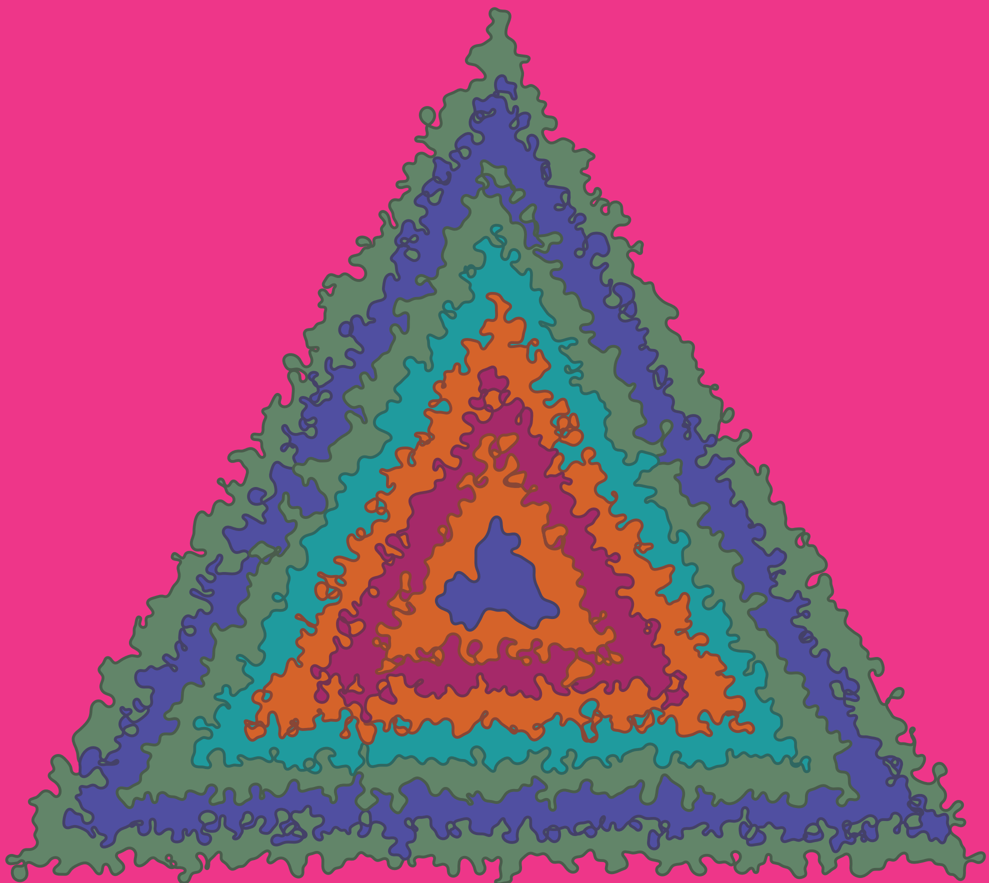
Wiskunde

2 VMBO

Katern 4 / Theorie

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

Begrippen

- de stelling van Pythagoras — rechthoekszijden, hypotenusa (langste zijde)
- de stelling van Pythagoras in 2D gebruiken
- de stelling van Pythagoras in 3D gebruiken — hulplijn
- oppervlakte van ruimtelijke figuren — uitslag
- inhoud (volume) van ruimtelijke figuren

Activiteiten

- de stelling van Pythagoras ontdekken — werken met de stelling van Pythagoras
- lengtes in het platte vlak berekenen — met de omgekeerde stelling van Pythagoras nagaan of een driehoek rechthoekig is
- lengtes in ruimtelijke figuren berekenen
- de stelling van Pythagoras gebruiken bij oppervlakteberekeningen — de oppervlakte van ruimtelijke figuren berekenen
- het volume (de inhoud) van ruimtelijke figuren berekenen

Meubelfabriek

Domein

Meten en tekenen

Hoofdstuk

Meetkundige berekeningen

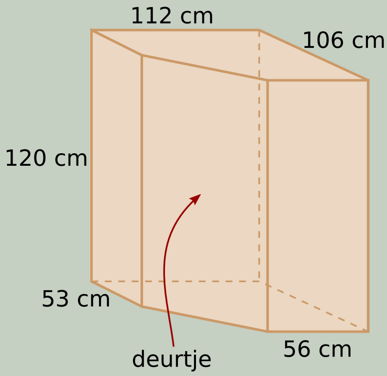
Inhoud

1

1.1 Pythagoras

Inleiding

Kees gaat later werken in de meubelmakerij bij hem naast de deur. Hij loopt er al regelmatig rond. Ze zijn bezig met een houten hoekkastje waarvan je hier het ontwerp ziet. Kees vraagt zich af hoe je nu vooraf de breedte van het deurtje kunt weten.



De meubelmaker vertelt hem dat je daarvoor de stelling van Pythagoras kunt gebruiken. Dat is een eeuwenoude regel, genoemd naar de beroemde Oudgriekse wijsgeer **Pythagoras**.

Eerst ga je nu - samen met Kees - ontdekken wat die stelling inhoudt...

Je leert in dit onderwerp

- de stelling van Pythagoras kennen en bewijzen;
- de langste zijde van een rechthoekige driehoek berekenen met de stelling van Pythagoras.

Voorkennis

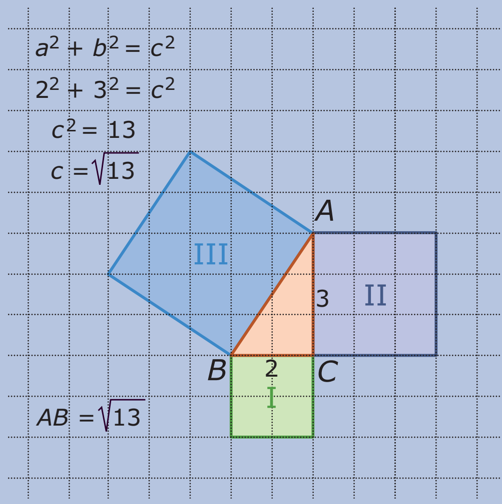
- vanuit de oppervlakte van een vierkant de lengte van de zijden berekenen door worteltrekken;
- de oppervlakte van roosterfiguren bepalen;
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- werken met coördinaten.

Opgave V1

Applet

Uitleg

Je hebt bij hopelijk ontdekt dat bij rechthoekige driehoeken de oppervlakte van het vierkant op de langste zijde even groot is als de oppervlaktes van de vierkanten op de twee andere zijden samen.



Als van ΔABC hoek C de rechte hoek is, dan heet de zijde c tegenover die rechte hoek de hypotenusa, dat is de langste zijde. De twee andere zijden, in dit geval a en b, zijn rechthoekszijden, want ze liggen op de benen van de rechte hoek.
In de rechthoekige ΔABC geldt dan altijd dat:

$BC^2 + AC^2 = AB^2$

ofwel:

$a^2 + b^2 = c^2$

Dit heet de stelling van Pythagoras. Bijvoorbeeld als $BC = a = 2$ en $AC = b = 3$:

$2^2 + 3^2 = c^2$

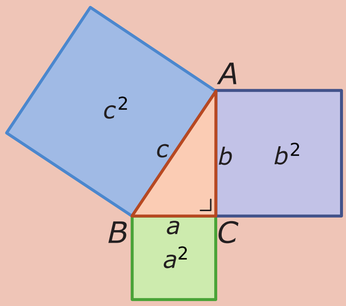
dus:

$c^2 = 4 + 9 = 13$ en $c = \sqrt{13} \approx 3{,}61$.

Zo heb je de stelling van Pythagoras gebruikt om de langste zijde van de rechthoekige ΔABC te berekenen.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie



Als van ΔABC hoek C de rechte hoek is, dan heet de zijde c tegenover die rechte hoek de **hypotenusa**, dat is de langste zijde. De twee andere zijden, in dit geval a en b, noem je **rechthoekszijden**, want ze liggen op de benen van de rechte hoek.
In de rechthoekige ΔABC met $\angle C = 90°$ geldt dan altijd dat:

$BC^2 + AC^2 = AB^2$

ofwel:

$a^2 + b^2 = c^2$

In het algemeen geldt in elke rechthoekige driehoek de **stelling van Pythagoras**:

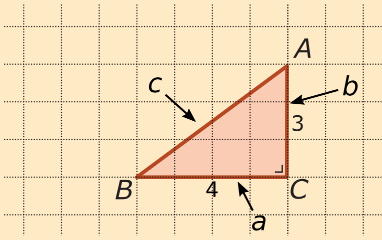
(rechthoekzijde)^2 + (rechthoekzijde)^2 = (hypotenusa)^2

Je kunt deze stelling goed gebruiken om de lengte van een zijde van een rechthoekige driehoek te berekenen als de twee andere zijden zijn gegeven. In de figuur zie je hoe dat gaat, bekijk ook de voorbeelden.

Voorbeeld 1

Applet

Je ziet hier de rechthoekige driehoek ABC met $BC = a = 4$ en $AC = b = 3$ en $\angle C = 90°$.



