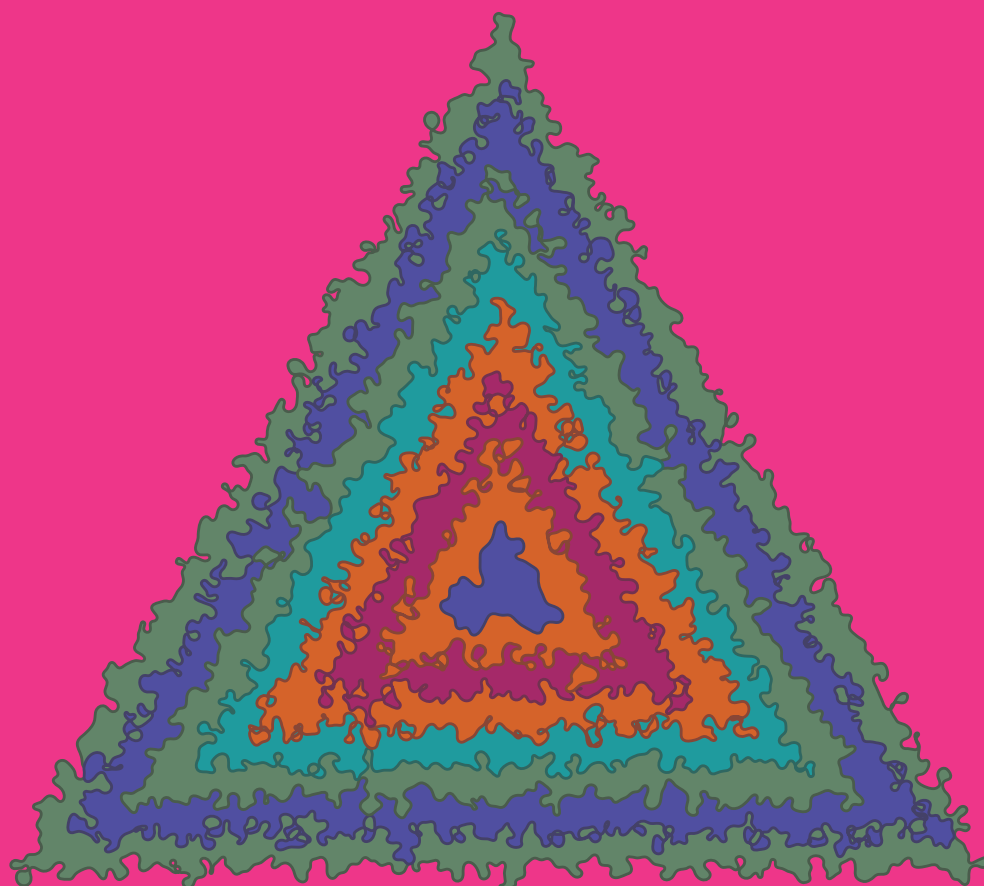


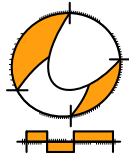
# Wiskunde

# 2 VMBO

## Katern 4 / Opgaven

### ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website [www.math4all.nl](http://www.math4all.nl) is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via [info@math4all.nl](mailto:info@math4all.nl). Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

## Voorwoord 3

## 1 Meetkundige berekeningen 3

1.1 Pythagoras 6

1.2 Lengtes berekenen 11

1.3 Lengtes in 3D 16

1.4 Oppervlakte ruimtelijke figuren 21

1.5 Inhoud ruimtelijke figuren 25

1.6 Totaalbeeld 30

## 2 Statistiek 33

2.1 Centrummaten 36

2.2 Spreidingsmaten 43

2.3 Klassenindeling 49

2.4 Schatten 56

2.5 Statistische uitspraken 61

2.6 Totaalbeeld 64



Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website [www.math4all.nl](http://www.math4all.nl). In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

### Begrippen

- ▶ de stelling van Pythagoras — rechthoekszijden, hypotenusa (langste zijde)
- ▶ de stelling van Pythagoras in 2D gebruiken
- ▶ de stelling van Pythagoras in 3D gebruiken — hulplijn
- ▶ oppervlakte van ruimtelijke figuren — uitslag
- ▶ inhoud (volume) van ruimtelijke figuren

### Activiteiten

- ▶ de stelling van Pythagoras ontdekken — werken met de stelling van Pythagoras
- ▶ lengtes in het platte vlak berekenen — met de omgekeerde stelling van Pythagoras nagaan of een driehoek rechthoekig is
- ▶ lengtes in ruimtelijke figuren berekenen
- ▶ de stelling van Pythagoras gebruiken bij oppervlakteberekeningen — de oppervlakte van ruimtelijke figuren berekenen
- ▶ het volume (de inhoud) van ruimtelijke figuren berekenen

## Meubelfabriek



Domein

# Meten en tekenen

Hoofdstuk

# Meetkundige berekeningen

Inhoud

- 1.1 Pythagoras 6
- 1.2 Lengtes berekenen 11
- 1.3 Lengtes in 3D 16
- 1.4 Oppervlakte ruimtelijke figuren 21
- 1.5 Inhoud ruimtelijke figuren 25
- 1.6 Totaalbeeld 30



# 1.1 Pythagoras

## Verkennen

Applet

### Opgave V1

Je ziet in de applet een driehoek  $ABC$  op een rooster. Op elke zijde is een vierkant getekend. In elk van die vierkanten staat zijn oppervlakte.

- Controleer de oppervlaktes van die vierkanten.
- Hoe bereken je de lengtes van de drie zijden van  $\triangle ABC$ ?
- Maak de driehoek rechthoekig. Wat valt je dan op aan de oppervlaktes van de vierkanten?
- Controleer of dit telkens klopt als de driehoek rechthoekig is en dat het niet uitmaakt welke hoek recht is.

## Theorie

### Opgave 1

Bekijk  $\triangle ABC$  in de [Uitleg](#).

- Welke zijde is de hypotenusa? Hoe heten de andere zijden?

Teken zo'n rechthoekige driehoek met  $AC = 5$  cm en  $BC = 3$  cm op een rooster met hokjes van 1 cm bij 1 cm.

- Reken de oppervlakte van het vierkant op de hypotenusa (de lange zijde)  $AB$  uit.
- Hoe lang is  $AB$ ? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- Meet de lengte van  $AB$  in de tekening na.

### Opgave 2

Teken op een rooster een rechthoekige driehoek met  $AC = 4$  cm en  $BC = 3$  cm op ware grootte.

- Reken de oppervlakte van het vierkant op de hypotenusa (de langste zijde)  $AB$  uit.
- Hoe lang is  $AB$ ? Waarom is nu geen benadering nodig?
- Meet de lengte van  $AB$  in de tekening na.

### Opgave 3

Van een rechthoekige driehoek  $PQR$  met  $\angle Q = 90^\circ$  is  $PQ = 12$  cm en  $QR = 10$  cm. Bereken hoe lang de langste zijde  $PR$  is in mm nauwkeurig.





#### Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1** nog eens. In de rechthoekige driehoek is de langste zijde steeds zijde  $AB$ .

- a Neem  $AC = 6$  en  $BC = 4$  en bereken  $AB$ . Laat de wortel in het antwoord staan.
- b Oefen dit (samen met een medeleerling) voor andere waarden van  $AC$  en  $BC$ .

#### Opgave 5

Van een rechthoekige driehoek  $PQR$  met  $\angle Q = 90^\circ$  is  $PQ = 18$  cm en  $QR = 30$  cm.

- a Schets deze driehoek en schat de lengte van  $PR$ .
- b Bereken de lengte van  $PR$  met behulp van de stelling van Pythagoras in twee decimalen nauwkeurig.

#### Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

Een ander hoektafeltje heeft ook de vorm van een rechthoekige driehoek. Dit tafeltje heeft rechthoekszijden van 54 cm en 42 cm.

- a Bereken de langste zijde van dit hoektafeltje.
- b Hoe lang wordt de rand om dit tafeltje?

#### Opgave 7

Je kunt met de applet in het **Practicum** alleen rechthoekige driehoeken maken.

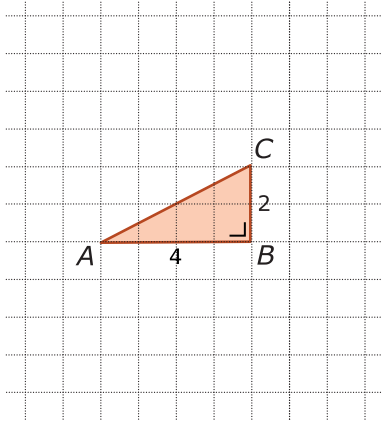
Maak er één waarvan twee rechthoekszijden een geheel getal zijn. Reken dan zelf de derde zijde uit in twee decimalen nauwkeurig. Herhaal dit tot je geen fouten meer maakt in de berekening.



## Verwerken

### Opgave 8

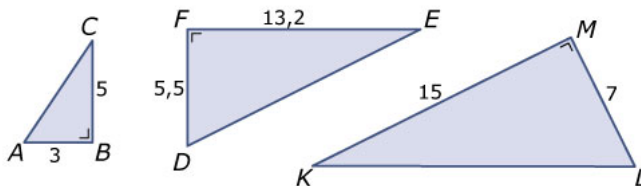
Hier zie je een rechthoekige driehoek op een rooster. De figuur staat ook op het [Werkblad](#).



Teken op elk van de zijden een vierkant. Bereken daarmee de lengte van de langste zijde in twee decimalen nauwkeurig.

### Opgave 9

Hier zie je drie rechthoekige driehoeken.



Bereken in elke driehoek de lengte van de langste zijde in één decimaal nauwkeurig.

### Opgave 10

Een glazenwasser moet een raam op de tweede verdieping wassen. De ladder moet daarvoor op 8 m boven de begane grond tegen de muur komen. De voet van de ladder moet op 2 m van het huis af staan.

Maak een schets van de situatie. Bereken hoe lang zijn ladder moet zijn in cm nauwkeurig.

### Opgave 11

Op een zuiver vierkante tafel met een zijde van 1,60 m wil iemand een zuiver rond tafelkleed leggen.

Hoe groot moet de diameter van dit tafelkleed minstens zijn om de hele tafel te kunnen bedekken? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.



## Toepassen

Hier zie je de schets van het hoekkastje dat in de meubelfabriek bij Kees in de buurt wordt gemaakt.

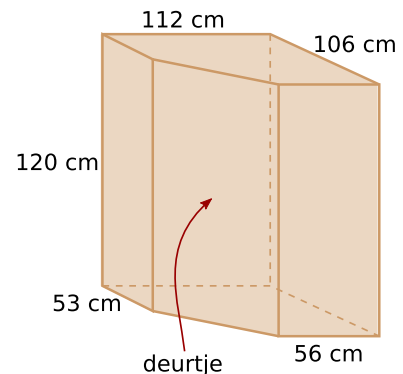
Om het goed in elkaar te zetten worden de verschillende onderdelen afzonderlijk op schaal getekend.

Je hebt een bovenkant en een precies gelijke onderkant, allebei vijfhoeken met drie rechte hoeken.

Verder heb je vier rechthoekige zijwanden en één rechthoekig deurtje.

Alles wordt getekend op schaal 1 : 10, dus elke cm wordt in de tekening een mm.

De meeste afmetingen staan in de tekening, alleen de breedte van het deurtje ontbreekt.



### Opgave 12: Het hoekkastje op schaal

Bekijk de tekening van het hoekkastje.

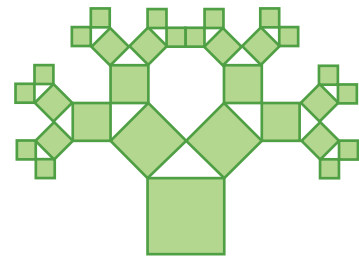
- a** Teken de bovenkant (en daar mee ook de onderkant) op schaal 1 : 10.

Om de breedte van het deurtje te berekenen kun je de tekening van de bovenkant gebruiken.

- b** Leg uit waarom en hoe je daarbij de stelling van Pythagoras gebruikt.

### Opgave 13: Pythagorasbomen

Je ziet hier het begin van een Pythagorasboom. Hij bestaat uit vierkanten die steeds gelijkbenige rechthoekige driehoeken insluiten. Hij is in 1942 bedacht door de Nederlandse ingenieur en wiskundeleraar Albert Bosman.



- a** Teken zelf zo'n Pythagorasboom als deze hiernaast. Begin met een grootste vierkant van 4 bij 4 cm. Hoe groot zijn de kleinste vierkanten?
- b** Je kunt je Pythagorasboom nog met volgende stappen uitbreiden, alleen in het midden van de figuur ontstaat een probleem. Welk probleem?
- c** Teken de Pythagorasboom verder tot je vierkantjes hebt van 0,5 bij 0,5 cm.
- d** Het lijkt wel of de totale boom steeds breder en hoger wordt. Is dat ook zo? Of past de hele boom binnen een rechthoek? En welke afmetingen heeft die rechthoek dan?



## Practicum

Applet

In deze applet kun je de punten  $A$ ,  $B$  en  $C$  verplaatsen. Als je twee zijden van  $\triangle ABC$  een gehele waarde geeft, krijgt de derde zijde vaak geen gehele waarde.

- Controleer de benadering van de lengte van die derde zijde met de stelling van Pythagoras.
- Wanneer hebben alle drie de zijden een gehele lengte?

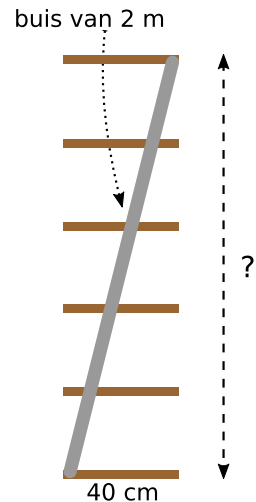
## 1.2 Lengtes berekenen

### Verkennen

#### Opgave V1

Dit is een zijaanzicht van de boekenkast zoals hij tegen een muur staat. De zes planken hebben een lengte van 80 cm en een breedte van 40 cm. De twee stalen buizen zijn 2 m lang.

- Hoe kun je hier de stelling van Pythagoras toepassen om de hoogte te berekenen?
- Bereken de hoogte  $h$  van de totale boekenkast in mm nauwkeurig.
- Hoeveel tussenruimte krijgen de planken?



### Theorie

#### Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

- Voer zelf de berekening van zijde  $BC$  uit.  
Een rechthoekige driehoek  $KLM$  heeft een rechte hoek bij  $M$  en  $KL = 5$  cm en  $KM = 3$  cm.
- Maak een schets van deze driehoek en bereken de lengte van  $LM$ .  
Van een rechthoekige driehoek  $PQR$  met  $\angle Q = 90^\circ$  is  $PQ = 12$  cm en  $QR = 10$  cm.
- Bereken hoe lang  $PR$  is in mm nauwkeurig.

#### Opgave 2

In elke rechthoekige driehoek geldt de stelling van Pythagoras. Omgekeerd kun je dit gebruiken om na te gaan of een driehoek rechthoekig is. Dit doe je door te controleren of  $a^2 + b^2 = c^2$  klopt als de zijden van de driehoek  $a$ ,  $b$  en als langste  $c$  zijn.

- Van  $\triangle ABC$  is  $AB = 12$ ,  $BC = 5$  en  $AC = 13$ . Laat zien, dat deze driehoek rechthoekig is.
- Van  $\triangle DEF$  is  $DE = 12$ ,  $EF = 8$  en  $DF = 10$ . Laat zien, dat deze driehoek niet rechthoekig is.

**Opgave 3**

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 1**.

- a** Zet de voet van de ladder op 1,5 m van de muur. Hoe hoog komt hij nu? Geef het antwoord weer in twee decimalen nauwkeurig.
- b** Je wilt dat de bovenkant van je ladder op 3 m hoogte boven de grond tegen de muur komt. Hoeveel cm moet je de voet van de ladder van de muur zetten?

**Opgave 4**

Van een rechthoekige driehoek  $PQR$  met  $\angle Q = 90^\circ$  is  $PQ = 16$  cm en  $PR = 30$  cm.

- a** Schets deze driehoek en schat de lengte van  $QR$ .
- b** Bereken de lengte van  $QR$  in twee decimalen nauwkeurig.

**Opgave 5**

Je kunt met de applet in het **Practicum** alleen rechthoekige driehoeken maken.

Maak er één waarvan twee zijden een geheel getal zijn. Reken dan zelf de derde zijde uit in twee decimalen nauwkeurig. Herhaal dit tot je geen fouten meer maakt in de berekening.

**Opgave 6**

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 2**. Je ziet hoe de lengte van  $AB$  van een roosterfiguur wordt uitgerekend. Neem een blad roosterpapier.

- a** Maak daarop een assenstelsel met de punten  $A(1,3)$ ,  $B(7,1)$  en  $C(5,5)$ . Bereken zelf de lengte van  $AC$  en van  $BC$ .
- b** Je kunt nu het berekenen van lijnstukken en de zijden van een driehoek oefenen door andere punten  $A$ ,  $B$  en  $C$  te kiezen. Doe dat tot je geen fouten meer maakt.  
Gebruik de applet van **Voorbeeld 2**.

