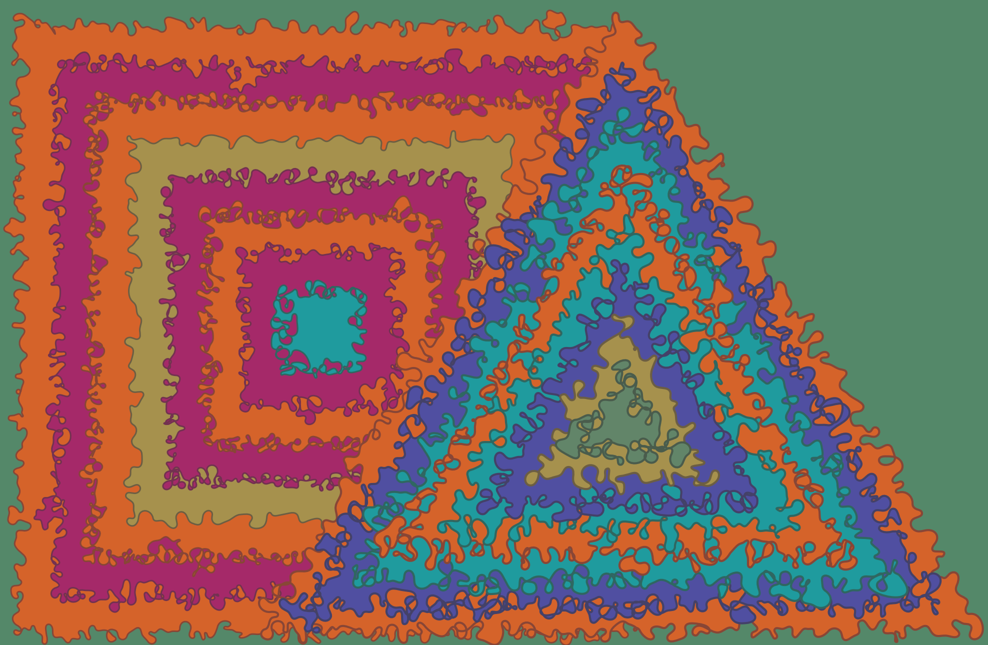
Wiskunde / PGA

2 VMBO / docentmateriaal

Lineaire verbanden

ConTeXt College



Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je begeleidt dan als docent de leerlingen die in kleine groepjes aan wiskundige problemen werken en op die manier een eigen theoretisch kader opstellen. Dit gebeurt voornamelijk op de wijze die wordt beschreven in het boek *Building Thinking Classrooms in Mathematics* van Peter Liljedahl. Dit boek is ook in het Nederlands beschikbaar. Het is verstandig om dit boek vooraf door te werken, maar je kunt ook beginnen met deze **beknopte handleiding**.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee de leerling kan nagaan of de stof wordt beheersd. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding staat in de marge naast de opgave.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die de leerling alleen hoeft te maken als er genoeg tijd voor is
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die een leerling alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk was

In de bijlage staat een “**Leerdoelentabel**” waarin staat aangegeven door welke opgave het specifieke leerdoel wordt afgedekt en op welk niveau dit gebeurt. Als je deze tabel aan de leerlingen uitreikt, kunnen ze hun eigen vorderingen bijhouden.
Opgaven uit de samenvattende paragraaf *Totaalbeeld* worden voorafgegaan door een T.

1

Lineaire verbanden

1.1 Recht evenredig

Inleiding


Figuur 1.1

Steeds vaker zie je elektrische auto's rijden. Waar vroeger de benzinemotor gangbaar was, wordt die nu langzaam vervangen door een elektromotor.

Henk vraagt zijn moeder hoe het zit met de kosten voor de ritjes met hun nieuwe elektrische auto. Er hoeft niet meer te worden getankt, maar je rijdt er vast niet gratis mee.
Henk's moeder legt uit dat ook zo'n auto energie verbruikt, je moet hem opladen. Daarna verbruikt hij per gereden km (gemiddeld) een bepaalde hoeveelheid energie die je in kWh (kiloWattuur) uitdrukt. En elke kWh aan elektriciteit kost een bepaald bedrag. Zo reken je uit hoeveel cent aan energie de auto per gereden km verbruikt.

Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken;
- de begrippen evenredigheidsconstante en hellingsgetal;
- van een formule en/of grafiek bepalen of er sprake is van een recht evenredig verband.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- grafieken bij formules maken.

Dit materiaal is nog in ontwikkeling.

Heeft u leuke ideeën voor dit onderwerp neem dan contact op met Math4all via info@math4all.nl. We kunnen dan wellicht samen aan de slag.

Theorie

Om te onthouden

De variabele R is **recht evenredig** met de variabele q als een verdubbeling van q ook altijd een verdubbeling van R betekent.

Bij deze grafiek hoort de formule $R = 1{,}50 \cdot q$

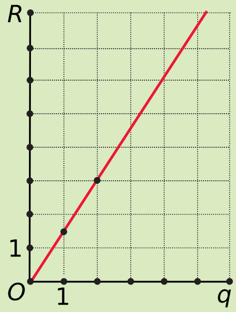
en het **rekenschema**:

$q \xrightarrow{\boxed{\cdot\ 1{,}50}} R$

De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong (0,0).

- Het getal 1,50 heet de **evenredigheidsconstante**.
- Het getal 1,50 is ook het **hellingsgetal** van de grafiek.

R hangt af van q dus staat bij de verticale as.
q staat bij de horizontale as.



Figuur 1.2

Verwerken

Opgave 1.1

Mevrouw Willems krijgt een kilometervergoeding K voor de kilometers die ze voor haar werk met de auto aflegt. Ze krijgt € 0,19 per km. Noem het aantal werkkilometers per maand q.

a Stel de formule op voor K.

b Is K recht evenredig met q? Waarom wel/niet?

