rechthoek in cm nauwkeurig.

b Hoeveel procent van de tunnelbuis is niet bestemd voor het verkeer?

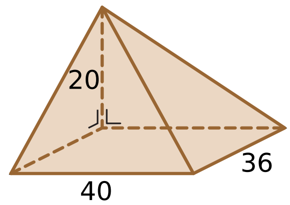
★ ★ **Opgave 3.6**

Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 200$, $BC = 80$ en $CG = 60$ mm. Punt P is het midden van ribbe AB.

Onderzoek of driehoek HPG rechthoekig is.

Toepassen

De meubelmakerij maakt een tuinkast. De klant wil die in een hoek van zijn huis tegen de muur plaatsen. Er moet een schuin dakje opkomen waarvan de hoogste punt precies in die hoek zit. De kast wordt 40 cm breed, 36 cm diep en 180 cm hoog. Daar bovenop komt het schuine dakje dat je hiernaast ziet. Om elk vlakje te kunnen uitzagen worden alle rechte hoeken vastgesteld en de lengtes van de schuin lopende ribben berekend.



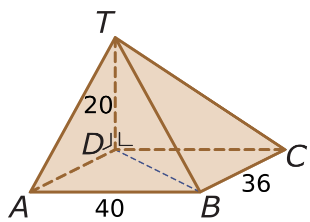
Figuur 3.6

Kees ziet de stelling van Pythagoras alweer voorbij komen...

★ **Opgave 3.7: Het schuine dakje**

Je ziet hier het schuine dakje in **Toepassen** nog eens.
Kees heeft letters bij de hoekpunten gezet.

De figuur is een piramide waarvan de top T recht boven hoekpunt D zit.



Figuur 3.7

a Noem drie rechthoekige driehoeken met DT als zijde.

b Bereken de lengtes van AT en CT in mm nauwkeurig.

Je hebt nu voldoende gegevens om alle grensvlakken van dit dakje te kunnen uitzagen uit een plaat mdf.

c Leg uit waarom dat zo is.

d Hoe lang wordt ribbe BT? Geef je antwoord weer in mm nauwkeurig.

Opgave 3.8: De bolling van de Aarde

De planeet Aarde is (ongeveer) bolvormig en heeft een omtrek van 40000 km. Vat de planeet op als een perfecte bol.

a Bereken de straal van de Aarde in km nauwkeurig.

In het dagelijks leven merk je niet veel van de bolling van de Aarde. Maar stel je eens voor dat je een kaarsrechte tunnel wilt boren van Groningen naar Maastricht met een lengte van 300 km.

b Bereken hoe diep de bovenkant van die tunnel in het midden onder het aardoppervlak zou zitten.

Antwoorden

3.1 In ΔABC is $6^2 + 4^2 = AC^2$, dus $AC^2 = 52$.

In ΔACE is $AC^2 + AE^2 = EC^2$, dus $52 + 3^2 = EC^2$ zodat $EC = \sqrt{61} \approx 7{,}81$.

3.2 a Bereken eerst een diagonaal van de vloer van de lift en daarmee de lichaamsdiagonaal.

De diagonaal van de vloer bedraagt $\sqrt{1{,}5^2 + 2^2} = 2{,}5$.

Vervolgens kun je de lichaamsdiagonaal l berekenen:
$l^2 = 2{,}5^2 + 2{,}5^2$
$l = \sqrt{12{,}5} = 3{,}5$

Je vindt ongeveer 3,5 m.

b De linker en rechter zijvlaksdiagonalen zijn allebei z m lang.

Er geldt $2^2 + 2{,}5^2 = 10{,}25 = z^2$, dus $z = \sqrt{20} \approx 3{,}20$ m.
Dat is langer dan 3,15 m, dus het kan.

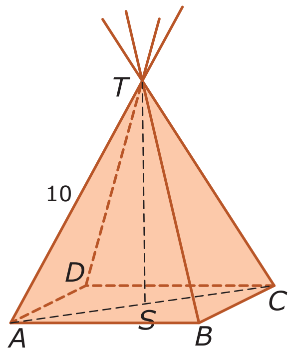
3.3 Het deel van het rietje binnen het glas is de hypotenusa van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 13 cm en 10 cm.

Voor de lengte l van dit deel van het rietje geldt $10^2 + 13^2 = l^2$, dus $l = \sqrt{269} \approx 16{,}4$ cm.
Er steekt dus nog 7,6 cm van het rietje buiten het glas.

3.4 De vloer is een vierkant met zijden van $\sqrt{50}$ m.

Dan is $AC^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2 + \left(\sqrt{50}\right)^2 = 100$, dus $AC = \sqrt{100} = 10$.

En dus geldt voor de gevraagde hoogte $TS^2 + 5^2 = 10^2$, zodat $TS = \sqrt{75} \approx 8{,}67$ m.



3.5 a De diameter van de tunnel is ook de diagonaal van de rechthoek. Door de diagonaal te tekenen ontstaat er een rechthoekige driehoek met de diagonaal als hypotenusa.
$8{,}70^2 = 6{,}75^2 + h^2$

$h^2 = 8{,}70^2 - 6{,}75^2$

$h = \sqrt{8{,}70^2 - 6{,}75^2} \approx 5{,}49$ m.

b De oppervlakte van het vooraanzicht is $\pi \cdot 4{,}35^2 \approx 59{,}45$ m^2. De oppervlakte van de rechthoek is $6{,}75 \cdot 5{,}49 \approx 37{,}06$ m^2. Dus is 22,39 van de 59,45 m^2 niet voor het verkeer bestemd. Dat is ongeveer 38%.

3.6 Bereken alle drie de zijden van de driehoek en controleer of de stelling van Pythagoras hierin klopt.
Je weet dat $HG = 200$ en de lengte van $HP = GP$.
Bereken eerst PC.
$PC^2 = 100^2 + 80^2$

$PC = \sqrt{16400} = 128{,}06$

Je kan dan GP bereken uit ΔPCG.
$PC^2 + GC^2 = GP^2$

$\left(\sqrt{16400}\right)^2 + 60^2 = GP^2$

$GP = \sqrt{20000} = 141{,}42$

Controle: $200 = \sqrt{\left(\sqrt{20000}\right)^2 + \left(\sqrt{20000}\right)^2} = \sqrt{40000}$.

Deze driehoek is rechthoekig.

3.7 a De driehoeken ADT, BDT en CDT.

b In ΔADT geldt: $AD^2 + DT^2 = AT^2$.
Dus $AT^2 = 36^2 + 20^2 = 1696$, zodat $AT \approx 41{,}2$ cm.

In ΔCDT geldt: $CD^2 + DT^2 = CT^2$.
Dus $CT^2 = 40^2 + 20^2 = 2000$, zodat $CT \approx 44{,}7$ cm.

c De grensvlakken ADT, BDT en CDT zijn halve rechthoeken waarvan je de lengte en de breedte weet. En dit geldt ook voor de grensvlakken ABT en BCT. Want $\angle BAT$ en $\angle BCT$ zijn ook rechte hoeken.

d In ΔABD geldt: $AD^2 + AB^2 = BD^2$.
Dus $BD^2 = 36^2 + 40^2 = 2896$.