**Opgave 7**

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 2**. Je hebt al geleerd hoe je de andere twee zijden berekent.

- a** Waarom weet je zeker dat de  $\triangle ABC$  van het voorbeeld rechthoekig is?
- b** Maak nu  $\triangle ABC$  met  $A(0,3)$ ,  $B(10,1)$  en  $C(9,5)$ . Waarom weet je zeker dat deze driehoek niet rechthoekig is?
- c** Maak nu  $\triangle ABC$  met  $A(0,3)$ ,  $B(9,1)$  en  $C(8,5)$ . Is deze driehoek rechthoekig?

**Opgave 8**

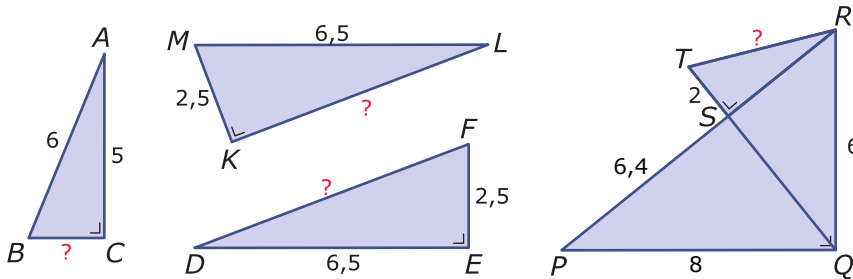
- a** Teken op papier een driehoek met zijden van 4 cm, 5 cm en 6 cm. Waarom weet je zeker dat het geen rechthoekige driehoek is?
- b** Teken op papier een driehoek met zijden van 5 cm, 12 cm en 13 cm. Waarom weet je zeker dat het een rechthoekige driehoek is?



## Verwerken

### Opgave 9

Hier zie je vier figuren met rechthoekige driehoeken.



Bereken in elke figuur de exacte lengte van de zijde met het vraagteken.

### Opgave 10

Een glazenwasser moet een raam op de tweede verdieping wassen. De ladder moet daarvoor op 5,5 m boven de begane grond tegen de muur komen. De ladder is helemaal uitgeschoven 6 m lang.

Maak een schets van de situatie. Bereken hoe ver hij deze ladder van de voet van de muur moet zetten.

### Opgave 11

Een computer heeft een 17 inch monitor. Dit betekent dat de diagonaal van het zuiver rechthoekige beeldscherm 17 inch is. De hoogte van het beeld is dan 10 inch. 1 inch = 2,54 cm.

Maak een schets van de situatie. Bereken de afmetingen van het beeldscherm. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

### Opgave 12

Welke van deze driehoeken zijn rechthoekig? Welke hoek is dan recht?

- a Driehoek  $ABC$  met  $AB = 10$ ,  $BC = 7,5$  en  $AC = 12,5$ .
- b Driehoek  $DEF$  met  $DE = 2$ ,  $DF = 2$  en  $EF = 3$ .
- c Driehoek  $GHI$  met  $GH = 10$ ,  $GI = 26$  en  $HI = 24$ .
- d Driehoek  $KLM$  met  $KL = 5$ ,  $KM = 5$  en  $LM = \sqrt{50}$ .



### Opgave 13

Je ziet hier een Zweeds huis. Let op de rode dakpannen van het huis, niet die van de uitbouw aan de voorkant. Stel dat de bovenste verdieping 6 m breed en 10 m lang is. (Die 10 m is de lengte van één dakgoot.) Stel verder dat de nok van het dak 3 m boven het midden van de vloer van de bovenste verdieping zit. Van de gebruikte dakpannen zijn er ongeveer 17,5 nodig per  $\text{m}^2$  dak.

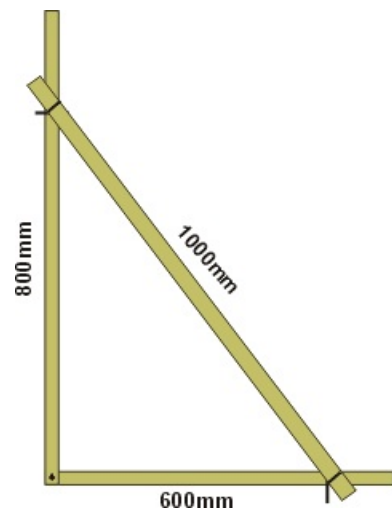


Hoeveel rode dakpannen zijn er voor dit huis ongeveer nodig?

### Toepassen

In de bouw wordt voor het maken van rechte hoeken soms een bouwhaak gebruikt. Hier zie je er één. Je maakt hem met de zogenaamde 3,4,5-steek.

- Bevestig twee latten met de uiteinden als een hoek aan elkaar. Maak ze vast met een draadnagel, zodat je de latten nog kunt draaien ten opzichte van elkaar.
- Meet op de éne lat 600 mm af ( $3 \cdot 200$ ) en op de andere 800 mm ( $4 \cdot 200$ ).
- Meet op een derde langere lat 1000 mm af ( $5 \cdot 200$ ).
- Schuif de langste lat over de gemaakte hoek tot de maatstrepen precies op elkaar liggen. Nagel de schuine lat vast met 1 of 2 nagels en sla nog een nagel in de haakse hoek.



Je hebt nu een rechte hoek gekregen, want in de driehoek die ontstaat geldt de stelling van Pythagoras. [Bekijk deze videoclip over een rechte hoek uitzetten.](#)

### Opgave 14: 3,4,5-steek

Bekijk hierboven wat de 3,4,5-steek is en hoe die in de bouw wordt gebruikt. Bekijk ook de videoclip over het maken van een rechte hoek in de praktijk.

- a** Laat zien, dat een 3,4,5-driehoek een rechte hoek oplevert.

Vroeger werd voor de 3,4,5-steek een aaneengesloten touw met twaalf knopen gebruikt. Die twaalf knopen zaten op onderling gelijke afstand van elkaar.

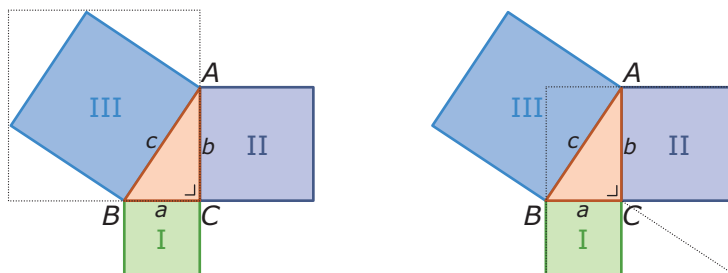
- b** Laat met een figuur zien hoe je daarmee een 3,4,5-steek maakt. Leg ook uit waarom het niet uitmaakt hoe lang dit twaalfknopentouw is.





### Opgave 15: Altijd checken of iets echt waar is...

Je kunt nu de stelling van Pythagoras wel gebruiken, maar hoe zeker ben je er van dat hij altijd correct is? Bekijk daartoe deze twee figuren.



- Bekijk eerst de linker figuur. Uit welke vijf delen bestaat de oppervlakte van het gestippelde vierkant?
- Bekijk nu de rechter figuur. Uit welke zes delen bestaat de oppervlakte van het gestippelde vierkant?
- Welke conclusie kun je uit het voorgaande trekken?
- Heb je nu de stelling van Pythagoras afdoende bewezen?

### Practicum

Applet

In deze applet kun je de punten  $A$ ,  $B$  en  $C$  verplaatsen. Als je twee zijden van  $\triangle ABC$  een gehele waarde geeft, krijgt de derde zijde vaak geen gehele waarde.

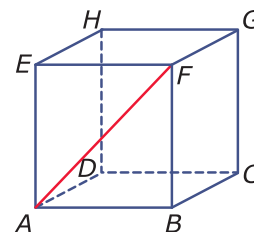
- Controleer de benadering van de lengte van die derde zijde met de stelling van Pythagoras.
- Wanneer hebben alle drie de zijden een gehele lengte?

## 1.3 Lengtes in 3D

### Verkennen

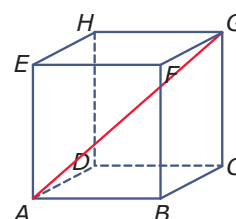
#### Opgave V1

Van een kubus  $ABCD.EFGH$  zijn alle ribben 6 cm. Over de voorkant van deze kubus loopt zijvlakdiagonaal  $AF$ .



- a Van welke rechthoekige driehoek is  $AF$  de hypotenusa?
- b Bereken de lengte van  $AF$  in twee decimalen nauwkeurig.
- c Hoe lang is zijvlakdiagonaal  $AC$ ?

Van een kubus  $ABCD.EFGH$  zijn alle ribben 6 cm. Dwars door deze kubus loopt lichaamsdiagonaal  $AG$ .



- d Van welke rechthoekige driehoek is  $AG$  de hypotenusa? (Pak er een draadmodel van een kubus bij.)
- e Hoe bereken je de lengte van  $AG$  in twee decimalen nauwkeurig?

### Theorie

#### Opgave 1

Bekijk de berekening van de lichaamsdiagonaal in een balk in de [Uitleg](#). Er wordt twee keer gebruik gemaakt van de stelling van Pythagoras.

- a Geef aan in welke driehoek de lengte van  $AC$  wordt berekend en welke rechte hoek die driehoek heeft?
- b Geef aan in welke driehoek de lengte van  $AG$  wordt berekend en welke rechte hoek die driehoek heeft?

Een andere lichaamsdiagonaal is  $DF$ . Je kunt de lengte van deze lichaamsdiagonaal berekenen in  $\triangle EFD$ .

- c Bereken met behulp van de stelling van Pythagoras in  $\triangle EFD$  de lengte van lichaamsdiagonaal  $DF$ .

#### Opgave 2

Gegeven is een houten blok in de vorm van balk  $ABCD.EFGH$  met  $AB = 20$  cm,  $AD = 10$  cm en  $AE = 5$  cm.

- a Een mier kruipt over deze balk via de kortste weg van  $A$  naar  $F$ . Hoeveel cm is zijn route? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.
- b Een mier kruipt over deze balk via de kortste weg van  $A$  naar  $G$ . Hoeveel cm is zijn route? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.
- c Een houtworm boort door deze balk een kortste weg van  $A$  naar  $G$ . Hoeveel cm is zijn route? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

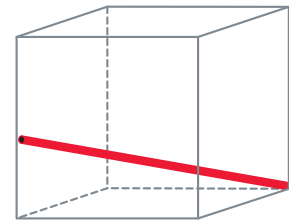
**Opgave 3**

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a** Teken zelf zo'n frisdrankpakje  $ABCD.EFGH$  met  $AB = 5,5$  cm,  $BC = 4,0$  cm en  $AE = 9,5$  cm.
- b** Bereken nu eerst  $AC$  en dan lichaamsdiagonaal  $AG$ . Ga na, dat je hetzelfde krijgt als in het voorbeeld.
- c** Waarom is het bij de berekening van  $AG$  niet handig om  $AC$  te benaderen?

**Opgave 4**

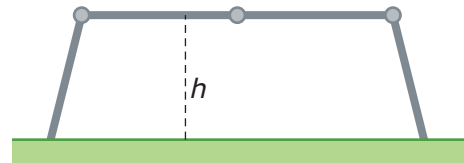
In een glazen plastic bakje is een dun rietje gevallen. Het bakje is een kubus met ribben van 15 cm en het rietje is 23 cm. De éne kant van het rietje zit precies in een hoek van het bakje, de andere kant rust tegen een opstaande ribbe.



Op welke hoogte boven de bodem van het bakje?

**Opgave 5**

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe de hoogte van een scharnierende ladder wordt uitgerekend. Deze ladder kan op drie plaatsen scharnieren waarna de ladder in die stand kan worden vastgezet. Die drie plaatsen zitten op gelijke afstanden van elkaar. De totale lengte van de ladder als hij helemaal uitgeklaapt is (en dus nergens scharniert) bedraagt 4,80 m.



In het midden scharniert de ladder niet, in de beide andere scharnierpunten wel. (Zie figuur.) De poten van de ladder staan op de grond 3 m uit elkaar. Er ontstaat een soort van loopbrug. Op welke hoogte boven de grond?

**Opgave 6**

Bekijk in **Voorbeeld 3** hoe je de lengte van  $TM$  berekent.

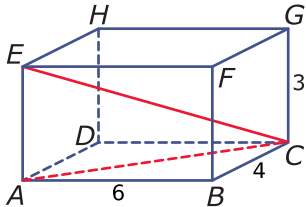
- a** Welke driehoek wordt gebruikt en welke hoek is dan de rechte hoek?
- b** Voer zelf de berekening van  $TM$  uit.
- c** Welke driehoek wordt gebruikt voor de berekening van  $TS$  en welke hoek is dan de rechte hoek?
- d** Voer zelf de berekening van  $TS$  uit.

**Opgave 7**

Je kunt in **Voorbeeld 3** de lengte van  $TS$  ook op een andere manier berekenen. Laat zien hoe.

**Opgave 8**

Maak van de piramide in **Voorbeeld 3** een uitslag.

**Verwerken****Opgave 9**

Bereken van deze balk de lichaamsdiagonaal  $EC$  in twee decimalen nauwkeurig.

**Opgave 10**

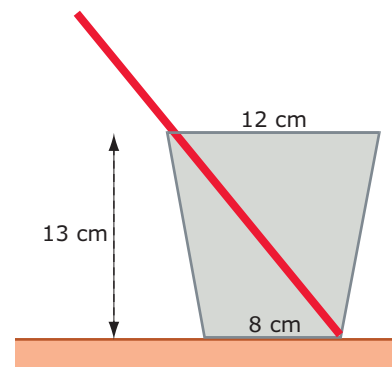
De kooi van een lift heeft de vorm van een balk met een breedte van 1,5 m, een diepte van 2 m en een hoogte van 2,5 m.

- Hoe lang is de langste onbuigzame paal die je in die lift kunt vervoeren? Geef je antwoord in meters op één decimaal nauwkeurig.
- Je hebt een vlak rechthoekig paneel met een breedte van 1,45 en een lengte van 3,15 m. Kan dat in de lift?

**Opgave 11**

In een glas staat een rietje van 24 cm lengte dat tegen de bovenrand van het glas rust, zie figuur. De diameter van de cirkelvormige bovenrand van het glas is 12 cm en die van de cirkelvormige onderrand is 8 cm. De hoogte van het glas is 13 cm.

Hoe lang is het deel van het rietje dat buiten het glas steekt?

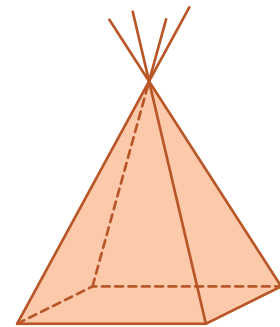




### Opgave 12

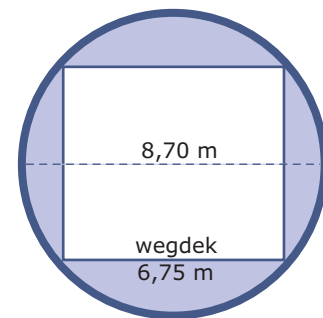
Deze figuur stelt een wigwam voor die de vorm heeft van een regelmatig vierzijdige piramide. Het grondvlak is een vierkant met een oppervlakte van  $50 \text{ m}^2$ . De vier opstaande stokken waarover het tentdoek is gespannen hebben alle vier een lengte van 12 m, waarvan telkens 2 m buiten de wigwam steekt.

Hoe hoog is deze wigwam?



### Opgave 13

De Waaslandtunnel is de oudste voertuigentunnel onder de Schelde die Antwerpen verbindt met de linkeroever van die rivier. De tunnel bestaat uit een cilindervormige buis met een (inwendige) diameter van 8,70 m. Daarin is een wegdek aangelegd met een breedte van 6,75 m. Je ziet hier een voor-aanzicht van de tunnelbuis. De rechthoek in de buis stelt de ruimte voor waar het verkeer kan rijden, de rest is afgesloten en bestemd voor allerlei voorzieningen zoals luchtverversing, elektra, e.d.



- a Bereken de hoogte van deze rechthoek in cm nauwkeurig.
- b Hoeveel procent van de tunnelbuis is niet bestemd voor het verkeer?

### Opgave 14

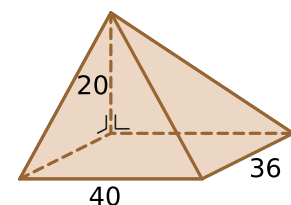
Van een balk  $ABCD.EFGH$  is  $AB = 200$ ,  $BC = 80$  en  $CG = 60$  mm. Punt  $P$  is het midden van ribbe  $AB$ .

Onderzoek of driehoek  $HPG$  rechthoekig is.

