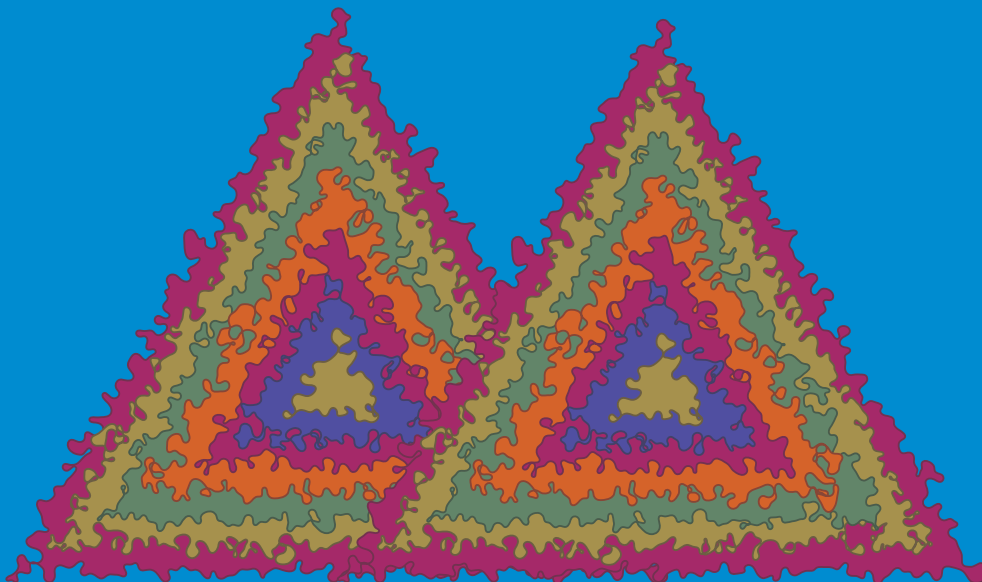


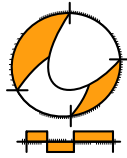
Wiskunde / PGA

1 HAVO / VWO

Verbanden

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website www.math4all.nl. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je werkt dan onder begeleiding van je docent in kleine groepjes aan wiskundige problemen en samen bouw je de theorie op en maak je er een overzicht van.

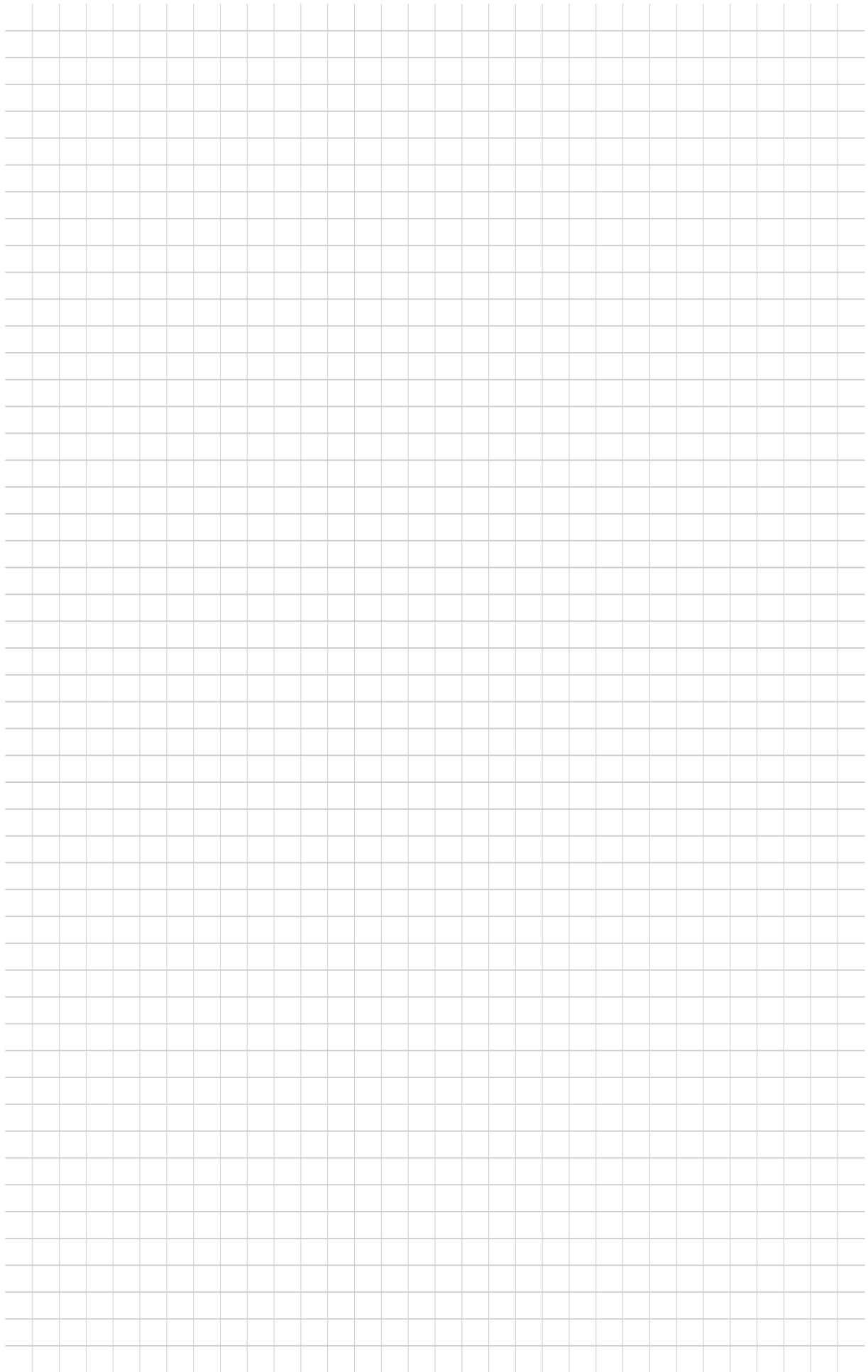
De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee je kunt nagaan of je de stof beheerst. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding vind je terug in de marge.

- ★ het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
- ★ ★ een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die je alleen hoeft te maken als je er genoeg tijd voor hebt
- ★ ★ ★ een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die je alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk voor je was

1

Verbanden

1.1	Verbanden en variabelen	6
1.2	Formules opstellen	14
1.3	Formules en grafieken	21
1.4	Letterformules	28
1.5	Vergelijkingen	34
1.6	Totaalbeeld	40





Theorie

Om te onthouden

A large grid of graph paper with a light blue background and a fine grid of grey lines, intended for taking notes or drawing graphs.