Bereken de lengte van de langste zijde AB.

Antwoord

Je kunt door een vierkant op zijde AB te tekenen de oppervlakte ervan berekenen.
Ga na dat die oppervlakte $AB^2 = 25$ roosterhokjes is.
De lengte van de zijde is dus $AB = \sqrt{25} = 5$.

Met de stelling van Pythagoras kun je die oppervlakte sneller bepalen.

De stelling van Pythagoras geeft direct AB^2 dus de oppervlakte van het vierkant:

$4^2 + 3^2 = AB^2$

Dus $AB^2 = 16 + 9 = 25$.

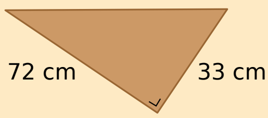
Zodat $AB = \sqrt{25} = 5$.

Door de kwadraten van de gegeven rechthoekszijden op te tellen heb je geen vierkanten op de zijden nodig.

Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Je ziet hier een bovenaanzicht van een hoektafeltje.
Voor de zekerheid is de rechte hoek aangegeven met een rechtehoektekentje.



Het tafeltje wordt uit één plank gezaagd en afgewerkt met een dunne rand er omheen (om de zaagsnede onzichtbaar te maken). Hoe lang moet die dunne rand zijn?

Antwoord

Geef de langste zijde (hypotenusa) een letter, bijvoorbeeld de letter c.

De stelling van Pythagoras in de rechthoekige driehoek is:

(rechthoekzijde)^2 + (rechthoekzijde)^2 = (hypotenusa)^2

Hier dus $72^2 + 33^2 = c^2$ zodat $c^2 = 6273$.

Dit betekent: $c = \sqrt{6273} \approx 79{,}2$ cm.

De totale lengte van de rand is dus ongeveer $72 + 33 + 79{,}2 = 184{,}2$ cm.

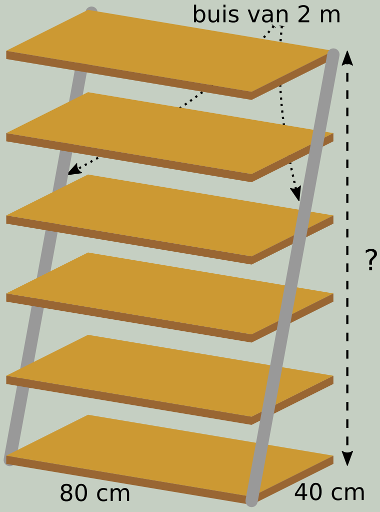
Opgave 6 Opgave 7

1.2 Lengtes berekenen

Inleiding

De meubelmaker heeft een opdracht gekregen voor een wat bijzondere boekenkast. Hij heeft zelf nog twee stalen buizen van 2 m lengte liggen en de klant heeft nog zes boekenplanken van 80 cm bij 40 cm liggen. Je ziet hier hoe de boekenkast moet gaan worden. Tussen de buizen worden strips gelast waar de planken op worden bevestigd. Op de bovenste plank kunnen geen zware boeken, alleen een leuke vaas of zoiets. De boekenkast komt tegen een verticale muur.

De vraag is nu wel hoe ver de planken uit elkaar moeten. Kees vertelt hem dat je ook daarvoor de stelling van Pythagoras kunt gebruiken.



Je leert in dit onderwerp

- lengtes berekenen met de stelling van Pythagoras;
- de omgekeerde stelling van Pythagoras gebruiken om rechte hoeken te maken.

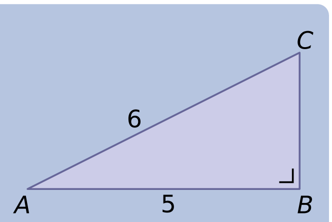
Voorkennis

- de stelling van Pythagoras in rechthoekige driehoeken toepassen;
- werken met coördinaten.

Opgave V1

Uitleg

Als ΔABC een rechthoekige driehoek is, dan geldt de stelling van Pythagoras.
Omdat in deze driehoek AC de langste zijde (hypotenusa) is, geldt



$AB^2 + BC^2 = AC^2$

ofwel:

$5^2 + BC^2 = 6^2$

Hieruit kun je BC^2 berekenen door aan beide zijden 5^2 af te halen:

$BC^2 = 6^2 - 5^2$.

Zo vind je $BC = \sqrt{11} \approx 3{,}32$.

Je ziet, dat je de stelling van Pythagoras ook kunt gebruiken om rechthoekszijden uit te rekenen.

Opgave 1 Opgave 2

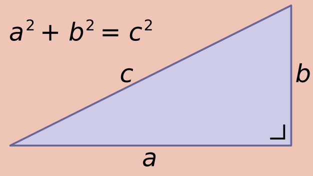
Theorie

In het algemeen geldt in elke rechthoekige driehoek de **stelling van Pythagoras**:

(rechthoekzijde)^2 + (rechthoekzijde)^2 = (hypotenusa)^2

ofwel:

$a^2 + b^2 = c^2$



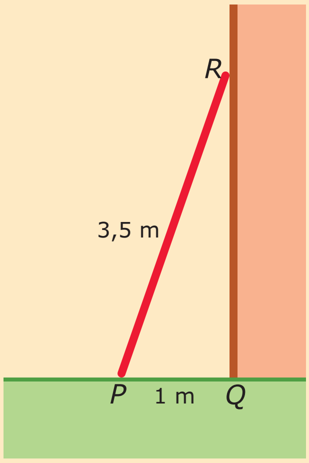
Je kunt deze stelling goed gebruiken om de lengte van een zijde van een rechthoekige driehoek te berekenen als de twee andere zijden zijn gegeven. Bekijk ook de voorbeelden.

Ook de **omgekeerde stelling van Pythagoras** is waar: als in een driehoek de stelling van Pythagoras klopt, dan is de driehoek rechthoekig.

Voorbeeld 1

Applet

Iemand zet een ladder van $3{,}5$ m schuin tegen de muur van een huis. Hier zie je een zijaanzicht van de situatie. Het punt waar de ladder op de grond staat is 1 m van de muur verwijderd. Hoe hoog komt de ladder?



Antwoord

Je gaat er van uit dat de muur loodrecht op de grond staat, dus dat ΔPQR een rechthoekige driehoek is met een rechte hoek bij Q. De stelling van Pythagoras in ΔPQR is:

(rechthoekzijde)^2 + (rechthoekzijde)^2 = (hypotenusa)^2

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

Je weet: $PQ = 1$ m en $PR = 3{,}5$ m.

Dan krijg je: $1^2 + QR^2 = 3{,}5^2$.

Dit geeft:

$QR^2 = 3{,}5^2 - 1^2 = 11{,}25$.

En dus is:

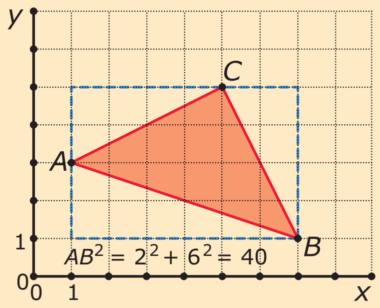
$QR = \sqrt{11{,}25} \approx 3{,}35$ m.

Opgave 3 Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Applet

Met de stelling van Pythagoras kun je ook lengtes van lijnstukken op een rooster berekenen. Je maakt dan een rechthoekige driehoek op de roosterlijnen. Hier zie je hoe de lengte van AB kan worden berekend.
Om te onderzoeken of deze ΔABC een rechte hoek heeft, ga je na of de stelling van Pythagoras in die driehoek geldt. Als het kwadraat van de langste zijde gelijk is aan de som van de kwadraten van de twee andere zijden, dan is de hoek tegenover die langste zijde recht.

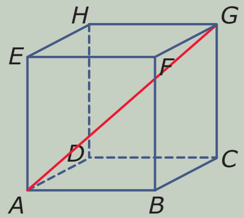


Opgave 6 Opgave 7 Opgave 8

1.3 Lengtes in 3D

Inleiding

Kees kent nu de stelling van Pythagoras. Die gebruik je voor het berekenen van lengtes. Dat kun je toepassen in allerlei situaties in twee dimensies, in het platte vlak. Maar in een meubelfabriek wordt gewerkt aan echte ruimtelijke, driedimensionale objecten.
Kees gaat uitzoeken hoe je ook dan de stelling van Pythagoras kunt gebruiken.
Hoe kun je bijvoorbeeld in zo'n kubus de lengte van een lichaamsdiagonaal uitrekenen?



Je leert in dit onderwerp

- de stelling van Pythagoras gebruiken in berekeningen van lengtes in ruimtelijke figuren;
- dit toepassen in praktische situaties.

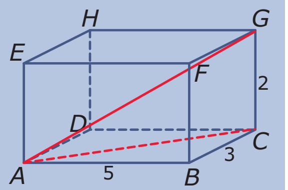
Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras.
- werken met ruimtelijke figuren en de namen van de belangrijkste ruimtelijke figuren;
- de begrippen diagonaal en lichaamsdiagonaal.