### Toepassen

De meubelmakerij maakt een tuinkast. De klant wil die in een hoek van zijn huis tegen de muur plaatsen. Er moet een schuin dakje opkomen waarvan de hoogste punt precies in die hoek zit. De kast wordt 40 cm breed, 36 cm diep en 180 cm hoog. Daar bovenop komt het schuine dakje dat je hiernaast ziet. Om elk vlakje te kunnen uitzagen worden alle rechte hoeken vastgesteld en de lengtes van de schuin lopende ribben berekend.

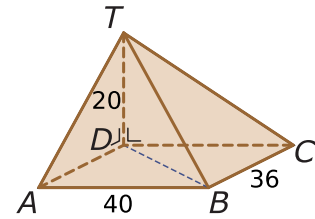
Kees ziet de stelling van Pythagoras alweer voorbij komen...



**Opgave 15: Het schuine dakje**

Je ziet hier het schuine dakje in **Toepassen** nog eens.  
Kees heeft letters bij de hoekpunten gezet.

De figuur is een piramide waarvan de top  $T$  recht boven hoekpunt  $D$  zit.



- a Noem drie rechthoekige driehoeken met  $DT$  als zijde.
- b Bereken de lengtes van  $AT$  en  $CT$  in mm nauwkeurig.

Je hebt nu voldoende gegevens om alle grensvlakken van dit dakje te kunnen uitzagen uit een plaat mdf.

- c Leg uit waarom dat zo is.
- d Hoe lang wordt ribbe  $BT$ ? Geef je antwoord weer in mm nauwkeurig.

**Opgave 16: De bolling van de Aarde**

De planeet Aarde is (ongeveer) bolvormig en heeft een omtrek van 40000 km. Vat de planeet op als een perfecte bol.

- a Bereken de straal van de Aarde in km nauwkeurig.

In het dagelijks leven merk je niet veel van de bolling van de Aarde. Maar stel je eens voor dat je een kaarsrechte tunnel wilt boren van Groningen naar Maastricht met een lengte van 300 km.

- b Bereken hoe diep de bovenkant van die tunnel in het midden onder het aardoppervlak zou zitten.

## 1.4 Oppervlakte ruimtelijke figuren

### Verkennen

#### Opgave V1

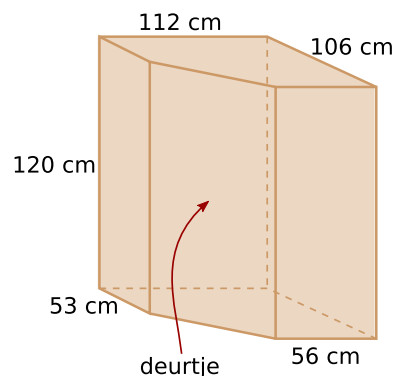
Kees wil van zo'n hoekkastje de oppervlakte aan materiaal uitrekenen.

- a** Bereken de oppervlakte van het bovenzvlak.

Alle opstaande grensvlakken zijn rechthoeken. Van de meeste kun je de afmetingen meteen zien, alleen van het deurtje niet.

- b** Hoe bepaal je de afmetingen van het deurtje?

- c** Bereken nu de totale oppervlakte aan materiaal die voor dit kastje nodig is.



### Theorie

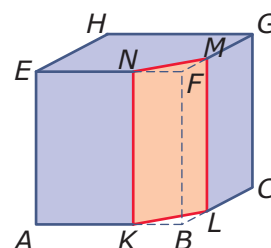
#### Opgave 1

Je ziet hier een kubus waar een stuk van af is gezaagd. Het zaagvlak is  $KLMN$ . De kubus heeft ribben van 6 cm. De lijnstukken  $AK$ ,  $CL$ ,  $EN$  en  $GM$  zijn allemaal 4 cm lang. De overblijvende figuur is een prisma.

- a** Welke vorm heeft het zaagvlak  $KLMN$ ?

- b** Bereken de lengte van  $KL$ .

- c** Bereken de totale oppervlakte van het prisma in  $\text{mm}^2$  nauwkeurig.



#### Opgave 2

De balk  $ABCD.EFGH$  heeft ribben  $AB = 12$ ,  $AD = 6$  en  $AE = 8$  cm. Punt  $P$  is het midden van  $EF$  en punt  $Q$  is het midden van  $GH$ .

Bereken de totale oppervlakte van het prisma  $ABPE.DCQH$ .

#### Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je de oppervlakte van een piramide berekent.

- a** Laat zien, waarom de hoogte van de opstaande grensvlakken  $\sqrt{40}$  is.

- b** Bereken zelf de oppervlakte van de regelmatige vierzijdige piramide zonder naar het voorbeeld te kijken.

**Opgave 4**

Bereken de oppervlakte van een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben 10 cm lang zijn in  $\text{mm}^2$  nauwkeurig.

**Opgave 5**

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je de oppervlakte van een cilinder berekent.

- a Welke twee formules voor de cirkel worden er in het voorbeeld gebruikt?
- b Voer zelf de berekening uit zonder naar het voorbeeld te kijken.

**Opgave 6**

Een cilindervormige plastic buis heeft een diameter van 16 mm en een lengte van 1 m. Bereken de oppervlakte van deze buis in  $\text{mm}^2$  nauwkeurig.

**Opgave 7**

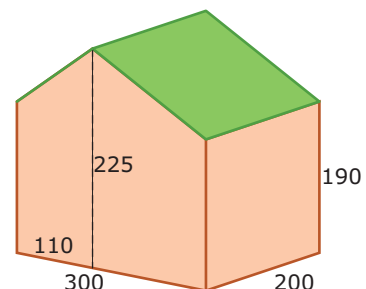
Bekijk de berekening van de oppervlakte van het dak van het huisje in **Voorbeeld 3**.

- a Waaruit blijkt dat de schoorsteen niet is meegerekend? Waarom is dat niet erg als je wilt weten hoeveel dakbedekking er nodig is?
- b Reken zelf de lengte van de langste rechthoekszijde van elk dakdeel na.
- c Controleer nu de rest van de berekening van de oppervlakte van het dak.
- d Tussen twee dakdelen die geen gemeenschappelijke nok hebben zit een dakgoot. Bereken hoe lang die dakgoot is. Houd weer geen rekening met de schoorsteen.

**Verwerken****Opgave 8**

Je ziet hier een vereenvoudigde tekening van een tuinhuisje. Het grondvlak is een rechthoek, evenals de twee opstaande zijwanden. De voorwand en de achterwand zijn vijfhoeken. Alle afmetingen in de figuur zijn in cm.

Bereken de oppervlakte van het dak van dit tuinhuisje en geef je antwoord in  $\text{m}^2$  in twee decimalen nauwkeurig.



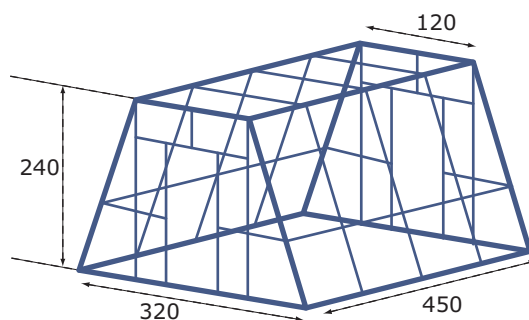




### Opgave 9

Je ziet hier een bijzondere plantenkas. De afmetingen zijn gegeven in cm. De kas heeft de vorm van een symmetrisch prisma en de bodem is uiteraard niet van glas.

Bereken de totale hoeveelheid glas in  $m^2$  die voor deze plantenkas nodig is.



### Opgave 10

Je ziet hier een zogenaamde Romneyloods. Het is een loods in de vorm van een halve cilinder met een diameter van 11 m. De bodem is een rechthoek van 11 bij 20 m.

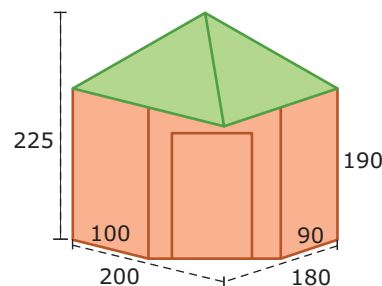


Je hebt zo'n loods laten plaatsen. De halve cilinder die het dak vormt wordt rood geschilderd, de voorkant en de achterkant worden wit gemaakt. Bereken hoeveel  $m^2$  er rood moet worden geschilderd. Omdat het dak van golfplaat is gemaakt moet je er rekening mee houden dat je voor golfplaat ongeveer 1,5 keer zoveel verf nodig hebt per  $m^2$ .

### Opgave 11

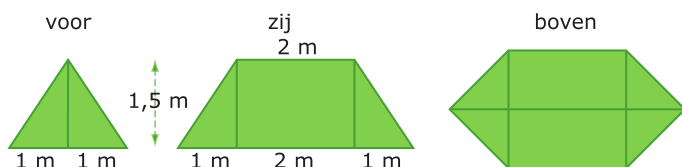
Dit is een vereenvoudigde tekening van een hoekblokhut. Het dak van die blokhut is een vierzijdige piramide waarvan de top boven het midden van het grondvlak zit. De blokhut zelf is een balk waarvan een hoek is afgesneden om een toegangsdeur in te maken. De afmetingen bij de figuur zijn in cm.

Bereken de oppervlakte van het dak van de blokhut.



### Opgave 12

Hier zie je aanzichten van een eenvoudige tent.



- Maak een tekening van deze tent en zet alle maten in je figuur. Bereken de lengte van alle ribben die nog niet zijn gegeven.
- Bereken hoeveel  $m^2$  tentdoek er voor deze tent nodig is. (Reken het grondzeil niet mee.)



## Toepassen

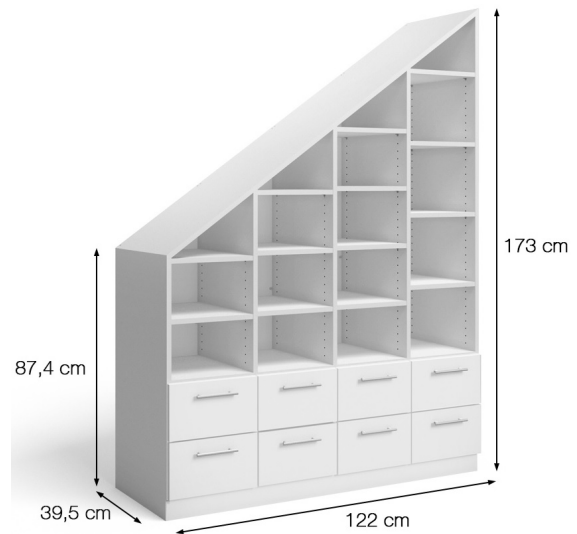
Kees ziet in de meubelmakerij deze kast voor onder een schuin dak.

Hij is gemaakt van MDF-plaat en wit geschilderd.

MDF betekent *Medium Density Fibreboard* en bestaat uit geperste resthoutvezels.

Je ziet de afmetingen in de tekening.

Hoeveel  $m^2$  is ervoor nodig?



### Opgave 13: Kast onder het schuine dak

Bekijk de kast onder het schuine dak.

- Bereken eerst de lengte van de schuine kant die onder het dak moet komen.
- Bereken de totale hoeveelheid MDF die voor deze kast nodig is exclusief de laden. Neem aan dat de stootplank aan de voorkant 10 cm hoog is.

### Opgave 14: Cilindrische kast

Dit metalen kastje bestaat uit drie dezelfde op elkaar gestapelde cilinders met daarin één schuifdeurtje.

Elke cilinder is 30 cm hoog en heeft een diameter van 40.

Bovendien heeft elke cilinder een bodem en een bovenzvlak.

Hoe groot is de totale oppervlakte van dit kastje?



## 1.5 Inhoud ruimtelijke figuren

### Verkennen

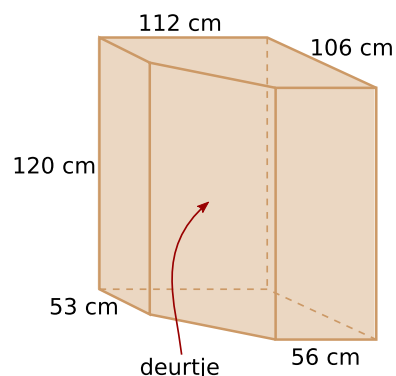
#### Opgave V1

Kees wil van zo'n hoekkastje de inhoud (het volume) uitrekenen.

- a** Hoeveel  $\text{cm}^2$  is de oppervlakte van de bodem? (Heb je vast al eerder berekend.)

Neem aan dat het materiaal van het hoekkastje overal precies 1 cm dik is.

Omdat je de oppervlakte (het aantal  $\text{cm}^2$ ) van de bodem weet, weet je dan ook het aantal  $\text{cm}^3$  van deze bodem.



- b** Hoeveel  $\text{cm}^3$  is die bodem dus?
- c** Hoeveel van die bodems moet je op elkaar leggen om het complete kastje te 'vullen'?
- d** Hoeveel  $\text{cm}^3$  is het kastje dus?
- e** Hoe bereken je de inhoud van een voorwerp dat er uit ziet als een 'verzameling opgestapelde bodems'?
- f** Kun je bij alle ruimtelijke figuren op die manier de inhoud (het volume) berekenen? Kun je voorbeelden noemen waarbij dit niet gaat?

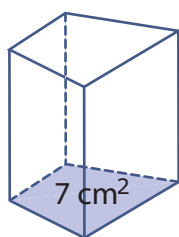
### Theorie

#### Opgave 1

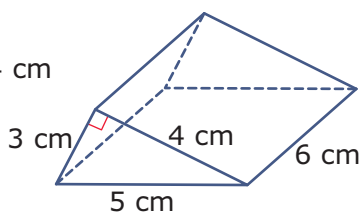
Bekijk in **Uitleg 1** hoe je de inhoud  $I$  van een prisma uitrekent.

Bereken de inhoud van de volgende figuren.

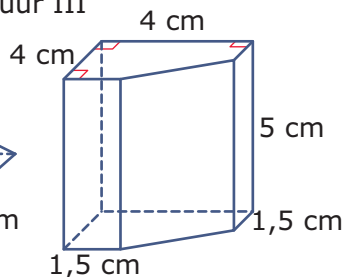
figuur I



figuur II



figuur III



**Opgave 2**

Stel je een cilinder voor met een diameter van 16 cm en een hoogte van 20 cm.

- a** Wat heeft een cilinder gemeenschappelijk met een prisma?
- b** Bereken de oppervlakte van het grondvlak van deze cilinder.
- c** Bereken de inhoud van deze cilinder.

**Opgave 3**

Bekijk **Uitleg 2**.

- a** Laat zien dat je de inhoud zo'n piramide kunt berekenen met  $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ .

Als je vier van deze piramides met hun hoogtes tegen elkaar zet krijg je een regelmatige vierzijdige piramide met een grondvlak van 10 bij 10 cm en een hoogte van 5 cm.

- b** Laat zien dat de inhoud daarvan  $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$  is.

De inhoud van elke piramide is  $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ , waarin  $G$  de oppervlakte van het grondvlak en  $h$  de hoogte is.

- c** Bereken de inhoud van een piramide waarvan het grondvlak een rechthoek van 80 bij 60 m en de hoogte 65 m is.

**Opgave 4**

Stel je een kegel voor met een diameter van 18 cm en een hoogte van 20 cm.

- a** Wat heeft een kegel gemeenschappelijk met een piramide?
- b** Bereken de oppervlakte van het grondvlak van deze kegel.
- c** Bereken de inhoud van deze kegel.

**Opgave 5**

In **Voorbeeld 1** zie je een prisma.

- a** Bereken zelf de oppervlakte van het grondvlak van het prisma.
- b** Bereken hiermee zelf de inhoud van het prisma.

**Opgave 6**

Een cilinder heeft als grondvlak een cirkel met een diameter van 12 cm en een hoogte van 10 cm.

- a** Bereken de oppervlakte van het grondvlak van deze cilinder.
- b** Bereken de inhoud van de cilinder.



### Opgave 7

Van een prisma is het grondvlak een gelijkbenige driehoek met twee zijden van 8 cm en één zijde van 6 cm. De drie opstaande ribben zijn 13 cm.

Bereken de inhoud van dit prisma in  $\text{mm}^3$  nauwkeurig.

### Opgave 8

In **Voorbeeld 2** zie je dat je bij het berekenen van de inhoud van een ruimtelijke figuur soms ook de stelling van Pythagoras nodig hebt.

- a Bereken zelf de hoogte van de piramide.
- b Bereken nu de inhoud van de piramide in  $\text{mm}^3$  nauwkeurig.

### Opgave 9

Van een piramide is het grondvlak een rechthoek van 8 bij 6 cm en de opstaande ribben zijn 13 cm.

Bereken de inhoud van deze piramide.