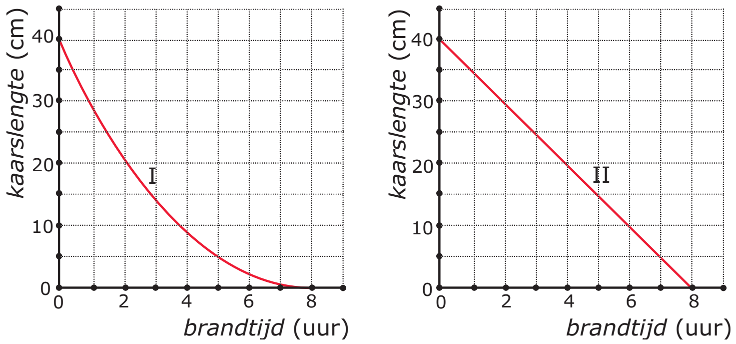
c Hoe ziet de grafiek van K er uit?

Mevrouw Willems heeft berekend dat iedere gereden kilometer 12,5 cent aan brandstof kost.

d Zijn de brandstofkosten voor het werk ook recht evenredig met q?

★ Opgave 1.2

Zuiver cilindervormige kaarsen branden gelijkmatig op: elk uur verdwijnt er (in theorie) evenveel kaarslengte. Hier zie je twee grafieken bij opbrandende kaarsen.



Figuur 1.3

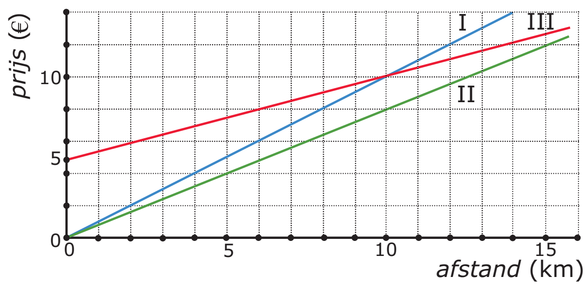
a Welke van deze twee grafieken hoort bij een cilindervormige kaars en waarom?

b Is de kaarslengte recht evenredig met de brandtijd?

c Met hoeveel centimeter per uur brandt de cilindervormige kaars op?

★ Opgave 1.3

De prijs die je voor een rit met een taxi betaalt, hangt af van de afstand die je rijdt. Je ziet hieronder van drie taxibedrijven de grafiek van het verband tussen prijs p (in €) en gereden afstand s (in km).



Figuur 1.4

a Bij welke firma's betaal je alleen een bedrag per gereden km?

b Geef bij die twee taxibedrijven een formule voor p afhankelijk van s.

c Ook bij het derde taxibedrijf betaal je een vast bedrag per gereden km. Alleen berekenen zij ook nog voorrijkosten. Hoeveel bedragen die voorrijkosten?

d Hoe kun je aan de grafiek zien dat bij die derde firma de prijs p niet recht evenredig is met het aantal gereden km s?

★ **Opgave 1.4**

Bij constante snelheid geldt: $s = v \cdot t$, waarin

- s de afgelegde weg in m is;
- v de snelheid in m/s is;
- t de tijd in s is.

a Leg uit waarom de afgelegde weg bij constante snelheid recht evenredig is met de tijd.

b Een voorwerp beweegt 20 s met een snelheid van 40 m/s. Hoeveel bedraagt zijn afgelegde weg?

c Een voorwerp beweegt 20 s en legt daarin 700 m af. Met welke snelheid bewoog dit voorwerp?

d Een voorwerp beweegt 1500 m met een snelheid van 60 m/s af. Hoe lang doet het daar over?

Toepassen

Henk's moeder heeft uitgerekend dat het rijden met haar elektrische auto € 0,07 per km kost.

Ze gaat daarbij uit van een verbruik van 18 kWh (kilo-Wattuur) per 100 km. De prijs voor elektriciteit is bij het oplaadpunt dat ze het meest gebruikt € 0,39 per kWh.

Henk rekent het bedrag per km hiermee zelf na.

Figuur 1.5

Opgave 1.5: Elektrische auto

Bekijk de gegevens die Henk's moeder gebruikt om de energiekosten per km uit te rekenen.

a Reken na, dat zij gemiddeld ongeveer € 0,07 per gereden km verbruikt.

Henk's moeder rijdt vier dagen per week elke dag naar haar werk, 31 km heen en 31 km terug.

b Hoeveel kost haar dat per week?

Voor een schatting van de totale ritkosten per jaar (R in euro) neem je aan dat die recht evenredig met het aantal gereden kilometers per jaar (a in km) zijn.

c Waarom is dat een aanname?

d Stel een formule op bij het verband tussen R en a.

e Henk's moeder werkt normaal gesproken 180 dagen per jaar. Bereken de kosten voor het heen en weer reizen.

f Is een onkostenvergoeding van € 0,19 per km voor de kilometers die iemand voor zijn werk rijdt dus zonder meer voordelig voor de automobilist? Licht je antwoord toe.

1.2 Lineaire verbanden

Inleiding

Natuurlijk zijn de energiekosten niet de enige kosten die je hebt als je over een eigen auto wilt beschikken. Je kunt zo'n auto bijvoorbeeld *leasen*. Dat betekent: je krijgt de auto in gebruik, maar hij is eigendom van een leasebedrijf. Je betaalt dan een vast bedrag per maand waar alles bij in zit (aanschaf, onderhoud, etc.). Die maandelijkse kosten komen bij de energiekosten. Henk slaat aan het rekenen...

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken;
- de begrippen hellingsgetal en startgetal;
- bij een lineaire grafiek een formule opstellen.

Voorkennis

- rekenen, ook met negatieve getallen;
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige verbanden herkennen en de evenredigheidsconstante, het hellingsgetal, bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken.

Dit materiaal is nog in ontwikkeling.

Heeft u leuke ideeën voor dit onderwerp neem dan contact op met Math4all via info@math4all.nl. We kunnen dan wellicht samen aan de slag.

