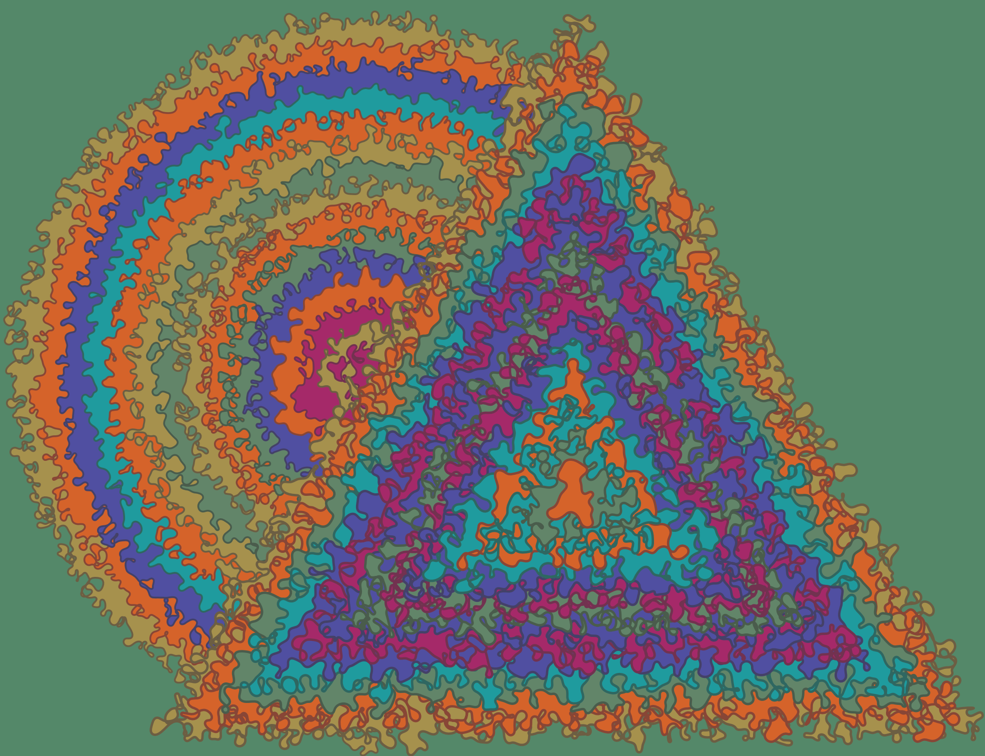
# Wiskunde

# 2 VMBO

## Katern 2 / Theorie

ConTeXt College



# Inhoud

# Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

**Begrippen**

- verband — grootheid met eenheid — afhankelijk van
- (woord)formule
- grafiek bij een formule
- lettervariabele — vermenigvuldigingspunt
- vergelijking, linkerzijde en rechterzijde — oplossing(en) van een vergelijking — inklemmen

**Activiteiten**

- verbanden beschrijven in woorden, in tabellen en grafieken — variabelen gebruiken
- verbanden beschrijven in (woord)formules
- grafieken tekenen vanuit een formule
- letters gebruiken voor variabelen — formules zo kort mogelijk schrijven
- formules vergelijken — vergelijkingen oplossen met behulp van tabellen en grafieken — vergelijkingen oplossen door handig rekenen

# Reizen met het OV

Domein

# Grafieken en formules

Hoofdstuk

# Verbanden

Inhoud



1

# 1.1 Verbanden en variabelen

## Inleiding

Behzad woont nogal ver van school, maar gelukkig vlakbij een bushalte. Hij gaat daarom af en toe met de bus, hij gebruikt zijn OV-chipkaart. Hij zoekt op dat je voor een ritje met de bus een vast tarief van € 1,00 betaalt plus een bedrag per kilometer. Dat laatste bedrag verschilt per busonderneming, maar is vaak zo'n € 0,17 per kilometer.
Maar er bestaan ook speciale abonnementen voor ritjes op een vast traject. Wat is voordeliger?


### Je leert in dit onderwerp

- afhankelijke en onafhankelijke variabelen onderscheiden;
- een verband in woorden beschrijven;
- een tabel en/of grafiek maken bij een verband in woorden.

### Voorkennis

- je kunt een grafiek bij een tabel maken;
- je kunt rekenen met decimale getallen.

**Opgave V1**

## Uitleg

Een kaars is twintig centimeter lang en wordt aangestoken. Je meet de lengte aan het begin van elk uur.

In de tabel zie je dat elk uur *brandtijd* de *lengte* twee centimeter korter wordt. Er is een verband tussen de grootheden *brandtijd* en *lengte*.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *brandtijd* (uur) | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *lengte* (cm) | 20 | 18 | 16 | 14 |


Omdat deze grootheden veranderen, heten ze variabelen (veranderlijken). De variabele *lengte* hangt af van de variabele *brandtijd*.
Bij de variabele *brandtijd* hoort de eenheid ‘uur’.
Bij de variabele *lengte* hoort de eenheid ‘centimeter’.

Je kunt dit verband beschrijven in woorden: als de *brandtijd* toeneemt, neemt de *lengte* af.

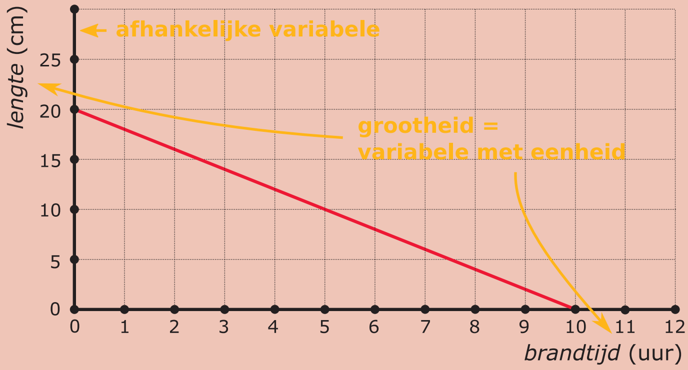
Een verband kun je ook weergeven in een grafiek. De grafiek blijkt in dit geval een rechte lijn te zijn.

**Opgave 1** **Opgave 2**

## Theorie

Soms is er een **verband** tussen twee **grootheden**.

De éne grootheid kan steeds andere waarden aannemen en van de andere kun je dan de waarde uitrekenen, het zijn **variabelen**. De grootheid waarvan je de waarde uitrekent is **afhankelijk** van de andere variabele.




Bij zo'n verband maak je vaak een tabel.
Bij die tabel past dan weer een grafiek.
Er kunnen daarbij verschillende schaalverdelingen op de twee assen worden gebruikt.