Verwerken

★ Opgave 1.1

Anneke gaat in de zomervakantie tomaten plukken. Hoeveel ze verdient, hangt af van het aantal kistjes dat ze met geplukte tomaten vult.

<i>aantal kistjes</i>	2	4	6	8	10
<i>loon (euro)</i>	4,50	9,00	13,50	18,00	22,50

Tabel 1.1

- Tussen welke twee variabelen is er een verband? Welke eenheden worden er gebruikt?
- Welke variabele is de onafhankelijke variabele en welke is de afhankelijke variabele?
- Hoeveel verdient Anneke per kistje?
- Hoe zou je het verband tussen het *loon* van Anneke en het *aantal kistjes* tomaten dat ze plukt, in woorden kunnen beschrijven?
- Anneke vult op een dag vijf kistjes met de door haar geplukte tomaten. Hoeveel verdient ze die dag?
- En hoeveel verdient ze als ze twaalf kistjes met tomaten vult?
- Bij dit verband zou je een grafiek kunnen tekenen. Is die grafiek stijgend of dalend? Is de grafiek een rechte lijn?

★ Opgave 1.2

Michiel houdt van lezen. Hij is begonnen in een boek van 120 bladzijden.

- Hoeveel dagen leest hij in dit boek als hij 10 bladzijden per dag leest?
- En hoeveel dagen als hij 12 bladzijden per dag leest?
- Tussen welke twee variabelen bestaat er dus een verband? Beschrijf het verband in woorden.
- Welke variabele is de onafhankelijke variabele en welke is de afhankelijke variabele?
- Maak een tabel bij dit verband.
- Teken een grafiek bij dit verband. Waarom is die grafiek geen rechte lijn?

★ Opgave 1.3

Bij een taxibedrijf hangt de prijs van een rit af van het aantal kilometers dat een klant meerrijdt.

<i>ritlengte (km)</i>	4	5	6	7	8	9	10
<i>ritprijs (euro)</i>	11	13	15	17	19	21	23

Tabel 1.2

- Hoeveel betaal je voor een rit van elf kilometer?
- Teken een grafiek bij dit verband.
- Hoe zou jij aan de klant uitleggen hoe de *ritprijs* berekend wordt?
- Vanaf hoeveel kilometer betaal je meer dan € 30,00?

★ Opgave 1.4

Bij een bedrijf kun je pennen met je naam erop bestellen. Hoeveel zo'n pen kost, hangt af van het aantal pennen dat je bestelt.

<i>aantal pennen</i>	100	200	400	600	800
<i>prijs per pen (euro)</i>	1,00	0,80	0,60	0,50	0,45

Tabel 1.3

- Teken de grafiek bij het verband tussen de variabelen *aantal pennen* en *prijs per pen*.

- b Je bestelt honderd pennen. Hoeveel betaal je per pen? En hoeveel betaal je in totaal?
- c Maak nu zelf een tabel en een grafiek bij het verband tussen *aantal pennen* en *totale kosten*.
- d Het bedrijf beweert: "Hoe meer pennen u bestelt, hoe goedkoper u uit bent." Is deze uitspraak juist? Licht je antwoord toe.
- e Waarom is de grafiek van het verband tussen *aantal pennen* en *totale kosten* geen rechte lijn?

★ **Opgave 1.5**

Voor je energie in huis betaal je een vast bedrag per maand (vastrecht) en een bedrag per kWh die je verbruikt. In de tabel zie je de totale kosten van de stroomrekening (zonder belastingen) bij verschillende hoeveelheden stroom die je per maand verbruikt.

<i>stroomverbruik</i> (kWh)	0	100	200	300	400	500
<i>prijs</i> (euro)	3,50	11,55	19,60	27,65	35,70	43,75

Tabel 1.4

- a Maak nu zelf een tabel waarin het verband tussen de variabelen *stroomverbruik* (kWh) en *stroomkosten per kWh* (euro per maand) zichtbaar wordt. Rond de *stroomkosten per kWh* af op drie decimalen.
- b Bij dit verband kun je een grafiek tekenen. Is de grafiek stijgend of dalend? Is de grafiek een rechte lijn? Licht je antwoord toe.

Toepassen

Een digitaal plaatje bestaat uit pixels (afkomstig van de Engelse term 'picture elements'). Als het een zwart/wit plaatje is, heeft elke pixel één waarde, meestal lopend van 0 (zwart) t/m 255 (wit) waarmee de grijswaarde ervan wordt bepaald. Is het een kleurenplaatje dan heeft elke pixel drie waarden één voor rood (R), één voor geel (G) en één voor blauw (B): tenminste in het RGB-formaat.

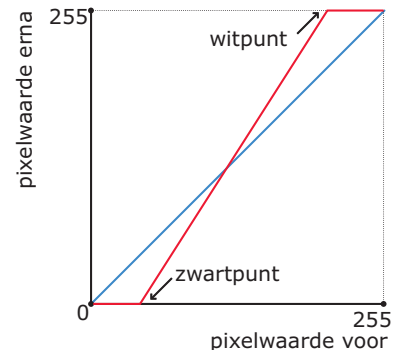
Als je zo'n beeld wilt bewerken, dan bereken je nieuwe waarden voor elke pixel. In een grafiek kun je het verband tussen de waarden van de pixels voor de bewerking en die erna laten zien.

Deze grafiek zorgt ervoor dat de donkere gedeelten van het plaatje donkerder worden en de lichte gedeelten lichter: je verhoogt zo het 'contrast'.

Het punt waar vanaf de grafiek schuin omhoog gaat lopen heet het 'zwartpunt' van de grafiek.

Het punt waar vanaf de grafiek weer horizontaal loopt heet het 'witpunt' van de grafiek.

Maak je andere grafieken voor het omrekenen van de pixelwaarden, dan kun je hele bijzondere effecten krijgen!



Figuur 1.2

★★ **Opgave 1.6: Beeldbewerking**

Bekijk het verhaal over het bewerken van een zwart-wit foto in [Toepassen](#).

- a Tussen welke twee variabelen geeft de grafiek het verband weer?
- b Wat betekent de blauwe lijn in deze figuur?
- c Welke pixelwaarden veranderen het minste als je het contrast van de foto verhoogt?
- d Waarom krijg je altijd een zwartpunt en een witpunt bij contrast vergroten? Welke betekenis hebben deze punten?

★ ★ **Opgave 1.7: Twee taxibedrijven**

In een stad zijn twee taxibedrijven actief. Ze hebben verschillende tarieven. Je betaalt bij beide een vast bedrag als je een taxi laat komen (het basistarief of de voorrijkosten) en daarbovenop een bedrag voor elke kilometer die je wordt vervoerd.