Theorie

Om te onthouden

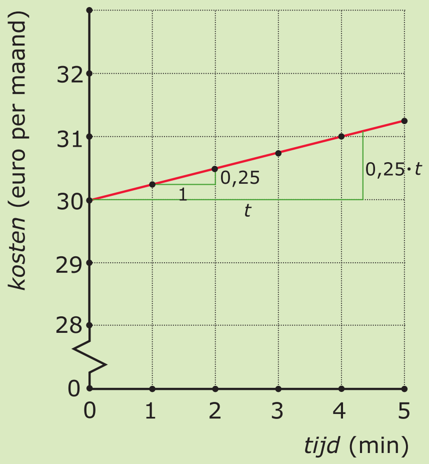
Bij een formule zoals $K = 0{,}25 \cdot t + 30$ spreek je van een **lineair verband** tussen K en t.

- 0,25 is het **hellingsgetal**.
  Als t met 1 toeneemt dan neemt K met 0,25 toe.
- b is het **startgetal** of **begingetal**.
  Dat is de uitkomst als $t = 0$.

De grafiek bij dit lineaire verband is een rechte lijn door (0,30).

Het bijpassende rekenschema is:

$t \xrightarrow{\cdot\, 0{,}25} \ldots \xrightarrow{+\,30} K$



Figuur 2.2

Verwerken

★ Opgave 2.1

Voor het verbruik van water betaal je twee soorten kosten:

- een vast bedrag per jaar, het vastrecht
- een bedrag per m^3 water die je verbruikt

In een bepaald gebied is het vastrecht € 36 en het bedrag per m^3 € 1,80.
Noem de totale kosten per jaar K (euro) en het verbruik v in m^3.

a Leg uit dat er sprake is van een lineair verband tussen K en v.

b Maak een tabel voor K afhankelijk van v.
Neem $v = 0, 50, 100, 150, 200$.

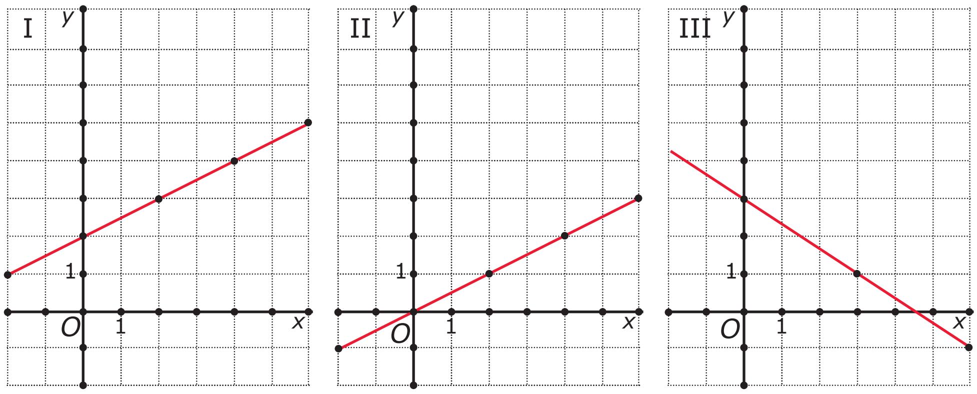
c Teken de grafiek van K.

d Geef een formule en een rekenschema voor de kosten afhankelijk van het waterverbruik.

e Bereken de kosten voor een waterverbruik van 120 m^3.

★ Opgave 2.2

Je ziet drie grafieken die elk een verband tussen de variabelen x en y weergeven.



Figuur 2.3

a Bij welke van deze grafieken is y recht evenredig met x?

A. grafiek I
B. grafiek II
C. grafiek III

b Hoe groot is bij die grafiek het hellingsgetal?

c Bij welke van deze grafieken is het hellingsgetal negatief?

A. grafiek I
B. grafiek II
C. grafiek III

★ Opgave 2.3

Hoe hoger je in de bergen komt, hoe lager de temperatuur wordt.

In een zeker berggebied geldt bij benadering: $T = 20 - 6 \cdot h$.
Hierin is:

- T de temperatuur in °C (graden Celsius)

- h de hoogte boven de zeespiegel in km

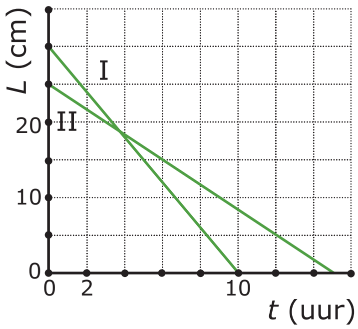
a Welke temperatuur zou iemand op zeespiegelniveau dan ervaren?

b Teken een grafiek van T afhankelijk van h.

c Laat met een rekenschema zien, dat bij een hoogte van $3\frac{1}{3}$ km de temperatuur 0 °C is.

★ ★ **Opgave 2.4**

Zuiver cilindervormige kaarsen branden gelijkmatig op. Je ziet de grafieken van de lengte L in centimeters van twee van die kaarsen afhankelijk van de brandtijd t in uren.



Figuur 2.4

a Welke grafiek hoort bij de dikste kaars? Licht je antwoord toe.

A. grafiek I
B. grafiek II

b Waarom is er bij beide grafieken sprake van een lineair verband?

c Bekijk grafiek I en bepaal het hellingsgetal en het startgetal bij het verband tussen L en t. Stel ook de bijpassende formule op.

d Bekijk grafiek II en bepaal hoeveel deze kaars elke 6 uur korter wordt. Bereken daarmee het hellingsgetal en stel de bijbehorende formule op.

e Welke van beide kaarsen is na 4 uur branden het langst?

Toepassen

Henk's moeder least haar elektrische auto voor € 360 per maand. Omdat ze heen en weer naar haar werk rijdt (dat is 62 km per dag, vier dagen in de week), legt ze maandelijks flink wat kilometers af. Elke km kost haar gemiddeld € 0,07.


Figuur 2.5

Ze krijgt van haar werkgever een reiskostenvergoeding van € 0,19 per km.

Henk is nieuwsgierig of zijn moeder daarmee haar reiskosten compleet vergoed krijgt.