### Opgave 10

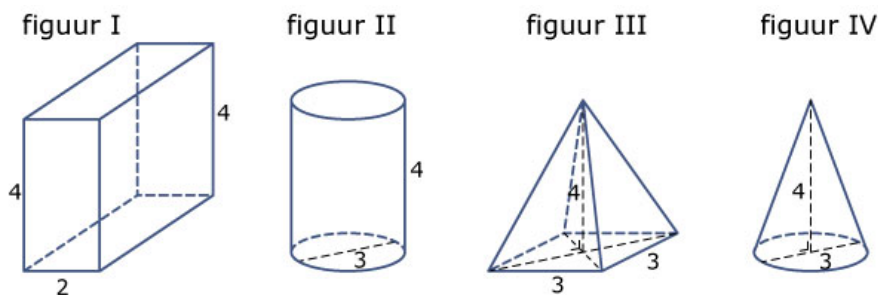
Een kegel past precies in een regelmatige vierzijdige piramide. De kegel heeft een diameter van 20 cm en een hoogte van 20 cm.

- a Bereken de inhoud van die piramide in  $\text{cm}^3$  nauwkeurig.
- b Bereken de inhoud van de kegel in  $\text{cm}^3$  nauwkeurig.
- c Hoeveel procent van die piramide zit buiten de kegel?

## Verwerken

### Opgave 11

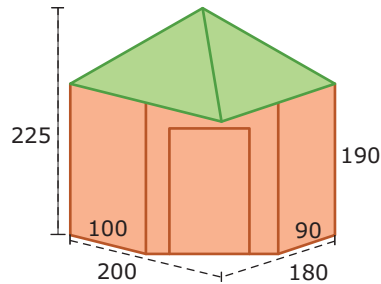
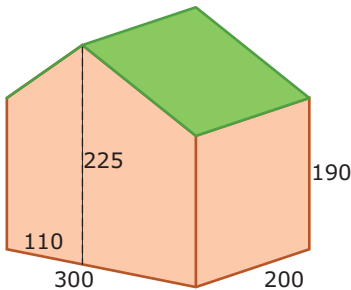
Bereken de inhoud van deze vier figuren, waar nodig in twee decimalen nauwkeurig.





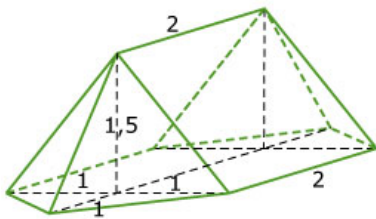
### Opgave 12

Bereken de inhoud van elk van deze twee tuinhuisjes in  $m^3$  in één decimaal nauwkeurig. Het linker tuinhuisje is een prisma, het rechter tuinhuisje is een hoekblokhut waarvan de onderkant een vijfzijdig prisma is en het dak een vierzijdige piramide met een rechthoekig grondvlak. De afmetingen zijn in centimeter.



### Opgave 13

Hier zie je een tent. De afmetingen zijn in de figuur in meter gegeven. Bereken de inhoud van deze tent.



### Opgave 14

Neem aan dat dit blikje tomatenblokjes zuiver cilindrisch is. De binnenmaten zijn: hoogte 10,4 cm en diameter 7,3 cm. Je ziet dat er 425 milliliter in moet kunnen.

- Bereken de inhoud van dit blik en ga na of er echt 425 milliliter in kan.
- Bereken de oppervlakte van het etiket op het blik.



### Opgave 15

Dit ijshoortje is kegelvormig. Het heeft een hoogte van 13 en een bovendiameter van 6,1 cm. De fabrikant beweert dat het ijsje een volume van 125 milliliter heeft.

- Ga door berekening na of dat klopt.
- Hoeveel ijsjes passen er theoretisch in een doos van 6,1 bij 13 bij 24,4 cm? En hoeveel passen er in de praktijk in als alle ijsjes netjes heel moeten blijven?





### Opgave 16

Een moderne stoel bestaat uit een gebogen frame waarop een zitting en een rugleuning zijn gemonteerd. Het frame is een gebogen ronde buis met een totale lengte van 8 m. Deze buis heeft een buitendiameter van 20 mm en een binnendiameter van 16 mm. Hij is gemaakt van staal van 7,6 gram per  $\text{cm}^3$  en daarna verchromd.

Hoeveel kg staal is er voor deze stoel nodig?

### Toepassen

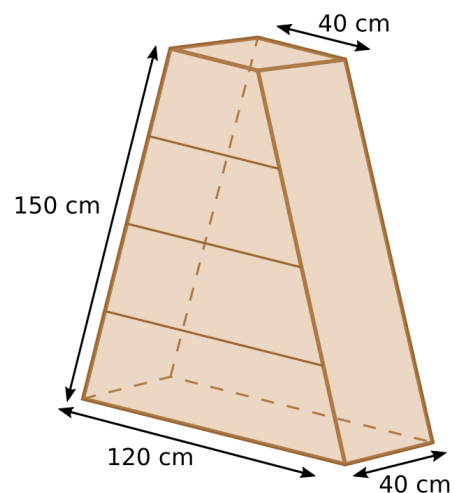
Deze kast heeft de vorm van een prisma, met een symmetrisch trapezium als voorkant.

Er zitten vier laden in die even hoog zijn.

Kees berekent hoeveel MDF-plaat er voor deze kast nodig is.

Voor de laden rekent hij alleen de voorkanten mee, de rest van de laden wordt van ander materiaal gemaakt.

Eerst rekent hij de inhoud uit, is die wel groot genoeg? De klant vroeg om een inhoud van 400 liter, dat is  $400 \text{ dm}^3$ .



### Opgave 17: Prismavormige kast

Bekijk de kast in **Toepassen**. Je kunt de inhoud ervan berekenen.

- a Bereken de inhoud van deze kast. Wordt aan de eis van de klant voldaan?
- b Bereken de totale hoeveelheid MDF-plaat die nodig is voor deze kast.

### Opgave 18: Graansilo

Een silo is een opslagplaats voor stort- of bulkgoederen in de vorm van poeders of korrelvormige producten zoals graan, kolen, cement, veevoer, zand, grint, kunstmest, enz. Hier zie je er één in de vorm van een stalen cilinder met een kegelvormige onderkant waar ook de uitstroomopening zit. Het geheel staat op vier poten.

De cilinder is (inclusief poten) 3,00 m hoog. De uitstroomopening zit 1,67 m boven de grond en de onderrand van de cilinder zit op 3,07 m boven de grond. De diameter van de cilinder is 1,48 m.

Je kunt berekenen dat er ongeveer  $6 \text{ m}^3$  graan in deze silo kan.



- a Laat zien dat de inhoud inderdaad ongeveer  $6 \text{ m}^3$  is.
- b Je wilt de silo zelf (dus zonder de poten en zonder het kegelvormige uitstroomdeel) rood schilderen. Hoeveel bedraagt de oppervlakte die je moet schilderen?

## 1.6 Totaalbeeld

### Samenvatten

Bij het werken met 2D- en 3D-figuren leer je steeds meer technieken en formules om lengtes, afstanden, oppervlaktes en inhoud te berekenen. In dit onderwerp voeg je daar de stelling van Pythagoras aan toe. Met die stelling kun je in rechthoekige driehoeken de lengte van de derde zijde berekenen als er twee gegeven zijn. Ook leer je de oppervlakte en de inhoud van ruimtelijke figuren berekenen.

De volgende opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Meetkundige berekeningen** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken.

### Begrippen

- ▶ de stelling van Pythagoras — rechthoekszijden, hypotenusa (langste zijde)
- ▶ de stelling van Pythagoras in 2D gebruiken
- ▶ de stelling van Pythagoras in 3D gebruiken — hulplijn
- ▶ oppervlakte van ruimtelijke figuren — uitslag
- ▶ inhoud (volume) van ruimtelijke figuren

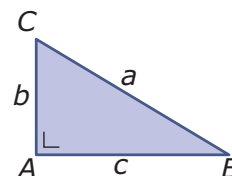
### Activiteiten

- ▶ de stelling van Pythagoras ontdekken — werken met de stelling van Pythagoras
- ▶ lengtes in het platte vlak berekenen — met de omgekeerde stelling van Pythagoras nagaan of een driehoek rechthoekig is
- ▶ lengtes in ruimtelijke figuren berekenen
- ▶ de stelling van Pythagoras gebruiken bij oppervlakteberekeningen — de oppervlakte van ruimtelijke figuren berekenen
- ▶ het volume (de inhoud) van ruimtelijke figuren berekenen

### Opgave 1

Je ziet hier een rechthoekige driehoek  $ABC$ . In zo'n driehoek geldt de stelling van Pythagoras.

- a** Teken zelf zo'n figuur en geef er bij aan welke hoek de rechte hoek is, welke zijden de rechthoekszijden zijn en welke zijde de hypotenusa (of lange zijde) is. Zet ook de stelling van Pythagoras in deze driehoek eraan.
- b** Laat met een voorbeelduitwerking zien hoe je  $a$  berekent als  $b = 4$  en  $c = 7$ . Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- c** Laat met een voorbeelduitwerking zien hoe je  $b$  berekent als  $a = 9$  en  $c = 7$ . Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.







### Opgave 2

Ten opzichte van een  $xy$ -assenstelsel zijn de punten  $A(1,3)$ ,  $B(8,2)$  en  $C(2,5)$  gegeven.

- a Teken deze punten in het assenstelsel en teken  $\triangle ABC$ .
- b Laat met een voorbeelduitwerking zien hoe je kunt nagaan of  $\triangle ABC$  rechthoekig is.
- c Welke hoek is de rechte hoek? En waarom?

### Opgave 3

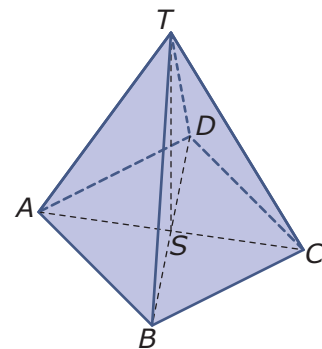
Iemand heeft een bijzonder tafelkleed gekocht en wil er speciaal een tafel voor laten maken. Het is een zuiver rond tafelkleed met een diameter van 2,40 meter. De tafel wordt rechthoekig met een lengte van 1,80 meter.

Hoe groot mag de breedte van deze tafel maximaal zijn om volledig bedekt te worden door het kleed? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

### Opgave 4

Van deze regelmatige vierzijdige piramide  $ABCD.T$  heeft vierkant  $ABCD$  zijden met een lengte van 4 cm en is  $ST = 6$  cm.

- a Laat zien hoe je de lengte van  $AT$  berekent.
- b Punt  $M$  is het midden van ribbe  $CT$ . Laat zien hoe je de lengte van  $AM$  berekent.



### Opgave 5

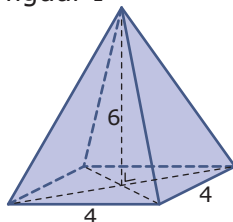
Bekijk de regelmatige vierzijdige piramide  $ABCD.T$  van de vorige opgave.

Laat zien hoe je de oppervlakte van deze piramide (inclusief het grondvlak) berekent. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

### Opgave 6

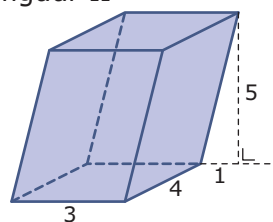
Laat zien hoe je de inhoud van elk van deze lichamen berekent.

figuur I



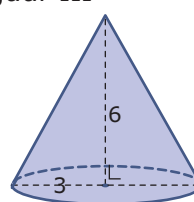
vierkant grondvlak

figuur II



rechthoekig grondvlak

figuur III



cirkelvormig grondvlak



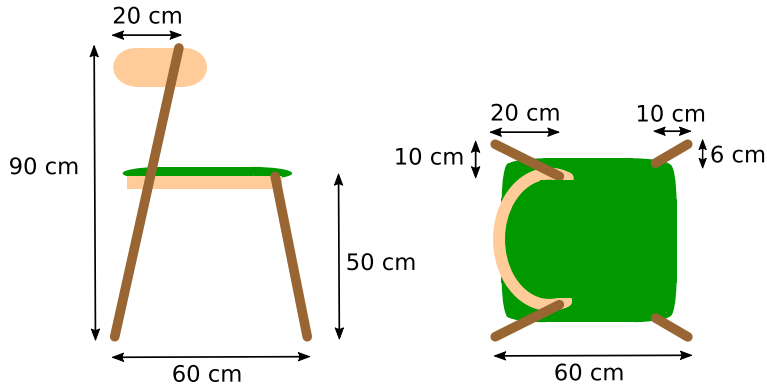
## Toepassen

De meubelmaker heeft een eetkamerstoel ontworpen.

Je ziet er hieronder een zijaanzicht en een bovenaanzicht van. Alle afmetingen staan er bij.

De vier poten zijn ronde houten paaltjes.

De rugleuning en het zitgedeelte zijn van kunststof met een groen kussen erop.



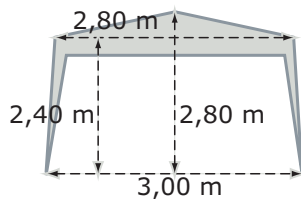
Kees rekent uit hoe lang de poten moeten worden.

### Opgave 7: De poten van het stoeltje

Bereken lengtes van de poten van het stoeltje in mm nauwkeurig.

### Opgave 8: Partytent

Deze partytent bestrijkt een vloeroppervlak van 3,00 bij 3,00 m. De grootste hoogte is 2,80 m. In dit voorbeeld zie je nog een paar afmetingen.



- a** Bereken de totale lengte aan tentstokken die er voor nodig is.

Neem aan dat de vier uitgesneden lappen stof de vorm hebben van een symmetrisch trapezium met een onderkant van 3,00 m en een bovenkant van 2,60 m. De breedte van de rand stof boven die uitsnedes is 20 cm.

- b** Bereken de totale hoeveelheid tentdoek die voor deze partytent nodig is.



## Begrippen

- ▶ frequentietabel — centrummaat — modus — mediaan — gemiddelde
- ▶ boxplot — kwartiel — spreidingsbreedte — (inter)kwartielafstand
- ▶ klassenindeling — klassengrenzen, klassenmidden, klassenbreedte
- ▶ schatten
- ▶ statistisch onderzoek — populatie — steekproef — representatief

## Activiteiten

- ▶ gegevens samenvatten in frequentietabellen en beschrijven met behulp van centrummaten;
- ▶ gegevens samenvatten in frequentietabellen en beschrijven met behulp van spreidingsmaten en boxplots;
- ▶ klassenindelingen gebruiken, het gemiddelde schatten;
- ▶ centrummaten en spreidingsmaten schatten vanuit een klassenindeling;
- ▶ kennismaken met statistisch onderzoek, populatie en representatieve steekproef

## Cijfers op orde

B1H		ne		en		fa		ak		gs	
leerling	geslacht		RE		RE		RE		RE		RE
1	v	6,7	7	4,4	4	5,6	6	6,6	7	6,8	7
2	v	5,6	6	5,3	5	6,1	6	7,1	7	6,8	7
3	m	8,1	8	6,7	7	5,8	6	7,2	7	7,6	8
4	m	8,5	9	5,1	5	6,1	6	6,1	6	6,1	6
5	m	4,9	5	9,7	10	6,6	7	8,0	8	7,5	8
6	v	6,2	6	9,4	9	7,2	7	6,6	7	7,8	8

Domein

# Informatieverwerking

Hoofdstuk

## Statistiek

Inhoud

2.1	Centrummaten	36
2.2	Spreidingsmaten	43
2.3	Klassenindeling	49
2.4	Schatten	56
2.5	Statistische uitspraken	61
2.6	Totaalbeeld	64



## 2.1 Centrummaten

### Verkennen

#### Opgave V1

Je ziet hier de rapportcijfers voor het vak Engels in B1H.

4	5	7	5	10	9	8	4	6	6	7	7	8	3	7
6	6	7	7	9	7	6	7	6	6	8	7	7	8	

- Bereken het gemiddelde van de klas in één decimaal nauwkeurig vanuit de gegeven cijfers.
- Bereken dit gemiddelde nog eens, maar nu nadat je eerst een frequentietabel hebt gemaakt.
- Welk cijfer komt het meest voor engels voor in B1H?
- Wat geeft de leerlingen van B1H het beste beeld over de behaalde cijfers, het gemiddelde of het cijfer dat het vaakst voorkomt? De eerste tabel of de frequentietabel?

### Theorie

#### Opgave 1

Bekijk de frequentietabel van de rapportcijfers voor Engels van klas B2F in de [Uitleg](#).

- Reken het daar gegeven gemiddelde zelf na.
- Je ziet hier een staafdiagram dat bij de frequentietabel is gemaakt. Hoe kun je hierin heel snel de modus ontdekken?
- Het gemiddelde is geen cijfer dat door iemand in de klas is behaald. Hoe komt dat?



#### Opgave 2

Dit is een frequentietabel van de cijfers voor nederlands van klas B2A.