- taxibedrijf A: voorrijkosten € 4,00 en de prijs per km € 2,75
- taxibedrijf B: voorrijkosten € 7,50 en de prijs per km € 2,20

- a** Tussen welke twee variabelen bestaat hier steeds een verband?
- b** Welke variabele is de onafhankelijke variabele en welke is de afhankelijke variabele?
- c** Maak voor beide taxibedrijven een tabel en een grafiek van de ritprijs.
- d** Bepaal bij welke afstand beide taxibedrijven even duur zijn.

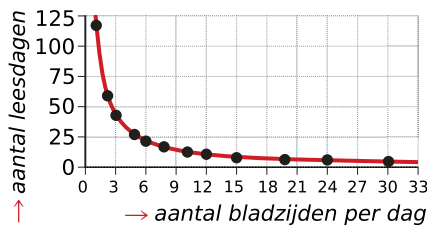
Antwoorden

- 1.1 a** aantal kistjes en loon (euro).
b Aantal kistjes is de onafhankelijke variabele en loon (in euro) de afhankelijke.
c Ze verdient 2,25 euro per kistje.
d Het loon van Anneke is € 2,25 per kistje dat ze met geplukte tomaten vult.
e 11,25 euro.
f 27,00 euro.
g De grafiek is een stijgende rechte lijn.

- 1.2 a** 12 dagen.
b 10 dagen.
c Tussen aantal bladzijden per dag en aantal leesdagen.
 Het aantal leesdagen is 120 gedeeld door het aantal bladzijden per dag.
d Aantal bladzijden per dag is de onafhankelijke variabele, aantal leesdagen is de afhankelijke variabele.
e Zie de tabel.

aantal bladzijden per dag	4	5	6	8	10	12	15
aantal leesdagen	30	24	20	15	12	10	8

- f** Zie de figuur.



- 1.3 a** 25,00 euro.
b Je krijgt een rechte lijn vanaf (0,3) en door (10,23).
c Je betaalt 3,00 vooraf en per kilometer € 2,00.
d Vanaf 13,5 km.
1.4 a Je krijgt een kromme lijn door de punten uit de tabel.
b Per pen betaal je € 1,00, dus in totaal voor 100 pennen: € 100,00.
c Maak een grafiek bij deze volgende tabel.

aantal pennen	100	200	400	600	800
totale kosten (euro)	100	160	240	300	360

- d** Nee. De totale kosten blijven toenemen als je meer pennen bestelt.
e Omdat de prijs per pen niet constant is.
1.5 a Zie de tabel.

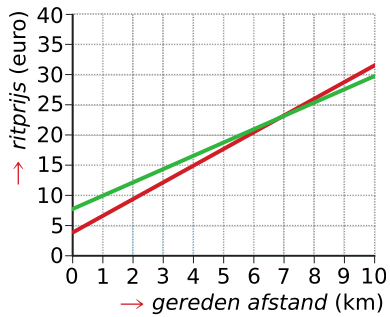
stroomverbruik (kWh)	0	100	200	300	400	500
stroomkosten per kWh (euro/maand)	-	0,116	0,098	0,092	0,089	0,088

- b** De grafiek is dalend, want naarmate je meer stroom verbruikt, wordt de invloed van het vastrecht kleiner. De grafiek is geen rechte lijn, omdat de grafiek steeds dichter naar de stroomprijs per kWh gaat, zonder dat hij daar ooit helemaal uitkomt.
1.6 a Tussen pixelwaarden voor bewerking en pixelwaarden na bewerking.

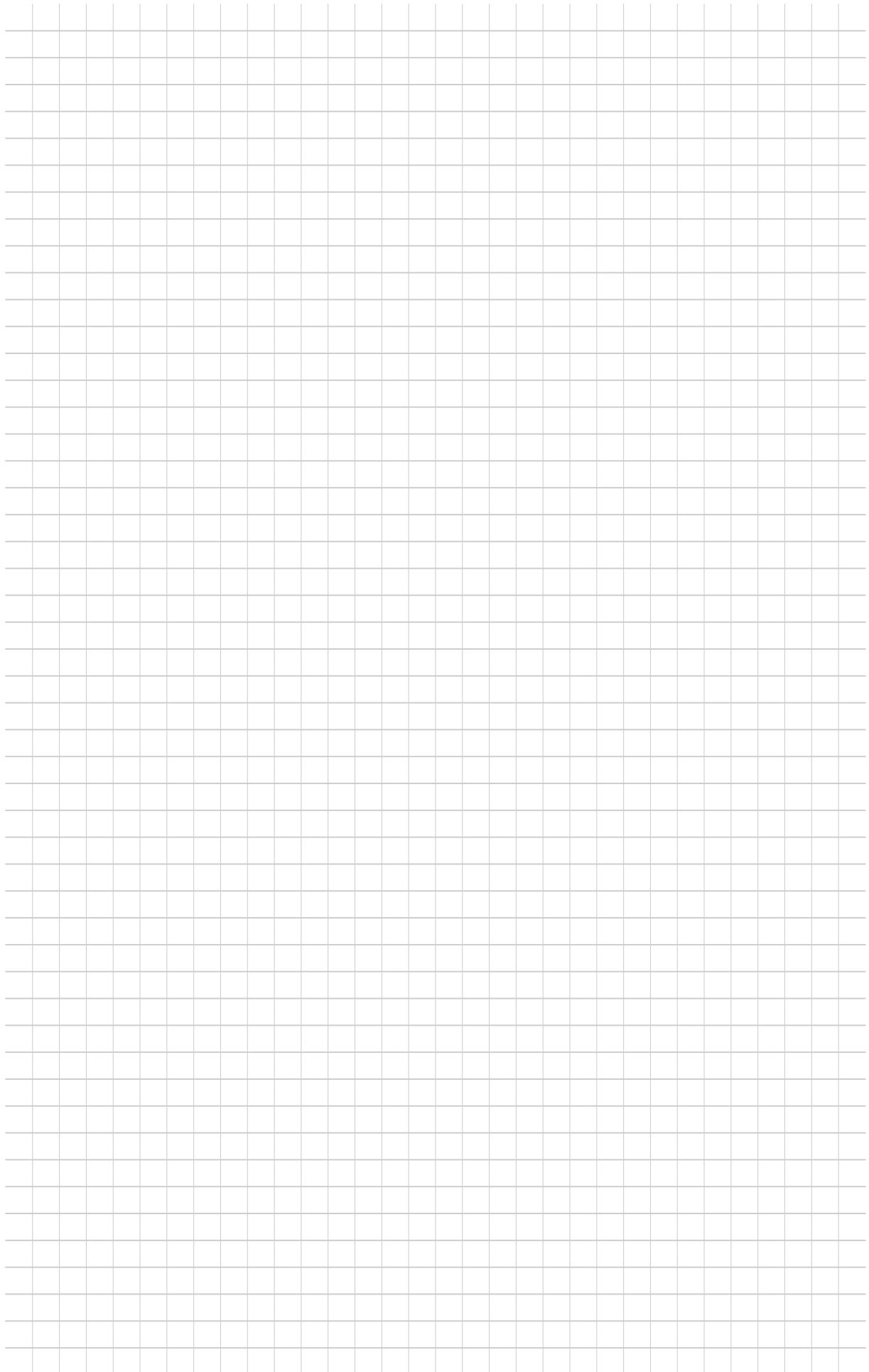
- b** De blauwe lijn betekent dat de pixelwaarden voor en na bewerking hetzelfde zijn. Er gebeurt dan niks.
- c** 127 en 128.
- d** Omdat de pixelwaarden nooit kleiner dan 0 en groter dan 255 zijn. Alle pixelwaarden onder het zwartpunt krijgen de waarde 0 (en die pixels worden dus zwart), alle pixelwaarden boven het witpunt krijgen de waarde 255 (en die pixels worden dus wit).