Opgave 2.5: Autokosten en reiskostenvergoeding

Bij **Toepassen** zie je welke kosten en welke vergoeding Henk's moeder heeft. Noem haar werkkilometers a, haar maandelijkse kosten voor de auto K en haar maandelijkse vergoeding voor de reiskosten R.

a Stel een formule op voor K afhankelijk van a.

b Stel een formule op voor R afhankelijk van a.

c Bij welk van beide formules is sprake van een recht evenredig verband?

d Teken de grafieken bij beide formules in één figuur.

e Bereken hoeveel Henk's moeder maandelijks aan autokosten voor het werk heeft en hoeveel haar maandelijkse reiskostenvergoeding is. Komt ze ermee uit?

f Vanaf hoeveel km per maand voor het werk zou ze wel uit de kosten komen?

1.3 Terugrekenen

Inleiding

Henk's moeder houdt goed bij hoeveel ze maandelijks aan kosten voor de auto kwijt was. Behalve de kosten voor het leasen van de auto, houdt ze ook elke maand het aantal gereden km bij. Het leasen kost € 360 per maand en ze rekent € 0,07 per gereden km. Zo berekent ze de kosten per maand.
Van een bepaalde maand is ze haar berekening kwijt. Alleen het eindbedrag € 537,94 staat er nog. Hoeveel km heeft ze die maand gereden?

Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip lineaire vergelijking, en vergelijkingen grafisch oplossen;
- rekenschema's bij lineaire verbanden maken en deze gebruiken om vergelijkingen op te lossen door terugrekenen.

Voorkennis

- rekenen, ook met negatieve getallen;
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- lineaire verbanden herkennen en het hellingsgetal en het startgetal bepalen;
- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken.

Dit materiaal is nog in ontwikkeling.

Heeft u leuke ideeën voor dit onderwerp neem dan contact op met Math4all via info@math4all.nl. We kunnen dan wellicht samen aan de slag.

Theorie

Om te onthouden

Een vergelijking zoals $0{,}25 \cdot t + 30 = 52{,}50$ is een **lineaire vergelijking** met variabele t.

Bij deze vergelijking past het **rekenschema**:

$$t \xrightarrow{\cdot\ 0{,}25} \ldots \xrightarrow{+\ 30} 52{,}50$$

Daarbij maak je het **terugrekenschema**:

$$t \xleftarrow{/\ 0{,}25} \ldots \xleftarrow{-\ 30} 52{,}50$$

Hiermee los je de vergelijking op: $t = (52{,}50 - 30)/0{,}25 = 90$.

Verwerken

★ Opgave 3.1

Voor het verbruik van water zijn in een bepaald gebied de totale kosten per jaar gegeven door:

$K = 1{,}80 \cdot v + 36$

waarin:

- K de totale kosten per jaar in euro
- v het verbruik in m^3

In een bepaald jaar bedragen voor een gezin in dat gebied de kosten € 277,20.

a Hoeveel water heeft dit gezin dat jaar verbruikt?

b Als de kosten een jaar later 1,5 keer zo hoog zijn, hebben ze dan ook 1,5 keer zoveel water verbruikt? Licht je antwoord toe met een berekening.

★ Opgave 3.2

Los de volgende vergelijkingen op:

a $3 \cdot x + 400 = 610$

b $0{,}32 \cdot p + 56 = 70$

c $10 \cdot k - 120 = 80$

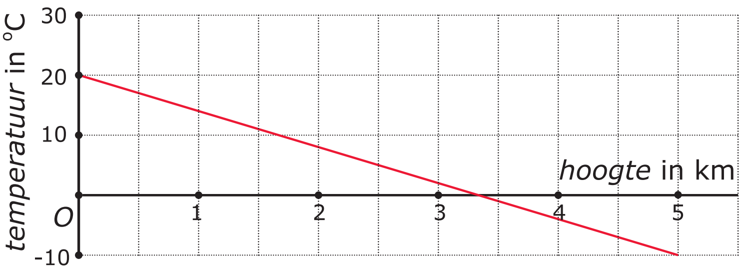
d $-2{,}5 \cdot t + 120 = 80$

★ Opgave 3.3

Hoe hoger je in de bergen komt, hoe lager de temperatuur wordt.

In een zeker berggebied geldt bij benadering: $T = 20 - 6 \cdot h$.
Hierin is:

- T de temperatuur in °C (graden Celsius)
- h de hoogte boven de zeespiegel in km



Figuur 3.2

Je ziet, dat op zekere hoogte de temperatuur onder het vriespunt komt.

a Laat met een berekening zien op welke hoogte dat is.

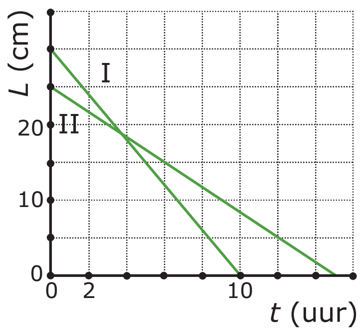
b Bereken ook op welke hoogte de temperatuur -5 °C is.

★ ★ Opgave 3.4

Zuiver cilindervormige kaarsen branden gelijkmatig op. Je ziet de grafieken van de lengte L in centimeters van twee van die kaarsen afhankelijk van de brandtijd t in uren.

Kaars I: $L = 30 - 3 \cdot t$.

Kaars II: $L = 25 - 1\frac{2}{3} \cdot t$.



Figuur 3.3

a Na hoeveel tijd is kaars I nog 12 cm lang?

b Na hoeveel tijd is kaars II nog 12 cm lang?

c Welke betekenis heeft de vergelijking $30 - 3 \cdot t = 25 - 1\frac{2}{3} \cdot t$ hier?

d De vergelijking bij c kun je op dit moment alleen oplossen met behulp van de grafiek. Lees uit de grafiek de oplossing af.

Toepassen

Henk's moeder least haar elektrische auto voor € 360 per maand. Omdat ze heen en weer naar haar werk rijdt (dat is 62 km per dag, vier dagen in de week), legt ze maandelijks flink wat kilometers af. Elke km kost haar gemiddeld € 0,07.

Figuur 3.4

Henk is nieuwsgierig hoeveel km zijn moeder rijdt buiten haar ritjes van en naar het werk. Omdat ze maandelijks bijhoudt hoeveel haar autokosten bedragen, kan Henk dat narekenen.