- Hoe kun je bepalen hoeveel leerlingen er in B2A zitten?
- Bereken het gemiddelde rapportcijfer voor nederlands in B2A in één decimaal nauwkeurig.
- Bepaal de modus voor nederlands in B2A.
- Leg uit waarom de mediaan van de cijfers voor nederlands in B2A een 6,5 is.

cijfer	frequentie
4	3
5	4
6	8
7	11
8	3
9	1
totaal	

**Opgave 3**

In deze frequentietabel zie je aantallen leerlingen op vmbo/havo/vwo per onderwijssoort in het schooljaar 2010-2011 volgens het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek). In de tweede kolom zie je hoeveel procent van het totale aantal leerlingen op elke onderwijssoort zit.

	aantal	%
brugjaren	341072	36,3
vwo 3-6	164687	17,5
havo 3-5	151193	16,1
vmbo 3-4	156168	16,6
overig	126414	13,5
	939534	100,0

- Reken de percentages in de tweede kolom na.
- Waarom is het weinig zinvol om hier een gemiddelde te berekenen?
- Waarom kun je geen mediaan berekenen?
- Welke soort voortgezet onderwijs is de modale soort? En waarom had je dat ook wel kunnen bedenken zonder de frequenties te bekijken?

**Opgave 4**

Bekijk **Voorbeeld 1**. Rond waar nodig de percentages af op één decimaal.

- Hoeveel procent per klas scoort lager dan de mediaan?
- Hoeveel procent per klas scoort lager dan het gemiddelde?
- Hoeveel procent per klas scoort lager dan de modus?
- Hoeveel procent per klas behaalt precies de modus?
- In welk van beide klassen is het percentage onvoldoendes het grootst?

**Opgave 5**

In **Voorbeeld 2** zie je een staafdiagram van de groottes van de klassen op twee scholen voor voortgezet onderwijs.

- Hoeveel klassen hebben deze scholen?
- Maak een dubbele frequentietabel bij het staafdiagram, zodat je de klassengrootte van beide scholen in één tabel kunt bekijken.
- Hoeveel leerlingen hebben deze scholen?
- Reken nu zelf de gemiddelden na. Ben je het eens met de conclusie?
- Op school B wordt besloten om het kleine klasje van 11 leerlingen samen te voegen met een parallelklas van 19. Wat gebeurt er dan met het gemiddelde? En met de modus?
- School C heeft hetzelfde gemiddelde aantal leerlingen per klas als school A, maar de modale klassengrootte is 20. Wat zegt dit over school C in vergelijking met de andere twee?

**Opgave 6**

Deze tabel laat zien hoeveel leerlingen er per dag voor het eerste uur te laat zijn gekomen de afgelopen tijd.

aantal te laat komers	6	7	8	9	10	11	12	13	17
aantal dagen	1	4	3	5	8	11	5	2	1

- a** Van hoeveel schooldagen vind je in deze tabel de aantallen te laat komers?
- b** Hoeveel te laat meldingen waren er gedurende deze telling? Is dat ook gelijk aan het aantal leerlingen dat te laat is gekomen?
- c** Bereken het gemiddelde aantal te laat meldingen (voor het eerste uur) per dag op deze school.

Er blijken een twaalftal regelmatig te laat komers te zijn. Deze leerlingen kwamen in de telperiode gemiddeld 7,5 keer te laat.

- d** Hoeveel wordt het gemiddelde aantal te laat meldingen (voor het eerste uur) per dag als deze groep niet wordt meegeteld?

**Verwerken****Opgave 7**

Dit zijn de rapportcijfers die in een bepaalde klas voor economie zijn behaald:

7	4	6	6	5	5	7	6	7	9	10	6	8	7
8	6	5	7	5	8	3	7	8	6	6	10	5	7

- a** Maak een frequentietabel van de rapportcijfers voor economie.
- b** Bepaal de modus.
- c** Bepaal de mediaan.

Twee leerlingen die tijdens de toets ziek waren maken een inhaaltoets. Ze halen allebei een zeven.

- d** Bereken het nieuwe gemiddelde, de nieuwe modus en de nieuwe mediaan.

**Opgave 8**

Een centrummaat moet een goede indruk geven van de waarnemingen die je bestudeert. Kies in de volgende gevallen een geschikte centrummaat, en bereken deze maat.

- a** Erik haalde voor zijn wiskundetoetsen de cijfers 8, 5, 6, 7, 10, 3, 7, 7 en 8.
- b** De directeur van een onderneming krijgt € 8000,00 per maand. De vier adjunctdirecteuren ontvangen maandelijks € 3000,00. De overige dertig werknemers verdienen elk € 1900,00 per maand.



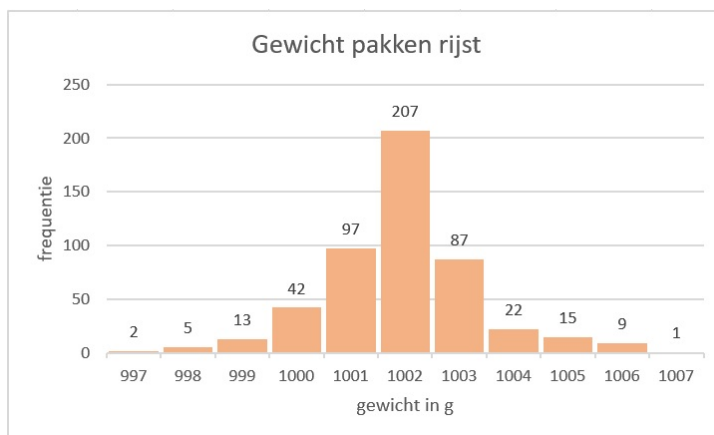


- c** Van de docenten van een scholengemeenschap in Overdal komen er 16 te voet naar school, 20 komen met de fiets, 25 met de auto en 37 met het openbaar vervoer.
- d** De resultaten van een meting van de maximumtemperaturen in een week in juli in graden Celsius waren:

dag	ma	di	wo	do	vr	za	zo
temperatuur in °C	22	23	24	23	23	23	23

### Opgave 9

In een supermarkt worden pakken rijst verkocht met een gewicht van 1 kg. Elke werkdag wordt een vast aantal pakken gecontroleerd op afwijkend gewicht. In het staafdiagram zijn de resultaten verwerkt van 20 werkdagen.



- a** Bepaal de modus en de mediaan.
- b** Hoeveel pakken werden er elke werkdag gecontroleerd?
- c** Hoeveel procent van de gecontroleerde pakken rijst had een te laag gewicht?
- d** Bereken in één decimaal nauwkeurig het gemiddelde aantal pakken rijst per dag waarvan het gewicht te laag is.
- e** In totaal zijn in het afgelopen jaar 8500 pakken rijst verkocht. Geef een schatting van het aantal pakken dat minstens het juiste gewicht had.

**Opgave 10**

Iemand heeft van een aantal doosjes lucifers geteld hoeveel lucifers er in zitten. De resultaten staan in de tabel hier-naast.

aantal lucifers	frequentie
31	1
32	3
33	4
34	5
35	7
36	8
37	11
38	6

- a** Van hoeveel doosjes lucifers is het aantal lucifers geteld?
- b** Hoeveel lucifers zijn er in totaal geteld?
- c** Hoeveel lucifers zitten er gemiddeld in een doosje? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.
- d** Waarom wist je voordat je de berekening bij c uitvoerde dat het gemiddelde lager moest zijn dan de modus 36 ?

**Opgave 11**

Een loterij heeft op een dag aan prijzen gemiddeld € 20000,00 uitbetaald. De mediaan van die prijzen blijkt € 1500,00 te zijn.

Geef een verklaring voor het grote verschil tussen die twee centrummaten.

**Opgave 12**

Een school kent drie rapportperiodes die alle drie even zwaar tellen.

Voor wiskunde zijn er de eerste periode drie toetsen gegeven die elk 1 keer, 1 keer en 3 keer meetellen.

In de tweede periode zijn er in dat vak twee toetsen gegeven die 2 keer en 3 keer meetellen. In de derde en laatste periode zijn er twee toetsen die 1 keer meetellen en een proefwerk dat drie keer meetelt.

Je staat voor wiskunde een 7,2 en alleen het laatste proefwerk moet nog worden gemaakt. De cijfers voor alle toetsen worden in één decimaal nauwkeurig bepaald.

Kun je nog een 8 halen als eindcijfer? Laat met een berekening zien welk cijfer je dan voor het laatste proefwerk moet halen.

**Toepassen**

Excel kan je helpen bij het maken van frequentietabellen en het berekenen van gemiddelden. Bekijk het **Practicum**. Daarin werk je met het Excelbestand **Gegevens154Leerlingen.xls** met gegevens van 154 vierde klassers.

Denk er wel om dat je op een pc of een tablet dit Excel-bestand eerst moet downloaden. Er wordt van uit gegaan dat je wel eens eerder met Excel hebt gewerkt en al weet hoe je met cellen werkt, met formules in cellen werkt, absoluut en relatief kopiëren begrijpt, etc.



### Opgave 13: Cijfer voor wiskunde

Gebruik het gegevensbestand uit **Toepassen**.

- a** Maak zelf een frequentietabel van de gehele eindcijfers voor wiskunde van deze groep leerlingen.
- b** Zoek uit hoe je van een rij gegevens het gemiddelde, de modus en de mediaan door Excel kunt laten berekenen. Het gaat met behulp van formules. Zoek een geschikte plek in het Excel-bestand om deze centrummaten neer te zetten.
- c** Bereken het gemiddelde voor wiskunde nog eens met behulp van de frequentietabel.
- d** Maak vervolgens afzonderlijke groepen van de jongens en de meisjes door te sorteren. Bereken de centrummaten voor deze afzonderlijke groepen en vergelijk ze met elkaar. Maak ook frequentietabellen en staafdiagrammen van de afzonderlijke groepen.

### Opgave 14: Geboortemaanden

Werk met hetzelfde Excel-bestand als in de voorgaande opgave. Zet de gegevens over de geboortemaanden op een afzonderlijk werkblad.

- a** Maak een frequentietabel van de geboortemaanden van deze groep leerlingen.
- b** Welke centrummaat is hier zinvol?
- c** Probeer een conclusie te trekken uit de frequentietabel. Of maak er eerst een staafdiagram van en probeer dan een conclusie te trekken.

## Practicum: Werken met Excel

Excel kan zelf frequentietabellen voor je maken. Je hoeft dan niet met de hand te tellen.

In het Excelbestand **Gegevens154Leerlingen.xls** vind je enkele gegevens van 154 vierde klassers. Je kunt daarbij een frequentieverdeling voor bijvoorbeeld 'cijfwis', het cijfer voor wiskunde van deze leerlingen, maken. Dat gaat als volgt:

- Maak eerst een kopie van het werkblad met gegevens en verwijder alle kolommen behalve 'cijfwis'. Dat wordt dan kolom A.
- Maak eerst een kolom met cijfers van (bijvoorbeeld) 3, 4, 5, t/m 10 in de cellen C2 t/m C9. Geef die het opschrift 'cijfwis'.
- Dan zijn de cellen D2 t/m D9 bestemd voor de frequenties. Selecteer die allemaal.
- Klik nu in de formulebalk en zet daar in: `=INTERVAL(A2:A155;C2:C9)` en doe [ctrl][shift][enter].

Als het goed is krijg je nu de juiste frequenties. Excel telt dus in de cellen A2 t/m A155 (de cijfers voor wiskunde) hoeveel er steeds voorkomen van de waarden in de cellen C2 t/m C9, de verschillende cijfers die voorkomen.



Maar misschien wil je de jongens en de meisjes vergelijken? Dan laat je Excel eerst sorteren op de kolom 'geslacht'. Dat doe je door die kolom te selecteren en 'Sorteren en filteren' te kiezen. Sorteert van laag naar hoog en klik op OK als Excel je vraagt of de selectie moet worden uitgebreid (want de andere kolommen moeten ook worden meegenomen bij het sorteren). Nu heb je de jongens en de meisjes als groepen bij elkaar staan en kun je hun centrummaten vergelijken met of zonder frequentietabellen.

**LET OP:**

Je moet het Excel-bestand Gegevens154Leerlingen.xls eerst downloaden om er in te kunnen werken.

Je kopieert het dan naar de computer waarop je werkt.

## 2.2 Spreidingsmaten

### Verkennen

#### Opgave V1

In deze tabel hier zie je de cijfers van B1H voor een zevental vakken.

B1H		ne		en		fa		ak		gs		wi		sc	
leerling	geslacht	RE	RE	RE	RE	RE	RE	RE	RE	RE	RE	RE	RE	RE	RE
1	v	6,7	7	4,4	4	5,6	6	6,6	7	6,8	7	5,6	6	5,8	6
2	v	5,6	6	5,3	5	6,1	6	7,1	7	6,8	7	6,3	6	6,4	6
3	m	8,1	8	6,7	7	5,8	6	7,2	7	7,6	8	5,3	5	5,4	5
4	m	8,5	9	5,1	5	6,1	6	6,1	6	6,1	6	5,6	6	4,3	4
5	m	4,9	5	9,7	10	6,6	7	8,0	8	7,5	8	6,4	6	7,0	7
6	v	6,2	6	9,4	9	7,2	7	6,6	7	7,8	8	7,1	7	7,1	7
7	m	7,1	7	7,9	8	7,9	8	6,6	7	6,6	7	7,4	7	6,5	7
8	v	6,9	7	3,9	4	6,5	7	7,5	8	7,4	7	8,1	8	7,9	8
9	m	7,7	8	6,0	6	6,6	7	6,7	7	7,6	8	6,5	7	6,1	6
10	m	6,8	7	6,2	6	7,0	7	7,1	7	6,8	7	6,8	7	6,1	6
11	v	5,3	5	7,1	7	5,2	5	6,0	6	6,4	6	5,3	5	5,6	6
12	v	5,8	6	6,9	7	7,1	7	7,3	7	7,4	7	7,6	8	6,4	6
13	m	6,2	6	8,1	8	7,9	8	8,4	8	8,2	8	8,1	8	8,2	8
14	m	7,3	7	3,4	3	5,1	5	6,2	6	6,5	7	6,4	6	7,3	7
15	m	7,0	7	6,8	7	7,1	7	7,0	7	5,5	6	7,0	7	7,2	7
16	v	8,5	9	6,4	6	8,0	8	9,1	9	8,8	9	9,3	9	9,1	9
17	v	9,4	9	5,8	6	6,9	7	7,1	7	7,3	7	6,4	6	5,4	5
18	m	8,1	8	6,5	7	6,9	7	7,6	8	7,6	8	7,3	7	6,6	7
19	v	7,0	7	7,2	7	8,0	8	7,4	7	8,7	9	8,8	9	7,2	7
20	v	6,7	7	8,8	9	7,2	7	6,1	6	6,2	6	3,4	3	4,6	5
21	v	7,4	7	7,2	7	7,3	7	7,6	8	7,3	7	7,2	7	7,1	7
22	v	6,4	6	5,8	6	6,4	6	6,9	7	6,2	6	6,5	7	6,0	6
23	m	7,9	8	6,8	7	6,0	6	7,4	7	7,7	8	6,1	6	6,9	7
24	m	6,6	7	6,1	6	6,9	7	5,8	6	5,9	6	7,2	7	6,1	6
25	m	6,4	6	6,4	6	6,0	6	5,4	5	4,6	5	5,3	5	5,8	6
26	m	5,9	6	7,7	8	7,7	8	7,5	8	7,1	7	8,0	8	6,8	7
27	v	6,9	7	7,3	7	6,2	6	6,2	6	6,3	6	5,8	6	5,1	5
28	m	8,8	9	6,9	7	7,2	7	8,0	8	7,5	8	7,6	8	7,2	7
29	m	6,7	7	8,2	8	7,6	8	7,9	8	8,1	8	7,2	7	8,2	8

- Ga na dat voor de vakken Engels en wiskunde het gemiddelde van de gehele rapportcijfers in één decimaal nauwkeurig hetzelfde is.
- Kun je zeggen dat de resultaten voor beide vakken even goed zijn in deze klas?
- Vanuit een tabel zoals die hierboven is het lastig om conclusies te trekken over de resultaten bij de verschillende vakken. Hoe kun je dat beter doen?
- Wat is het laagste rapportcijfer voor Engels? En voor wiskunde?
- Wat is het hoogste rapportcijfer voor Engels? En voor wiskunde?
- Kun je nu zonder meer zeggen dat de cijfers voor Engels meer gespreid liggen dan bij wiskunde?

### Theorie

#### Opgave 1

Bekijk de frequentietabel van de cijfers voor Frans van klas B2F in de [Uitleg](#).

- Reken de daar gegeven mediaan zelf na.
- Hoeveel bedraagt de spreidingsbreedte?
- Hoeveel bedraagt de interkwartielafstand?

**Opgave 2**

Dit is een frequentietabel van de cijfers voor nederlands van klas B2B.

cijfer	frequentie
3	1
4	0
5	4
6	8
7	8
8	5
9	2
totaal	28

- a** Bepaal de spreidingsbreedte.
- b** Bepaal de mediaan.
- c** Teken de bijbehorende boxplot.
- d** Welk cijfer zou je hier een 'uitschieter' noemen?