Opgave V1

Uitleg

Met behulp van de stelling van Pythagoras bereken je lengtes van zijden in rechthoekige driehoeken. Dat kun je ook toepassen in ruimtelijke figuren. De moeilijkheid is dan vaak het herkennen van de juiste rechthoekige driehoek.



Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm en $AE = 2$ cm. Je wilt de lichaamsdiagonaal AG berekenen.

Je tekent eerst hulplijn AC, driehoek ACG is bij C rechthoekig.
Je berekent eerst de lengte van AC in driehoek ABC.
De stelling van Pythagoras in die driehoek luidt: $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
Vul de waarden in die zijn gegeven en bereken AC:
$5^2 + 3^2 = AC^2$
$AC^2 = 34$
$AC = \sqrt{34} \approx 5{,}83$.

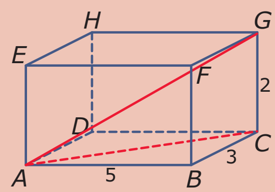
De lengte van AG bereken je nu in ΔACG.
De stelling van Pythagoras in die driehoek is: $AC^2 + CG^2 = AG^2$.
Vul de bestaande en gevonden waarden in:

$\left(\sqrt{34}\right)^2 + 2^2 = AG^2$, zodat $AG^2 = 38$ en $AG = \sqrt{38} \approx 6{,}16$.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Met behulp van de stelling van Pythagoras bereken je lengtes van zijden in rechthoekige driehoeken. Dat kun je ook toepassen in ruimtelijke figuren. De moeilijkheid is dan vaak het herkennen van de juiste rechthoekige driehoek. Soms moet je dan eerst een **hulplijn** tekenen...

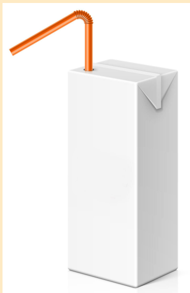


Je kunt bijvoorbeeld in een balk $ABCD.EFGH$ de **lichaamsdiagonaal** AG berekenen. Dat kan zo:

1. Eerst hulplijn AC berekenen in de rechthoekige driehoek ABC.
2. Vervolgens AG berekenen in de rechthoekige driehoek ACG.

Voorbeeld 1

Hier zie je een pakje frisdrank. Neem aan dat elk van die pakjes de vorm heeft van een balk van $5{,}5$ cm bij $4{,}0$ cm bij $9{,}5$ cm.



In elk van die pakjes zit vlak bij een hoekpunt van het bovenvlak een plek waar je het rietje in kunt steken. Hoe lang moet zo'n rietje minstens zijn?

Antwoord

Zeker langer dan de langste afmeting van het pakje. Maar het moet er ook schuin in passen...

Je berekent dus de lengte van een lichaamsdiagonaal.
Voor de diagonaal c van het grondvlak geldt $c^2 = 5{,}5^2 + 4{,}0^2 = 46{,}25$.
Voor de lichaamsdiagonaal d geldt dus $d^2 = 46{,}25 + 9{,}5^2 = 136{,}5$ zodat $d = \sqrt{136{,}5} \approx 11{,}7$ cm.
Het rietje moet minstens 117 mm lang zijn.

Opgave 3 Opgave 4

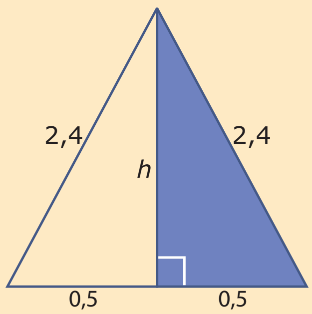
Voorbeeld 2

Deze ladder kan op drie plaatsen scharnieren. Nu scharniert hij alleen halverwege. De totale lengte van de ladder als hij helemaal uitgeklapt is (en dus nergens scharniert) bedraagt $4{,}80$ m. In deze stand staan de poten 1 m uit elkaar.

Hoe hoog komt de ladder nu?

Antwoord

Bekijk de in het midden scharnierende ladder van de zijkant. Je ziet dan een gelijkbenige driehoek met een basis van 1 m en benen van $2{,}40$ m. De hoogte h is een rechthoekszijde van een rechthoekige driehoek.



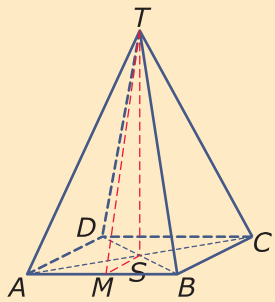
De stelling van Pythagoras levert op $0{,}5^2 + h^2 = 2{,}4^2$.

En dus is $h = \sqrt{2{,}4^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{5{,}51} \approx 2{,}35$ m.

Opgave 5

Voorbeeld 3

Hier zie je een regelmatig vierzijdige piramide $T.ABCD$ met grondvlak 4 cm bij 4 cm en opstaande ribben van 6 cm. Zo'n piramide heet regelmatig omdat het grondvlak een vierkant is en omdat bovendien de top T loodrecht boven het midden S van het grondvlak zit.



Bereken de hoogte TM van het voorvlak van deze piramide.

Bereken de hoogte TS van deze piramide.

Antwoord

Het voorvlak is ΔABT met hoogte TM waarin M het midden van AB is.
Ga na dat $TM^2 + 2^2 = 6^2$.
En dus is $TM^2 = 32$, zodat $TM = \sqrt{32} \approx 5{,}66$ cm.

Nu kun je TS berekenen in de rechthoekige driehoek MST.

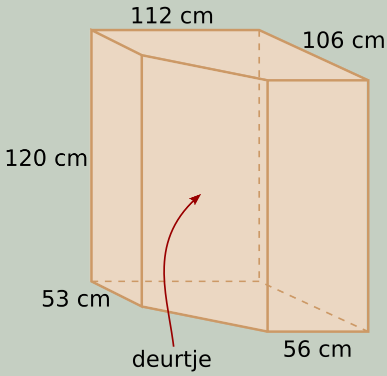
Ga na, dat $TS = \sqrt{28} \approx 5{,}29$ cm.

Opgave 6 Opgave 7 Opgave 8

1.4 Oppervlakte ruimtelijke figuren

Inleiding

Als je zo'n hoekkastje wilt bouwen en verkopen, moet je weten hoeveel materiaal er voor nodig is. In de meubelfabriek mag Kees de oppervlakte aan materiaal uitrekenen. Het kastje bestaat uit een vijfhoekige onderkant en bovenkant en uit vijf rechthoeken.
Van elk van die onderdelen moet Kees de oppervlakte bepalen.



Je leert in dit onderwerp

- de stelling van Pythagoras toepassen bij het berekenen van oppervlaktes;
- de oppervlakte berekenen van een ruimtelijke figuur waarvan je een uitslag kunt tekenen.

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek en een cirkel bepalen;
- werken met coördinaten.

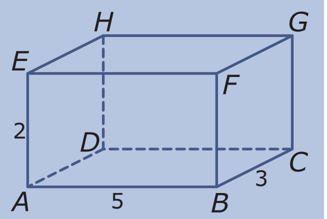
Opgave V1

Uitleg

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm en $AE = 2$ cm. Je wilt de oppervlakte bepalen.
Die oppervlakte is de som van de oppervlaktes van alle afzonderlijke grensvlakken:

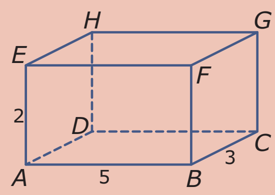
- ondervlak en bovenvlak zijn elk $5 \cdot 3 = 15$ cm^2
- voorvlak en achtervlak zijn elk $5 \cdot 2 = 10$ cm^2
- linker en rechter zijvlak zijn elk $3 \cdot 2 = 6$ cm^2

De totale oppervlakte is $2 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 62$ cm^2.



Opgave 1 Opgave 2

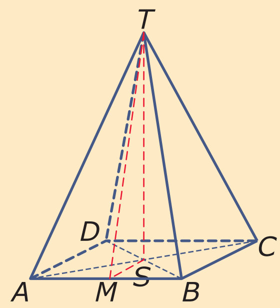
Theorie



De **oppervlakte van een ruimtelijke figuur** is de som van de oppervlaktes van alle afzonderlijke grensvlakken. Dat klinkt niet al te moeilijk, vooral niet als alle grensvlakken (vlakke) veelhoeken zijn. Wanneer de grensvlakken gebogen zijn (zoals bij een bol, een kegel, een cilinder, ...) dan is dat meteen al veel moeilijker. Voorlopig kun je de oppervlakte alleen bepalen van ruimtelijke figuren waar je een **uitslag** van kunt maken.

Bekijk de voorbeelden. Soms heb je de stelling van Pythagoras nodig.

Voorbeeld 1



Hier zie je een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ met grondvlak 4 cm bij 4 cm en hoogte 6 cm. Het grondvlak is een vierkant en de top T zit loodrecht boven het midden S van het grondvlak.

Bereken de totale oppervlakte van deze piramide.

Antwoord

Het grondvlak is $4 \cdot 4 = 16$ cm^2.