Opgave 3.5: Autokosten

Bij **Toepassen** zie je welke kosten Henk's moeder voor haar auto heeft. Noem je haar maandelijkse kilometers a en haar maandelijkse kosten voor de auto K, dan is $K = 0{,}07 \cdot a + 360$.

a In de maand mei heeft ze aan autokosten € 613,47 opgeschreven. Hoeveel km heeft ze die maand gereden?

Van haar werkgever krijgt ze € 0,19 per km vergoed.
Ze heeft in mei voor haar werk alleen heen en weer naar haar kantoor gereden (elke dag 62 km). Ze kreeg die maand een vergoeding van € 223,82.

b Hoeveel dagen is ze naar haar werk geweest?

1.4 Balansmethode

Inleiding

Henk's moeder least haar elektrische auto voor € 360 per maand. Omdat ze in haar nieuwe functie veel voor haar werkgever met de auto op pad is, legt ze maandelijks flink wat kilometers af. Elke km kost haar gemiddeld € 0,07. Ze krijgt van haar werkgever een reiskostenvergoeding van € 0,19 per km.

Henk gaat uitrekenen vanaf hoeveel km daarmee al haar autokosten gedekt zijn.
Hij gebruikt daarbij het balansmodel: op beide schaaltjes moet evenveel liggen om evenwicht te hebben.
Hoe werkt dat balansmodel?

Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking zien als een balans waarvan aan beide zijden van het isgelijkteken de uitkomst gelijk moet blijven;
- een vergelijking oplossen met de balansmethode.

Voorkennis

- rekenen, ook met negatieve getallen;
- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- uitdrukkingen herleiden door vermenigvuldigen van factoren en optellen/aftrekken van gelijksoortige termen;
- bij een formule een rekenschema en een terugrekenschema opstellen en gebruiken om een variabele te berekenen.

Dit materiaal is nog in ontwikkeling.

Heeft u leuke ideeën voor dit onderwerp neem dan contact op met Math4all via info@math4all.nl. We kunnen dan wellicht samen aan de slag.

Theorie

Om te onthouden

Bij het **systematisch oplossen van een vergelijking** kun je vaak gebruik maken van de **balansmethode**.

Je maakt daarbij gebruik van het feit dat je de vergelijking kunt opvatten als een balans die in evenwicht blijft als je:

- links en rechts van het isgelijkteken hetzelfde optelt of aftrekt;
- links en rechts van het isgelijkteken met hetzelfde (behalve 0) vermenigvuldigt;
- links en rechts van het isgelijkteken door hetzelfde (behalve 0) deelt.

Figuur 4.2

En soms pas je ook nog andere bewerkingen op dezelfde wijze toe. Maar daarover later...

Verwerken

Opgave 4.1

Los de volgende vergelijkingen op. Gebruik waar nodig de balansmethode, maar terugrekenen mag natuurlijk ook.

a $12 \cdot g + 3 = 7 \cdot g + 18$

b $10 + 6 \cdot g = 2 + 8 \cdot g$

c $12 - 4g = 36 + 2g$

d $5 \cdot g = g + 8$

e $5200 + 15 \cdot g = 600$

f $-6 \cdot g + 55 = 4 \cdot g - 25$

g $3 - g = 6 + 2g$

h $-\frac{1}{2}g + \frac{7}{2} = 2g - 5\frac{1}{2}$

i $320 + 0{,}5g = 950 - 1{,}25g$

j $17 = 4 - 11g$

Opgave 4.2

Op school staat een kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor 10 cent per kopie gebruik van maken.
De school huurt deze machine voor € 150,00 per maand en elke kopie kost de school 7,5 cent.

De vraag is: “Vanaf welk aantal kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruiken van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?”.

Bij deze vraag past de vergelijking $150 + 0{,}075 \cdot a = 0{,}10 \cdot a$.
Hierin is a het aantal kopieën per maand.

a Leg uit dat die vergelijking bij de vraag past.

b Los deze vergelijking op met de balansmethode.

c Wat is nu het antwoord op de gestelde vraag?

Opgave 4.3

Bij het opbranden van een kaars hoort de formule $L = 20 - 1{,}5 \cdot t$, waarin L de lengte in cm en t de brandtijd in uren is.

a Welke vergelijking hoort er bij de vraag: “Na hoeveel uur is deze kaars nog 5 cm lang?”

b Waarom kun je deze vergelijking zowel met de balansmethode als door terugrekenen oplossen?

c Wat is nu het antwoord op de gestelde vraag?

Opgave 4.4

Bij het opbranden van een kaars hoort de formule $L = 20 - 1{,}5 \cdot t$, waarin L de lengte in cm en t de brandtijd in uren is.
Voor een tweede kaars geldt dat hij bij aansteken 30 cm lang is en elk uur 3,25 cm korter wordt als hij opbrandt. Beide kaarsen worden tegelijkertijd aangestoken.

a Welke vergelijking hoort er bij de vraag: “Na hoeveel uur zijn beide kaarsen even lang?”

b Waarom kun je deze vergelijking alleen met de balansmethode oplossen?

c Wat is nu het antwoord op de gestelde vraag? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Toepassen

Henk's moeder least haar elektrische auto voor € 360 per maand. Omdat ze in haar nieuwe functie veel voor haar werkgever met de auto op pad is, legt ze maandelijks flink wat kilometers af. Elke km kost haar gemiddeld € 0,07. Ze krijgt van haar werkgever een reiskostenvergoeding van € 0,19 per km.

Figuur 4.3

Henk gaat uitrekenen vanaf hoeveel km daarmee al haar autokosten gedekt zijn.
Economen noemen dit het **break-even-point**. Dat is het punt waarin de opbrengst gelijk is aan de totale kosten.

Opgave 4.5: Reiskostenvergoeding

Bij **Toepassen** zie je welke kosten en welke vergoeding Henk's moeder heeft. Noem haar werkkilometers a.

a Stel een de vergelijking op die Henk gaat oplossen.

b Los deze vergelijking op.

c Bij hoeveel werkkilometers per maand raakt Henk's moeder uit de kosten?

d Zijn daarmee ook echt alle autokosten per maand gedekt?