In ΔBDT geldt: $BD^2 + DT^2 = BT^2$.
Dus $BT^2 = 2896 + 20^2 = 3296$, zodat $BT \approx 57{,}4$ cm.

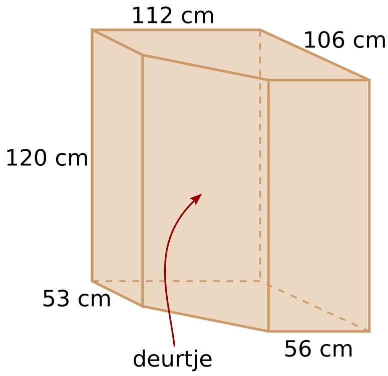
3.8 a De diameter is ongeveer $\frac{40000}{\pi} \approx 12732$, dus de straal is ongeveer 6366 km.

b Maak een schets waarin je de Aarde als cirkel voorstelt met een straal van 6366 km. De tunnel van 300 km wordt een rechte lijn die twee punten A en B op het aardoppervlak verbindt. De straal van de Aarde teken je nu vanuit het middelpunt M naar A en naar B. Ook teken je die straal vanuit M door het midden S van AB.
Je kunt dan MS berekenen: $MS^2 + SA^2 = MA^2$ geeft $MS^2 = 6366^2 - 150^2$ en dus $MS \approx 6364$ km.
Dus zou de tunnel in het midden maar liefst 2 km diep komen te liggen!

1.4 Oppervlakte ruimtelijke figuren

Inleiding

Als je zo'n hoekkastje wilt bouwen en verkopen, moet je weten hoeveel materiaal er voor nodig is. In de meubelfabriek mag Kees de oppervlakte aan materiaal uitrekenen.
Het kastje bestaat uit een vijfhoekige onderkant en bovenkant en uit vijf rechthoeken.
Van elk van die onderdelen moet Kees de oppervlakte bepalen.



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- de stelling van Pythagoras toepassen bij het berekenen van oppervlaktes;
- de oppervlakte berekenen van een ruimtelijke figuur waarvan je een uitslag kunt tekenen.

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek en een cirkel bepalen;
- werken met coördinaten.

Aantekeningen

Theorie

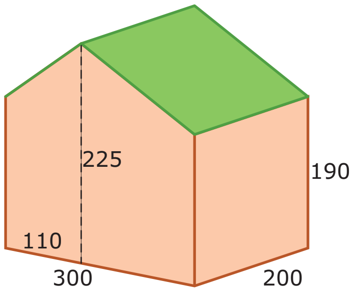
Om te onthouden

Verwerken

★ Opgave 4.1

Je ziet hier een vereenvoudigde tekening van een tuinhuisje. Het grondvlak is een rechthoek, evenals de twee opstaande zijwanden. De voorwand en de achterwand zijn vijfhoeken. Alle afmetingen in de figuur zijn in cm.

Bereken de oppervlakte van het dak van dit tuinhuisje en geef je antwoord in m^2 in twee decimalen nauwkeurig.

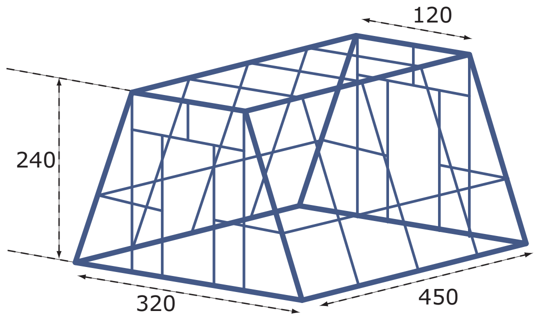


Figuur 4.2

★ Opgave 4.2

Je ziet hier een bijzondere plantenkas. De afmetingen zijn gegeven in cm. De kas heeft de vorm van een symmetrisch prisma en de bodem is uiteraard niet van glas.

Bereken de totale hoeveelheid glas in m^2 die voor deze plantenkas nodig is.



Figuur 4.3

★ Opgave 4.3

Je ziet hier een zogenaamde Romneyloods. Het is een loods in de vorm van een halve cilinder met een diameter van 11 m. De bodem is een rechthoek van 11 bij 20 m.

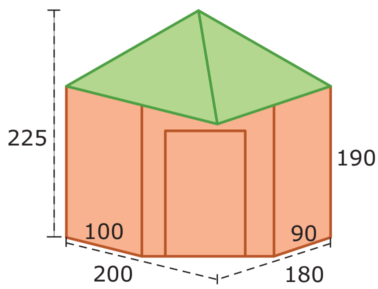
Je hebt zo'n loods laten plaatsen. De halve cilinder die het dak vormt wordt rood geschilderd, de voorkant en de achterkant worden wit gemaakt. Bereken hoeveel m^2 er rood moet worden geschilderd. Omdat het dak van golfplaat is gemaakt moet je er rekening mee houden dat je voor golfplaat ongeveer 1,5 keer zoveel verf nodig hebt per m^2.

Figuur 4.4

★ Opgave 4.4

Dit is een vereenvoudigde tekening van een hoekblokhut. Het dak van die blokhut is een vierzijdige piramide waarvan de top boven het midden van het grondvlak zit. De blokhut zelf is een balk waarvan een hoek is afgesneden om een toegangsdeur in te maken. De afmetingen bij de figuur zijn in cm.

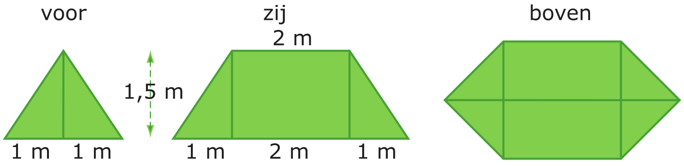
Bereken de oppervlakte van het dak van de blokhut.



Figuur 4.5

★ **Opgave 4.5**

Hier zie je aanzichten van een eenvoudige tent.



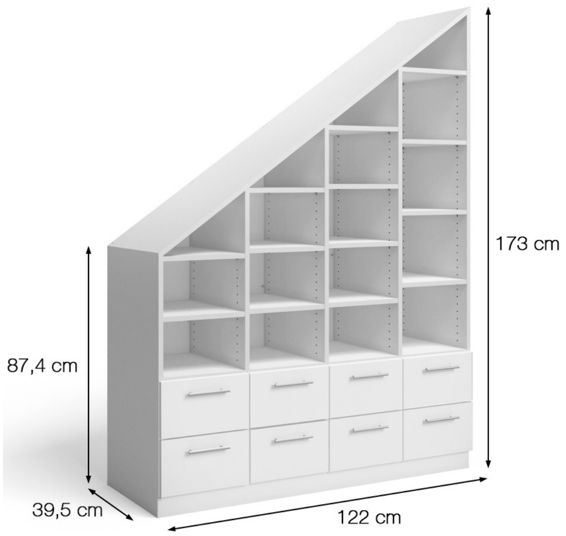
Figuur 4.6

a Maak een tekening van deze tent en zet alle maten in je figuur. Bereken de lengte van alle ribben die nog niet zijn gegeven.

b Bereken hoeveel m^2 tentdoek er voor deze tent nodig is. (Reken het grondzeil niet mee.)