1.7 a Tussen de *gereden afstand* (km) van degene die de taxi bestelt, en de *ritprijs* (euro).

- b** De onafhankelijke variabele is *gereden afstand*, de afhankelijke variabele is *ritprijs*.
- c** Zie de figuur.



- d** Bij 6,4 kilometer.



Theorie

Om te onthouden

A large grid of graph paper with a light blue background and a thin grey grid pattern, intended for taking notes or drawing.

Verwerken

★ Opgave 2.1

Voor het gebruik van water in een woonhuis betaal je jaarlijks een vast bedrag (vastrecht) en een bedrag voor het aantal m^3 (kubieke meter) water dat je hebt verbruikt (een m^3 is 1000 liter). PWN Waterleidingbedrijf Noord-Holland hanteerde in 2014 de volgende tarieven:

- vastrecht: € 50,70 per jaar
- kosten per m^3 : € 1,31

- Tussen welke twee variabelen is er een verband? Welke eenheden worden gebruikt?
- Welke formule kun je opstellen bij dit verband voor het watergebruik per jaar?

★ Opgave 2.2

De oppervlakte van een rechthoek is 750 cm^2 .

- Bereken de lengte van deze rechthoek als de breedte 15 cm is.
- Hoe breed is de rechthoek als de lengte 150 cm is?
- Geef een formule die het verband tussen *lengte* en *breedte* van deze rechthoek weergeeft.

★ Opgave 2.3

In een recreatiegebied zijn twee skeelerverhuurbedrijven actief. Ze hebben verschillende tarieven. Je betaalt bij beide bedrijven een vast bedrag voor onder andere een kaart van de omgeving. Daarbovenop betaal je een bedrag voor elk uur dat je de skeelers huurt.

- Skeelerverhuurbedrijf A: de vaste kosten zijn € 3,00 en de prijs per uur is € 2,50.
- Skeelerverhuurbedrijf B: de vaste kosten zijn € 1,50 en de prijs per uur is € 3,00.

- Tussen welke twee variabelen is er een verband?
- Maak voor beide skeelerverhuurbedrijven een formule voor de *prijs* afhankelijk van het *aantal uur skeelers*.

★ Opgave 2.4

Evert spaart voor een computerspelletje. In de tabel zie je hoeveel geld hij gespaard heeft.

<i>week</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>spaargeld</i> (euro)	20	23	26	29	32	35	38	41	44

Tabel 2.1

- Er is een verband tussen het aantal weken dat Evert spaart, en de hoeveelheid geld die hij in zijn spaarpot heeft. Beschrijf dit verband in woorden.
- Geef een formule voor het verband tussen het *aantal weken* dat Evert spaart, en zijn *hoeveelheid spaargeld*.

★ **Opgave 2.5**

In de krant staan twee advertenties voor de aankoop van parket:



Figuur 2.2

- a Tussen welke variabelen is in de advertenties van SuperParket en Woonwinkel een verband?
- b Met welke formule kun je de prijs voor parket bij SuperParket uitrekenen?
- c Geef ook een passende formule voor het parket van Woonwinkel. Ga ervan uit dat je de advertentie inlevert.

Toepassen

★★ **Opgave 2.6: De formule van Pick**

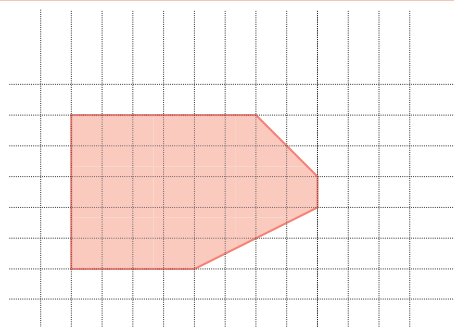
In 1899 bewees de Oostenrijkse wiskundige Georg Alexander Pick (1859—1942) de zogenaamde **formule van Pick** waarmee je de oppervlakte van een veelhoek op een rooster kunt berekenen door punten binnen en op de rand van die veelhoek te tellen.

Bekijk de applet: formule van Pick

Hij toonde aan dat als de veelhoek alleen roosterpunten als hoekpunten heeft, geldt:

$$opp = \text{aantal inwendige punten} + \text{aantal randpunten} / 2 - 1$$

- a Bereken met behulp van de formule van Pick de oppervlakte van de figuur hiernaast. Bereken die oppervlakte ook op een andere manier. Klopt de formule van Pick voor deze figuur?
- b Je kunt de formule van Pick testen door veelhoeken te maken waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn. Controleer steeds de formule van Pick.
- c Welke waarden kan de oppervlakte van een veelhoek hebben als het aantal randpunten 10 is?
- d Hoe kun je de formule van Pick gebruiken om de oppervlakte van een gebied op een landkaart te bepalen?



Figuur 2.3

★ ★ **Opgave 2.7: Energieverbruik door volwassenen**

Je BMR (Basal Metabolic Rate of Basale Stofwisselingsnelheid) is het aantal calorieën dat je lichaam verbrandt om de normale lichaamsfuncties te kunnen uitvoeren, waaronder je bloedcirculatie, temperatuurregulering, spijsvertering en ieder ander stofwisselingsproces in je lichaam. Je BMR neemt lichaamsactiviteit (zoals lopen, fietsen, enzovoorts) niet mee in de berekening.