Opgave 4.6: Break-even-point

Voor het aantal liters ActivExtra x dat per maand wordt verkocht geldt: $R = 1{,}15 \cdot x$.
Ook het aantal maandelijks geproduceerde liters is x liter en er geldt: $K = 25000 + 0{,}80 \cdot x$.
Maak je een grafiek van R en een grafiek van K in één figuur, dan is het break-even-point het snijpunt van beide.

a Met welke vergelijking kun je dat snijpunt berekenen?

b Los deze vergelijking op met de balansmethode.

c Vanaf welk aantal liter gaat de firma die ActivExtra produceert hieraan winst maken?

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **vergelijkingen oplossen met de balansmethode**.
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.5 Ongelijkheden

Inleiding

Elektrisch rijden levert minder vervuiling op dan een verbrandingsmotor. Maar wat is goedkoper, elektrisch rijden of nog ouderwets rijden op benzine?

Henk gaat dat eens voor zijn moeder uitzoeken.
Hij vergelijkt de auto van zijn moeder met de benzineversie ervan.
Vanaf hoeveel kilometer per maand is de elektrische versie goedkoper?

Auto leasen		
Kosten in €	elektrisch	benzine
per maand	360	220
per km	0,07	0,12

Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden opstellen en oplossen.

Voorkennis

- de begrippen formule, grootheid, (letter)variabele, eenheid, substitueren (invullen) en vergelijking;
- recht evenredige en lineaire verbanden herkennen en het hellingsgetal bepalen;
- formules en grafieken bij recht evenredige en lineaire verbanden maken en gebruiken;
- grafieken bij formules maken en vergelijkingen oplossen met behulp van de balansmethode.

Dit materiaal is nog in ontwikkeling.

Heeft u leuke ideeën voor dit onderwerp neem dan contact op met Math4all via info@math4all.nl. We kunnen dan wellicht samen aan de slag.

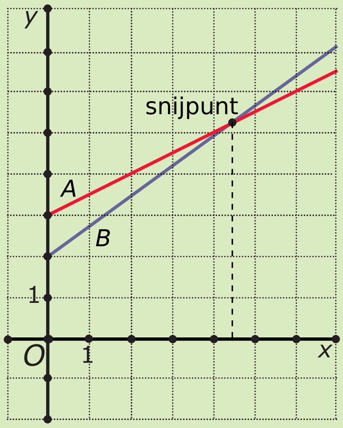
Theorie

Om te onthouden

Soms heb je met twee (of meer) lineaire verbanden te maken en wil je weten wanneer de uitkomsten bij het éne verband meer, minder zijn dan die bij het andere verband. Je krijgt dan een **lineaire ongelijkheid**.

Daarvoor los je eerst de bijbehorende **lineaire vergelijking** op om het snijpunt van beide grafieken te berekenen.

Heb je de vergelijking opgelost, dan kijk je naar de grafieken om antwoord op de gestelde vraag te kunnen geven.
In de figuur is $A > B$ als je links van het snijpunt zit, dus als $x < 4{,}3$.
Eventueel kun je wat getallen om het snijpunt heen proberen.



Figuur 5.2

Verwerken

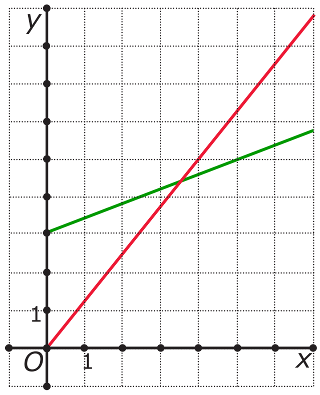
Opgave 5.1

Je ziet de grafieken van twee lineaire verbanden $y = 3 + 0{,}40 \cdot x$ en $y = 1{,}25 \cdot x$.

a Los op in twee decimalen nauwkeurig: $3 + 0{,}40 \cdot x = 1{,}25 \cdot x$.

b Los op: $3 + 0{,}40 \cdot x < 1{,}25 \cdot x$.

c Controleer je antwoord bij b voor enkele waarden van x.



Figuur 5.3

Opgave 5.2

Voor de jaarlijkse kosten K (euro) voor het waterverbruik v (m^3) in twee gebieden A en B gelden de formules:

- gebied A: $K = 36 + 1{,}80v$
- gebied B: $K = 48 + 1{,}55v$

Schrijf bij de volgende vragen steeds de bijbehorende ongelijkheid op en los deze vergelijking op. Geef je antwoord in m^3 nauwkeurig.

a Bij welk verbruik zijn de kosten in gebied A lager dan in gebied B?

b Bij welk verbruik zijn de kosten in gebied B hoger dan € 200?

Opgave 5.3

De temperatuur boven het aardoppervlak hangt onder andere af van de hoogte waarop je je bevindt. Vooral voor bergbeklimmers is het belangrijk om te weten dat elke stijging van 1 km een daling van de temperatuur van ongeveer 6 °C betekent.
Twee bergbeklimmers meten een temperatuur van 16 °C.

a Welke temperatuur meten zij als ze nog 120 m omhoog klimmen?

b Het aantal meters dat ze omhoog gaan, kun je h noemen. Welke formule geeft dan het verband weer tussen temperatuur T in °C en h?

c Welke ongelijkheid hoort er bij de vraag: “Na hoeveel meter stijgen komt de temperatuur die ze meten, onder het vriespunt?”

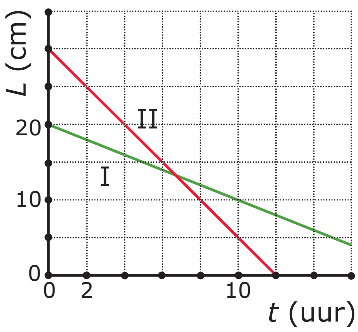
d Los de ongelijkheid bij c op. Geef je antwoord in tientallen meters nauwkeurig.

Opgave 5.4

Je ziet de grafieken van twee cilindervormige kaarsen die tegelijk worden aangestoken.

a Stel bij elk van deze grafieken een formule op.

b Na hoeveel minuten is kaars I langer dan kaars II?