Toepassen

Kees ziet in de meubelmakerij deze kast voor onder een schuin dak.
Hij is gemaakt van MDF-plaat en wit geschilderd.
MDF betekent *Medium Density Fibreboard* en bestaat uit geperste resthoutvezels.
Je ziet de afmetingen in de tekening.
Hoeveel m^2 is ervoor nodig?



Figuur 4.7

★ **Opgave 4.6: Kast onder het schuine dak**

Bekijk de kast onder het schuine dak.

a Bereken eerst de lengte van de schuine kant die onder het dak moet komen.

b Bereken de totale hoeveelheid MDF die voor deze kast nodig is exclusief de laden. Neem aan dat de stootplank aan de voorkant 10 cm hoog is.

Opgave 4.7: Cilindrische kast

Dit metalen kastje bestaat uit drie dezelfde op elkaar gestapelde cilinders met daarin één schuifdeurtje.
Elke cilinder is 30 cm hoog en heeft een diameter van 40.
Bovendien heeft elke cilinder een bodem en een bovenvlak.

Hoe groot is de totale oppervlakte van dit kastje?

Figuur 4.8

Antwoorden

4.1 Gebruik de stelling van Pythagoras om de lengtes van de twee dakdelen te berekenen. Van het rechter dakdeel is de diepte 200 en voor de lengte l geldt: $190^2 + 35^2 = l^2$, dus $l = \sqrt{37325} \approx 193$ cm.

Het oppervlakte ervan is ongeveer $200 \cdot 193$ cm.

Van het linker dakdeel is de diepte 200 en voor de lengte l geldt: $110^2 + 35^2 = l^2$, dus $l = \sqrt{13325} \approx 115$ cm.

Het oppervlakte ervan is ongeveer $200 \cdot 115$ cm.

De totale oppervlakte van het dak is dus ongeveer $200 \cdot 193 + 200 \cdot 115 = 61600$ cm^2 en dat is ongeveer 6,16 m^2.

4.2 Bereken eerst de schuine ribben.

Voor hun lengte l geldt $240^2 + 100^2 = l^2$ cm, dus $l = \sqrt{67600} = 260$ cm.

De oppervlakte van de voorkant is gelijk aan de achterkant: $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 240 + 120 \cdot 240 = 52800$ cm^2.

Oppervlakte van een zijkant: $450 \cdot 260 = 117000$ cm^2.

Oppervlakte van het dak: $120 \cdot 450 = 54000$ cm^2.

De totale oppervlakte aan glas is dan 393600 cm^2 en dat is ongeveer 39,36 m^2.

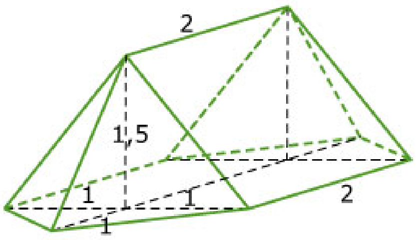
4.3 De oppervlakte van de halve cilinder is $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 5{,}5 \cdot 20 = 110\pi$ m^2. Je hebt dus voor ongeveer $110\pi \cdot 1{,}5 \approx 518{,}4$ m^2 verf nodig.

4.4 De piramide die het dak voorstelt heeft een rechthoekig grondvlak van 200 bij 180 cm. De hoogte van die piramide is 35 cm. Het dak bestaat uit gelijkbenige driehoeken die echter niet alle vier hetzelfde zijn.

Er zijn twee driehoeken met een basis van 200 en een hoogte van $\sqrt{90^2 + 35^2} = \sqrt{9325}$ en er zijn twee driehoeken met een basis van 180 en een hoogte van $\sqrt{100^2 + 35^2} = \sqrt{11225}$.

De totale oppervlakte van het dak is daarom $200 \cdot \sqrt{9325} + 180 \cdot \sqrt{11225} \approx 38384$ cm^2.

4.5 a Zie de figuur.



b Elke driehoek van de uitslag is gelijkbenig met twee benen van $\sqrt{3{,}25}$ m en een basis van $\sqrt{2}$ m. De hoogte daarvan is $\sqrt{\left(\sqrt{3{,}25}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2{,}75}$ m.

De totale oppervlakte is $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2{,}75} + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3{,}25} \approx 11{,}90$ m^2.

4.6 a Die schuine kant is de langste zijde van een rechthoekige driehoek van 122 cm bij $173 - 87{,}4 = 85{,}6$ cm. Voor die langste zijde l geldt dus: $122^2 + 85{,}6^2 = l^2$ zodat $l \approx 149{,}0$ mm.

b De schuine kant is een rechthoek van $\approx 149{,}0 \cdot 39{,}5 \approx 5886$ cm^2.

Er zijn vijf verticale rechthoeken van 39,5 cm breed en met hoogtes van 173 tot 87,4 en daartussen steeds $(173 - 87{,}4)/4 \approx 21{,}4$ cm korter dan de hoogste.
Die hebben samen een oppervlakte van $39{,}5 \cdot 173 + 39{,}5 \cdot 151{,}6 + 39{,}5 \cdot 130{,}2 + 39{,}5 \cdot 108{,}8 + 39{,}5 \cdot 87{,}4 = 25714$ cm^2.

De bodem is een plank van $122 \cdot 39{,}5 = 4819$ cm^2.

Tenslotte zijn er 21 horizontale plankjes met een diepte van 39,5 en een breedte van $\frac{122}{4} = 30{,}5$, dus (vanwege de dikte van het materiaal) ongeveer 30 cm.

Daarvan is de totale oppervlakte $21 \cdot 30 \cdot 39{,}5 = 24885$ cm^2.

De totale hoeveelheid MDF is dus $5886 + 4819 + 25714{,}5 + 24885 = 61304{,}5$ cm^2.
Dat is ongeveer 6,13 m^2 MDF-plaat.

4.7 Bereken eerst de oppervlakte van één cilinder:
de onderkant en de bovenkant zijn cirkels met een straal van 20 cm en dus een oppervlakte van $\pi \cdot 20^2 = 400\pi$ cm^2;
de zijkant (cilindermantel) is uitgerold een rechthoek met een lengte van $\pi \cdot 40$ en een hoogte van 30 cm en dus een oppervlakte van $\pi \cdot 40 \cdot 30 = 1200\pi$ cm^2.

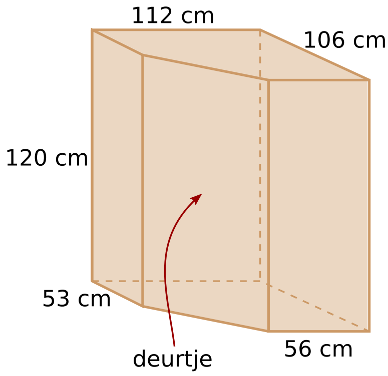
De oppervlakte van één cilinder is $400\pi + 1200\pi = 1600\pi \approx 5027$ cm^2.

De oppervlakte van het kastje is $\approx 3 \cdot 5027 \approx 15080$ cm^2.

1.5 Inhoud ruimtelijke figuren

Inleiding

Van zo'n hoekkastje wil de klant vaak weten hoeveel er in past, kortom de inhoud van het kastje. In de meubelfabriek mag Kees die inhoud uitrekenen.
Het kastje bestaat uit een vijfhoekige onderkant en bovenkant en uit vijf rechthoeken.
De oppervlakte van die onderdelen kan Kees nu wel bepalen.
Maar hoe bereken je de inhoud, dus het aantal cm^3 dat erin past?