Je BMR zorgt voor de grootste hap van je dagelijkse caloriebehoefte, zo'n tweederde van het totaal. De BMR verschilt enorm van persoon tot persoon, afhankelijk van erfelijke factoren. Om die BMR te berekenen zijn er voor volwassenen de formules van Harris en Benedict (uit 1919):

- Mannen:

$$BMR = 66 + 13,7 \times \text{gewicht} + 5 \times \text{lengte} - 6,8 \times \text{leeftijd}$$
- Vrouwen:

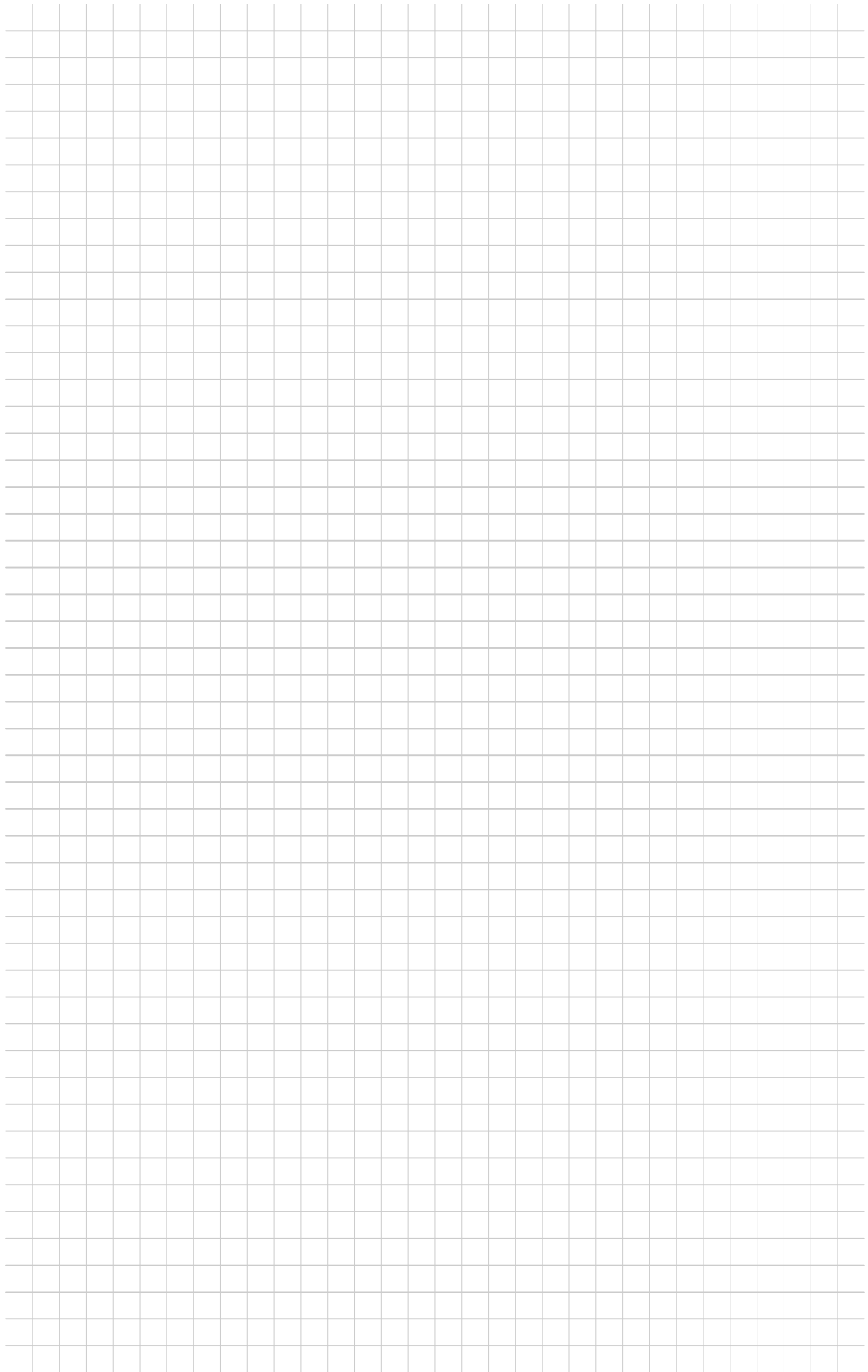
$$BMR = 655 + 9,6 \times \text{gewicht} + 1,8 \times \text{lengte} - 4,7 \times \text{leeftijd}$$

Hierin is *gewicht* in kg, *lengte* in cm en *leeftijd* in jaren uitgedrukt.

- a** Bereken de BMR van een volwassen man van 42 jaar die 1,82 m lang is en 76 kg weegt. Schat ook de totale dagelijkse caloriebehoefte.
- b** Bereken de BMR van een volwassen vrouw van 42 jaar die 1,82 m lang is en 76 kg weegt. Schat ook de totale dagelijkse caloriebehoefte.
- c** Kun je het verschil van beide antwoorden verklaren?
- d** Hoeveel zal jouw eigen BMR zijn als je 21 jaar bent? Maak eerst een zo goed mogelijke schatting van je lengte en je gewicht op die leeftijd.

Antwoorden

- 2.1 a** *jaarverbruik* (in m^3) en *kosten* (in euro).
b $kosten = jaarverbruik \times 1,31 + 50,70$
- 2.2 a** 50 cm.
b 5 cm.
c $lengte \times breedte = 750 \text{ cm}^2$
- 2.3 a** Tussen de variabelen *tijd* en *prijs*.
b Bedrijf A: $prijs = tijd \times 2,50 + 3,00$.
Bedrijf B: $prijs = tijd \times 3,00 + 1,50$.
- 2.4 a** Evert begon met € 20,00 in zijn spaarpot daar komt elke week € 3,00 bij.
b $spaargeld = 20 + 3,00 \times \text{aantal weken}$
- 2.5 a** Tussen de variabelen *oppervlakte* (m^2) en *prijs* (euro).
b $prijs = 75 \times \text{oppervlakte}$, met oppervlakte in m^2 .
c $prijs = 80 \times \text{oppervlakte} - 100$, met oppervlakte in m^2 .
- 2.6 a** 34 en dat klopt met de formule van Pick.
b Doen.
c Waarden vanaf 4.
d Gebruik een rooster op dit gebied met vierkante roostereenheden.
- 2.7 a** 2597,4 per dag.
b 2272,2 per dag.
c Mannen hebben kennelijk een hogere caloriebehoefte per dag.
d Eigen antwoord.