De vier opstaande grensvlakken zijn gelijkbenige driehoeken met een basis van 4 cm en een hoogte die je kunt uitrekenen met de stelling van Pythagoras. Ga na dat deze hoogte $\sqrt{40}$ is.
De oppervlakte van één opstaand grensvlak is

$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{40} = 2\sqrt{40}$ cm^2.

De totale oppervlakte van de piramide is

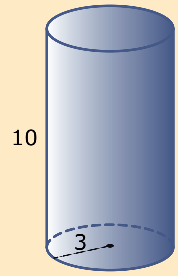
$16 + 4 \cdot 2\sqrt{40} = 16 + 8\sqrt{40}$ cm^2.

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

Dit is een cilinder met een straal van 3 cm en een hoogte van 10 cm.

Bereken de oppervlakte van deze cilinder inclusief grondvlak en bovenvlak in mm^2 nauwkeurig.

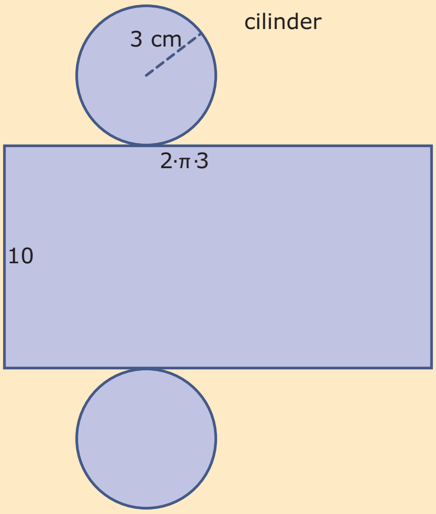


Antwoord

Het grondvlak en het bovenvlak van deze cilinder zijn cirkels met een straal van 3.
Ze hebben daarom elk een oppervlakte van $\pi \cdot 3^2 \approx 28{,}27$ cm^2.

Het gebogen zijvlak (de zogenaamde ‘mantel’ van de cilinder) kun je openknippen en plat voor je neerleggen. De cilindermantel is dan een rechthoek waarvan de lengte gelijk is aan de omtrek van de grondcirkel en de breedte gelijk is aan de hoogte van de cilinder.
De cilindermantel is dus een rechthoek van $2\pi \cdot 3 = 6 \cdot \pi$ bij 10. Hij heeft een oppervlakte van $6 \cdot \pi \cdot 10 \approx 188{,}50$.

De totale oppervlakte van de cilinder is ongeveer $245{,}04$ cm^2.



Opgave 5 Opgave 6

Voorbeeld 3

Bereken de dakoppervlakte van dit huis. Het grondvlak is 8 bij 8 m. De nok van het dak zit 8 m boven de grond. Houd geen rekening met de schoorsteen.

Antwoord

Het dak bestaat uit 8 rechthoekige driehoeken.
Elk van die driehoeken heeft een rechthoekszijde van 4 m (de halve nok van het dak) en een rechthoekszijde die één van de twee benen van een driehoekige gevel is. De benen van die driehoekige gevels kun je uitrekenen met de stelling van Pythagoras.
Ga na dat ze $\sqrt{80}$ meter lang zijn.

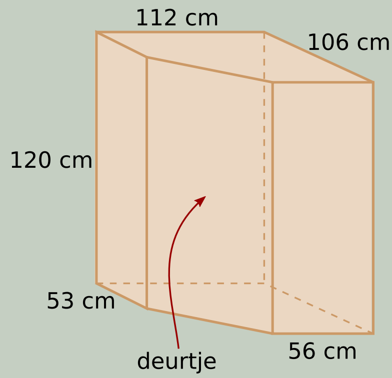
De oppervlakte van één zo'n dakdeel is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{80} = 2\sqrt{80}$ m^2.
Het totale dak heeft een oppervlakte van
$8 \cdot 2\sqrt{80} = 16\sqrt{80} \approx 143{,}11$ m^2.

Opgave 7

1.5 Inhoud ruimtelijke figuren

Inleiding

Van zo'n hoekkastje wil de klant vaak weten hoeveel er in past, kortom de inhoud van het kastje. In de meubelfabriek mag Kees die inhoud uitrekenen.
Het kastje bestaat uit een vijfhoekige onderkant en bovenkant en uit vijf rechthoeken.
De oppervlakte van die onderdelen kan Kees nu wel bepalen.
Maar hoe bereken je de inhoud, dus het aantal cm^3 dat erin past?



Je leert in dit onderwerp

- de inhoud berekenen van een balk, een prisma en een cilinder;
- de inhoud berekenen van een piramide en een kegel.

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- de oppervlakte berekenen van een ruimtelijke figuur waarvan je een uitslag kunt tekenen.

Opgave V1

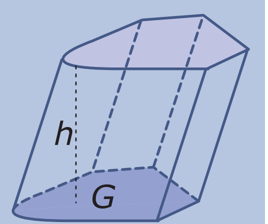
Uitleg 1

De inhoud (het volume) van een ruimtelijke figuur is het aantal kubussen van $1 \cdot 1 \cdot 1$ dat er in past.
Soms heb je daarbij ook delen van zo'n kubus nodig.

Er bestaan lichamen die je kunt opdelen in op elkaar gestapelde grondvlakken.
Van die lichamen bepaal je de inhoud door eerst het grondvlak te bedekken met eenheidskubussen: als de oppervlakte van het grondvlak G is, dan passen er precies G van die kubusjes op.

Vervolgens kijk je hoeveel van die even grote lagen je op elkaar moeten leggen om bij het bovenvlak te komen: als de hoogte van het lichaam h is, dan passen er precies h lagen op elkaar.

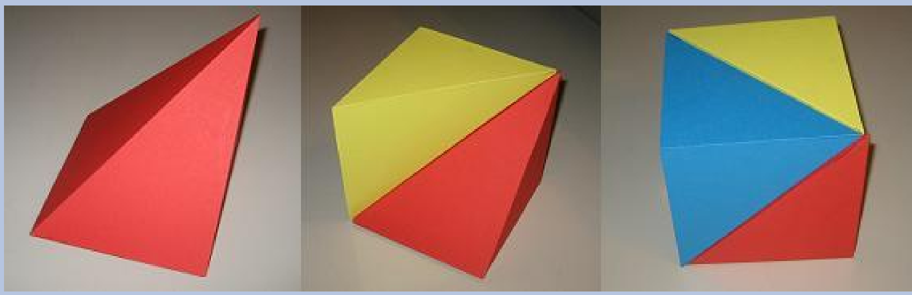
In totaal heb je dan $G \cdot h$ eenheidskubussen (of delen ervan).
De inhoud, het volume van zo'n lichaam is daarom $G \cdot h$.



Dit betekent dat de inhoud van een balk, een prisma en een cilinder $G \cdot h$ is.

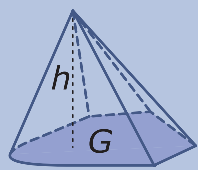
Uitleg 2

Deze serie foto's is afkomstig van **Wikipedia: Piramide**. Hij laat zien hoe drie gelijke piramides een kubus vormen.



Deze vierzijdige piramides hebben een vierkant grondvlak van (bijvoorbeeld) 5 cm en een hoogte die ook 5 cm is. De top zit recht boven een hoekpunt van het grondvlak van zo'n piramide. Drie van die piramides passen in elkaar tot een kubus.

De inhoud van zo'n piramide moet dus wel éénderde van de inhoud van de kubus zijn: $\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.



Je kunt deze inhoud schrijven als $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarin $G = 5 \cdot 5$ de oppervlakte van het grondvlak van de kubus en $h = 5$ de hoogte van de kubus is.

Wiskundigen hebben aangetoond dat de inhoud van figuren die bestaan uit een grondvlak met daarop ribben die allemaal in één punt samenkomen gelijk is aan $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

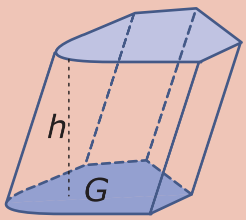
Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Theorie

De **inhoud van een ruimtelijke figuur** is het aantal kubussen van $1 \cdot 1 \cdot 1$ dat er in past. Soms heb je daarbij ook delen van zo'n kubus nodig.

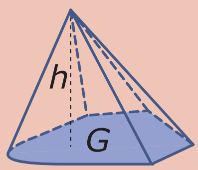
De **inhoud van een balk** is daarom eenvoudig te berekenen: *lengte* × *breedte* × *hoogte*.

Veel lichamen bestaan uit een aantal op elkaar gestapelde gelijke grondvlakken.
Noem de oppervlakte van het grondvlak G en de hoogte h.



De **inhoud van een prisma** is: $G \cdot h$.
De **inhoud van een cilinder** is: $G \cdot h$.

Andere lichamen hebben een piramidevorm of een kegelvorm.