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- de inhoud berekenen van een balk, een prisma en een cilinder;
- de inhoud berekenen van een piramide en een kegel.

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- de oppervlakte berekenen van een ruimtelijke figuur waarvan je een uitslag kunt tekenen.

Aantekeningen

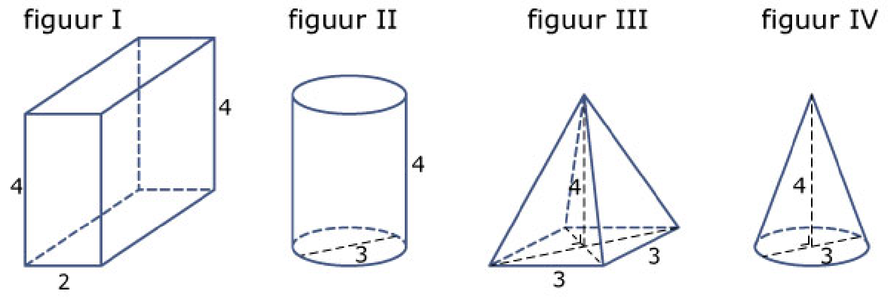
Theorie

Om te onthouden

Verwerken

Opgave 5.1

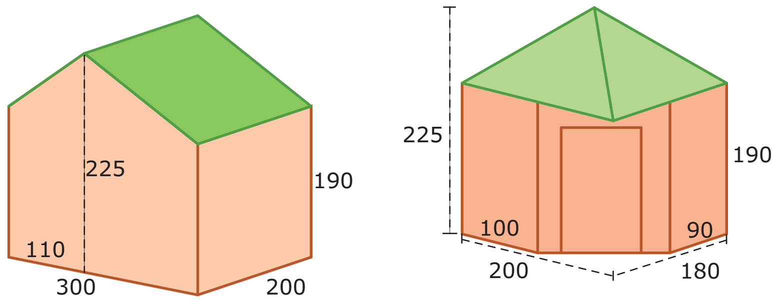
Bereken de inhoud van deze vier figuren, waar nodig in twee decimalen nauwkeurig.



Figuur 5.2

★ Opgave 5.2

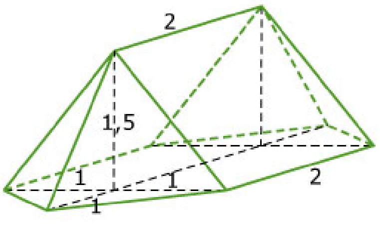
Bereken de inhoud van elk van deze twee tuinhuisjes in m^3 in één decimaal nauwkeurig. Het linker tuinhuisje is een prisma, het rechter tuinhuisje is een hoekblokhut waarvan de onderkant een vijfzijdig prisma is en het dak een vierzijdige piramide met een rechthoekig grondvlak. De afmetingen zijn in centimeter.



Figuur 5.3

★ Opgave 5.3

Hier zie je een tent. De afmetingen zijn in de figuur in meter gegeven. Bereken de inhoud van deze tent.



Figuur 5.4

★ Opgave 5.4

Neem aan dat dit blikje tomatenblokjes zuiver cilindrisch is. De binnenmaten zijn: hoogte 10,4 cm en diameter 7,3 cm. Je ziet dat er 425 milliliter in moet kunnen.

a Bereken de inhoud van dit blik en ga na of er echt 425 milliliter in kan.

b Bereken de oppervlakte van het etiket op het blik.

Figuur 5.5

★ Opgave 5.5

Dit ijshoorntje is kegelvormig. Het heeft een hoogte van 13 en een bovendiameter van 6,1 cm. De fabrikant beweert dat het ijsje een volume van 125 milliliter heeft.

a Ga door berekening na of dat klopt.

b Hoeveel ijsjes passen er theoretisch in een doos van 6,1 bij 13 bij 24,4 cm? En hoeveel passen er in de praktijk in als alle ijsjes netjes heel moeten blijven?

Figuur 5.6

★ ★ Opgave 5.6

Een moderne stoel bestaat uit een gebogen frame waarop een zitting en een rugleuning zijn gemonteerd. Het frame is een gebogen ronde buis met een totale lengte van 8 m. Deze buis heeft een buitendiameter van 20 mm en een binnendiameter van 16 mm. Hij is gemaakt van staal van 7,6 gram per cm^3 en daarna verchroomd.

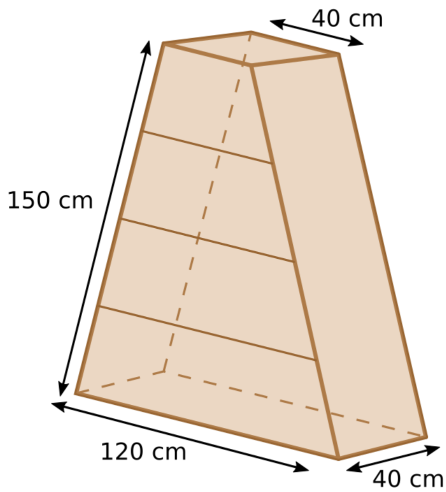
Hoeveel kg staal is er voor deze stoel nodig?

Toepassen

Deze kast heeft de vorm van een prisma, met een symmetrisch trapezium als voorkant.
Er zitten vier laden in die even hoog zijn.

Kees berekent hoeveel MDF-plaat er voor deze kast nodig is.
Voor de laden rekent hij alleen de voorkanten mee, de rest van de laden wordt van ander materiaal gemaakt.

Eerst rekent hij de inhoud uit, is die wel groot genoeg? De klant vroeg om een inhoud van 400 liter, dat is 400 dm^3.



Figuur 5.7

★ Opgave 5.7: Prismavormige kast

Bekijk de kast in **Toepassen**. Je kunt de inhoud ervan berekenen.

a Bereken de inhoud van deze kast. Wordt aan de eis van de klant voldaan?

b Bereken de totale hoeveelheid MDF-plaat die nodig is voor deze kast.

★ Opgave 5.8: Graansilo

Een silo is een opslagplaats voor stort- of bulkgoederen in de vorm van poeders of korrelvormige producten zoals graan, kolen, cement, veevoer, zand, grint, kunstmest, enz. Hier zie je er één in de vorm van een stalen cilinder met een kegelvormige onderkant waar ook de uitstroomopening zit. Het geheel staat op vier poten.

De cilinder is (inclusief poten) 3,00 m hoog. De uitstroomopening zit 1,67 m boven de grond en de onderrand van de cilinder zit op 3,07 m boven de grond. De diameter van de cilinder is 1,48 m.

Je kunt berekenen dat er ongeveer 6 m^3 graan in deze silo kan.

Figuur 5.8

a Laat zien dat de inhoud inderdaad ongeveer 6 m^3 is.

b Je wilt de silo zelf (dus zonder de poten en zonder het kegelvormige uitstroomdeel) rood schilderen. Hoeveel bedraagt de oppervlakte die je moet schilderen?