## Voorbeeld 1

Voor Behzad's busvervoer betaalt hij € 0,17 per kilometer. Hij kijkt nog even niet naar het vaste bedrag van € 1,00 die hij nog extra moet betalen per rit. De *reiskosten* (euro) hangen nu alleen af van de *afstand* (km) die hij reist. Er is een verband tussen de variabelen *reiskosten* en *afstand*.

Vul deze tabel verder in en maak er een grafiek bij.

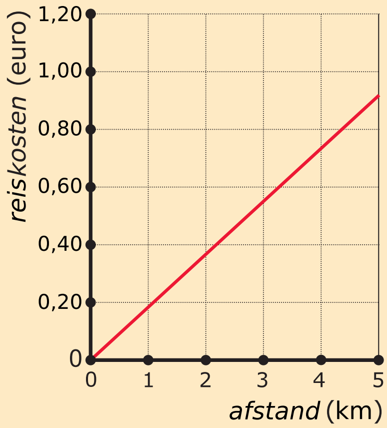
| *afstand* (km) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *reiskosten* (euro) | 0,00 | 0,17 | | | | |

Antwoord

Vermenigvuldig steeds de *afstand* met 0,17.

Je krijgt:

| *afstand* (min) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *reiskosten* (euro) | 0,00 | 0,17 | 0,34 | 0,51 | 0,68 | 0,85 |




Opgave 3

## Voorbeeld 2

Voor Behzad's busvervoer betaalt hij € 0,17 per kilometer plus het vaste bedrag van € 1,00 extra per rit. De *reiskosten* (euro) hangen nu weer af van de *afstand* (km) die hij reist. Er is een verband tussen de variabelen *reiskosten* en *afstand*.

Vul deze tabel verder in en maak er een grafiek bij.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *afstand* (km) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| *reiskosten* (euro) | 1,00 | | | | | |

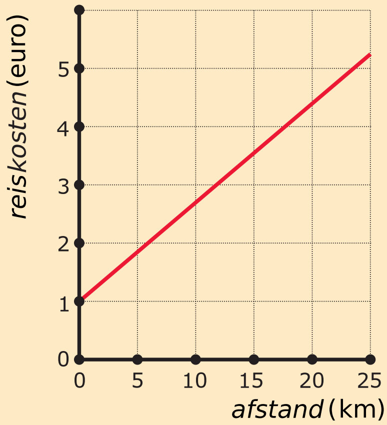
Antwoord

Vermenigvuldig steeds de *afstand* met 0,17.

Bij de uitkomsten tel je nog 1,00 op.

Je krijgt:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *afstand* (km) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| *reiskosten* (euro) | 1,00 | 1,85 | 2,70 | 3,55 | 4,40 | 5,25 |




Opgave 4 Opgave 5

# 1.2 Formules opstellen

## Inleiding

Behzad woont nogal ver van school, maar gelukkig vlakbij een bushalte. Hij gaat daarom af en toe met de bus, hij gebruikt zijn OV-chipkaart. Hij zoekt op dat je voor een ritje met de bus een vast tarief van € 1,00 betaalt plus een bedrag per kilometer. Dat laatste bedrag verschilt per busonderneming, maar is vaak zo'n € 0,17 per kilometer.
Hoe kan hij aan zijn klasgenoten die ook met de bus willen uitleggen hoe je de reiskosten zelf kunt berekenen?

### Je leert in dit onderwerp

- een formule bij een verband opstellen;
- bij een gegeven invoerwaarde de waarde van de afhankelijke variabele berekenen met behulp van een formule.

### Voorkennis

- het kunnen onderscheiden van de afhankelijke en de onafhankelijke variabele;
- een verband in woorden kunnen beschrijven met de informatie uit een tabel of een grafiek;
- een verband in woorden kunnen beschrijven.

**Opgave V1**

## Uitleg

Een kaars is twintig centimeter lang en wordt aangestoken. Je meet aan het begin van elk uur de lengte van de kaars.

In de tabel zie je dat elk uur de *lengte* twee centimeter korter wordt vanaf een beginlengte van twintig centimeter.
Als *brandtijd* $= 5$ uur, dan geldt
*lengte* $= 20 - 5 \times 2 = 10$ cm.


| *brandtijd* (uur) | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| *lengte* (cm) | 20 | 18 | 16 | 14 |

Dus: *lengte* $= 20 -$ *brandtijd* $\times 2$.
Dit noem je een formule.
Er zijn twee variabelen: *brandtijd* en *lengte*.
*lengte* is afhankelijk van *brandtijd*. Kies je voor *brandtijd* een waarde, heet die waarde de

invoerwaarde. Let op als je gaat rekenen met deze formule: vermenigvuldigen gaat voor aftrekken.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

## Theorie

Soms is er een **verband** tussen twee **grootheden**.

Vaak kun je door een bepaalde berekening de afhankelijk variabele uitrekenen als je voor de andere een **invoerwaarde** kiest. Zo'n berekening kun je kort weergeven, zoals voor het opbranden van een cilindervormige kaars:

*lengte* $= 20 -$ *brandtijd* $\times 2$.


Zo'n verkorte weergave van een berekening noem je een **formule**. In dit geval zijn de twee variabelen: *brandtijd* (in uur) en *lengte* (in cm).

## Voorbeeld 1

Voor Behzad's busvervoer betaalt hij € 0,17 per kilometer plus een vast bedrag van € 1,00 die hij nog extra moet betalen per rit. De *reiskosten* (euro) hangen nu alleen af van de *afstand* (km) die hij reist. Er is een verband tussen de variabelen *reiskosten* en *afstand*.

Welke formule kun je opschrijven voor het verband tussen *reiskosten* en *afstand*?

Antwoord

Bedenk dat je eerst de *afstand* (aantal km) met $0{,}17$ moet vermenigvuldigen.
Daarna moet je bij wat daar uitkomt nog het vaste bedrag van € 1,00 optellen.
Dan krijg je de *reiskosten*.

Formule: *reiskosten* $=$ *afstand* $\times 0{,}17 + 1{,}00$.

Opgave 4

## Voorbeeld 2

Een lange, dunne kaars wordt aangestoken. In de tabel zie je hoe hij korter wordt naarmate hij langer brandt. Ga er van uit, dat het opbranden zo doorgaat.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *tijd* (uur) | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *lengte* (cm) | 30 | 27 | 24 | 21 |

Er is een verband tussen de *tijd* in uren na het aansteken en de *lengte* in cm.

Hoeveel cm brandt deze kaars elk uur op?

Stel een formule op die het verband tussen *lengte* (in cm) afhankelijk van *tijd* (in uur) beschrijft.

Antwoord

Elk uur brandt er van deze kaars $3$ cm op volgens de tabel.