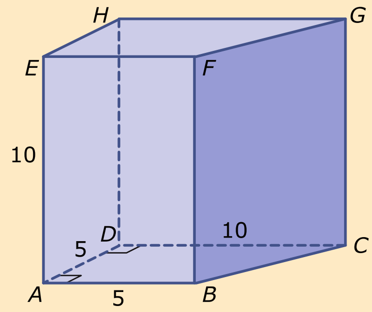


De **inhoud van een piramide** is: $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

De **inhoud van een kegel** is: $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Voorbeeld 1

Je ziet hier een prisma met een hoogte van 10 cm.
Het grondvlak van het prisma is een trapezium met twee rechte hoeken. De afmetingen staan in de figuur.



Hoe groot is het volume van dit prisma?

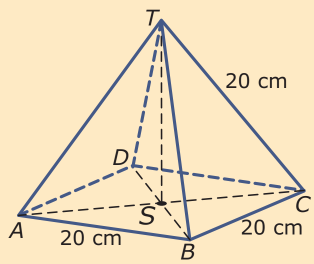
Antwoord

Ga na, dat het grondvlak van het prisma een oppervlakte van $G = 37{,}5$ cm^2 heeft.
Het prisma heeft een hoogte van $h = 10$ cm.
Het volume (de inhoud) is $G \cdot h = 37{,}5 \cdot 10 = 375$ cm^3.

Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 2

Dit is een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$. Grondvlak $ABCD$ is dus een vierkant. Alle ribben zijn 20 cm lang.
Hoeveel bedraagt de inhoud van deze piramide?



Antwoord

Het grondvlak van deze piramide is vierkant $ABCD$ van 20 bij 20 cm.
De oppervlakte van het grondvlak is dus $G = 400$ cm^2.

De hoogte h van de piramide is de lengte van de stippellijn vanuit T loodrecht op het grondvlak die je in de figuur ziet. Die stippellijn komt uit in punt S, het snijpunt van AC en BD.
Met de stelling van Pythagoras bereken je die hoogte.

Dat kan op verschillende manieren. Ga na, dat $h = TS = \sqrt{200}$.

De inhoud van de piramide is dus

$\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 400 \cdot \sqrt{200} \approx 1886$ cm^3.

Opgave 8 Opgave 9 Opgave 10

Begrippen

- frequentietabel — centrummaat — modus — mediaan — gemiddelde
- boxplot — kwartiel — spreidingsbreedte — (inter)kwartielafstand
- klassenindeling — klassengrenzen, klassenmidden, klassenbreedte
- schatten
- statistisch onderzoek — populatie — steekproef — representatief

Activiteiten

- gegevens samenvatten in frequentietabellen en beschrijven met behulp van centrummaten;
- gegevens samenvatten in frequentietabellen en beschrijven met behulp van spreidingsmaten en boxplots;
- klassenindelingen gebruiken, het gemiddelde schatten;
- centrummaten en spreidingsmaten schatten vanuit een klassenindeling;
- kennismaken met statistisch onderzoek, populatie en representatieve steekproef

Cijfers op orde

B1H		ne		en		fa		ak		gs	
leerling	geslacht		RE		RE		RE		RE		RE
1	v	6,7	7	4,4	4	5,6	6	6,6	7	6,8	7
2	v	5,6	6	5,3	5	6,1	6	7,1	7	6,8	7
3	m	8,1	8	6,7	7	5,8	6	7,2	7	7,6	8
4	m	8,5	9	5,1	5	6,1	6	6,1	6	6,1	6
5	m	4,9	5	9,7	10	6,6	7	8,0	8	7,5	8
6	v	6,2	6	9,4	9	7,2	7	6,6	7	7,8	8

Domein

Informatieverwerking

Hoofdstuk

Statistiek

Inhoud

2

2.1 Centrummaten

Inleiding

B1H		ne		en		fa		ak		gs	
leerling	geslacht		RE		RE		RE		RE		RE
1	v	6,7	7	4,4	4	5,6	6	6,6	7	6,8	7
2	v	5,6	6	5,3	5	6,1	6	7,1	7	6,8	7
3	m	8,1	8	6,7	7	5,8	6	7,2	7	7,6	8
4	m	8,5	9	5,1	5	6,1	6	6,1	6	6,1	6
5	m	4,9	5	9,7	10	6,6	7	8,0	8	7,5	8
6	v	6,2	6	9,4	9	7,2	7	6,6	7	7,8	8

Als je beschikt over een hele serie gegevens, zoals alle rapportcijfers van alle leerlingen in een bepaald leerjaar van alle vakken, dan heb je een enorme brij aan getallen. Hoe krijg je daar enig overzicht over? Aicha gaat een poging doen. Eerst gebruikt ze de eindcijfers van enkele klassen van jaren geleden.

Zoals ze weet kunnen frequentietabellen en diagrammen helpen. Maar soms is een enkel getal genoeg...

Je leert in dit onderwerp

- van een hoeveelheid gegevens de modus, de mediaan en het (gewogen) gemiddelde berekenen;
- modus, mediaan en gemiddelde interpreteren als centrummaten van die gegevens.

Voorkennis

- (gewogen) gemiddelde van een hoeveelheid gegevens berekenen;
- werken met (relatieve) frequenties en (relatieve) frequentietabellen.

Opgave V1

Uitleg

cijfer	frequentie
4	1
5	4
6	9
7	11
8	3
9	1
totaal	29

Je ziet hier een frequentietabel van de rapportcijfers voor het vak Engels in klas B2F. Je wilt de gegevens van deze klas samenvatten.

Er zijn drie getallen die de waarnemingen van deze frequentietabel samenvatten:

- het cijfer dat het vaakst voorkomt en dus de grootste frequentie heeft heet de modus (het modale cijfer) van deze gegevens.
- de middelste van alle waarnemingen (cijfers) als die op volgorde staan, heet de mediaan van deze gegevens.
- het gemiddelde van de waarnemingen vind je door alle cijfers bij elkaar op te tellen en dat getal te delen door het totaal aantal cijfers. Houd daarbij rekening met de frequenties.

Bij deze frequentieverdeling is 7 de modus, omdat deze het vaakst voorkomt.

De mediaan is in dit geval het 15e cijfer, dus een 7. Let op dat alle cijfers op volgorde staan. Bij een oneven aantal getallen is de mediaan het middelste getal. Bij een even aantal getallen is de mediaan het midden van de twee middelste getallen.

Het gemiddelde cijfer is $\frac{188}{29} \approx 6{,}5$.

De modus, de mediaan en het gemiddelde geven een soort centrum van de frequentieverdeling weer. Deze drie getallen heten daarom centrummaten en ze kunnen verschillend zijn.

Het is niet zo dat je modus, mediaan en gemiddelde altijd kunt bepalen. Je moet voor de mediaan en het gemiddelde altijd getallen als waarneming hebben.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

Er zijn drie getallen die een hoeveelheid gegevens (waarnemingen) kunnen samenvatten:

- de **modus** (de modale waarde) is de waarneming die het vaakst voorkomt en dus de grootste frequentie heeft. Er is geen modus als twee waarnemingen het meest voorkomen.
- de **mediaan** is het midden van alle waarnemingen als die op volgorde staan.
- het **gemiddelde** van de waarnemingen vind je door alle waarden bij elkaar op te tellen en dat getal te delen door het totaal aantal cijfers. Daarbij moet je rekening houden met de frequenties (de wegingen) van de waarnemingen.

De modus, de mediaan en het gemiddelde zijn **centrummaten**. Deze drie getallen kunnen verschillend zijn.

Het is niet zo dat je modus, mediaan en gemiddelde altijd kunt bepalen. Je moet voor de mediaan en het gemiddelde altijd getallen als waarneming hebben.

Voorbeeld 1

Je ziet hier de frequentietabellen van de klassen B2A en B2C van hun rapportcijfers voor het vak wiskunde. Vergelijk de modus, de mediaan en het gemiddelde cijfer van beide klassen. Trek conclusies over welke klas gemiddeld beter scoort, in welke klas zitten de beste leerlingen, waar vallen de meeste onvoldoendes, etc.

	klas B2A	klas B2C
cijfer	frequentie	frequentie
4	1	0
5	4	4
6	9	8
7	11	6
8	3	4
9	1	2
totaal	29	24

Antwoord

Klas B2A:

- de modus is 7, want 7 komt het vaakst voor bij klas B2A.
- de mediaan is 7, want dat is het 15de getal als je ze van klein naar groot opschrijft.
- het gemiddelde is ongeveer 6,5, want $\frac{1 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 9 \cdot 6 + 11 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot 9}{29} \approx 6{,}5$.