**Opgave 3**

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a** Reken zelf alle gegevens nodig voor de boxplot na. (Spreidingsbreedte, mediaan, eerste kwartiel, derde kwartiel, interkwartielafstand).
- b** Bereken de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand van deze cijfers.

**Opgave 4**

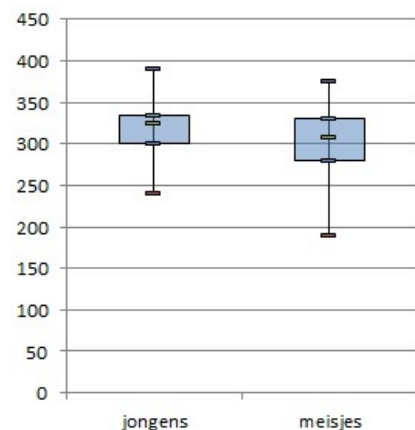
Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a** Ga na dat de twee boxplots overeenkomen met de gegevens.
- b** Beide klassen hebben evenveel leerlingen. Is dat noodzakelijk om de boxplots eerlijk te kunnen vergelijken?

**Opgave 5**

In de boxplots hiernaast zie je de resultaten van de jongens en de meisjes van een brugklas bij het verspringen. Je ziet er de verdeling van de gesprongen afstanden in cm vanaf de afzetbalk.

- a** Hoe groot is de spreidingsbreedte bij de jongens en de meisjes?
- b** Lees de mediaan en de twee kwartielen van de meisjes uit de figuur af.
- c** Kun je op grond van deze boxplots een conclusie trekken als je de resultaten van de jongens en de meisjes wilt vergelijken?





## Verwerken

### Opgave 6

Dit is een steelbladdiagram van de cijfers voor een scheikundetoets in een vijfde klas.

3	4																		
4	8	8	9	9															
5	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	3								
6																			
7	9																		
8	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	6						
9	8																		

- Maak er een boxplot bij.
- Welk diagram geeft het beste beeld van de verdeling van de cijfers, het steelbladdiagram of de boxplot?

### Opgave 7

Van twee honkbalteams zijn alle leeftijden genoteerd:

team 1	18	20	21	22	23	23	24	28	28
team 2	21	22	22	22	23	23	24	24	26

- Bepaal van beide teams de gemiddelde leeftijd en de mediaan.
- Teken bijbehorende boxplots.
- Krijg je hierdoor een goede indruk van het verschil in leeftijdsopbouw tussen beide teams? Leg dat uit.

### Opgave 8

Op 1 januari 2013 werden de volgende geboortegewichten van een groep jongens gemeten. De resultaten in grammen:

1850	2100	2500	2600	2700	2800	2900	3150	3250	3300
3300	3400	3400	3500	4000	4000	4000	4050	4090	4100
4150	4160	4180	4200	4200	4400	4500	4700	4800	4850

Hetzelfde gebeurde bij een even grote groep meisjes:

2400	2500	2500	2600	2700	2800	2800	2800	2900	2900
3000	3000	3100	3100	3200	3200	3200	3300	3300	3350
3400	3400	3500	3500	3600	3700	3800	3900	4000	4000

- Bepaal de spreidingsbreedte bij de jongens en bij de meisjes.
- Maak de boxplots die bij deze gegevens horen.
- Hoeveel procent van de meisjes woog tussen de 2800 en 3500 gram?
- Hoeveel procent van de jongens woog meer dan het zwaarste meisje?



### Opgave 9

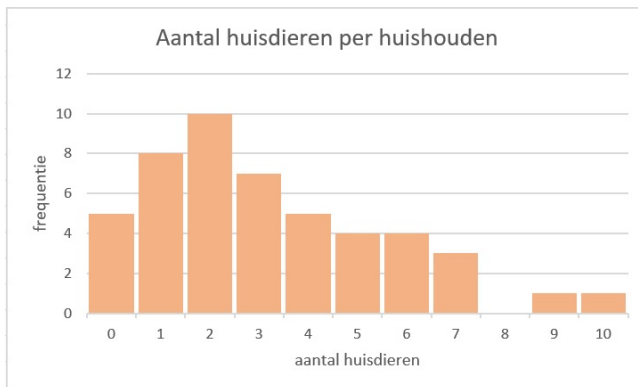
Een van de leerlingen van de vijfde klas heeft de gewichten van al zijn klasgenoten opgeschreven. Het resultaat in kilogrammen is als volgt:

72	50	63	59	63	51	56	64	58	74
52	69	42	51	54	58	51	60	60	59
50	67	61	45	66	49	64	63	57	56

- Bereken bij deze gegevens de mediaan en de interkwartielafstand.
- Hoeveel procent van deze leerlingen weegt minder dan 63 kg volgens je antwoord bij a? Is dat in werkelijkheid ook zo?

### Opgave 10

Aan een groep kinderen uit klas 2 is gevraagd hoeveel huisdieren er in hun huishouden zijn. De resultaten zie je in het staafdiagram.



- Hoeveel kinderen zijn er ondervraagd?
- Bereken het gemiddelde aantal huisdieren per huishouden.
- Bereken de mediaan en de kwartielen.
- Bepaal de spreidingsbreedte en de interkwartielafstand.
- Teken de bijbehorende boxplot.
- Hoeveel huisdieren hebben de 25% huishoudens met de meeste huisdieren?

### Toepassen

Excel kan je helpen bij het berekenen van centrum- en spreidingsmaten en het maken van boxplots. Bekijk het [Practicum](#) en het bestand [Gegevens154Leerlingen.xls](#).

Denk er wel om dat je op een pc dit Excel-bestand eerst moet downloaden. Er wordt van uit gegaan dat je wel eens eerder met Excel hebt gewerkt en al weet hoe je met cellen werkt, met formules in cellen werkt, absoluut en relatief kopiëren begrijpt, etc.





### Opgave 11: Cijfer voor wiskunde

Gebruik het gegevensbestand uit **Toepassen**.

- a** Maak zelf een tabel met de kwartielen, de mediaan en maximum en minimum van de gehele eindcijfers voor wiskunde van deze groep leerlingen.
- b** Maak een bijbehorend boxplot.
- c** Maak vervolgens afzonderlijke groepen van de jongens en de meisjes door te sorteren. Bereken de centrum- en spreidingsmaten voor deze afzonderlijke groepen en vergelijk ze met elkaar. Maak ook boxplots van de afzonderlijke groepen.

### Opgave 12: Lengtes

Werk met hetzelfde Excel-bestand als in de voorgaande opgave. Zet de gegevens over de lengtes van de jongens en de meisjes op een afzonderlijk werkblad. Doe hetzelfde met de gewichten van de jongens en de meisjes.

- a** Maak voor de lengtes van de jongens en de meisjes afzonderlijke boxplots. Kun je conclusies trekken?
- b** Maak voor de gewichten van de jongens en de meisjes afzonderlijke boxplots. Kun je conclusies trekken?

## Practicum: Werken met Excel

Excel kan centrummaten en spreidingsmaten voor je berekenen. Je hebt daarvoor geen frequentietabellen nodig, die zijn alleen erg handig bij het maken van diagrammen.

In het Excelbestand **Gegevens154Leerlingen.xls** vind je enkele gegevens van 154 vierde klassers.

Je kunt daarbij van bijvoorbeeld 'cijfwis', het cijfer voor wiskunde van deze leerlingen, het minimum, het eerste kwartiel, de mediaan, het derde kwartiel en het maximum laten berekenen.

Wil je die ook nog in een boxplot weergeven, dan ga je (vanaf Excel2010) zo te werk:

- Maak eerst een kolom met onder elkaar Q1, minimum, mediaan, maximum en Q3 in die volgorde. Geef de kolom ernaast het opschrift 'cijfwis'.
- In de cellen van die kolom maak je de formules =KWARTIEL(H2:H155;1), =MIN(H2:H155), =MIDIAAN(H2:H155), =MAX(H2:H155) en =KWARTIEL(H2:H155;3) als 'cijfwis' in de kolom H staat.
- Nu selecteer je beide kolommen en het opschrift en via Invoegen kies je een lijndiagram met markeringen.
- Je krijgt nu een lijndiagram. Klik met de rechtermuisknop op de figuur en kies 'Gegevens selecteren'. Klik daar op 'Schakelen tussen rij en kolom'. Je krijgt dan de vijf waarden boven elkaar.
- Bij 'Hulpmiddelen voor grafieken' kun je bij 'Indeling' kiezen voor 'Omhoog/omlaag balken weergeven' en 'Hoog/laag lijnen'. Je krijgt dan je boxplot, dat je nog even zo mooi moet maken als je zelf wilt. (Rechtermuisknop op elke markering en opmaak kiezen.)

Misschien wil je de jongens en de meisjes vergelijken? Dan laat je Excel eerst sorteren op de kolom 'geslacht'. Dat doe je door die kolom te selecteren en 'Sorteren en filteren' te



kiezen. Sorteert van laag naar hoog en klik op OK als Excel je vraagt of de selectie moet worden uitgebreid (want de andere kolommen moeten ook worden meegenomen bij het sorteren). Nu heb je de jongens en de meisjes als groepen bij elkaar staan en kun je hun centrummaten en spreidingsmaten vergelijken en twee boxplots in één figuur maken.

**LET OP:**

Je moet het Excel-bestand Gegevens154Leerlingen.xls eerst downloaden om er in te kunnen werken.

Je kopieert het dan naar de computer waarop je werkt.

## 2.3 Klassenindeling

### Verkennen

#### Opgave V1

In deze tabel hier zie je de cijfers van B1H voor een zevental vakken.

B1H		ne		en		fa		ak		gs		wi		sc	
leerling	geslacht	RE		RE		RE		RE		RE		RE		RE	
1	v	6,7	7	4,4	4	5,6	6	6,6	7	6,8	7	5,6	6	5,8	6
2	v	5,6	6	5,3	5	6,1	6	7,1	7	6,8	7	6,3	6	6,4	6
3	m	8,1	8	6,7	7	5,8	6	7,2	7	7,6	8	5,3	5	5,4	5
4	m	8,5	9	5,1	5	6,1	6	6,1	6	6,1	6	5,6	6	4,3	4
5	m	4,9	5	9,7	10	6,6	7	8,0	8	7,5	8	6,4	6	7,0	7
6	v	6,2	6	9,4	9	7,2	7	6,6	7	7,8	8	7,1	7	7,1	7
7	m	7,1	7	7,9	8	7,9	8	6,6	7	6,6	7	7,4	7	6,5	7
8	v	6,9	7	3,9	4	6,5	7	7,5	8	7,4	7	8,1	8	7,9	8
9	m	7,7	8	6,0	6	6,6	7	6,7	7	7,6	8	6,5	7	6,1	6
10	m	6,8	7	6,2	6	7,0	7	7,1	7	6,8	7	6,8	7	6,1	6
11	v	5,3	5	7,1	7	5,2	5	6,0	6	6,4	6	5,3	5	5,6	6
12	v	5,8	6	6,9	7	7,1	7	7,3	7	7,4	7	7,6	8	6,4	6
13	m	6,2	6	8,1	8	7,9	8	8,4	8	8,2	8	8,1	8	8,2	8
14	m	7,3	7	3,4	3	5,1	5	6,2	6	6,5	7	6,4	6	7,3	7
15	m	7,0	7	6,8	7	7,1	7	7,0	7	5,5	6	7,0	7	7,2	7
16	v	8,5	9	6,4	6	8,0	8	9,1	9	8,8	9	9,3	9	9,1	9
17	v	9,4	9	5,8	6	6,9	7	7,1	7	7,3	7	6,4	6	5,4	5
18	m	8,1	8	6,5	7	6,9	7	7,6	8	7,6	8	7,3	7	6,6	7
19	v	7,0	7	7,2	7	8,0	8	7,4	7	8,7	9	8,8	9	7,2	7
20	v	6,7	7	8,8	9	7,2	7	6,1	6	6,2	6	3,4	3	4,6	5
21	v	7,4	7	7,2	7	7,3	7	7,6	8	7,3	7	7,2	7	7,1	7
22	v	6,4	6	5,8	6	6,4	6	6,9	7	6,2	6	6,5	7	6,0	6
23	m	7,9	8	6,8	7	6,0	6	7,4	7	7,7	8	6,1	6	6,9	7
24	m	6,6	7	6,1	6	6,9	7	5,8	6	5,9	6	7,2	7	6,1	6
25	m	6,4	6	6,4	6	6,0	6	5,4	5	4,6	5	5,3	5	5,8	6
26	m	5,9	6	7,7	8	7,7	8	7,5	8	7,1	7	8,0	8	6,8	7
27	v	6,9	7	7,3	7	6,2	6	6,2	6	6,3	6	5,8	6	5,1	5
28	m	8,8	9	6,9	7	7,2	7	8,0	8	7,5	8	7,6	8	7,2	7
29	m	6,7	7	8,2	8	7,6	8	7,9	8	8,1	8	7,2	7	8,2	8

- Waarom heeft het geen zin om bij de cijfers voor bijvoorbeeld geschiedenis die op één decimaal zijn afgerond een frequentietabel of een staafdiagram te maken?
- De rapportcijfers worden afgerond op gehele getallen. Welke cijfers worden afgerond op een 6.  
De cijfers die worden afgerond op een 8 kun je aangeven als de klasse  $7,5- < 8,5$ .
- Om welke cijfers gaat het dan als je cijfers in één decimaal hebt?
- Om welke cijfers gaat het dan als je cijfers in twee decimalen hebt?
- Bereken het gemiddelde van de rapportcijfers voor geschiedenis als ze nog niet op gehele cijfers zijn afgerond in één decimaal nauwkeurig.
- Bereken opnieuw het gemiddelde van de rapportcijfers voor geschiedenis, maar neem nu de gehele cijfers.
- Hoe komt het dat ze verschillen?



## Theorie

### Opgave 1

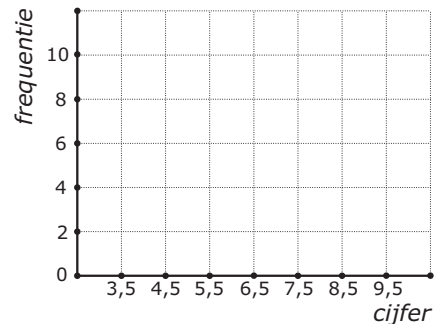
Bekijk de klassenindeling van de rapportcijfers voor een bepaald vak in klas 2A in de **Uitleg**.

- Ga na dat de absolute frequentie van de klasse  $5,5- < 6,5$  inderdaad 7 is en reken de relatieve frequentie na.
- Hoeveel procent van de behaalde cijfers is kleiner dan 6,5? En waarom kun je dit gemakkelijker uit de klassenindeling halen dan uit de ruwe data?
- Hoeveel procent van de behaalde cijfers is kleiner dan 6,0? Waarom kun je dit niet uit de klassenindeling halen, maar alleen uit de ruwe data?
- Welke betekenis hebben de klassenmiddens? Waar kun je die voor gebruiken?

### Opgave 2

De volgende cijfers werden voor een toets Engels gehaald.

3,6	4,4	4,5	4,6	5,0	5,4	5,5	5,6	5,6	6,1
6,2	6,4	6,5	6,5	6,5	7,1	7,2	7,3	7,4	7,4
7,5	7,6	7,6	8,0	8,1	8,3	8,4	8,6	9,4	9,4



- Bereken het gemiddelde in één decimaal nauwkeurig.
- Maak voor deze cijfers een klassenindeling met als eerste klasse  $3,5- < 4,5$  en de frequentietabel die daarbij hoort.
- Je kunt bij je klassenindeling een staafdiagram maken. Je ziet in de figuur hoe je de assen kunt indelen. Teken zelf zo'n staafdiagram.  
  
Elke klasse staat hier voor een cijfer afgerond op gehelen. Die gehele cijfers zijn de klassenmiddens 4, 5, ... 9.
- Bereken hiermee het gemiddelde van de cijfers. Vind je hetzelfde als bij a? En waarom?

### Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- Reken de relatieve frequenties van de klasse  $5,5- < 6,5$  voor zowel 2A als 2B na.
- Hoeveel procent van de leerlingen in 2A heeft een onvoldoende (dat is een cijfer lager dan 5,5)? En hoe zit dat in 2B? Kun je een conclusie trekken?
- Schat met behulp van de klassenindeling hoeveel procent van de leerlingen in 2A een cijfer lager dan 6,0 heeft. Doe dit ook voor 2B. Kun je een conclusie trekken?



### Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**.

- a** Bereken de gemiddelde rapportcijfers in één decimaal nauwkeurig voor zowel 2A als 2B vanuit de ruwe data.
- b** De rapportcijfers worden op gehele getallen afgerond. Om van die gehele cijfers de gemiddelden te berekenen kun je de klassenindeling goed gebruiken. Hoe komt dat?
- c** Hoe zou je de gemiddelden van de gehele rapportcijfers voor 2A en 2B uitrekenen bij de klassenindeling?  
Vind je veel verschil met het antwoord bij a?

### Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**. Je ziet daar de lengtes van 90 meisjes in een vierde klas ingedeeld in klassen.

- a** Waarom is zo'n klassenindeling juist wel handig als je overzicht over de verdeling van de lengtes wilt krijgen?
- b** Hoeveel procent van deze meisjes heeft een lengte vanaf 160 tot 180 cm?
- c** Hoeveel procent van deze meisjes is langer dan 190 cm? Rond af op één decimaal.

### Opgave 6

In **Voorbeeld 2** staat dat het gemiddelde van de lengtes in zo'n klassenindeling kan worden geschat door de klassenmiddens te gebruiken.

- a** Waarom kun je bij een klassenindeling geen enkele centrummaat precies berekenen?
- b** Bereken de gemiddelde lengte met behulp van de klassenmiddens en laat zien dat dit inderdaad een schatting van 173,4 cm oplevert.
- c** Je hebt een schatting van de gemiddelde lengte. Hoeveel bedraagt de gemiddelde lengte minimaal?
- d** Hoeveel bedraagt de gemiddelde lengte maximaal?

## Verwerken

### Opgave 7

Geef in de volgende situaties aan of een klassenindeling maken mogelijk/zinvol is, leg uit waarom. Zo ja, geef aan wat jij als eerste klasse zou kiezen.

- a** Je hebt op de huishoudbeurs aan 500 bezoekers hun leeftijd gevraagd. De jongste bezoeker was 17 en de oudste was 81.
- b** Je hebt aan die zelfde 500 bezoekers van de huishoudbeurs hun lievelingskleur gevraagd. Tussen de antwoorden die de bezoekers gaven zaten 12 verschillende kleuren.



- c** Je hebt aan die zelfde 500 bezoekers van de huishoudbeurs gevraagd hoe vaak ze nu in totaal de huishoudbeurs al bezocht hebben. Het laagste aantal was 1 keer en het hoogste aantal was 15 keer.

### Opgave 8

Je ziet hier een klassenindeling van de gewichten van een groep personen.

gewichtsklasse	frequentie
45– < 50	1
50– < 55	5
55– < 60	8
60– < 65	15
65– < 70	19
70– < 75	9
75– < 80	3

- a** Welk klassenmidden heeft de klasse 45– < 50? Licht je antwoord toe.
- b** Bereken het gemiddelde gewicht in één decimaal nauwkeurig.
- c** Hoeveel procent van deze groep mensen weegt minder dan 70 kg?

### Opgave 9

Johan gooit zestig keer met vijf dobbelstenen en noteert telkens de som van de vijf aantallen ogen. Zijn scores zijn als volgt:

16	22	21	16	20	24	20	23	16	22
17	15	17	26	23	20	17	19	21	23
17	22	18	14	18	15	16	18	17	18
20	22	18	18	25	14	13	12	15	17
22	14	18	20	12	20	15	18	15	24
17	12	23	14	11	14	21	16	18	5

- a** Wat was het grootste getal dat hij had kunnen gooien? Leg uit.
- b** Bereken de gemiddelde score in één decimaal nauwkeurig.
- c** Maak een klassenindeling van de scores. Neem als klassen 5– < 8 en 8– < 11, enzovoorts.
- d** Welke scores horen tot de klasse 5– < 8? Wat is dus het klassenmidden? En waarom kun je nu niet gewoon het gemiddelde van de klassengrenzen nemen?
- e** Bereken nu met behulp van de klassenindeling de gemiddelde score.
- f** In hoeveel procent van de worpen scoorde Johan meer dan 13 maar minder dan 23?
- g** Waarom zou score 18 zoveel vaker voorkomen dan score 28?



### Opgave 10

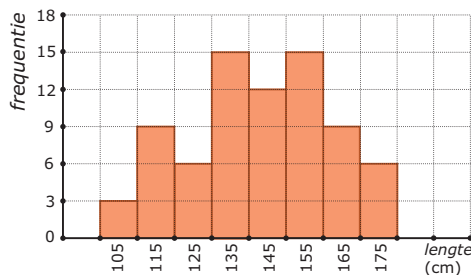
Bij een cabaretvoorstelling is aan 44 bezoekers hun leeftijd gevraagd. Het resultaat is als volgt:

31	29	18	16	24	47	12	32	52	10	26
22	12	53	49	25	21	59	51	32	16	27
18	29	31	37	17	42	31	39	19	33	28
44	16	29	22	17	19	54	27	30	28	51

- Maak een klassenindeling met als klassen  $10- < 15$ , enzovoorts. Voeg de absolute frequenties toe.
- Welke leeftijden horen tot de klasse  $50- < 55$ ? Wat is dus het klassenmidden?
- Schat met behulp van de klassenindeling de gemiddelde leeftijd van deze bezoekers.
- Hoeveel procent van de ondervraagden was jonger dan 30?

### Opgave 11

Je ziet hier een verdeling van de lengtes van de vrouwelijke leerlingen van een balletschool. Op de horizontale as staan de klassenmiddens in cm.



- Schrijf de eerste klasse van de indeling op.
- Van hoeveel leerlingen is de lengte gemeten?
- Schat met behulp van de klassenindeling de gemiddelde lengte van deze leerlingen in cm nauwkeurig.
- Maak een nieuwe klassenindeling met klassen  $100- < 120$ , enzovoorts. Bereken opnieuw de gemiddelde lengte van deze leerlingen, maar nu vanuit de nieuwe klassenindeling. Verklaar het verschil.

**Opgave 12**

Op 1 januari 2003 werden de volgende geboortegewichten van een groep jongens gemeten. De resultaten in grammen:

1850	2100	2500	2600	2700	2800	2900	3150	3250	3300
3300	3400	3400	3500	4000	4000	4000	4050	4090	4100
4150	4160	4180	4200	4200	4400	4500	4700	4800	4850

Hetzelfde gebeurde bij een even grote groep meisjes:

2400	2500	2500	2600	2700	2800	2800	2800	2900	2900
3000	3000	3100	3100	3200	3200	3200	3300	3300	3350
3400	3400	3500	3500	3600	3700	3800	3900	4000	4000

Omdat je de geboortegewichten van deze twee groepen wilt vergelijken maak je een klassenindeling en de bijbehorende frequentietabellen. Neem klassen met een breedte van 500 gram. De eerste klasse begint bij 1500.

- Maak een geschikte klassenindeling met bijbehorende absolute frequenties.
- Schat de gemiddelden van beide groepen met behulp van de klassenindeling bij a.
- Hoeveel procent van de jongens woog meer dan het bij b gevonden gemiddelde van de meisjes?
- Hoeveel procent van de jongens woog meer dan het zwaarste meisje?

**Toepassen**

Excel kan centrummaten en spreidingsmaten voor je berekenen vanuit de ruwe data, je hebt daarvoor geen frequentietabellen nodig. Maar frequentietabellen zijn handig bij het maken van diagrammen. En vooral als je over veel gegevens beschikt is groeperen in klassen erg handig. Bekijk het [Practicum](#) en het bestand [Gegevens154Leerlingen.xls](#).

Denk er wel om dat je op een pc dit Excel-bestand eerst moet downloaden. Er wordt van uit gegaan dat je wel eens eerder met Excel hebt gewerkt en al weet hoe je met cellen werkt, met formules in cellen werkt, absoluut en relatief kopiëren begrijpt, etc.

**Opgave 13: Lengtes in klassen**

Gebruik het gegevensbestand uit [Toepassen](#).

- Maak zelf de frequentieverdeling van de lengtes van deze groep vierde klassers.
- Maak een staafdiagram.
- Maak vervolgens afzonderlijke groepen van de jongens en de meisjes door te sorteren. Maak frequentietabellen voor deze afzonderlijke groepen en vergelijk ze met elkaar.





### Opgave 14: Gemiddelden schatten

Werk met hetzelfde Excel-bestand als in de voorgaande opgave. Je hebt de gegevens over de lengtes van de jongens en de meisjes op een afzonderlijk werkblad gezet. Doe hetzelfde met de gewichten van de jongens en de meisjes.

- a Maak voor de lengtes van de jongens en de meisjes afzonderlijke frequentietabellen en schat met behulp daarvan hun gemiddelde lengtes. Kun je conclusies trekken?
- b Maak voor de gewichten van de jongens en de meisjes afzonderlijke frequentietabellen en schat met behulp daarvan hun gemiddelde lengtes. Kun je conclusies trekken?

### Practicum: Werken met Excel

Excel kan centrummaten en spreidingsmaten voor je berekenen vanuit de ruwe data, je hebt daarvoor geen frequentietabellen nodig. Maar frequentietabellen zijn handig bij het maken van diagrammen. En vooral als je over veel gegevens beschikt is groeperen in klassen erg handig.

In het Excelbestand [Gegevens154Leerlingen.xls](#) vind je enkele gegevens van 154 vierde klassers.

Je vindt daarin bijvoorbeeld 'lengte', de lengtes van deze leerlingen.

Wil je daar een frequentietabel bij maken, dan bedenk je eerst een geschikte klassenindeling. Maak een kopie van het werkblad en verwijder daarin de kolommen D, E, F, H, I, J, K, L, M en ook de uitleg naast de tabel kan wel weg. Je gegevens komen nu in kolom D.

Nu ga je (in Excel2010) zo te werk:

- Laat Excel eerst het minimum en het maximum van de lengtes in de cellen D2 t/m D155 berekenen. Je kunt dan je klassenindeling kiezen, zorg voor ongeveer tien klassen. Bijvoorbeeld  $155- < 160$ , enzovoorts.
- Maak eerst een kolom met de kleinste getallen in de tien klassen in (bijvoorbeeld) F3 t/m F13, zet de klassenmiddens ernaast en daarnaast weer de grootste getallen in de klassen. Bij de klasse  $155- < 160$  worden dat 150, 157,5 en 159.
- De cellen I3 t/m I13 zijn bestemd voor de frequenties. Selecteer die allemaal.
- Klik nu in de formulebalk en zet daar in: `=INTERVAL(D2:D155;H3:H13)` en doe [ctrl][shift][enter].

Als het goed is krijg je nu de juiste frequenties. Excel telt dus in de cellen D2 t/m D155 hoeveel er steeds maximaal gelijk zijn aan de grootste waarde in de klasse en groter zijn dan de grootste waarde van de vorige klasse.

Misschien wil je de jongens en de meisjes vergelijken? Dan laat je Excel eerst sorteren op de kolom 'geslacht'. Dat doe je door die kolom te selecteren en 'Sorteren en filteren' te kiezen. Sorteert van laag naar hoog en klik op OK als Excel je vraagt of de selectie moet worden uitgebreid (want de andere kolommen moeten ook worden meegenomen bij het sorteren). Nu heb je de jongens en de meisjes als groepen bij elkaar staan en kun je hun centrummaten en spreidingsmaten vergelijken en twee boxplots in één figuur maken.

LET OP: Je moet het Excel-bestand Gegevens154Leerlingen.xls eerst downloaden om er in te kunnen werken. Je kopieert het dan naar de computer waarop je werkt.

## 2.4 Schatten

### Verkennen

#### Opgave V1

Hier zie je de rapportcijfers van 2A voor het vak Frans. De rapportcijfers zijn afgerond op gehele getallen, dat is eigenlijk een klassenindeling.

cijfer	frequentie
4	1
5	4
6	7
7	6
8	6
9	6

- a** Over welke klassen gaat het dan? En wat zijn dan de klassenmiddens?
- b** De docent Frans wil het gemiddelde uitrekenen van de resultaten van deze klas. Hij gebruikt de gehele rapportcijfers. Welke fout maakt hij en hoeveel kan hij er naast zitten?
- c** Het modale cijfer is nu eigenlijk een modale klasse. Welke klasse is de modale klasse?
- d** In welke klasse ligt de mediaan? Leg uit.
- e** Kun je nu zeggen welk getal de mediaan is als je uitgaat van de (onbekende) rapportcijfers op één decimaal nauwkeurig?
- f** Hoe groot is de spreidingsbreedte van de cijfers? Waar hangt dat van af?

### Theorie

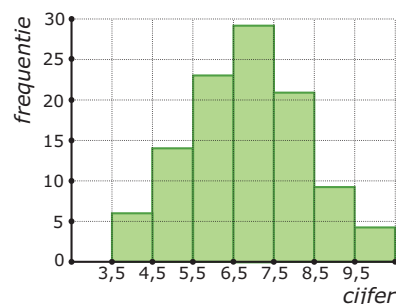
#### Opgave 1

Bekijk de frequentietabel van de rapportcijfers in klas 2A in de [Uitleg](#).

- a** Welke klasse is de modale klasse? Welk geheel rapportcijfer krijgen al die leerlingen?
- b** Waarom neem je voor de spreidingsbreedte van de op één decimaal afgeronde rapportcijfers  $9,5 - 3,5 = 6$  en niet  $9 - 4 = 5$  als je naar de klassenindeling kijkt?
- c** In welke klasse zit de mediaan? En de kwartielen?
- d** Probeer een manier te bedenken om de vijf waarden die nodig zijn voor de boxplot te schatten.

**Opgave 2**

In dit staafdiagram worden de resultaten voor een toets wiskunde weergegeven. De werkelijke cijfers werden berekend in één decimaal nauwkeurig en konden lopen vanaf 1,0 tot en met 10,0.



- Hoeveel leerlingen hebben deze toets gemaakt?
- Maak een schatting van het gemiddelde van de cijfers.
- Welke klasse is de modale klasse?
- In welke klasse zit de mediaan van de behaalde cijfers?
- Wat is er bijzonder aan de laatste klasse? Hoe moet je daar bij de spreidingsbreedte rekening mee houden?

**Opgave 3**

Bekijk **Voorbeeld 1**. Omdat je de ruwe gegevens mist, schat je de verschillende centrummaten en spreidingsmaten die je nodig hebt voor een boxplot.

- Hoeveel bedraagt de spreidingsbreedte?
- Bekijk hoe de mediaan is geschat. Schat nu op dezelfde manier de twee kwartielen.
- Teken een boxplot bij de cijfers van klas 2A. Hoeveel bedraagt de kwartielafstand?

**Opgave 4**

Hier zie je de verdeling van de rapportcijfers van 2B voor hetzelfde vak. Ook deze cijfers zijn op één decimaal nauwkeurig berekend.

klasse	frequentie
3,5– < 4,5	1
4,5– < 5,5	2
5,5– < 6,5	12
6,5– < 7,5	6
7,5– < 8,5	4
8,5– < 9,5	0
totaal	25

- Schat met deze gegevens de mediaan van de cijfers van klas 2B.
- Schat nu ook beide kwartielen van de verdeling van de rapportcijfers van 2B. Teken een bijpassend boxplot.
- Vergelijk de boxplots van de cijfers van klas 2A en klas 2B. Kun je een uitspraak doen?

**Opgave 5**

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je de klassenmiddens bepaalt als er in een klasse alleen gehele waarden voorkomen.

- Leg zelf uit waarom het klassenmidden van de laatste klasse 67 moet zijn en geen  $\frac{70-65}{2} = 67,5$ .
- Schat het gemiddelde van de bezoekersaantallen.

**Opgave 6**

Deze tabel laat de verdeling zien van de lengtes van 90 meisjes in een vierde klas.

- a** Leg uit waarom de klassenmiddens nu wel kunnen worden berekend vanuit de klassengrenzen.
- b** Schat de mediaan en de twee kwartielen en maak hierbij een boxplot.

lengteklasse	klassenmidden	freq.
150– < 155	152,5	1
155– < 160	157,5	5
160– < 165	162,5	10
165– < 170	167,5	16
170– < 175	172,5	22
175– < 180	177,5	15
180– < 185	182,5	11
185– < 190	187,5	6
190– < 195	192,5	3
195– < 200	197,5	1
	<i>totaal</i>	90

**Verwerken****Opgave 7**

In een klas zijn voor een toets de volgende cijfers behaald:

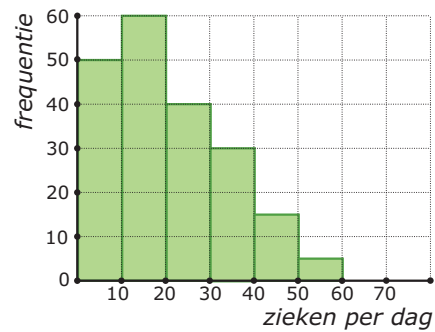
6,5	9,3	5,2	6,1	6,2	6,2	2,6	3,6	9,6	7,9
7,4	8,4	7,1	4,4	9,0	8,3	8,3	4,8	8,2	6,5
6,5	5,8	6,4	5,4	6,0	6,2	7,2	5,8	6,3	6,9

- a** Bepaal de variatiebreedte.
- b** Als je een staafdiagram van deze gegevens wilt maken is het verstandig om eerst een klassenindeling te maken. Waarom is dat?
- c** Maak een klassenindeling van de resultaten en teken het staafdiagram. Welke klassen liggen hier voor de hand?
- d** Bepaal de modale klasse.
- e** In welke klasse ligt de mediaan? Hoeveel wordt de mediaan naar schatting?
- f** Hoeveel wordt het eerste kwartiel naar schatting?