De lengte van de kaars is aan het begin $30$ cm.

Om de lengte na een bepaalde tijd te berekenen, vermenigvuldig je die tijd met $3$ en dat trek je van de $30$ af. Als formule schrijf je bijvoorbeeld op:

$\textit{lengte} = 30 - \textit{tijd} \times 3$

Opgave 5 Opgave 6

# 1.3 Formules en grafieken

## Inleiding

De bus waar Behzad regelmatig mee naar school reist, is een elektrische bus.
Zo'n bus heeft een grote accu aan boord waarin de elektrische energie zit opgeslagen. De hoeveelheid energie druk je uit in kWh (kiloWattuur). In zo'n accu kan wel 170 kWh energie zitten. En de bus verbruikt ongeveer 2 kWh per gereden km.

Hoe ziet het verloop van de energievoorraad van zo'n bus er in een grafiek uit?

### Je leert in dit onderwerp

- een grafiek maken bij een formule.

### Voorkennis

- een formule gebruiken om waarden te berekenen van de afhankelijk variabele als die .

Opgave V1

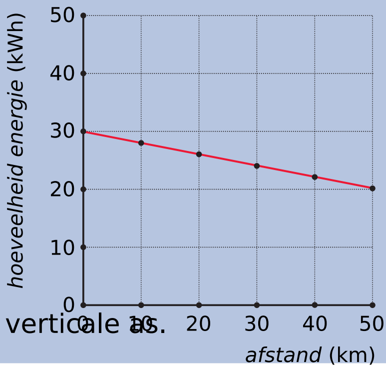
## Uitleg

Een elektrische auto rijdt met 20 kWh (kiloWattuur) een afstand van 100 kilometer.
Dus zal hij gemiddeld elke km ongeveer 0,20 kWh verbruiken.

Als je 30 kWh hebt opgeladen, kun je de *hoeveelheid energie* die de auto nog heeft berekenen met de formule: *hoeveelheid energie* $= 30 - 0{,}20 \times$ *afstand*.

Je kunt bij deze formule ook een grafiek tekenen. Daarvoor maak je eerst een tabel.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *afstand* (km) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| *hoeveelheid energie* (kWh) | 30 | 28 | 26 | 24 | 22 | 20 |




Bij de tabel teken je een passende grafiek.
De *afstand* komt op de horizontale as, de uitkomsten op de verticale as.

Opgave 1 Opgave 2

## Theorie

In de formule
*lengte* $= 20-$ *brandtijd* $\times 2$
is *lengte* afhankelijk van *brandtijd*.
Je kunt met deze formule de *lengte* (uitkomst) uitrekenen, voor verschillende invoerwaarden van de *brandtijd*.
Als je opeenvolgende waarden van de *brandtijd* in de formule invult, kun je een **tabel** maken. En daarbij past dan weer een **grafiek** met de *brandtijd* op de horizontale as.


## Voorbeeld 1

Je brengt eens per week huis-aan-huisfolders rond. Je krijgt daarvoor een vast bedrag van € 6,00 per week (een fietsvergoeding). Bovendien krijg je € 0,05 per folder.

Maak hierbij een formule en een grafiek van *weekloon* afhankelijk van *aantal folders*.

Antwoord

Voor je weekloon geldt de formule:

*weekloon* $= 6{,}00 +$ *aantal folders* $\times 0{,}05$

Breng je 100 folders rond, dan is je weekloon:

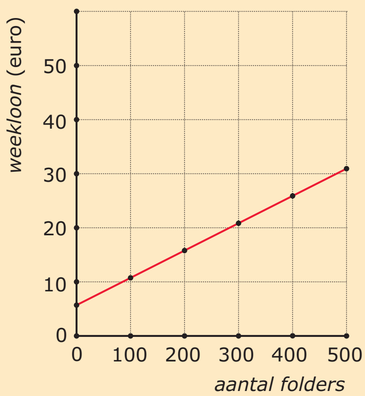
*weekloon* $= 6{,}00 \ + 100 \times 0{,}05 = 11{,}00$ euro.

Breng je 200 folders rond, dan is je weekloon:

*weekloon* $= 6{,}00 \ + 200 \times 0{,}05 = 16{,}00$ euro.

Breng je 0 folders rond, dan is je weekloon:

*weekloon* $= 6{,}00 + 0 \times 0{,}05 = 6{,}00$ euro.




Omdat *weekloon* afhangt van het aantal folders komt *aantal folders* op de horizontale as.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *aantal folders* | 0 | 100 | 200 | 300 |
| *weekloon* (euro) | 6 | 11 | 16 | 21 |

**Opgave 3**

## Voorbeeld 2

Voor de lengte van een kaars die zojuist is aangestoken, geldt:

*lengte* $= 30 - 1{,}5\times$ *brandtijd*, waarbij de *lengte* in centimeters is en de *brandtijd* in uren.

Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?

Antwoord

Bij het aansteken van de kaars: *brandtijd* is $0$. Dan is: *lengte* $= 30 - 1{,}5 \times 0 = 30$ cm.

Eén uur na het aansteken geldt: *brandtijd* is $1$. Dan is: *lengte* $= 30 - 1{,}5 \times 1 = 28{,}5$ cm.

Twee uur na het aansteken geldt: *brandtijd* is $2$. Dan is: *lengte* $= 30 - 1{,}5 \times 2 = 27$ cm.

Zo kun je een tabel maken en daarmee ook een grafiek tekenen:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *brandtijd* (uur) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *lengte* (cm) | 30 | 28,5 | 27 | 25,5 | 24 | 22,5 |

Na $20$ uur is de kaars opgebrand.

Opgave 4 Opgave 5

# 1.4 Letterformules

## Inleiding

Behzad heeft formules ontdekt, zoals *reiskosten* $= 1{,}00 + 0{,}17\times$ *afstand*.
Hij kan er mee rekenen, tabellen en grafieken bij maken.
Maar waarom van die lange woorden?
Als je nu gewoon onthoudt dat *reiskosten* $= R$ en *afstand* $= a$, dan kan alles toch veel korter?


### Je leert in dit onderwerp

- een woordformule omzetten in een letterformule (formules verkort noteren);
- de vermenigvuldigingspunt gebruiken in daarvoor geschikte situaties;
- de waarde van een afhankelijke variabele berekenen met behulp van een letterformule.

### Voorkennis

- het werken met woordformules, tabellen en grafieken erbij maken.

Opgave V1

## Uitleg

Voor het vervoer per bus kun je de formule *reiskosten* $= 1{,}00 + 0{,}17\times$ *afstand* gebruiken.