Klas B2C:

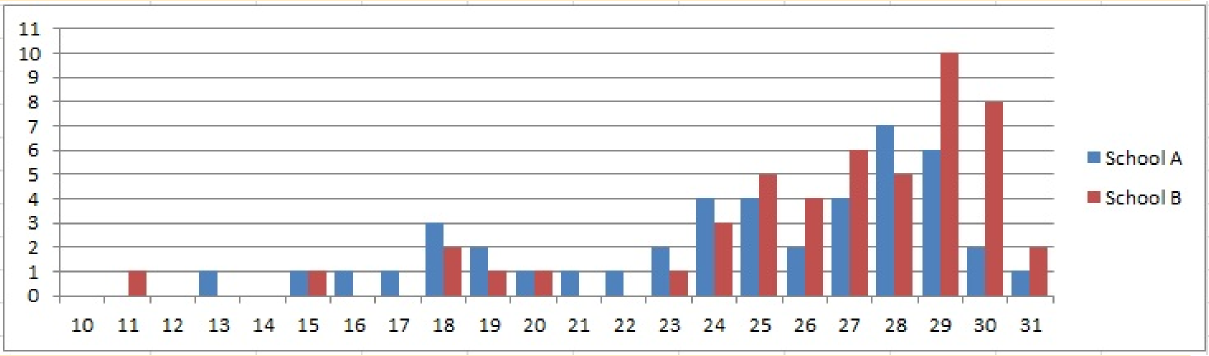
- de modus is 6, want 6 komt het vaakst voor bij klas B2C.
- de mediaan is 6,5, want dat is het gemiddelde van het 12e en 13e cijfer als je ze van klein naar groot opschrijft.
- het gemiddelde is ongeveer 6,7, want $\frac{4 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 9}{24} \approx 6{,}7$.

Klas B2C scoort gemiddeld hoger dan B2A, maar het meest voorkomende cijfer zit bij B2C onder het gemiddelde. Er zitten in klas B2C dus veel leerlingen die magertjes scoren (de helft scoort 5 of 6), maar ook naar verhouding veel leerlingen die heel goed scoren.

Opgave 4

Voorbeeld 2

Op twee scholen voor voortgezet onderwijs zijn de aantallen leerlingen per klas geteld. Je ziet in dit staafdiagram het resultaat voor school A en school B.



Bepaal de modale en de gemiddelde klassengrootte per school en gebruik deze gegevens om te bepalen welke school in het algemeen grotere klassen heeft.

Antwoord

School A:

- de modale klassengrootte: 28, want de blauwe staven horen bij school A en de hoogste blauwe staaf hoort bij een klassengrootte van 28.
- de gemiddelde klassengrootte: ongeveer 24,5.

School B:

- de modale klassengrootte: 29.
- de gemiddelde klassengrootte: ongeveer 26,4.

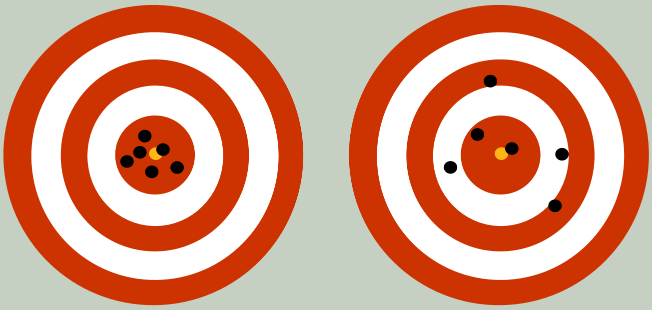
De modus is bij school B net iets groter dan bij school A, bovendien heeft school B een grotere gemiddelde klassengrootte. Op school B zijn de klassen in het algemeen dus groter (ondanks die éne uitschieter van een klasje van maar 11 leerlingen).

Opgave 5 Opgave 6

2.2 Spreidingsmaten

Inleiding

Aicha ziet dat twee groepen gegevens met eenzelfde centrummaat nog flink van elkaar kunnen verschillen. De spreiding van de gegevens kan erg verschillend zijn. Je ziet dat hier met de schoten op deze roos. Van de tweede serie is de spreiding groter.



Je leert in dit onderwerp

- de spreidingsbreedte en de kwartielafstand van een serie gegevens berekenen;
- spreidingsbreedte en kwartielafstand interpreteren als spreidingsmaten van die gegevens;
- een serie gegevens samenvatten in een boxplot.

Voorkennis

- (gewogen) gemiddelde, modus en mediaan van een hoeveelheid gegevens berekenen;
- werken met (relatieve) frequenties en (relatieve) frequentietabellen.

Opgave V1

Uitleg

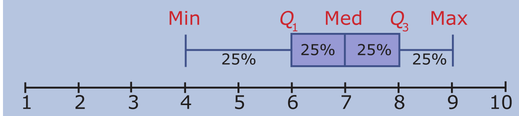
Je ziet hier een frequentietabel van de rapportcijfers voor het vak Frans in klas B2F. Je kunt deze tabel samenvatten met de modus, de mediaan en/of het gemiddelde.

cijfer	frequentie
4	1
5	4
6	9
7	7
8	6
9	2
totaal	29

Je kunt van deze frequentietabel ook een samenvatting maken, bestaande uit vijf getallen:

1. De laagste waarneming is 4.
2. De hoogste waarneming is 9.
3. De mediaan (afgekort med) is 7.
4. De mediaan van de eerste helft is hier 6. Dat heet het eerste kwartiel (afgekort Q_1).
5. De mediaan van de tweede helft is hier 8. Dit is het derde kwartiel (afgekort Q_3).

Deze vijf getallen zet je in een tekening langs een as en je krijgt een ‘boxplot’, een 5-getallen samenvatting van de frequentietabel.



Voor elke boxplot geldt: tussen twee opvolgende getallen van de 5-getallen samenvatting zit 25% van de waarnemingen. In de boxplot kun je geen gemiddelde en modus aflezen.

Uit de boxplot kun je wel twee spreidingsmaten aflezen:

1. De grootste waarneming min de kleinste waarneming heet de spreidingsbreedte.
2. Het derde kwartiel min het eerste kwartiel heet de interkwartielafstand, of gewoon kwartielafstand.

Ook deze spreidingsmaten kun je goed gebruiken om series waarnemingen te vergelijken.

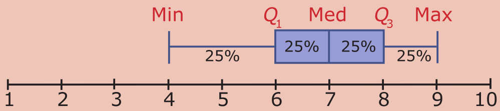
Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Je kunt van een hoeveelheid gegevens een samenvatting maken, bestaande uit vijf getallen:

- de kleinste waarneming;
- het **eerste kwartiel** Q_1, dit is de mediaan van de eerste helft waarnemingen;
- het **tweede kwartiel** is de mediaan;
- het **derde kwartiel** Q_3, dit is de mediaan van de tweede helft waarnemingen;
- de grootste waarneming.

Deze vijf getallen zet je in een tekening langs een as en je maakt een **boxplot**. Een boxplot is een 5-getallen samenvatting van de frequentietabel.



In een boxplot vind je twee **spreidingsmaten**:

- de **spreidingsbreedte** is de grootste waarneming min de kleinste waarneming;
- de **interkwartielafstand** is het derde kwartiel min het eerste kwartiel.

Voorbeeld 1

Bekijk de tabel met cijfers voor het vak Duits van B2L. Vat deze gegevens samen in een boxplot.

cijfer	frequentie
2	1
3	3
4	4
5	3
6	2
7	6
8	3
9	5
10	3
totaal	30

Antwoord

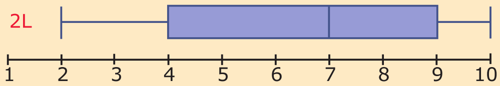
Het laagste cijfer is een 2 en het hoogste is een 10.

De mediaan is hier het gemiddelde van het vijftiende en het zestiende getal, dus 7.

Het eerste kwartiel is hier $Q_1 = 4$.

Het derde kwartiel is hier $Q_3 = 9$.

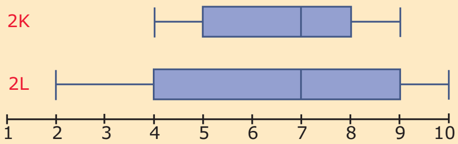
Nu heb je alle gegevens om de boxplot te kunnen tekenen.



Opgave 3

Voorbeeld 2

Dit zijn de rapportcijfers voor het vak Duits van de klassen B2K en B2L met de bijpassende boxplots.



rapportcijfer	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B2K: frequentie			4	5	5	8	4	4	
B2L: frequentie	1	3	4	3	2	6	3	5	3

Van beide klassen is het modale cijfer hetzelfde. Ook de mediaan van beide klassen is hetzelfde en zelfs de gemiddelden zijn gelijk.

De boxplots van de frequentieverdeling van de cijfers zijn voor deze klassen nogal verschillend.

Opgave 4 Opgave 5

2.3 Klassenindeling

Inleiding

Aicha bekijkt de cijfers voor geschiedenis van klas B1H op één decimaal afgerond.
Dan zijn bijna alle gegevens verschillend.

B1H		ne		en		fa		ak		gs	
leerling	geslacht		RE		RE		RE		RE		RE
1	v	6,7	7	4,4	4	5,6	6	6,6	7	6,8	7
2	v	5,6	6	5,3	5	6,1	6	7,1	7	6,8	7
3	m	8,1	8	6,7	7	5,8	6	7,2	7	7,6	8
4	m	8,5	9	5,1	5	6,1	6	6,1	6	6,1	6
5	m	4,9	5	9,7	10	6,6	7	8,0	8	7,5	8
6	v	6,2	6	9,4	9	7,2	7	6,6	7	7,8	8

Het maken van een frequentietabel levert nu weinig overzicht op.
Daarvoor kun je beter de cijfers groeperen in zogenaamde ‘klassen’.
Daarover gaat dit onderdeel.