Figuur 5.4

Toepassen

Op de **website van de ANWB** stond begin 2022 nog een vergelijking van twee versies van de Renault Clio:

- de benzineversie kostte € 457 per maand
  verbruik 1 liter benzine per 15 km, met benzineprijs € 1,51 per liter
- de dieselversie kostte € 580 per maand
  verbruik 1 liter diesel per 20 km, met dieselprijs € 1,24 per liter

Figuur 5.5

Henk rekent dit voorbeeld even door. Later gaat hij zoeken naar meer actuele prijzen.

Welke auto is voordeliger?

Opgave 5.5: Rekenvoorbeeld ANWB

Gebruik de gegevens uit **Toepassen** hierboven.

a Hoeveel kost het rijden met de benzineversie per km? En hoeveel is dit voor de dieselversie?

b De kosten K per maand (in euro) hangen af van het aantal gereden km. Geef voor beide versies een formule voor K.

c Voor welke waarden van a is de dieselversie goedkoper dan de benzineversie?

Opgave 5.6: De auto van Henk's moeder

Henk vergelijkt de auto van zijn moeder met de benzineversie ervan en gebruikt de gegevens in de figuur. Hij neemt voor het aantal km dat ze maandelijks rijdt de variabele a.

Bereken nu met behulp van een ongelijkheid vanaf hoeveel km/maand de elektrische versie goedkoper is.

Auto leasen		
Kosten in €	elektrisch	benzine
per maand	360	220
per km	0,07	0,12

Figuur 5.6

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

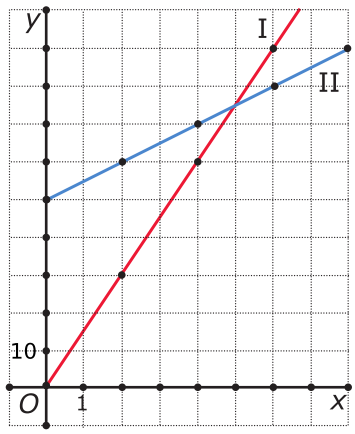
- recht evenredig (verband) — evenredigheidsconstante, hellingsgetal
- lineair verband — hellingsgetal, startgetal
- rekenschema — terugrekenen
- lineaire vergelijking — balansmethode
- lineaire ongelijkheid

Activiteitenlijst

- formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken
- formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken
- vergelijkingen bij lineaire verbanden oplossen door terugrekenen
- vergelijkingen bij lineaire verbanden oplossen met de balansmethode
- lineaire ongelijkheden oplossen

Opgave 6.1

Hiernaast zie je twee rechte lijnen in een assenstelsel.
Grafiek I stelt de opbrengst R (euro) afhankelijk van de hoeveelheid x (kg) voor.
Grafiek II stelt de kosten K (euro) afhankelijk van de hoeveelheid x (kg) voor.



Figuur 6.1

a Bij welk van beide grafieken is sprake van een recht evenredig verband? En waarom?

Werk nu verder met de grafiek bedoeld in a.

b Bij deze grafiek hoort een evenredigheidsconstante. Hoe groot is die evenredigheidsconstante?

c Schrijf de formule op die bij deze grafiek hoort.

Opgave 6.2

In de vorige opgave zie je twee rechte lijnen in een assenstelsel.
Bij beide grafieken is sprake van een lineair verband.

a Waarom?

b Bepaal het hellingsgetal van grafiek II. Stel een formule op bij deze grafiek.

c Ga met behulp van een berekening na of het punt (11,105) op grafiek II ligt.

Opgave 6.3

Gebruik de formules $R = 15 \cdot x$ en $K = 50 + 5 \cdot x$.
Hierin is R de opbrengst en K de kosten in euro bij x kg.

a Met welke vergelijking kun je berekenen wanneer de kosten 130 euro bedragen?

b Los de in a bedoelde vergelijking op met behulp van terugrekenen.

c Los de in a bedoelde vergelijking op met behulp van de balansmethode.

Opgave 6.4

Gebruik de formules $R = 15 \cdot x$ en $K = 50 + 5 \cdot x$.
Hierin is R de opbrengst en K de kosten in euro bij x kg.

a Met welke vergelijking kun je de x-waarde van het snijpunt van beide grafieken berekenen?

b Los de in a bedoelde vergelijking op.

c Bereken de coördinaten van het snijpunt van beide grafieken.

d Oefen het oplossen van lineaire vergelijkingen in het **Practicum**.

Opgave 6.5

Gebruik de formules $R = 15 \cdot x$ en $K = 50 + 5 \cdot x$.
Hierin is R de opbrengst en K de kosten in euro bij x kg.

Je wilt alle waarden van x bepalen waarvoor de opbrengst hoger is dan de kosten.
Daarbij hoort de ongelijkheid $15 \cdot x > 50 + 5 \cdot x$.

a Waarom moet je daarvoor eerst de vergelijking $15 \cdot x = 50 + 5 \cdot x$ oplossen?

b Los de ongelijkheid op.

Testen

Opgave 6.6

Maandag regent het vanaf 8:00 uur voortdurend. Het water in een cilindervormige regenmeter stijgt elke 10 minuten gelijkmatig met 6 mm. Om 8:00 uur was de regenmeter leeg. De waterhoogte wordt aangegeven door h in millimeters en de tijd door t in minuten met $t = 0$ om 8:00 uur.

a Waarom is h recht evenredig met t?

b Welke formule geeft het verband tussen h en t?

c Teken een grafiek van h afhankelijk van t.

d Welk hellingsgetal heeft deze grafiek?

e Na hoeveel minuten regenen is de waterhoogte 20 mm?