In plaats van het woord *reiskosten* kun je alleen de letter $R$ gebruiken en in plaats van *afstand* de letter $a$.

De formule wordt dan $R = 1{,}00 + 0{,}17 \times a$.

Hierin is:

- $R$ de reiskosten in euro
- $a$ de gereisde afstand in km

Dat moet je wel onthouden bij zo'n kortere formule met alleen letters voor de variabelen.

Bovendien lijkt het teken × voor vermenigvuldigen op de letter x. Daarom gebruik je in formules meestal een vermenigvuldigingspunt · in plaats van het kruisje.

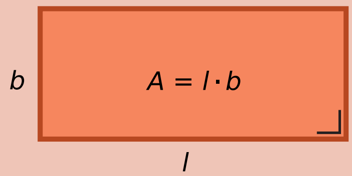
De formule wordt dan: $R = 1{,}00 + 0{,}17 \cdot a$.

Wil je de reiskosten weten als je 20 km met de bus reist, dan moet je voor $a$ de waarde 20 in de formule invullen: $R = 1{,}00 + 0{,}17 \cdot 20 = 4{,}40$ euro.

Opgave 1 Opgave 2

## Theorie

Formules wil je graag zo overzichtelijk mogelijk houden. Daarom worden variabelen als *lengte*, *breedte*, *tijd* en *kosten* aangegeven met maar één letter, vaak hun beginletter. Je moet wel goed van tevoren afspreken wat elke letter precies betekent en je daar dan ook nauwgezet aan houden.




In deze figuur zie je de formule $A = l \cdot b$, met:

- $A$ de oppervlakte in $cm^2$
- $l$ de lengte in cm
- $b$ de breedte in cm

Voor vermenigvuldigen gebruik je in formules de **vermenigvuldigingspunt** · in plaats van het kruisje. En als dat geen verwarring oplevert, laat je de vermenigvuldigingspunt gewoon weg.

## Voorbeeld 1

Een kaars is veertig centimeter lang en wordt aangestoken. De kaars wordt elk uur twee centimeter korter.

Er is dus een verband tussen de variabelen *lengte* in centimeters en *brandtijd* in uren. De formule is: *lengte* $= 40 - 2 \cdot$ *brandtijd*

Schrijf deze formule zo kort mogelijk.

Antwoord

Door voor de variabelen één letter te gebruiken, kun je de formule korter en overzichtelijker opschrijven.

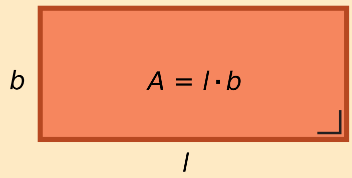
De formule wordt dan bijvoorbeeld: $l = 40 - 2 \cdot t$

Hierbij is:

- $l$ de *lengte* in cm
- $t$ de *brandtijd* in uren

Opgave 3 Opgave 4

## Voorbeeld 2




De formule voor de oppervlakte van een rechthoek is:
*oppervlakte = lengte · breedte*

Deze formule kun je korter schrijven door voor de variabelen een letter te nemen.

Bijvoorbeeld: $A = l \cdot b$

Hierin is

- $A$ de oppervlakte
- $l$ de lengte
- $b$ de breedte

$l$ en $b$ moeten wel dezelfde lengte-eenheid hebben (bijvoorbeeld cm) en $A$ krijgt dan in de bijbehorende oppervlakte-eenheid zijn (dus hier cm²).

Opgave 5 Opgave 6

# 1.5 Vergelijkingen

## Inleiding

Behzad heeft deze formule ontdekt voor zijn busreizen:

$R = 1{,}00 + 0{,}17 \cdot a$.

Hierin is:

- $R$ de *reiskosten* in euro
- $a$ de *afstand* in km

Maar wat als hij in de winter elke dag met de bus naar school wil? Is een abonnement dan niet veel voordeliger? Dat gaat hij nu proberen uit te rekenen.


### Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking opstellen aan de hand van gegeven informatie;
- een vergelijking oplossen door tabellen en grafieken te gebruiken;
- een vergelijking oplossen door handig rekenen.

### Voorkennis

- werken met formules en de bijbehorende tabellen en grafieken.

Opgave V1

## Uitleg

Op school staat een kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor € 0,10 per kopie gebruik van maken. De school huurt deze machine voor € 150,00 per maand en elke kopie kost de school € 0,075.

“Vanaf hoeveel kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?”.

Noem het aantal kopieën per maand $a$.
De kosten zijn dan: $K = 150 + 0{,}075 \cdot a$.
De inkomsten zijn: $I = 0{,}10 \cdot a$.

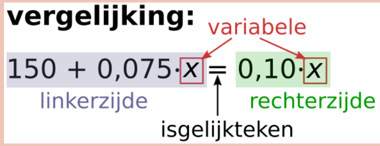
Beide zijn gelijk als $150 + 0{,}075 \cdot a = 0{,}10 \cdot a$.

Dit noem je een vergelijking. Je wilt de waarde voor $a$ vinden waarbij links van het isgelijkteken hetzelfde uitkomt als rechts van het isgelijkteken. Die waarde heet de oplossing van de vergelijking.

Als je de oplossing niet meteen ziet, kun je er altijd uitkomen door getallen voor $a$ in te vullen, net zolang tot je de juiste gevonden hebt. Doe dat wel systematisch, dus met een tabel.

Opgave 1

## Theorie




Een **vergelijking** bestaat uit twee uitdrukkingen met een variabele die gelijk aan elkaar zijn.
Als $x$ die variabele is, zoek je de waarde van $x$ die ervoor zorgt dat de linker- en rechterzijde van de vergelijking gelijk zijn. Die waarde van $x$ heet de **oplossing van de vergelijking**. Soms zijn er meerdere oplossingen mogelijk.

Om deze oplossingen te vinden kun je gebruik maken van tabellen en grafieken.
Je vergelijkt dan de uitkomsten van de linkerzijde met die van de rechterzijde van de vergelijking.
In een snijpunt van hun grafieken hebben linker- en rechterzijde dezelfde uitkomst.

Maar soms gaat ‘handig rekenen’ sneller...

## Voorbeeld 1

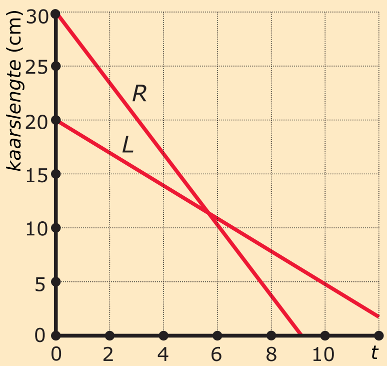
Twee kaarsen worden tegelijk aangestoken.
De eerste kaars is 20 cm en wordt elk uur $1{,}5$ cm korter.
De tweede kaars is 30 cm en wordt elk uur $3{,}25$ cm korter.
Noem je de brandtijd in uren $t$, dan geeft de vergelijking $20 - 1{,}50 \cdot t = 30 - 3{,}25 \cdot t$ aan wanneer de kaarsen even lang zijn.