Je leert in dit onderwerp

- een frequentietabel met klassenindeling en geschikte klassenbreedte maken bij een verzameling ruwe data;
- bij zo'n klassenindeling diagrammen maken;
- bij een klassenindeling het gemiddelde schatten.

Voorkennis

- (gewogen) gemiddelde, modus en mediaan van een hoeveelheid gegevens berekenen;
- werken met (relatieve) frequenties en (relatieve) frequentietabellen.

Opgave V1

Uitleg

Dit zijn dertig rapportcijfers van klas 2A op één decimaal nauwkeurig. Dat zijn ruwe data, ruwe gegevens. Maar het is geen handig overzicht van resultaten van de klas. Overzicht krijg je door te gaan ordenen.
De cijfers ga je ordenen in klassen, groepjes cijfers die dicht bij elkaar liggen.
Je begint met klasse $3{,}5- < 4{,}5$. Hierin komen alle cijfers vanaf $3{,}5$ tot aan $4{,}5$ ($4{,}5$ zelf dus niet). $3{,}5$ en $4{,}5$ zijn de klassengrenzen.
De volgende klasse is $5{,}5- < 6{,}5$ En de volgende $6{,}5- < 7{,}5$ enzovoorts. Alle klassen maak je even breed.

cijfers klas 2A				
4,1	3,8	5,9	6,1	6,5
8,5	4,9	9,1	7,2	7,3
6,5	7,9	6,7	5,5	6,4
5,7	7,6	6,5	7,1	8,1
8,5	6,8	5,1	8,2	7,5
6,9	6,2	7,1	7,3	5,7

Het aantal cijfers dat in die klasse komt is de absolute frequentie van de klasse. Vaak zijn relatieve frequenties handiger. De relatieve frequentie bepaal je door de frequentie te delen door het totaal. Ook kun je het percentage berekenen, je vermenigvuldigt dan de relatieve frequentie met 100.

De breedte van een klasse heet de klassenbreedte, hier dus 1 want $4{,}5 - 3{,}5 = 1$.

Nu heb je geordende data, de cijfers van de klas zijn overzichtelijk weergegeven in een klassenindeling.

klasse	klassenmidden	frequentie	relatieve frequentie	percentage (%)
$3{,}5- < 4{,}5$	4	2	$\frac{2}{30}$	6,7
$4{,}5- < 5{,}5$	5	2	$\frac{2}{30}$	6,7
$5{,}5- < 6{,}5$	6	7	$\frac{7}{30}$	23,3
$6{,}5- < 7{,}5$	7	11	$\frac{11}{30}$	36,7
$7{,}5- < 8{,}5$	8	5	$\frac{5}{30}$	16,7
$8{,}5- < 9{,}5$	9	3	$\frac{3}{30}$	10,0
totaal		30	1	100

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Een groep gegevens (liefst in de vorm van getallen) noem je **ruwe data**, ruwe gegevens. Erg overzichtelijk zijn de ruwe data meestal niet.
Dan ga je ze ordenen in **klassen**, dat zijn groepjes getallen die dicht bij elkaar liggen.
Je begint met het kiezen van de **klassengrenzen**. Normaal gesproken kies je alle klassen even breed.

Het verschil van de klassengrenzen van een klasse heet de **klassenbreedte**.
Het **klassenmidden** is meestal het gemiddelde van de twee klassengrenzen.

Het aantal getallen dat in een bepaalde klasse komt is de **absolute frequentie** van de klasse. Vaak zijn **relatieve frequenties** handiger. De relatieve frequentie bepaal je door de frequentie te delen door het totaal. Ook kun je het **percentage** berekenen, je vermenigvuldigt dan de relatieve frequentie met 100.

Nu heb je **geordende data**, de cijfers van de klas zijn overzichtelijk weergegeven in een **klassenindeling**. Het gemiddelde kun je nu alleen nog maar schatten met behulp van de klassenmiddens.

Voorbeeld 1

Om de rapportcijfers voor hetzelfde vak van 2A en 2B te kunnen vergelijken maak je één klassenindeling.

Omdat de leerlingenaantallen verschillen gebruik je relatieve frequenties, deze geven aan welk deel van het geheel in een bepaalde klasse valt. Zo kun je de twee klassen op een eerlijke manier met elkaar vergelijken.

	klas 2A		klas 2B	
klasse	abs. freq.	%	abs. freq.	%
$3{,}5 < 4{,}5$	2	6,7	1	4,0
$4{,}5 < 5{,}5$	2	6,7	2	8,0
$5{,}5 < 6{,}5$	7	23,3	12	48,0
$6{,}5 < 7{,}5$	11	36,7	6	24,0
$7{,}5 < 8{,}5$	5	16,7	4	16,0
$8{,}5 < 9{,}5$	3	10,0	0	0,0
totaal	30	100	25	100

Cijfers klas 2A				
4,1	3,8	5,9	6,1	6,5
8,5	4,9	9,1	7,2	7,3
6,5	7,9	6,7	5,5	6,4
5,7	7,6	6,5	7,1	8,1
8,5	6,8	5,1	8,2	7,5
6,9	6,2	7,1	7,3	5,7

Cijfers klas 2B				
6,1	5,8	5,9	4,1	5,5
6,5	5,9	7,1	7,4	6,3
6,5	5,9	5,2	6,0	7,4
8,1	7,6	5,4	6,2	7,5
6,4	6,9	6,2	8,3	5,6

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

Deze tabel laat de verdeling zien van de lengtes van 90 meisjes in een vierde klas. De gebruikte klassenindeling heeft een klassenbreedte van 5.

De werkelijke lengtes van de 90 meisjes kun je niet uit deze frequentietabel aflezen. De ruwe data zie je niet meer. Alleen de geordende data zie je.
De klassenmiddens zijn hier het gemiddelde van de grenzen van een klasse: de klasse $150- < 155$ heeft daarom als klassenmidden $\frac{150+155}{2} = 152{,}5$.

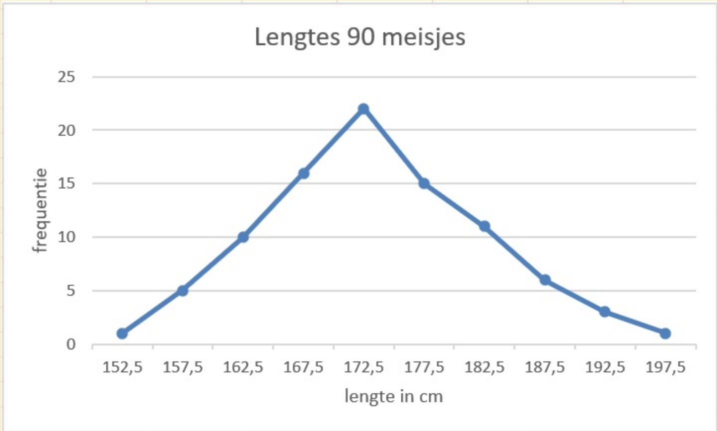
Maak een lijndiagram met behulp van de klassenmiddens.

Je kunt vanuit die klassenmiddens ook het gemiddelde schatten. Laat zien, hoe.

lengteklasse	klassenmidden	freq.
$150- < 155$	152,5	1
$155- < 160$	157,5	5
$160- < 165$	162,5	10
$165- < 170$	167,5	16
$170- < 175$	172,5	22
$175- < 180$	177,5	15
$180- < 185$	182,5	11
$185- < 190$	187,5	6
$190- < 195$	192,5	3
$195- < 200$	197,5	1
	totaal	90

Antwoord

Hier zie je het lijndiagram bij lengte van de meisjes.
De dikke punten zijn de frequenties die boven het klassenmidden liggen. Deze dikke punten verbind je.



Je schat het gemiddelde van alle 90 meisjes door elk klassenmidden te vermenigvuldigen met de bijbehorende frequentie, al deze uitkomsten bij elkaar op te tellen, en vervolgens te delen door het totaal aantal meisjes. Je komt dan uit op $173{,}4$ cm.

Opgave 5 Opgave 6

2.4 Schatten

Inleiding

Aicha heeft leren werken met klassenindelingen en de bijbehorende frequentietabellen.
In plaats van werken met een brij van onafgeronde rapportcijfers, werkt ze nu met overzichtelijke frequentietabellen waarin alle cijfers zijn afgerond op gehele getallen, zoals deze voor het vak Frans. Dat zijn dus eigenlijk klassenindelingen.
Voordeel ervan is het krijgen van goed overzicht als je met veel ruwe gegevens te maken hebt.
Nadeel is dat je alle centrummaten en spreidingsmaten alleen nog maar kunt schatten.

cijfer	frequentie
4	1
5	4
6	7
7	6
8	6
9	6

Je leert in dit onderwerp

- bij een klassenindeling de centrummaten en de spreidingsmaten schatten;
- bij een klassenindeling een boxplot maken.