Antwoorden

5.1 Inhoud figuur I: $2 \cdot 8 \cdot 4 = 128$.
Inhoud figuur II: $\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 4 \approx 28{,}27$.
Inhoud figuur III: $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 12$.
Inhoud figuur IV: $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 4 \approx 9{,}42$.

5.2 Het linker tuinhuisje:
$\left(3{,}00 \cdot 1{,}90 + \frac{1}{2} \cdot 3{,}00 \cdot 0{,}35\right) \cdot 2{,}00 = 12{,}45$ m^3. Dat is ongeveer 12,5 m^3.
Het rechter tuinhuisje:
$\left(2{,}00 \cdot 1{,}80 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}00 \cdot 0{,}90\right) \cdot 1{,}90 + \frac{1}{3} \cdot 2{,}00 \cdot 1{,}80 \cdot 0{,}35 = 6{,}405$. Dat is ongeveer 6,4 m^3.

5.3 Je kunt de tent verdelen in een prisma (het middenstuk) en een piramide (de twee eindstukken tegen elkaar).
De inhoud van het prisma is $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}5 \cdot 2 = 3$ m^3.
De zijden van het vierkante grondvlak van de piramide zijn $\sqrt{1^2 + 1^2}$.
De inhoud van de piramide is $\frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{1^2 + 1^2}\right)^2 \cdot 1{,}5 = 1$ m^3.
De totale inhoud van de tent is dus 4 m^3.

5.4 a $\pi \cdot 3{,}65^2 \cdot 10{,}4 \approx 435{,}3$ cm^3. Dat is ongeveer 435 mL. Dus het kan.
b $\pi \cdot 7{,}3 \cdot 10{,}4 \approx 238{,}5$ cm^2.

5.5 a $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}05^2 \cdot 13 \approx 126{,}6$ en dat is nog iets meer dan de fabrikant opgeeft.
b De doos heeft een inhoud van ongeveer $6{,}1 \cdot 13 \cdot 24{,}4 \approx 1935$ cm^3, dus er zouden $\frac{1935}{125} \approx 15$ ijsjes in moeten gaan. In werkelijkheid gaan er maar 7 of 8 in de doos.

5.6 Het volume van het staal is $\pi \cdot 1{,}0^2 \cdot 800 - \pi \cdot 0{,}8^2 \cdot 800 \approx 904{,}78$ cm^3.
Dus het staal van de stoel weegt ongeveer 6876 gram en dat is iets minder dan 6,9 kg.

5.7 a De voorkant is het grondvlak van het prisma. Voor de oppervlakte ervan moet je de hoogte h ervan weten.
Verdeel de voorkant (een symmetrisch trapezium) in twee halve rechthoeken van 40 bij h en in het midden een rechthoek.
Dan is $40^2 + h^2 = 150^2$, zodat $h = \sqrt{150^2 - 40^2} \approx 144{,}6$ cm.
De oppervlakte van het grondvlak is dus ongeveer $40 \cdot 144{,}6 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 144{,}6 \approx 11565$ cm^2.
De inhoud van de kast is $11565 \cdot 40 \approx 462618$ cm^3 $\approx 462{,}6$ dm^3.
Aan de eis van de klant wordt voldaan.
b De oppervlakte van de voorkant (en dus ook de achterkant) is ongeveer 11656 cm^2.
De oppervlakte van een zijkant is $150 \cdot 40 = 6000$ cm^2.
De oppervlakte van de onderkant is $120 \cdot 40 = 4800$ cm^2.
De oppervlakte van de bovenkant is $40 \cdot 40 = 1600$ cm^2.
De totale oppervlakte is daarom ongeveer 41530 cm^2 $\approx 4{,}15$ m^2.

5.8 a De graansilo bestaat uit een kegel met een hoogte van 1,40 en een diameter van 1,48 m en een cilinder met een hoogte van 3,00 m en dezelfde diameter. De inhoud van de kegel is ongeveer 0,803 m^3. De inhoud van de cilinder is ongeveer 5,161 m^3. Samen is dat iets minder dan 6 m^3.

b De cilindermantel heeft een oppervlakte van $\pi \cdot 1{,}48 \cdot 3{,}00 \approx 13{,}95$ m^2. De bovencirkel heeft een oppervlakte van ongeveer $\pi \cdot 0{,}74^2 \approx 1{,}72$ m^2. De totale oppervlakte is daarom 15,67 m^2.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

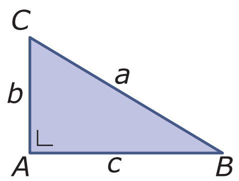
- de stelling van Pythagoras — rechthoekszijden, hypotenusa (langste zijde)
- de stelling van Pythagoras in 2D gebruiken
- de stelling van Pythagoras in 3D gebruiken — hulplijn
- oppervlakte van ruimtelijke figuren — uitslag
- inhoud (volume) van ruimtelijke figuren

Activiteitenlijst

- de stelling van Pythagoras ontdekken — werken met de stelling van Pythagoras
- lengtes in het platte vlak berekenen — met de omgekeerde stelling van Pythagoras nagaan of een driehoek rechthoekig is
- lengtes in ruimtelijke figuren berekenen
- de stelling van Pythagoras gebruiken bij oppervlakteberekeningen — de oppervlakte van ruimtelijke figuren berekenen
- het volume (de inhoud) van ruimtelijke figuren berekenen

Opgave 6.1

Je ziet hier een rechthoekige driehoek ABC. In zo'n driehoek geldt de stelling van Pythagoras.



Figuur 6.1

a Teken zelf zo'n figuur en geef er bij aan welke hoek de rechte hoek is, welke zijden de rechthoekszijden zijn en welke zijde de hypotenusa (of lange zijde) is. Zet ook de stelling van Pythagoras in deze driehoek ernaast.

b Laat met een voorbeelduitwerking zien hoe je a berekent als $b = 4$ en $c = 7$. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Laat met een voorbeelduitwerking zien hoe je b berekent als $a = 9$ en $c = 7$. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6.2

Ten opzichte van een xy-assenstelsel zijn de punten $A(1,3)$, $B(8,2)$ en $C(2,5)$ gegeven.

a Teken deze punten in het assenstelsel en teken ΔABC.

b Laat met een voorbeelduitwerking zien hoe je kunt nagaan of ΔABC rechthoekig is.

c Welke hoek is de rechte hoek? En waarom?

★ Opgave 6.3

Iemand heeft een bijzonder tafelkleed gekocht en wil er speciaal een tafel voor laten maken. Het is een zuiver rond tafelkleed met een diameter van 2,40 meter. De tafel wordt rechthoekig met een lengte van 1,80 meter.

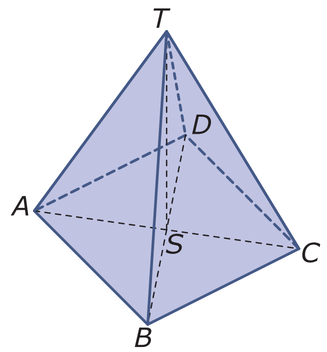
Hoe groot mag de breedte van deze tafel maximaal zijn om volledig bedekt te worden door het kleed? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

Opgave 6.4

Van deze regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ heeft vierkant $ABCD$ zijden met een lengte van 4 cm en is $ST = 6$ cm.

a Laat zien hoe je de lengte van AT berekent.

b Punt M is het midden van ribbe CT. Laat zien hoe je de lengte van AM berekent.