Bereken wanneer deze twee kaarsen even lang zijn. Ofwel: voor welke waarden van $t$ is deze vergelijking waar?

Antwoord

Maak een tabel en een grafiek bij $L = 20 - 1{,}50 \cdot t$ en $R = 3 - 3{,}25 \cdot t$.

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L$ | 20,00 | 18,50 | 17,00 | 15,50 | 14,00 | 12,50 | 11,00 | 9,50 | 8,00 |
| $R$ | 30,00 | 26,75 | 23,50 | 20,25 | 17,00 | 13,75 | 10,50 | 7,25 | 4,00 |




Je ziet nu dat de oplossing tussen $t = 5$ en $t = 6$ zit.
Aflezen: na ongeveer $5{,}5$ uur zijn ze even lang.

Opgave 2 Opgave 3

## Voorbeeld 2


Iemand's schoenmaat $s$ kun je bepalen vanuit de lengte $v$ van zijn voet in cm. Er geldt:

$s = 1{,}5 \cdot (v + 2)$

Weet je iemand's schoenmaat, dan kun je zijn voetlengte bepalen. Neem bijvoorbeeld iemand met schoenmaat $42$. Dan geldt volgens de formule de vergelijking:

$52 = 1{,}5 \cdot (v + 2)$

Deze vergelijking hoef je niet op te lossen met tabellen en grafieken. Even nadenken helpt ook.

De vergelijking ziet er uit als $42 = 1{,}5 \cdot [...]$.

Je kunt dan [...] vinden door $\frac{42}{1{,}5}$ uit te rekenen, uitkomst $28$.

Omdat [...] eigenlijk $v + 2$ is, krijg je dus $v + 2 = 28$ en dit klopt als $v = 26$.
De gevraagde voetlengte is $26$ cm.

(In werkelijkheid is $42$ een schoenmaat voor iedereen vanaf $s = 41{,}5$ tot en met $S = 42{,}4$ en zijn er meerdere voetlengtes met deze schoenmaat.)

Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6

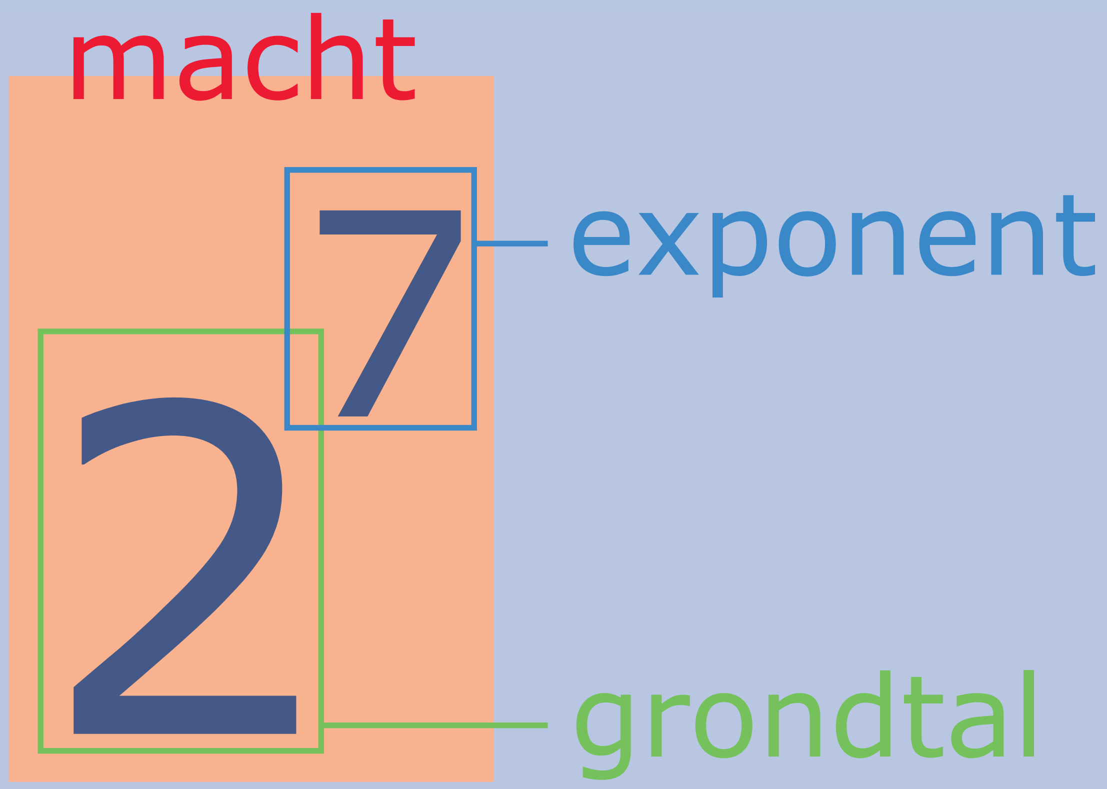
**Begrippen**

- kwadraat — kwadrateren
- wortel — worteltrekken
- macht, grondtal en exponent — machtsverheffen — derdemachtswortel
- rekenvolgorde
- wetenschappelijke notatie — significante cijfers

**Activiteiten**

- kwadrateren en werken met kwadraten;
- terugrekenen vanuit kwadraten, worteltrekken;
- werken met hogere machten dan bij kwadrateren — derdemachtswortels uitrekenen;
- de uitgebreide voorrangsregels voor het rekenen ook met machtsverheffen en worteltrekken;
- hele grote getallen en getallen dicht bij 0 schrijven en de wetenschappelijke notatie en omgekeerd.

## Spelletjes



Domein

# Rekenen

Hoofdstuk

# Machten en wortels

Inhoud



2

# 2.1 Kwadraten

## Inleiding

Sven ziet een foto van een groot schaakspel buiten in een park. Hij is nogal een liefhebber van schaken en het lijkt hem leuk om ook eens met zo'n spel te spelen. Misschien zou hij met twee kleuren tegels zo'n schaakbord kunnen maken in hun eigen tuin? Maar dan moet er wel voldoende ruimte zijn.

### Je leert in dit onderwerp

- getallen kwadrateren (met zichzelf vermenigvuldigen) en de bijbehorende notatie.