### Opgave 8

Op een school is gedurende een jaar elke schooldag bijgehouden hoeveel leerlingen er ziek waren. Je ziet de gegevens hier verwerkt in een staafdiagram. De laatste klasse bevat in feite alle dagen dat het aantal zieken 50 of meer was.



- a** Hoeveel schooldagen waren er dat jaar?
- b** Schat de mediaan.
- c** Schat het gemiddelde aantal zieke leerlingen per dag in gehelen. Neem voor de laatste klasse als klassenmidden 55.
- d** Je hebt voor de laatste klasse als klassenmidden 55 genomen. Voor welke centrummaat is die keuze van belang? Licht je antwoord toe.

### Opgave 9

De lengtes in cm van 60 leerlingen zijn in klassen ingedeeld. Je kunt nu het gemiddelde alleen nog schatten want je weet de ruwe data niet.

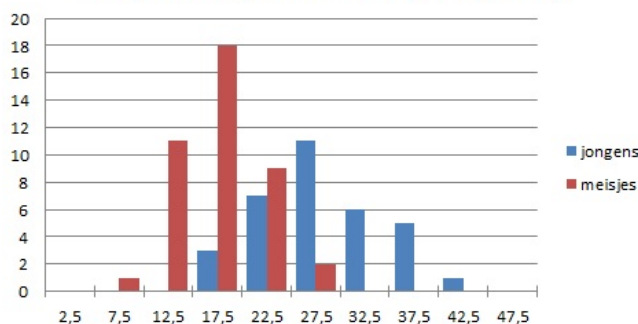
lengteklasse	frequentie
150 – < 160	3
160 – < 170	17
170 – < 180	34
180 – < 190	4
190 – < 200	2
totaal	60

- a** Bepaal de modale klasse.
- b** Hoe schat je het gemiddelde? Bereken deze schatting.
- c** Schat de mediaan.
- d** Schat de kwartielen en teken een bijpassend boxplot.

### Opgave 10

Hier zie je in één staafdiagram de resultaten van het gooien met een 200 grams kogel van een groep van 74 brugklasleerlingen. Er zijn afzonderlijke diagrammen voor de jongens en de meisjes. Alle geworpen afstanden zijn tot op 0,5 m nauwkeurig gemeten. Elke klasse is door het klassenmidden aangegeven.

Vergooien (gewicht 200 gram, in m)



- a** Maak bij beide staafdiagrammen een boxplot.



- b** Maak een schatting van het gemiddelde van de jongens en de meisjes afzonderlijk.
- c** Kun je concluderen dat jongens van die leeftijd verder gooien dan meisjes? Licht je antwoord toe.

## Toepassen

Je hebt de belangrijkste vaardigheden met MS-Excel in de voorgaande onderdelen voorbij zien komen. Je hebt centrummaten en spreidingsmaten berekend (dat doe je het liefst vanuit de ruwe gegevens) en je hebt diagrammen getekend. Voor een boxplot gebruik je ook het liefst de ruwe gegevens, maar voor een staafdiagram of een lijndiagram of een cirkeldiagram werk je meestal met een klassenindeling. In de volgende opgaven werk je met het bestand **Gegevens154Leerlingen.xls**.

In dit bestand vind je een tabel met het aantal uren huiswerk per week. Je gaat de jongens en de meisjes van deze vierde klas met elkaar vergelijken.

Denk er wel om dat je op een pc het bijbehorende Excel-bestand eerst moet downloaden.

### Opgave 11: Uren huiswerk per week

Gebruik het gegevensbestand uit **Toepassen**.

- a** Maak een geschikte frequentieverdeling van het aantal uren dat de jongens aan hun huiswerk besteden. Doe dit ook voor de meisjes.
- b** Maak met Excel een bijpassend lijndiagram van de jongens en meisjes in één figuur.
- c** Probeer een conclusie te trekken.

### Opgave 12: Uren huiswerk per week en boxplots

Werk met hetzelfde Excel-bestand als in de voorgaande opgave.

- a** Maak nu twee boxplots naast elkaar voor het aantal uren dat de jongens per week aan hun huiswerk besteden en het aantal uren dat de meisjes per week aan hun huiswerk besteden.
- b** Probeer opnieuw conclusies te trekken, betrek ook de gemiddelden erbij.

## 2.5 Statistische uitspraken

### Verkennen

#### Opgave V1

Niet elke bewering is een statistische uitspraak, een uitspraak die je met behulp van statistiek kunt nagaan.

Geef van elk van de volgende uitspraken aan of het een statistische uitspraak betreft.

- a "40% van de leerlingen in klas 2C van school X is een meisje."
- b "40% van de Nederlanders heeft bloedgroep O-positief."
- c "85% van alle jongeren tussen 12 en 18 jaar internet dagelijks."
- d "Ik heb zojuist in 360 worpen met twee dobbelstenen precies 60 keer 7 ogen gegooid."
- e "Als je met twee dobbelstenen gooit zul je in 16,7% van alle worpen 7 ogen gooien."
- f "Jongens kunnen verder gooien dan meisjes."

### Verwerken

#### Opgave 1

Bij statistisch onderzoek wil je een uitspraak doen over een grote groep (de populatie) op grond van de resultaten van een steekproef uit die groep.

- a Waar moet een goede steekproef aan voldoen?
- b Welke twee soorten statistisch onderzoek ken je op dit moment? Geef van beide een voorbeeld.

#### Opgave 2

Als je onderzoek wilt doen naar de hobby's van Nederlanders van 18 jaar en ouder, dan zijn belangrijke kenmerken van de populatie: geslacht, leeftijd, regio, en opleiding.

Bedenk bij elk van de volgende uitspraken om welke populatie het gaat en welke kenmerken voor die populatie belangrijk zijn om na te gaan of de steekproef representatief is.

- a "De boeren in Europa die kippeneieren produceren zitten in een crisis."
- b "Er zijn veel mensen in Nederland van plan om komend jaar hun huis te gaan verbouwen."
- c "Nederlandse jongens zijn beter in atletiek dan Nederlandse meisjes."
- d "Vrouwen gaan minder vaak naar de kapper dan mannen."



### Opgave 3

Je bent journalist en wilt een artikel schrijven over studenten. Je bent vooral nieuwsgierig naar mensen die een mbo studie gaan doen en voor welke sector ze dan kiezen. Je hebt al wat rondgevraagd en krijgt het vermoeden dat vooral veel meisjes voor de zorgsector kiezen, en dat veel minder jongens dat doen.

Je hebt inmiddels met 25 studenten gesproken die een mbo opleiding in de zorg zijn gestart. 15 van deze studenten zijn vrouw en 10 zijn man. Je schrijft als kop boven je artikel: "Meisjes kiezen veel vaker voor een mbo opleiding in de zorg dan jongens."

- a** Is dit een statistische uitspraak? Leg uit waarom wel of niet.

Zoek ook op het internet of je meer gegevens kunt vinden over de keuze voor de sectoren in het mbo. En ook of dit te maken heeft met het geslacht. Kijk eerst welke sectoren er zijn via [de website van de MBO-raad](#).

- b** Hoe zou je een onderzoek opzetten waarmee je een artikel over de sectorkeuze in het mbo gaat schrijven?

### Toepassen

Hier vind je het Excel bestand [Gegevens154Leerlingen](#). Dit bestand bevat informatie over een groep vierde klassers. Deze gegevens ga je gebruiken om een statistische onderzoeksvraag te beantwoorden die jij zelf bedenkt.

### Opgave 4: Een eigen onderzoeksvraag bedenken

Gebruik het bestand uit [Toepassen](#).

- a** Bekijk de gegevens in het Excel bestand en formuleer een goede statistische onderzoeksvraag.
- b** Gebruik de gegevens uit het Excel bestand om één duidelijke grafiek te maken die past bij je onderzoeksvraag.
- c** Trek aan de hand van je grafiek conclusies en beantwoord je onderzoeksvraag.

### Opgave 5: Een eigen statistisch onderzoek doen

Het is nu tijd om zelf een statistisch onderzoek te doen. Kies een onderwerp gebaseerd op de twee soorten statistische onderzoeksvragen waar je tot nu toe mee hebt kennism gemaakt. Bedenk vervolgens hoe je het onderzoek kunt uitvoeren, hoe je de gegevens kunt verzamelen en overzichtelijk weergeven. En bedenk tenslotte hoe je conclusies kunt trekken en verwoorden.

- a** Bedenk een eigen statistische onderzoeksvraag.
- b** Stel een plan van aanpak op. Daarin beschrijf je hoe je steekproef wordt samengesteld en hoe je het onderzoek gaat aanpakken.
- c** Voer je onderzoek uit en verzamel alle gegevens (bijvoorbeeld in MS-Excel).
- d** Bedenk een manier om je gegevens goed te presenteren, denk aan tabellen en grafieken.





- e** Trek een conclusie.
- f** Kijk terug op je onderzoek en op de aanpak. Wat had beter gekund?

## 2.6 Totaalbeeld

### Samenvatten

Statistiek is uit het huidige leven bijna niet meer weg te denken. Veel beslissingen worden genomen op basis van statistieken of het nu gaat om woningbouw, het aanleggen van wegen of het bepalen welke smartphone het beste is, altijd worden er gegevens verzameld en gepresenteerd in tabellen en diagrammen. En om de conclusies die daaruit worden getrokken nog een beetje te begrijpen (en vooral ook om hun beperkingen te begrijpen) is kennis van statistische methoden nodig.

In dit onderwerp wordt daar een klein begin mee gemaakt. Het is zelfs de bedoeling dat je zelf een statistisch onderzoekje doet. Je werkt daarbij met MS-Excel (of een ander rekenbladprogramma op de computer, maar dan moet je wel zelf kijken hoe dat precies werkt).

De volgende opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Statistiek** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

### Begrippen

- ▶ frequentietabel — centrummaat — modus — mediaan — gemiddelde
- ▶ boxplot — kwartiel — spreidingsbreedte — (inter)kwartielafstand
- ▶ klassenindeling — klassengrenzen, klassenmidden, klassenbreedte
- ▶ schatten
- ▶ statistisch onderzoek — populatie — steekproef — representatief

### Activiteiten

- ▶ gegevens samenvatten in frequentietabellen en beschrijven met behulp van centrummaten;
- ▶ gegevens samenvatten in frequentietabellen en beschrijven met behulp van spreidingsmaten en boxplots;
- ▶ klassenindelingen gebruiken, het gemiddelde schatten;
- ▶ centrummaten en spreidingsmaten schatten vanuit een klassenindeling;
- ▶ kennismaken met statistisch onderzoek, populatie en representatieve steekproef

### Opgave 1

In deze frequentietabel zie je de resultaten van tellingen van het aantal eieren dat dagelijks in een hok vol kippen werd geraapt.

aantal eieren	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
frequentie	1	2	3	6	12	15	27	35	23	12

Deze gegevens kun je samenvatten met behulp van een drietal centrummaten.

- a** Welk aantal eieren per dag is de modus?



- b** Welk aantal eieren per dag is de mediaan?
- c** Bereken het gemiddelde aantal eieren per dag.

### Opgave 2

In deze frequentietabel zie je de resultaten van tellingen van het aantal eieren dat dagelijks in een hok vol kippen werd geraapt.

aantal eieren	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
frequentie	1	2	3	6	12	15	27	35	23	12

Bij deze gegevens kun je behalve de drie centrummaten ook een paar spreidingsmaten vaststellen.

- a** Bepaal de spreidingsbreedte.
- b** Bepaal de kwartielafstand.
- c** Teken een bijpassend boxplot.

### Opgave 3

De lengtes in cm van 60 leerlingen zijn in klassen ingedeeld. Je kunt nu het gemiddelde alleen nog schatten want je weet de ruwe data niet.

- a** Bepaal de modale klasse.
- b** Hoe schat je het gemiddelde? Bereken deze schatting.

lengteklasse	frequentie
150– < 160	3
160– < 170	17
170– < 180	34
180– < 190	4
190– < 200	2
totaal	60

### Opgave 4

Gebruik de frequentietabel van de vorige opgave. Door de mediaan en de kwartielen te schatten kun je een boxplot maken.

- a** Schat de mediaan.
- b** Schat de kwartielen en teken een bijpassend boxplot.

### Opgave 5

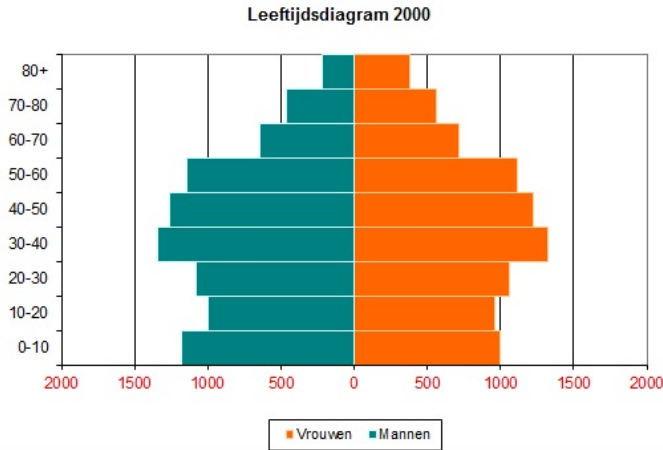
Bij statistisch onderzoek wil je een uitspraak doen over een grote groep (de populatie) op grond van de resultaten van een steekproef uit die groep.

- a** Waar moet een goede steekproef aan voldoen?
- b** Welke twee soorten statistisch onderzoek ken je op dit moment? Geef van beide een voorbeeld.



## Toepassen

Aicha ziet bij aardrijkskunde een zogenaamde **bevolkingspiramide**. Hierin is de bevolkingsopbouw van Nederland in het jaar 2000 weergegeven. Het lijkt wel een staafdiagram, maar dan op zijn kant.



### Opgave 6: Bevolkingspiramide in 2000

In **Toepassen** zie je een bevolkingspiramide, een leeftijdsdiagram van de Nederlandse bevolking in het jaar 2000. Alle aantallen zijn duizendtallen.

Je kunt er bijvoorbeeld in aflezen dat de groep 0-4-jarigen in 2000 uit ongeveer 1.200.000 jongens en ongeveer 1.000.000 meisjes bestond.

- Om wat voor soort diagrammen gaat het hier?
- Hoeveel mannen en vrouwen van 10– < 20 waren er in Nederland in 2000?
- In de jaren na de Tweede Wereldoorlog werden er nogal veel kinderen geboren. Dat werd de ‘baby-boom’ genoemd. Hoe vind je dat in de bevolkingspiramide van 2000 terug?
- Wat was in 2000 de modale leeftijdscategorie?
- Schat de gemiddelde leeftijd van de Nederlanders in 2000.

### Opgave 7: Bevolkingspiramide vervolg

Bekijk de bevolkingspiramide van de voorgaande opgave nog eens.

- Schat de mediaan van de leeftijden van de Nederlandse mannen in 2000. Doe hetzelfde voor de vrouwen.
  - Teken boxplots voor zowel de mannen als de vrouwen in één figuur. Kun je een conclusie trekken?
- Via de website **CBS: bevolkingspiramide** kun je zien hoe de bevolkingsopbouw in Nederland voor dit jaar er uitziet.
- Beschrijf het verschil van de bevolkingsopbouw in Nederland in dit jaar met die in 2000.

**Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.**

**De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.**

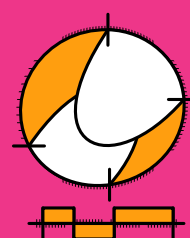
**Stichting Math4All**

## **Inhoud Katern 4**

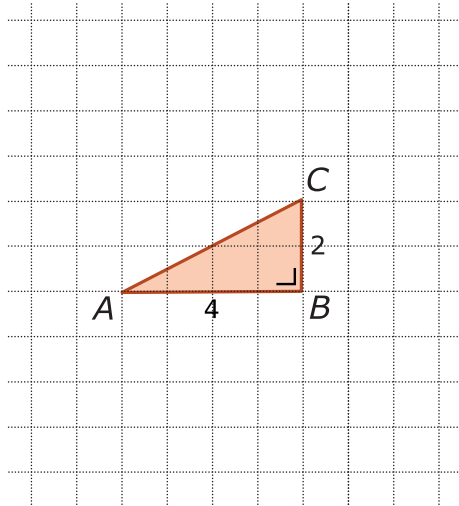
- 7. Meetkundige berekeningen**
- 8. Statistiek**



[www.math4all.nl](http://www.math4all.nl)



Werkblad bij Opgave 8 op pagina 8.



Werkblad bij Opgave 1 op pagina 36.