Theorie

Om te onthouden

A large grid of graph paper with a light blue background and a fine grid of light gray lines, intended for taking notes or drawing graphs.

Verwerken

★ Opgave 3.1

Een benzineauto rijdt met één liter benzine vijftien kilometer.

- Welke formule hoort bij het verband tussen *hoeveelheid benzine* en *afstand*?
- Neem de tabel over en vul verder in.

<i>hoeveelheid benzine</i> (liter)	0	10	20	30	40	50
<i>afstand</i> (km)	0					

Tabel 3.1

- Teken de grafiek bij dit verband.
- Waarom is de grafiek een rechte lijn?

★ Opgave 3.2

Lisanne heeft een prepaid telefoon. Ze heeft nog € 12,00 beltegoed. Ze belt voor € 0,08 per minuut.

- Welke formule hoort bij het verband tussen de variabelen *beltegoed* en *beltijd*?
- Teken een grafiek bij deze formule.
- Waarom is de grafiek een rechte lijn?

★ Opgave 3.3

Van een rechthoek is de oppervlakte 600 cm^2 . Voor het verband tussen *lengte* en *breedte* van deze rechthoek geldt: $lengte = \frac{600}{breedte}$.

- Leg uit waarom deze formule correct is.
- Maak een tabel bij deze rechthoek. Neem voor *breedte* de waarden 10, 20, 30, 40, 50, 60 en 100.
- Teken een grafiek bij deze formule.
- Waarom is deze grafiek geen rechte lijn?

★ Opgave 3.4

Een restaurant heeft nieuwe borden nodig. Deze borden kun je bij twee bedrijven kopen. Bij beide bedrijven betaal je naast de prijs per bord ook een bedrag aan bezorgkosten.

- bedrijf A: de bezorgkosten zijn € 1,95 en de prijs per bord is € 1,80.
- bedrijf B: de bezorgkosten zijn € 7,50 en de prijs per bord is € 1,55.

- Maak voor beide bedrijven een formule voor de *totale kosten* afhankelijk van het *aantal borden*.
- Teken bij beide bedrijven de bijbehorende grafiek (maak hiervoor eerst een tabel).
- Hebben beide grafieken een snijpunt? Wat betekent dit snijpunt?

★ Opgave 3.5

Een docent berekent het cijfer voor een toets met de punten die een leerling heeft gescoord. De docent gebruikt de formule: $cijfer = \text{aantal punten} / 4 + 1$.

- Welk cijfer krijg je als je 23 punten hebt gehaald?
- Waarom kun je voor deze toets maximaal 36 punten halen?
- Maak een tabel bij deze formule. Kies zelf geschikte waarden voor *aantal punten*.
- Maak een grafiek bij deze tabel.
- Waarom moet die grafiek eigenlijk uit losse punten bestaan? En uit hoeveel punten?

★★ **Opgave 3.6**

Er zijn meerdere methodes om de verwachte lengte op volwassen leeftijd te berekenen. Een van deze methodes is de methode van Tanner die uitgaat van de lengte van de ouders. Je krijgt deze formules waarin alle lengtes in cm zijn:

- $lengte\ jongen = (lengte\ moeder + lengte\ vader + 13)/2$
- $lengte\ meisje = (lengte\ moeder + lengte\ vader - 13)/2$

- a De moeder van Achmed is 1,64 meter lang en zijn vader is 1,81 meter lang. Hoe lang zal Achmed worden als hij volwassen is?
- b De moeder van Klasien is 1,76 meter lang en haar vader is 1,84 meter lang. Hoe lang zal Klasien worden?
- c Hoeveel lengteverschil zal er zijn tussen een broer en zus?

Toepassen

★★ **Opgave 3.7: Body Mass Index**

Voor volwassenen is de *BMI* (Body Mass Index, een index voor het gewicht in verhouding tot de lichaamslengte) een getal waaraan je kunt zien of je overgewicht hebt of niet. Dat wordt zo berekend:

$$BMI = \text{gewicht} / (\text{lengte} \times \text{lengte})$$

Hierin is de *lengte* in meters en het *gewicht* in kg. Bij een *BMI* tussen de 18,5 en 25 heb je een normaal gezond gewicht.

- a Kun je bij deze formule een grafiek tekenen?
- b Hoeveel bedraagt de BMI van een volwassene met een lengte van 180 cm en een gewicht van 80 kg?
- c Meestal is de lengte van een persoon een vast gegeven, maar zijn of haar gewicht niet. Neem bijvoorbeeld een volwassen persoon met een lengte van 180 cm. Welke formule geldt voor de BMI van deze persoon?
- d Teken een bijpassende grafiek. Maak eerst een tabel met voor gewicht de waarden 50, 60, 70, 80, 90 en 100.
- e Geef in je grafiek het gedeelte aan dat hoort bij een normaal gewicht. Welke gewichten horen daarbij?
- f Als iemand een gewicht van 90 kg heeft, dan denk je al snel aan iemand met overgewicht. Maar dat hoeft niet. Welke formule voor de BMI geldt voor mensen van 90 kg?
- g Teken een bijpassende grafiek. Maak eerst een tabel met voor lengte de waarden 1,5; 1,6; 1,7...2,2.
- h Geef in je grafiek het gedeelte aan dat hoort bij een normaal gewicht. Welke lengtes horen daarbij?

Practicum

Het maken van grafieken is vaak nogal tijdrovend. Computerprogramma's zoals MS-Excel, Open Office Calc en Google Sheets kunnen je daarbij helpen. Je noemt dergelijke programma's **rekenbladen** of **spreadsheets**.

Werk daartoe één van deze practica door:

- **MS-Excel: Grafieken bij tabellen**
- **OO Calc: Grafieken bij tabellen**
- **Google Sheets: Grafieken bij tabellen**

. Heb je echt nog nooit met zo'n rekenblad gewerkt, doe dan eerst één van deze practica:

- **MS-Excel: Tafels van vermenigvuldiging**
- **OO Calc: Tafels van vermenigvuldiging**
- **Google Sheets: Tafels van vermenigvuldiging**

Antwoorden

3.1 a $afstand = 15 \times \text{hoeveelheid benzine}$

b Als je tabel goed is, is de grafiek bij c dat vast ook.

c De grafiek wordt een rechte lijn vanaf (0,0) en door bijvoorbeeld (40,600).

d Bij elke liter benzine wordt de afstand 15 km groter, steeds hetzelfde getal.

3.2 a $beltegoed = 12,00 - 0,08 \times \text{beltijd}$

b De grafiek is een rechte lijn door (0,12) en (150,0).