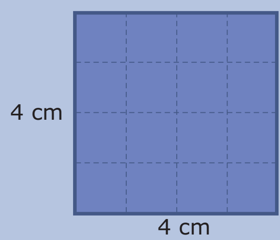
### Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- de oppervlakte van een roosterfiguur en een vierkant met gegeven zijde berekenen.

**Opgave V1**

## Uitleg

Dit vierkant heeft vier zijden van $4$ cm.
De oppervlakte van het vierkant is $4 \times 4 = 16$ cm$^2$.
In plaats van $4 \times 4$ schrijf je ook wel $4^2$.
Je spreekt dit uit als ‘vier tot de tweede’ of ‘vier kwadraat’.




‘Kwadraat’ is eigenlijk gewoon een andere naam voor (oppervlakte van een) vierkant. Het berekenen van een kwadraat heet kwadrateren.

Voor een vierkant geldt: $oppervlakte = zijde^2$.

Met de rekenmachine bereken je $4^2$ zo: $\boxed{4}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$

of zo: $\boxed{4}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

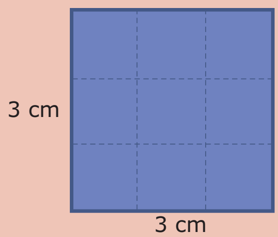
**Opgave 1** **Opgave 2** **Opgave 3**

## Theorie

Als je een getal met zichzelf vermenigvuldigt, noem je dat **kwadrateren** en het resultaat heet het **kwadraat** van dat getal.

Het kwadraat van $3$ schrijf je als $3^2$.
Het kwadraat van $3$ is $3^2 = 3 \times 3 = 9$.

Het kwadraat van $3$ is de oppervlakte van een vierkant met zijde $3$.



## Voorbeeld 1

Hier zie je de kwadraten van de gehele positieve getallen vanaf 0 tot en met 49.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |
| | | | | | | | | | |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |
| | | | | | | | | | |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 | 676 | 729 | 784 | 841 |
| | | | | | | | | | |
| 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 900 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 |
| | | | | | | | | | |
| 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
| 1600 | 1681 | 1764 | 1849 | 1936 | 2025 | 2116 | 2209 | 2304 | 2401 |

Opgave 4 Opgave 5

## Voorbeeld 2

Bereken het kwadraat van $2\frac{2}{3}$.

Antwoord

$$\left(2\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{64}{9}$$

Opgave 6

# 2.2 Wortels

## Inleiding

Sven wil dit buitenschaakspel maken. Het schaakbord bestaat uit 8 bij 8 tegels. Als elke tegel vierkant is met zijden van 50 cm, dan krijgt hij een schaakbord van 16 m$^2$. Dat is veel te groot voor hun vierkante stuk tuin van 12 m$^2$.

### Je leert in dit onderwerp

- terugrekenen vanuit een kwadraat (worteltrekken) en de bijbehorende notatie.

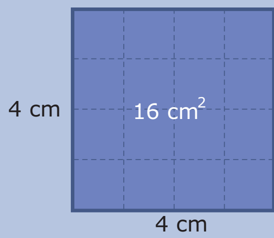
### Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- de oppervlakte van een roosterfiguur en een vierkant met gegeven zijde berekenen door kwadrateren.

Opgave V1

## Uitleg

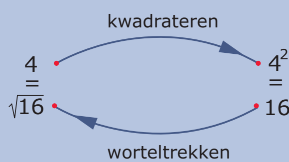
De oppervlakte van dit vierkant is 16 cm$^2$.
De lengte van elke zijde is 4 cm, want $4^2 = 4 \times 4 = 16$.
Je zegt: de wortel van 16 is 4.
Je schrijft dit als: $\sqrt{16} = 4$.
Dat noem je worteltrekken. Je rekenmachine kan ook worteltrekken. Bijvoorbeeld $\sqrt{441} = 21$ gaat waarschijnlijk zo:




2nd $x^2$ 441 ) =

Maar misschien heeft je rekenmachine wel een afzonderlijke worteltoets...

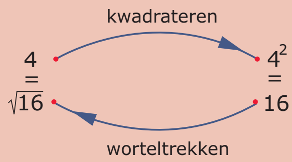
De bewerkingen ‘kwadraat nemen’ en ‘worteltrekken’ heffen elkaar op. Meetkundig gezien gaat het bij kwadrateren om het bepalen van de oppervlakte van een vierkant vanuit de zijde: $4^2 = 16$. En bij wortel trekken gaat het om het bepalen van de zijde vanuit een gegeven oppervlakte $\sqrt{16} = 4$.




En dus is: $\sqrt{4^2} = 4$ en ook $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

## Theorie




Als je vanuit een kwadraat terugrekent, noem je dat **worteltrekken** en het resultaat heet de **wortel** van dat getal. Worteltrekken is de terugrekenbewerking bij kwadrateren en je kunt deze bewerking op elk getal toepassen.

De wortel van 16 schrijf je als $\sqrt{16}$.
De wortel van 16 is $\sqrt{16} = 4$, want $4^2 = 16$.

De wortel van 3 schrijf je als $\sqrt{3}$.
De wortel van 3 is $\sqrt{3} = 1{,}73205... \approx 1{,}732$.
Dit getal is alleen te benaderen, er bestaat geen exacte uitkomst.

Het kwadraat van $\sqrt{3}$ is $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

De wortel van $3^2$ is $\sqrt{3^2} = 3$.

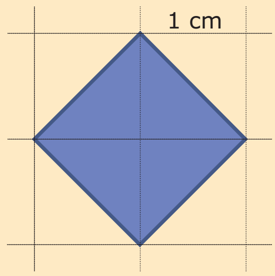
## Voorbeeld 1

Uit een kwadraat kun je gemakkelijk wortel trekken, zelfs zonder rekenmachine.
Bijvoorbeeld:

- $\sqrt{1024} = \sqrt{32^2} = 32$
- $\sqrt{1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
- $\sqrt{1{,}44} = \sqrt{(1{,}2)^2} = 1{,}2$

Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6

## Voorbeeld 2




De oppervlakte van dit vierkant is 2 cm$^2$.

De lengte van de zijde is daarom $\sqrt{2}$.

Maar hoe groot is $\sqrt{2}$ nu precies?

Dit was al in de Oudheid een boeiende vraag.
Niemand wist er het antwoord op...
Na heel lang proberen vind je ongeveer 1,414213562, maar zelfs dat is niet het exacte antwoord...

$\sqrt{2}$ is niet exact te berekenen, dit getal kan alleen worden benaderd!