Figuur 6.2

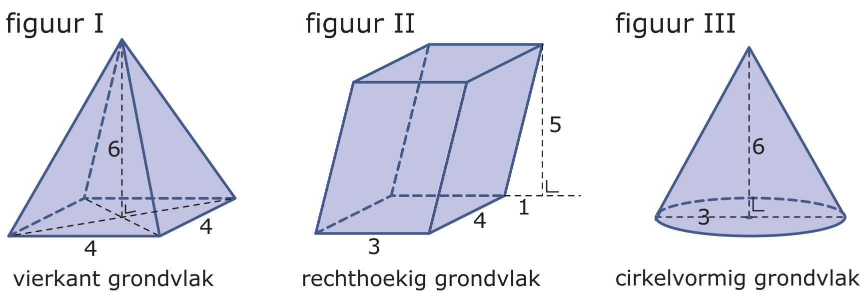
Opgave 6.5

Bekijk de regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ van de vorige opgave.

Laat zien hoe je de oppervlakte van deze piramide (inclusief het grondvlak) berekent. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 6.6

Laat zien hoe je de inhoud van elk van deze lichamen berekent.



Figuur 6.3

Testen

Opgave 6.7

Van ΔPQR is $\angle Q$ een rechte hoek, $PQ = 8$ cm en $QR = 15$ cm.

a Bereken de lengte van PR.

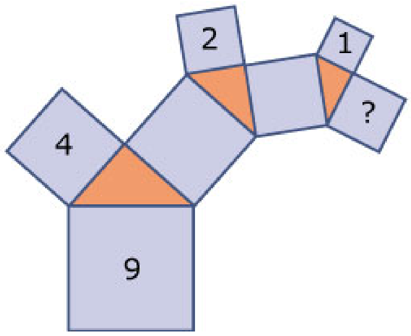
Van ΔKLM is $\angle M$ een rechte hoek, $KL = 10$ cm en $KM = 7$ cm.

b Bereken de lengte van LM.

Opgave 6.8

In deze figuur sluiten vierkanten drie rechthoekige driehoeken in. In een aantal vierkanten staat de oppervlakte ervan gegeven.

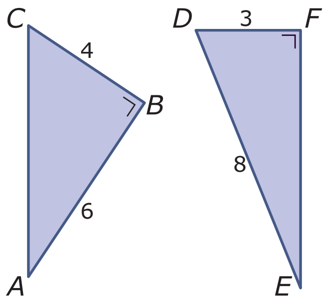
Bereken de oppervlakte van het vierkant met het vraagteken er in.



Figuur 6.4

Opgave 6.9

Dit zijn twee rechthoekige driehoeken.



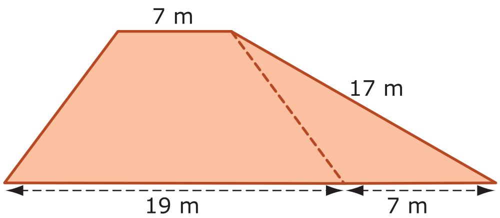
Figuur 6.5

Bereken de lengte van AC en de lengte van EF.

★

Opgave 6.10

Je ziet hier een dwarsdoorsnede van een rivierdijk. Deze dwarsdoorsnede bestaat uit een symmetrisch trapezium waartegen een stomphoekige driehoek is gelegd. Die driehoek is ontstaan door dijkversteviging aan de rivierzijde.



Figuur 6.6

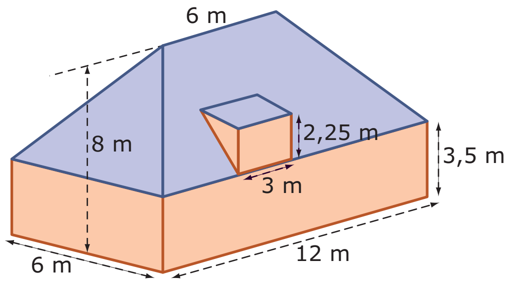
a Bereken de hoogte van deze dijk in cm nauwkeurig.

b Dit verstevigde stuk dijk is 12 km lang. Bereken hoeveel m^3 grond er nodig is voor de dijk plus de versteviging en geef je antwoord in miljoenen m^3 in één decimaal nauwkeurig.

★

Opgave 6.11

Dit is een vereenvoudigde weergave van een huisje. Alle ramen en deuren zijn weggelaten. De vloer en de vloer van de verdieping zijn rechthoeken van 6 bij 12 m. Het dak bestaat uit twee gelijkbenige driehoeken en twee symmetrische trapezia. Het is bedekt met dakpannen. De dakkapel is een halve balk. De dakkapel is niet bedekt met dakpannen.



Figuur 6.7

a Teken een dwarsdoorsnede van dit huis die precies door het midden van de dakkapel gaat en evenwijdig is met de 6 m lange voorgevel.

b Bereken de lengte van de vier opstaande schuine dakranden in dm nauwkeurig.

c Hoeveel m^2 aan dakpannen ligt er op dit dak?

★ Opgave 6.12

Uit een zuiver ronde boomstam van 4 m lengte en een diameter van 60 cm wordt een zo dik mogelijke vierkante balk gezaagd. Deze balk is uiteraard ook 4 m lang.

a Hoe breed kan die balk maximaal zijn?

b Hoeveel dm^3 hout houd je van deze boomstam over?

c Aan één uiteinde van deze balk wordt zoveel hout weggezaagd, dat er een piramidevormige punt ontstaat met een hoogte van 30 cm. Hoeveel cm^3 hout moet er worden weggezaagd?

★ Opgave 6.13

De **Kocatepe-moskee** in Ankara heeft vier ronde minaretten die 88 m hoog zijn. Dat is inclusief de kegelvormige spits van zo'n minaret, die 10 m hoog is en een diameter van 4 m heeft.

a Bereken de inhoud van de kegelvormige spits.

b Elk zijaanzicht van de kegelvormige spits is een gelijkbenige driehoek. Hoe lang zijn de zijden van die driehoek? Geef waar nodig je antwoord in cm nauwkeurig.

De minaret zelf is opgetrokken uit witte steen. De drie omlopen zijn van ander materiaal gemaakt.

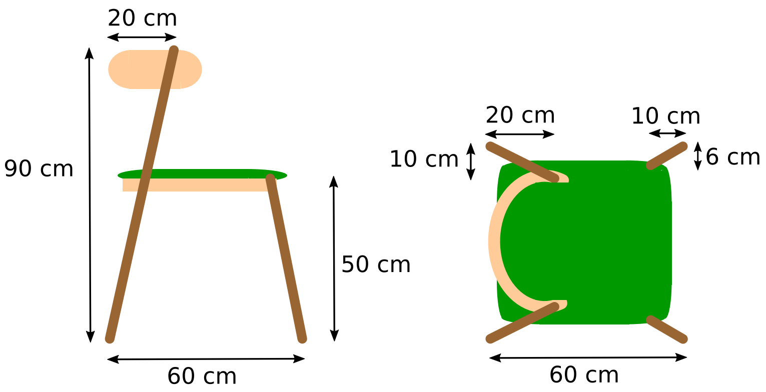
c Hoeveel m^2 witte steen is voor zo'n minaret nodig? Geef je antwoord in twee decimalen.