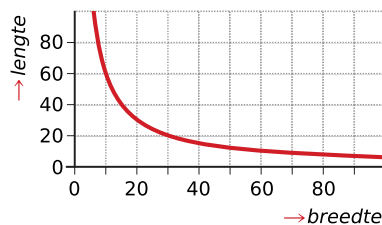
c Bij elke minuut die Lisanne belt, neemt haar beltegoed met 0,08 euro af.

3.3 a Omdat $lengte \times breedte = 600$.

b Zie de tabel.

<i>breedte</i>	10	20	30	40	50	60	100
<i>lengte</i>	60	30	20	15	12	10	6

c Zie de figuur.

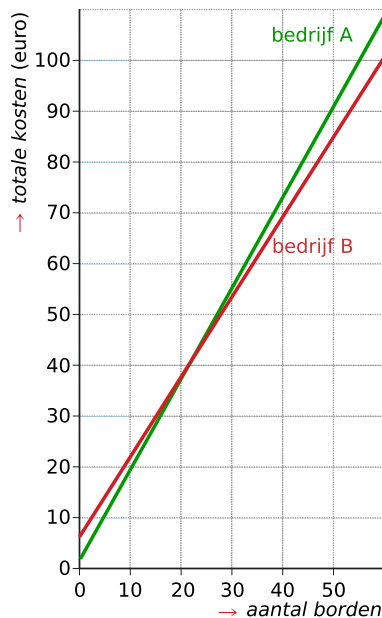


d Omdat bij toenemende *breedte* de *lengte* wel kleiner wordt, maar steeds minder klein ($breedte \times lengte$ moet immers 600 blijven).

3.4 a Bedrijf A: $\text{totale kosten} = \text{borden} \times 1,80 + 1,95$.

Bedrijf B: $\text{totale kosten} = \text{borden} \times 1,55 + 7,50$.

b Zie de figuur.



c Ja. Op het snijpunt zijn beide bedrijven bij het bijbehorende aantal borden even duur.

3.5 a 6,8 of 7 (afhankelijk van de afronding).

b Het maximale cijfer is een 10.

c Zie de tabel.

aantal punten	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
cijfer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

d Rechte lijn vanaf (0,1) tot (36,10).

e Het aantal punten is een geheel getal, er zijn in totaal 37 punten.

3.6 a 1,79 meter.

b 1,74 meter.

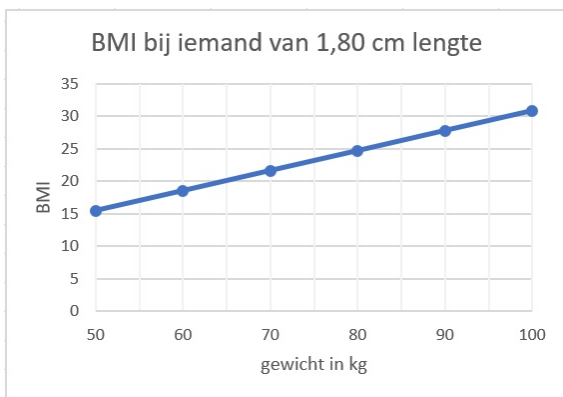
c 13 cm.

3.7 a Niet zo eenvoudig, want er zijn meer dan twee variabelen (*BMI*, *lengte* en *gewicht*).

b $\approx 24,7$.

c $BMI = \text{gewicht} / (3,24)$

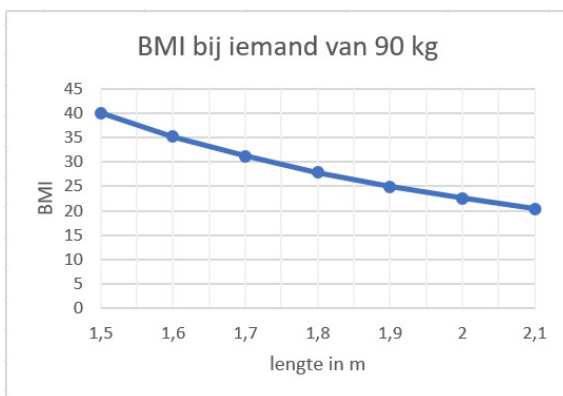
d Zie de figuur.



e Dat is van 60 tot 81 kg.

f $BMI = 90 / (\text{lengte} \times \text{lengte})$

g Zie de figuur.

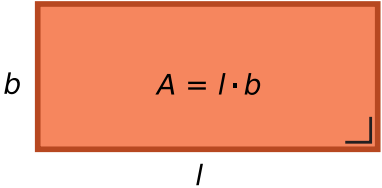


h Van 1,9 tot en met 2,2 meter.

1.4 Letterformules

Inleiding

Je ziet hier een rechthoek.
Maar wat betekenen al die letters en symbolen in de figuur?
Daar ga je nu achter komen...



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- woordformules omzetten in een letterformule, dus formules verkort noteren;
- de vermenigvuldigingstreep gebruiken en weglaten in daarvoor geschikte situaties.