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ gaat waarschijnlijk zo:

2nd $x^2$ 2 =

Hetzelfde geldt voor getallen als $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{20}$, kortom voor vrijwel alle wortels.
Alleen de wortels uit zuivere kwadraten ‘komen uit’: bijvoorbeeld $\sqrt{9} = 3$ en $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$

Opgave 7 Opgave 8

# 2.3 Machten

## Inleiding

Sven is een echte spelletjesfanaat. Hier zie je zijn Rubik's Cube.

De Rubik's Cube is bedacht door de Hongaarse wiskundige, architect en uitvinder Ernö Rubik die nog meer puzzels heeft bedacht en via **zijn website** aan de man/vrouw brengt. Deze kubus lijkt uit allemaal kleine kubusjes te bestaan die om het midden kunnen draaien. Hoeveel kleine kubusjes passen er in een grotere kubus van $3$ bij $3$ bij $3$?

### Je leert in dit onderwerp

- het begrip macht en machten uitrekenen;
- het begrip derdemachtswortel en derdemachtswortels uitrekenen;

### Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- kwadrateren en worteltrekken.

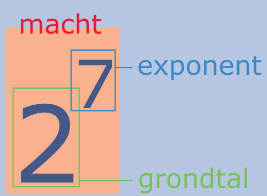
Opgave V1

## Uitleg

Als je een getal met zichzelf vermenigvuldigt, krijg je een kwadraat: $3 \cdot 3 = 3^2$.

Er is een meer algemene schrijfwijze voor het vermenigvuldigen met steeds hetzelfde getal. Bijvoorbeeld:
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$.
Reken je zo'n getal uit, dan wordt de uitkomst machtig groot: $3^5 = 243$.

Je spreekt van machtsverheffen en je zegt ‘3 tot de macht 5’, of kortweg ‘3 tot de vijfde’.
En $3^5$ heet een macht met grondtal $3$ en exponent $5$.
Een kwadraat zoals $3^2$ is een macht met grondtal $3$ en exponent $2$.




$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$.

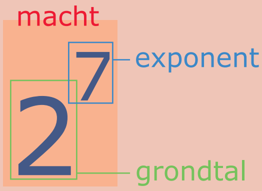
Op de rekenmachine:

2 ^ 7 =

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

## Theorie

Voor het vermenigvuldigen met steeds hetzelfde getal gebruik je een **macht** met **grondtal** en een **exponent**. Bijvoorbeeld: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$.
Reken je zo'n getal uit, dan wordt de uitkomst snel groot: $3^5 = 243$.




Je spreekt van **machtsverheffen** en je zegt ‘3 tot de macht 5’, of kortweg ‘3 tot de vijfde’.

Je kunt ook terugrekenen vanuit machten.
Bij terugrekenen vanuit derde machten spreek je van **derdemachtswortels**.
Omdat $2^3 = 8$ geldt: $\sqrt[3]{8} = 2$. De derdemachtswortel van 8 is 2.

## Voorbeeld 1

Het rekenen met machten is eenvoudig als je de betekenis kent:

- $17^4 = 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 = 83521$
- $(-17)^4 = -17 \cdot -17 \cdot -17 \cdot -17 = 83521$
- $-17^4 = -17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 = -83521$
- $100000 - 17^4 = 100000 - 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 = 100000 - 83521 = 16479$

Je ziet dat machten voorrang hebben op optellen en aftrekken.

Opgave 4

## Voorbeeld 2

De inhoud van een kubus met ribben van 4 is: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$.
De inhoud van een kubus is een derde macht.

Als je de inhoud van de kubus weet, kun je ook de lengtes van de zijden proberen te vinden.
Dat heet derdemachts worteltrekken: $\sqrt[3]{64} = 4$.

Als de inhoud 125 cm$^3$ is, dan is elke zijde $\sqrt[3]{125}$.

Hoeveel is dat?

Antwoord

Gewoon machten van 3 proberen: $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$.

Dus $\sqrt[3]{125} = 5$.

Dit kun je ook met je rekenmachine vinden, bijvoorbeeld:
[3] [2nd] [^] [1] [2] [5] [=].
Bekijk vooral goed hoe je $\sqrt[3]{125}$ op je eigen rekenmachine moet invoeren.

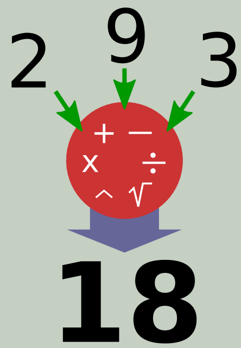
Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7

# 2.4 Rekenvolgorde

## Inleiding

Ook Sven heeft nu leren werken met machten en wortels. En omdat hij een spelletjesliefhebber is, verzint hij zelf spelletjes om ermee te leren rekenen. Dat kun je zelf ook vast wel.

Eén van Sven's spelletjes is het 18-spel. Je krijgt drie getallen van één cijfer en moet daarmee het getal 18 maken...




### Je leert in dit onderwerp

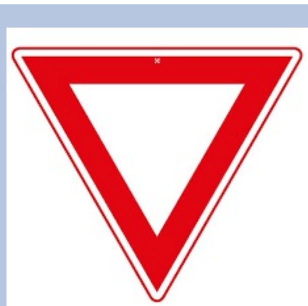
- werken met de juiste rekenvolgorde.

### Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- kwadrateren, worteltrekken en rekenen met kwadraten en wortelvormen;
- het begrip macht en machten uitrekenen;
- het begrip derdemachtswortel en derdemachtswortels uitrekenen.

Opgave V1

## Uitleg



Er zijn duidelijke afspraken over de rekenvolgorde:

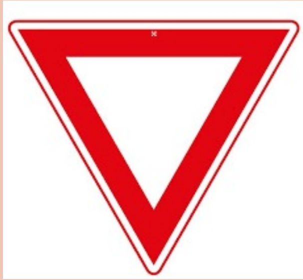
- H: eerst doe je wat binnen haakjes staat;
- MW: vervolgens machten en wortels van links naar rechts;
- VD: daarna vermenigvuldigen en delen van links naar rechts;
- OA: tenslotte optellen en aftrekken van links naar rechts.

Je ziet dat machten en wortels gelijkwaardig zijn. Hetzelfde geldt voor vermenigvuldigen en delen en optellen en aftrekken. Met haakjes kun je de volgorde beïnvloeden: wat daarbinnen staat doe je eerst.

Ezelsbrug nodig? Bijvoorbeeld: ‘Heel Mooi Weer VanDaag Op Ameland’ als je dit gebruikt als H-MW-VD-OA.

Opgave 1 Opgave 2

## Theorie



Bij rekenen gelden deze **voorrangsregels**:

1. Eerst uitrekenen wat tussen haakjes staat.
2. Dan machten en wortels van links naar rechts.
3. Dan vermenigvuldigen en delen van links naar rechts.
4. Tenslotte optellen en aftrekken van links naar rechts.