Figuur 6.8

Toepassen

De meubelmaker heeft een eetkamerstoel ontworpen.
Je ziet er hieronder een zijaanzicht en een bovenaanzicht van. Alle afmetingen staan er bij.

De vier poten zijn ronde houten paaltjes.
De rugleuning en het zitgedeelte zijn van kunststof met een groen kussen erop.



Figuur 6.9

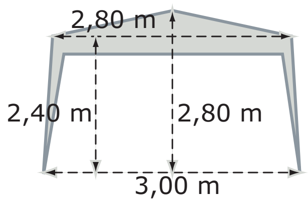
Kees rekent uit hoe lang de poten moeten worden.

★ **Opgave 6.14: De poten van het stoeltje**

Bereken lengtes van de poten van het stoeltje in mm nauwkeurig.

★ ★ **Opgave 6.15: Partytent**

Deze partytent bestrijkt een vloeroppervlak van 3,00 bij 3,00 m. De grootste hoogte is 2,80 m. In dit vooraanzicht zie je nog een paar afmetingen.



Figuur 6.11

Figuur 6.10

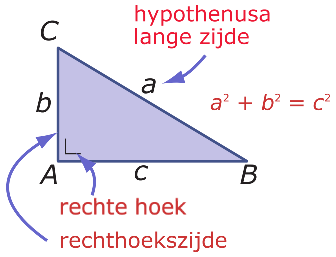
a Bereken de totale lengte aan tentstokken die er voor nodig is.

Neem aan dat de vier uitgesneden lappen stof de vorm hebben van een symmetrisch trapezium met een onderkant van 3,00 m en een bovenkant van 2,60 m. De breedte van de rand stof boven die uitsnedes is 20 cm.

b Bereken de totale hoeveelheid tentdoek die voor deze partytent nodig is.

Antwoorden

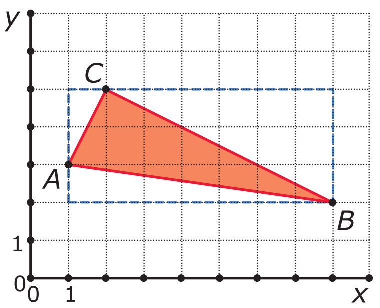
6.1 a Zie de figuur.



b $a^2 = 4^2 + 7^2 = 65$ geeft $a = \sqrt{65} \approx 8{,}06$.

c $b^2 + 7^2 = 9^2 = 65$ geeft $b^2 = 9^2 - 7^2 = 32$ en dus $b = \sqrt{32} \approx 5{,}66$.

6.2 a Zie figuur.



b Je berekent eerst de lengtes van alle drie de zijden:

$AB^2 = 7^2 + 1^2 = 50$ geeft $AB = \sqrt{50}$

$AC^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ geeft $AC = \sqrt{5}$

$BC^2 = 6^2 + 3^2 = 45$ geeft $BC = \sqrt{45}$

Vervolgens controleer je of in ΔABC de stelling van Pythagoras geldt: $\left(\sqrt{45}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2$ klopt. Dus de driehoek is rechthoekig.

c $\angle C$ is de rechte hoek, want AB is de langste zijde.

6.3 De diagonaal van de rechthoekige tafel mag maximaal de diameter van het tafelkleed zijn.
De lengte van de tafel is 1,80 en de breedte is b m.

Dan is $1{,}80^2 + b^2 = 2{,}40^2$.

Dus $b^2 = 2{,}40^2 - 1{,}80^2 = 2{,}52$, dus $b = \sqrt{2{,}52} \approx 1{,}59$ m.
Afgerond op gehele centimeters wordt de breedte dus 159 cm.

6.4 a Bereken eerst de lengte van bijvoorbeeld AS.

Dat kan op meerdere manieren, je vindt $AS = \sqrt{8}$.

(Misschien heb je $AS = \frac{1}{2}\sqrt{32}$ gevonden, dat is hetzelfde.)

Vervolgens is $AT^2 = AS^2 + ST^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 + 6^2 = 44$ en dus $AT = \sqrt{44}$.

b Laat N het midden van BS zijn, dan is ΔANM rechthoekig met rechthoekszijden $AN = \sqrt{18}$ en $MN = 3$.

En $\left(\sqrt{18}\right)^2 + 3^2 = AM^2$ geeft $AM = \sqrt{27}$.

6.5 Als P het midden van AB is, dan is TP de hoogte van een driehoekig grensvlak.
Je berekent deze hoogte met de stelling van Pythagoras in bijvoorbeeld ΔPST:

$2^2 + 6^2 = PT^2$ geeft $PT = \sqrt{40}$.

Vervolgens is de oppervlakte van de piramide $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{40} + 4 \cdot 4 \approx 66{,}6$.

6.6 Lichaam I: $\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 32$

Lichaam II: $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

Lichaam III: $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 18\pi$

6.7 a Stelling van Pythagoras: $8^2 + 15^2 = PR^2$ geeft $PR = \sqrt{289} = 17$ cm.

b Stelling van Pythagoras: $LM^2 + 7^2 = 10^2$ geeft $LM^2 = 10^2 - 7^2 = 51$ en $LM = \sqrt{51} \approx 7{,}14$ cm.

6.8 Gebruik de stelling van Pythagoras.

Vierkant bij linker driehoek: $9 - 4 = 5$.
Vierkant bij middelste driehoek: $5 - 2 = 3$.
Gevraagde vierkant: $3 - 1 = 2$.

6.9 $AC^2 = AB^2 + BC^2$

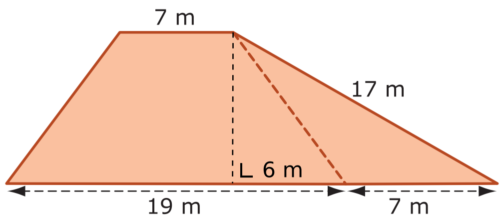
$AC^2 = 36 + 16$, dus $AC = \sqrt{52}$.

$DE^2 = DF^2 + EF^2$

$64 = 9 + EF^2$, dus $EF = \sqrt{55}$.

6.10 a Je hebt een hulplijn nodig, zie figuur.
Bedenk zelf waarom de onderste zijde van het symmetrisch trapezium bestaat uit drie stukken van 6, 7 en 6 m.

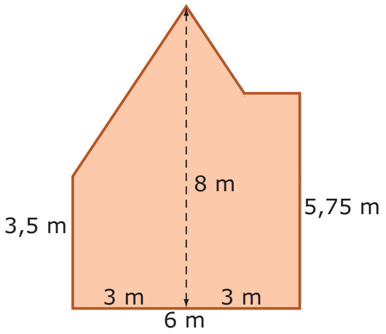
De gevraagde hoogte is $\sqrt{17^2 - 13^2} = \sqrt{120} \approx 10{,}95$ m.



b De oppervlakte van de dwarsdoorsnede is $\frac{1}{2} \cdot (19 + 7) \cdot \sqrt{120} + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{120} = 16\frac{1}{2}\sqrt{120}$ m^2.