★ Opgave 6.7

Een cilindervormige regenmeter wordt 's avonds geleegd. Het regent 's nachts een beetje. Om 8:00 uur de volgende dag staat er 21 mm water in de meter. Dan regent het zo hard dat er elke 10 minuten 5,5 mm water bijkomt.
De waterhoogte wordt aangegeven door h in millimeters en de tijd door t in minuten.

a Welke formule geeft het verband tussen h en t?

b Teken een grafiek van h afhankelijk van t.

c Waarom is h nu niet recht evenredig met t?

d Welk hellingsgetal heeft deze grafiek?

e Als het minder hard regent, wordt het hellingsgetal dan groter of kleiner?

f Hoelang na 8:00 uur blijft de waterhoogte in de regenmeter onder de 50 mm? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

★ Opgave 6.8

Los de vergelijkingen op.

a $5 \cdot x + 30 = 32 + x$

b $320 + 2{,}5 \cdot a = 4{,}25 \cdot a$

c $36 - 0{,}14 \cdot x = 22 + 0{,}5 \cdot x$

d $\frac{1}{3} \cdot x - 2 = \frac{5}{6} \cdot x - 3\frac{1}{3}$

★ Opgave 6.9

Een school huurt voor € 2500,00 per jaar een kopieermachine voor de leerlingen.
De school heeft uitgerekend dat elke kopie aan papier en inkt € 0,05 kost. Die € 0,05 komt extra bij het bedrag dat de leerlingen per kopie moeten betalen. De variabele a is het aantal kopieën dat leerling per jaar met deze machine maken.

a Stel een formule op voor de kosten K in euro per jaar die de school maakt afhankelijk van a.

b Van welk soort verband is er nu sprake? Teken een bijpassende grafiek voor 0 tot en met 50000 kopieën.

c Hoeveel kopieën per jaar moeten er worden gemaakt om met een prijs voor de leerlingen van € 0,20 per kopie uit de kosten te komen?

★ Opgave 6.10

Los de ongelijkheid $7 - 2x < 0{,}5x + 1$ op.

Toepassen

Opgave 6.11: Een auto leasen

Je kunt een auto ‘leasen’. Dat betekent: je krijgt de auto in gebruik, maar hij is eigendom van een leasebedrijf. Je betaalt dan een vast bedrag per maand waar alles bij in zit (aanschaf, onderhoud, etc.). Verder zijn er natuurlijk kosten per gereden km, de energiekosten. Dat geldt als je elektrisch rijdt, maar ook voor rijden op brandstoffen.

Figuur 6.2

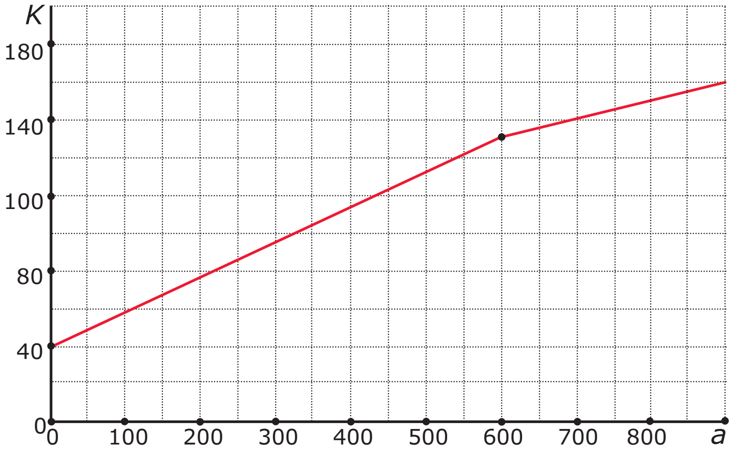
a Verzamel actuele informatie over het leasen van een auto. Kies zelf een merk en een type waar zowel een zuiver elektrische versie als een brandstofversie van bestaat.

b Stel formules op voor de maandelijkse kosten voor beide versies afhankelijk van het aantal gereden km.

c Laat door berekening zien, welke van beide versies bij welk aantal gereden km voordeliger is.

Opgave 6.12: Grootverbruikers gastarief

Als je meer dan 600 m^3 gas per jaar verstookt, ben je een grootverbruiker. Dat geldt bijvoorbeeld voor de glastuinbouw. Om zijn kassen warm te houden verstookt een tuinder nogal wat gas. Om dit betaalbaar te houden heeft het gasbedrijf een grootverbruikstarief. In de grafiek zie je wat gegevens (in €). De knik in de grafiek zit bij het punt (600,130).



Figuur 6.3

a Waarom vertoont de grafiek een knik?

b Hoeveel bedragen de vaste kosten per jaar en de prijs per m^3 voor een kleinverbruiker? Schrijf je berekening op.

a is het aantal verbruikte m^3 gas en K zijn de jaarlijkse kosten (in €) bij grootverbruik. Er geldt dan $K = 70 + 0{,}10a$.

c Ga na, dat deze formule overeen komt met de grafiek voor de grootverbruiker.

d Bij welk grootverbruik komen de jaarlijkse kosten boven de € 200?

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

1	**Recht evenredig**	★	★ ★	★ ★ ★
	Formules en grafieken bij recht evenredige verbanden maken en gebruiken.	**1.2** ☐ **1.3** ☐ **1.4** ☐		
	Betekenis van evenredigheidsconstante en hellingsgetal begrijpen.			
	Van een formule en/of grafiek bepalen of er sprake is van een recht evenredig verband.	**1.2** ☐ **1.3** ☐ **1.4** ☐		
2	**Lineaire verbanden**	★	★ ★	★ ★ ★
	Formules en grafieken bij lineaire verbanden maken en gebruiken;rekenschema's bij lineaire verbanden maken en gebruiken.	**2.1** ☐ **2.2** ☐ **2.3** ☐	**2.4** ☐ **3.4** ☐	
	Voorspellen hoe een grafiek verandert wanneer het bijbehorende lineaire verband verandert.			
3	**Terugrekenen**	★	★ ★	★ ★ ★
	Het begrip lineaire vergelijking, en vergelijkingen grafisch oplossen;rekenschema's bij lineaire verbanden maken en deze gebruiken om vergelijkingen op te lossen door terugrekenen.	**3.1** ☐ **3.2** ☐ **3.3** ☐		
4	**Balansmethode**	★	★ ★	★ ★ ★
	Lineaire vergelijkingen oplossen met de balansmethode.			
5	**Ongelijkheden**	★	★ ★	★ ★ ★
	Vergelijkingen en ongelijkheden bij lineaire verbanden opstellen en oplossen.	**T 6.10** ☐		

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Math4all
www.math4all.nl