Houd er wel rekening mee, dat haakjes soms zijn verstopt: $\sqrt{5^2} = \sqrt{(5^2)}$ en $\frac{6}{2+3} = 6/(2+3)$.

## Voorbeeld 1

Bereken: $2 \cdot \sqrt{16} - (2+6)/2^3$.

Antwoord

$2 \cdot \sqrt{16} - (2+6)/2^3 =$

$2 \cdot 4 - \frac{8}{8} =$

$8 - 1 = 7$

Opgave 3

## Voorbeeld 2

Je hebt gezien dat je de rekenvolgorde

Haakjes-MachtenWortels-VermenigvuldigenDelen-OptellenAftrekken

moet hanteren. Maar soms kun je door een bijzondere schrijfwijze te gebruiken de volgorde wijzigen.
Drie bekende voorbeelden zijn:

- de lange breukstreep: $\frac{6 \cdot 2}{5-3} = \frac{12}{2} = 6$ (aftrekken gaat hier voor delen)
- de lange streep aan het wortelteken: $\sqrt{6 + 2 \cdot 15} = \sqrt{6+30} = \sqrt{36} = 6$ (vermenigvuldigen en optellen gaan hier voor worteltrekken)
- de notatie voor machten: $2^{4+1} = 2^5 = 32$ (optellen gaat hier voor machtsverheffen)

Op je rekenmachine moet je in deze gevallen de weggelaten haakjes weer toevoegen.

Opgave 4 Opgave 5

# 2.5 Grote en kleine getallen

**Inleiding**

Schaakliefhebber Sven ontdekt een heel oud verhaal over het ontstaan van het schaakbord.
Volgens dit verhaal zou Sissah ben Dahir eeuwen geleden dit spel hebben bedacht voor een koning uit India. Als beloning vroeg hij de koning om rijstkorrels: één korrel op het eerste vakje, 2 korrels op het tweede, $2^2$ op het derde, $2^3$ op het vierde en zo door tot $2^{63}$ korrels op het laatste vakje.
Dat moet voor zo'n koning te doen zijn, toch?

**Je leert in dit onderwerp**

- werken met de wetenschappelijke notatie voor grote en kleine getallen.

**Voorkennis**

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- kwadrateren, worteltrekken en rekenen met kwadraten en wortelvormen;
- machten en wortels uitrekenen en de juiste rekenvolgorde hanteren.

Opgave V1

**Uitleg 1**

Hele grote getallen zoals $135$ miljard $= 135.000.000.000$ zijn door het grote aantal cijfers moeilijk te lezen. Je schrijft zo'n getal daarom als:
$135.000.000.000 = 1{,}35 \cdot 100.000.000.000 = 1{,}35 \cdot 10^{11}$.

Deze manier van opschrijven van getallen noem je de wetenschappelijke notatie.
Daarbij staat er altijd één cijfer voor de decimale komma.

Vooral bij machten kan deze notatie handig zijn: $2^{63}$ bijvoorbeeld kunnen de meeste rekenmachines niet precies uitrekenen. Je krijgt een benadering te zien, zoals:

$2^{63} \approx 9{,}223372037 \cdot 10^{18}$.

En omdat dit toch een benadering is, kun je ook wel wat meer afronden, afhankelijk van de situatie.

## Uitleg 2

Voor machten van 10 (en ook voor andere machten) kun je rekenregels opstellen:

- bij vermenigvuldigen van machten tel je de exponenten op: $10^5 \cdot 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8$.
- bij het delen van machten trek je de exponenten van elkaar af: $10^5 / 10^3 = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 10 \cdot 10 = 10^2$.

Hieruit volgt:

- $1 = 10^1 / 10^1 = 10^{1-1} = 10^0$ dus $10^0 = 1$
- $0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^0 / 10^1 = 10^{-1}$
- $0{,}01 = \frac{1}{100} = 10^0 / 10^2 = 10^{-2}$
- $0{,}001 = \frac{1}{1000} = 10^0 / 10^3 = 10^{-3}$

enzovoorts.

Dus ook hele kleine getallen zoals 32 miljoenste $= 0{,}000032$ kun je schrijven als:
$0{,}000032 = 3{,}2 \cdot 0{,}00001 = 3{,}2 \cdot \frac{1}{100000} = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$.

Ook voor hele kleine getallen kun je de wetenschappelijke notatie gebruiken.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

## Theorie

Je schrijft hele grote en hele kleine getallen vaak in de **wetenschappelijke notatie**.

- Een groot getal krijgt dan de vorm $a \cdot 10^n$.
- Een klein getal krijgt dan de vorm $a \cdot 10^{-n}$.

Hierin is $1 \leq a < 10$.

Ga ook na hoe je je rekenmachine in de wetenschappelijke notatie kunt laten rekenen.

Getallen die uit veel cijfers bestaan ga je om die notatie te gebruiken eerst afronden. Op hoeveel decimalen je afrondt, hangt af van hoeveel cijfers belangrijk zijn. Deze belangrijke cijfers noem je de **significante cijfers**.

## Voorbeeld 1

De **lichtsnelheid** is in vacuüm (het luchtledige) gelijk aan 299.792.458 m/s.
Dat is ongeveer 300.000.000 m/s.

Schrijf dit getal in de wetenschappelijke notatie met twee significante cijfers.

Antwoord

Het licht legt ongeveer $3{,}0 \cdot 100.000.000$ m per seconde af (bij twee significante cijfers).
De wetenschappelijke notatie van de lichtsnelheid is dan $3{,}0 \cdot 10^8$ m/s.

Opgave 4 Opgave 5

## Voorbeeld 2

Er is afgesproken dat 1 meter de afstand is die het licht in $1/299792458$ seconde aflegt. Hoe lang doet het licht over het afleggen van 1 meter? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie in drie decimalen nauwkeurig, dus met vier significante cijfers.

Antwoord

Met de rekenmachine krijg je waarschijnlijk $0{,}000000003 = 3 \cdot 10^{-9}$ seconden.
Dat is niet in twee decimalen nauwkeurig.

Maar je kunt de rekenmachine in de wetenschappelijke notatie zetten.
Ga na, hoe dat kan.
Dan wordt de berekening ineens veel nauwkeuriger.
Je vindt dan ongeveer $3{,}336 \cdot 10^{-9}$. De vraag is natuurlijk wel of je die nauwkeurigheid nodig hebt...

Opgave 6 Opgave 7

# Register

**Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.**

**De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.**

**Stichting Math4All**

**Inhoud Katern 2**



Math4all
www.math4all.nl