Voorkennis

- (gewogen) gemiddelde, modus en mediaan van een hoeveelheid gegevens berekenen;
- een frequentietabel met klassenindeling en geschikte klassenbreedte maken bij een verzameling ruwe data.

Opgave V1

Uitleg

Cijfers klas 2A				
4,1	3,8	5,9	6,1	6,5
8,5	4,9	9,1	7,2	7,3
6,5	7,9	6,7	5,5	6,4
5,7	7,6	6,5	7,1	8,1
8,5	6,8	5,1	8,2	7,5
6,9	6,2	7,1	7,3	5,7

Dit zijn dertig rapportcijfers van klas 2A voor een bepaald vak. Je ziet hieronder een klassenindeling. De indeling is zo gemaakt dat je rapportcijfers snel kunt aflezen.

Vanuit deze klassenindeling kun je van de verdeling van de cijfers op één decimaal de centrummaten (modus, mediaan, gemiddelde) en de spreidingsmaten (spreidingsbreedte, kwartielafstand) niet meer precies berekenen.
In plaats daarvan gebruik je:

- de modale klasse, dat is de klasse met de hoogste frequentie;
- de klassenmiddens om het gemiddelde te schatten;
- het aantal klassen maal (keer) de klassenbreedte voor de spreidingsbreedte (ook wel variatiebreedte genoemd).

Wil je een boxplot maken, dan moet je de benodigde vijf getallen schatten.

klasse	frequentie
3,5– < 4,5	2
4,5– < 5,5	2
5,5– < 6,5	7
6,5– < 7,5	11
7,5– < 8,5	5
8,5– < 9,5	3
totaal	30

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Vanuit een klassenindeling kun je van de verdeling van de cijfers op één decimaal de centrummaten (modus, mediaan, gemiddelde) en de spreidingsmaten (spreidingsbreedte, kwartielafstand) niet meer precies berekenen.
In plaats daarvan gebruik je:

- de **modale klasse**, dat is de klasse met de hoogste frequentie;
- de klassenmiddens om het **gemiddelde te schatten**;
- het aantal klassen maal (keer) de klassenbreedte voor de **spreidingsbreedte** of **variatiebreedte**.

Om een **boxplot** te maken moet je de hoogste en de laagste waarde, kwartielen en de mediaan schatten.

Voorbeeld 1

Hier zie je de frequentietabel van de rapportcijfers van klas 2A nog eens.
Hoe kun je hier een boxplot bij maken als het moet passen bij de werkelijke cijfers (die op één decimaal nauwkeurig waren gegeven)?

klasse	frequentie
3,5– < 4,5	2
4,5– < 5,5	2
5,5– < 6,5	7
6,5– < 7,5	11
7,5– < 8,5	5
8,5– < 9,5	3
totaal	30

Antwoord

Voor een boxplot heb je vijf getallen nodig: de laagste waarde, de hoogste waarde, het eerste kwartiel, de mediaan en het derde kwartiel. Nu kun je deze waarden gemakkelijk bepalen als je gewoon de klassenmiddens (afgeronde, gehele cijfers) gebruikt. Maar dit boxplot past niet goed bij de werkelijke cijfers.

Je kunt de vijf gezochte waarden echter schatten:

- De laagste waarde schat je $3{,}5$ en de hoogste is $9{,}5$.
- Voor de mediaan heb je het 15e en 16e getal nodig. Die zitten beide in de klasse $6{,}5- < 7{,}5$. Daar zitten 10 getallen in. Neem aan dat die gelijkmatig oplopen vanaf $6{,}5$.

  Dan verschillen ze $\frac{1}{10}$ van elkaar.

  Dan is het 15e getal $6{,}5 + 3 \cdot \frac{1}{10} = 6{,}8$ en het 16e getal $6{,}5 + 4 \cdot \frac{1}{10} \approx 6{,}9$.

  De mediaan is dus $6{,}85$.
- Het eerste kwartiel is het 8e getal. Dat schat je net zo als de mediaan. Je vindt ongeveer $5{,}9$.
- Het derde kwartiel is het 23e getal. En dat schat je als $7{,}5$.

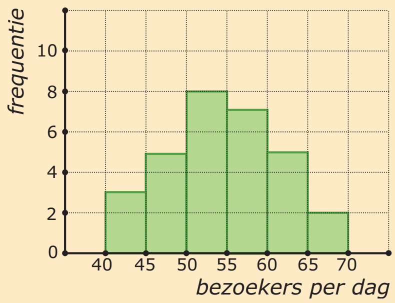
Nu kun je de gewenste boxplot tekenen.

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

Dit staafdiagram geeft voor de maand juni de aantallen bezoekers van een klein museum.

Hoe bereken je hierbij het gemiddelde aantal bezoekers per dag?



Antwoord

Je kunt het gemiddelde schatten met behulp van de klassenmiddens. Daarbij moet je rekening houden met het feit dat het hier om gehele aantallen gaat.

De klasse $40- < 45$ bestaat uit de aantallen 40, 41, 42, 43 en 44. Het midden daarvan is 42.
Op dezelfde wijze vind je de andere klassenmiddens 47, 52, enzovoorts. Nu kun je het gemiddelde schatten.

Je ziet dat je bij het berekenen van een klassenmidden moet bedenken of echt alle getallen tussen de ondergrens en de bovengrens voor kunnen komen, of alleen maar de gehele getallen!

Opgave 5 Opgave 6

2.5 Statistische uitspraken

Inleiding

Je hebt inmiddels allerlei tabellen en diagrammen leren maken om statistische gegevens overzichtelijker weer te geven. Die gegevens krijg je door statistisch onderzoek.
Aicha vindt het hoog tijd worden om zelf eens zo'n onderzoek te doen.
Maar wat zijn eigenlijk ‘statistische gegevens’ - ook wel data genoemd - precies?
En wat is een vraag die je moet beantwoorden met behulp van statistiek? Waarom doe je eigenlijk statistiek, waarom is dit nodig?

Je leert in dit onderwerp

- een statistische uitspraak herkennen;
- bij een statistisch onderzoek de begrippen populatie en steekproef herkennen;
- aangeven of een steekproef representatief is;
- een eenvoudig statistisch onderzoek opzetten.

Voorkennis

- (gewogen) gemiddelde, modus en mediaan van een hoeveelheid gegevens berekenen;
- een frequentietabel met klassenindeling en geschikte klassenbreedte maken bij een verzameling ruwe data;
- werken met diverse tabellen en er verschillende diagrammen bij maken;
- bij een klassenindeling de centrummaten en de spreidingsmaten schatten;
- bij een klassenindeling een lijndiagram, een staafdiagram en een boxplot maken.

Opgave V1

Uitleg

Kleurenblinden kunnen bepaalde kleuren niet onderscheiden, bijvoorbeeld het verschil tussen rood en groen niet zien.

Over **kleurenblindheid** is veel geschreven en er bestaan tests om te onderzoeken of je een vorm van kleurenblindheid hebt.

Stel je eens voor dat je zou willen weten hoeveel procent van de Nederlanders kleurenblind is.
Even zoeken op internet en je weet het toch? Nee, natuurlijk niet...
Niemand weet dat precies, want het is onmogelijk om iedere Nederlander te testen op kleurenblindheid en bovendien komen er voortdurend mensen bij en sterven er mensen. Dus dit percentage kun je nooit precies weten!

Zo'n vraag beantwoord je met behulp van statistisch onderzoek.
Je test een beperkt aantal personen op kleurenblindheid en berekent hoeveel procent

daarvan kleurenblind is. Je noemt dat een ‘steekproef trekken’ uit de totale ‘populatie’ (alle Nederlanders). Zo'n steekproef moet een goede vertegenwoordiging van de totale populatie zijn, ‘representatief’ zijn voor de populatie. Pas dan kun je met een enige betrouwbaarheid zeggen dat het gevonden percentage dicht in de buurt zit van het werkelijke percentage.

Op dit moment heb je met twee soorten statistisch onderzoek kennisgemaakt:

- onderzoek waarbij je op zoek gaat naar het percentage van een bepaalde populatie dat een zekere eigenschap heeft;
- onderzoek waarbij je twee groepen in een populatie met elkaar vergelijkt.

Bij beide soorten onderzoek heb je een representatieve steekproef nodig.

Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6

Theorie

Soms is een groep zo groot dat je niet even ieder lid van de groep kunt bekijken/bevragen.

Een vraag over zo'n grote groep beantwoord je met behulp van **statistisch onderzoek**. Je bekijkt/bevraagt een beperkt aantal leden van de groep en verzamelt daarvan gegevens. Je noemt dat een **steekproef** trekken uit de totale **populatie** (bijvoorbeeld alle Nederlanders). Zo'n steekproef moet een goede vertegenwoordiging van de totale populatie zijn, **representatief** zijn voor de populatie. Pas dan kun je met een enige betrouwbaarheid zeggen dat de gevonden gegevens ook iets zeggen over de hele groep. Meer kun je met statistiek niet doen...

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 4

Math4all

www.math4all.nl