De inhoud van de dijk is $16\frac{1}{2}\sqrt{120} \cdot 12000 \approx 2168981$. Er is dus ongeveer 2,2 miljoen m^3 grond nodig.

6.11 a Zie de figuur.



b Voor de hoogte h van het schuine vlak, het dak geldt:
$4{,}5^2 + 3^2 = h^2$, dus $h = \sqrt{29{,}25}$ m.
Vervolgens kan de gevraagde schuine zijde l worden berekend:
$\left(\sqrt{29{,}25}\right)^2 + 3^2 = l^2$, dus $l = \sqrt{38{,}25} \approx 6{,}2$ m.

c De twee gelijkbenige driehoeken hebben samen een oppervlakte van $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{29{,}25} = 6\sqrt{29{,}25}$.

De twee symmetrische trapezia hebben samen een oppervlakte van $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (12 + 6) \cdot \sqrt{29{,}25} = 18\sqrt{29{,}25}$.

Het gat voor de dakkapel heeft een oppervlakte van $3 \cdot \sqrt{1{,}5^2 + 2{,}25^2} = 3\sqrt{7{,}3125}$.
In totaal is dat ongeveer 122 m^2 aan dakpannen.

6.12 a Voor de zijden z van deze vierkante balk geldt: $z^2 + z^2 = 60^2$.
Dus $z^2 = \frac{1}{2} \cdot 60^2 = 1800$ en $z = \sqrt{1800} \approx 42{,}2$ cm.

b $\pi \cdot 30^2 \cdot 400 - \left(\sqrt{1800}\right)^2 \cdot 400 \approx 410973{,}35 \text{ cm}^3$ en dat is ongeveer 411 dm^3.

c $60 \cdot 60 \cdot 30 - \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 60 \cdot 30 = 72000 \text{ cm}^3$.

6.13 a $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 10 \approx 42 \text{ m}^3$.

b De basis is 4 m.
Voor de lengte l van de andere zijden geldt: $2^2 + 10^2 = l^2$, zodat $l = \sqrt{104} \approx 10{,}21$ m en dat is 1021 cm.

c De oppervlakte van zo'n (ongeveer) cilindervormige minaret is $\pi \cdot 4 \cdot 78 \approx 980{,}18 \text{ m}^2$.

6.14 De twee voorpoten passen in een balk waarvan het grondvlak een rechthoekje van 10 bij 6 en de hoogte 50 cm is.
Voor de diagonaal d van het grondvlak geldt: $10^2 + 6^2 = d^2$, zodat $d^2 = 136$.
Voor de lengte van zo'n voorpoot v geldt dan: $136 + 50^2 = v^2$, zodat $v = \sqrt{2636} \approx 51{,}3$ cm.
De twee achterpoten passen in een balk waarvan het grondvlak een rechthoekje van 20 bij 10 en de hoogte 90 cm is.
Voor de diagonaal d van het grondvlak geldt: $20^2 + 10^2 = d^2$, zodat $d^2 = 500$.
Voor de lengte van zo'n achterpoot a geldt dan: $500 + 90^2 = v^2$, zodat $a = \sqrt{10600} \approx 103{,}0$ cm.

6.15 a Er zijn vier tentstokken van 2,80 m.
Er zijn vier tentstokken met lengte a onder het dak die passen in een balk van 1,4 bij 1,4 bij 0,4 m. De lengte daarvan bereken je met een hulplijn waarvoor $1{,}4^2 + 1{,}4^2 = h^2$ zodat $h^2 = 3{,}92$. Daarna doe je nog eens de stelling van Pythagoras $3{,}92 + 0{,}4^2 = a^2$, zodat $a = \sqrt{4{,}08} \approx 2{,}02$.
Er zijn vier opstaande tentstokken met lengte b die passen in een balk van 0,1 bij 0,1 bij 2,8 m. De lengte daarvan bereken je met een hulplijn waarvoor $0{,}1^2 + 0{,}1^2 = h^2$ zodat $h^2 = 0{,}02$. Daarna doe je nog eens de stelling van Pythagoras $0{,}02 + 2{,}8^2 = b^2$, zodat $b = \sqrt{7{,}86} \approx 2{,}80$.
Dat is in totaal ongeveer 30,50 m tentstok.

b Vier gelijkbenige driehoeken met een basis van 2,80 en een hoogte van $\sqrt{1{,}4^2 + 0{,}4^2} \approx 1{,}46$.

Elk van de vier grensvlakken die op de grond rusten bestaan uit een symmetrisch trapezium waaruit een iets kleiner symmetrisch trapezium is weggesneden. De hoogte van het grootste trapezium van zo'n grensvlak is $\sqrt{2{,}8^2 + 0{,}1^2} \approx 2{,}80$, de hoogte van het kleinste trapezium is dus 2,60 m.
De vier gelijkbenige driehoeken hebben samen een oppervlakte van $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2{,}80 \cdot 1{,}46 = 8{,}176$ m^2. De vier grensvlakken die op de grond rusten hebben samen een oppervlakte van $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 + 2{,}80) \cdot 2{,}80 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 + 2{,}60) \cdot 2{,}60 = 3{,}36$ m^2. In totaal dus ongeveer 11,54 m^2 tentdoek.

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		★	★★	★★★
1	**Pythagoras**	★	★★	★★★
	De stelling van Pythagoras.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐	1.4 ☐ 1.6 ☐	
	Berekeningen maken met de stelling van Pythagoras.	1.1 ☐ 1.2 ☐ 1.3 ☐	1.4 ☐ 1.6 ☐	
2	**Lengtes berekenen**	★	★★	★★★
	Lengtes berekenen met de stelling van Pythagoras.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ 2.5 ☐ 2.7 ☐ T 6.3 ☐		
3	**Lengtes in 3D**	★	★★	★★★
	De stelling van Pythagoras gebruiken in ruimtefiguren als kubus, balk en piramide.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ T 6.11 ☐ T 6.12 ☐ T 6.14 ☐	3.6 ☐ T 6.15 ☐	
	Dit toepassen in praktijksituaties.	3.2 ☐ 3.3 ☐ 3.4 ☐ T 6.11 ☐ T 6.12 ☐ T 6.14 ☐	3.5 ☐ T 6.15 ☐	
4	**Oppervlakte ruimtelijke figuren**	★	★★	★★★
	Oppervlaktes uitrekenen met behulp van de stelling van Pythagoras.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ 4.5 ☐ 4.6 ☐ T 6.10 ☐ T 6.11 ☐	T 6.15 ☐	
	De oppervlakte van een ruimtelijke figuur berekenen.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ 4.5 ☐ 4.6 ☐ T 6.10 ☐ T 6.11 ☐	T 6.15 ☐	
5	**Inhoud ruimtelijke figuren**	★	★★	★★★
	De inhoud van een balk, een prisma en een cilinder berekenen.	5.2 ☐ 5.3 ☐ 5.4 ☐ 5.7 ☐ 5.8 ☐ T 6.10 ☐ T 6.12 ☐		
	De inhoud van een piramide en een kegel berekenen.	5.2 ☐ 5.3 ☐ 5.5 ☐ 5.8 ☐ T 6.12 ☐		

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

www.math4all.nl

Werkblad bij Opgave 1.1 op pagina 9.