Voorkennis

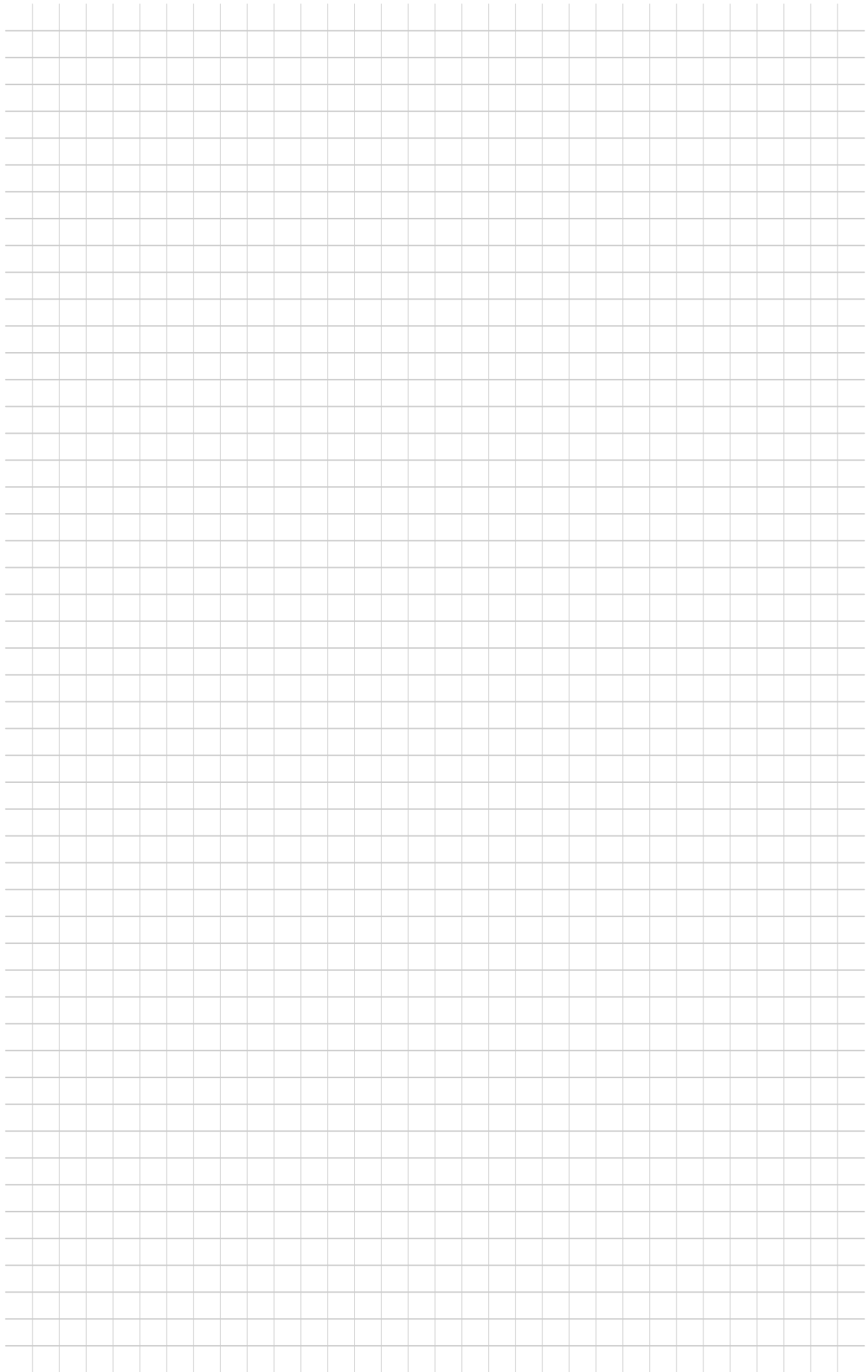
- het werken met woordformules.

Voor de leerling

Je krijgt in groepjes één of meer opdrachten waarmee je de theorie die bij dit onderdeel hoort zelf gaat opbouwen. Het gaat om het gebruiken van maar één letter voor elke variabele in een formule. Maak eigen aantekeningen en uiteindelijk voor je zelf een theorie-overzicht.

Aantekeningen

A large grid of graph paper for taking notes.





Theorie

Om te onthouden

A large grid of graph paper with a light blue background and a fine grid of light gray lines. The grid is intended for students to write down their theory or notes.

Verwerken

★ Opgave 4.1

Schrijf de volgende formules zo kort mogelijk.

- a $\text{ritprijs} = 4,50 + 1,25 \cdot \text{aantal klantkilometers}$
- b $\text{lengte} = \frac{800}{\text{breedte}}$
- c $\text{lengte jongen} = \frac{\text{lengte moeder} + \text{lengte vader} + 13}{2}$
- d $\text{afstand} = \text{gemiddelde snelheid} \times \text{tijd}$

★ Opgave 4.2

Een docent berekent het cijfer c voor een toets vanuit de punten p die een leerling heeft gescoord.

De docent gebruikt deze formule: $c = \frac{p}{60} \cdot 9 + 1$.

- a Wat is je cijfer als je veertig punten hebt?
- b Waarom kun je voor deze toets maximaal zestig punten halen?
- c Maak een grafiek bij deze formule.
- d Lees in de grafiek af vanaf hoeveel punten je een 5,5 of hoger krijgt. Reken dat na met de formule.

★ Opgave 4.3

Voor het maken van een fotoboek met eigen digitale foto's betaal je € 5,95. Voor elke foto die je erin wilt zetten betaal je € 0,15 bij. Als x het aantal foto's is, wat zijn dan de kosten k per foto?

- a Maak een bijpassende formule.
- b Neem $x = 15$ en bereken k .
- c Zal k ooit minder worden dan € 0,20? Licht je antwoord toe.

★ Opgave 4.4

Bekijk de volgende situaties waarbij een formule is gegeven. Niet alle formules zijn goed. Geef aan of de formule goed of fout is. Als de formule fout is, verbeter deze dan.

- a Leo is drie jaar ouder dan zijn broer Zack. Er is een verband tussen hun leeftijden.
De formule is: $L = 3Z$, waarbij L de leeftijd van Leo in jaren is en Z de leeftijd van Zack in jaren.
- b Een machine produceert tweehonderd fotolijstjes per uur. Je kunt het totale aantal fotolijstjes dat de machine produceert, met een formule berekenen.
De formule is: $A = 200t$; hierbij is A het aantal fotolijstjes dat de machine geproduceerd heeft en t de tijd in uren.
- c Aan een meer kun je waterfietsen huren. Daarvoor betaal je € 2,50 administratiekosten en € 5,00 huur per uur. Er is een verband tussen de totale kosten en het aantal uur dat je de waterfietsen huurt.
De formule is: $t = 2,50 + 5,00k$, waarbij t de tijd in uren is waarin je een waterfiets huurt en k de totale kosten die je betaalt in euro's.

★ Opgave 4.5

Bij een drukkerij kun je boekjes laten drukken. Een boekje van ongeveer twintig bladzijden kost € 3,00 per boekje. Daarbij komen nog de algemene kosten voor onder andere de digitale bewerking. Deze kosten zijn € 10,00.

- a Als a het aantal boekjes is en k de totale kosten per boekje in euro, wat is dan de formule voor de totale kosten per boekje?
- b Neem a is 30 en bereken k .
- c Hoe verwoord je "Bereken k als $a = 30$ " in normaal Nederlands?
- d Kan k kleiner worden dan € 3,00?

Toepassen

★ ★

Opgave 4.6: Krekels

Midas Dekkers is bioloog en schrijver van verschillende boeken. Hij schrijft bijvoorbeeld over het getjirp van de krekel. Hoe hoger de temperatuur, hoe sneller de krekel tjirpt. Daarom kun je door het aantal tjirpen van een krekel te tellen, de temperatuur in graden Celsius bepalen. Midas Dekkers gebruikt voor de sneeuwboomkrekkel een formule waarbij je moet uitgaan van het gemiddeld aantal tjirpen per minuut. Je trekt er 40 af, deelt de uitkomst door 7 en telt er 10 bij op.

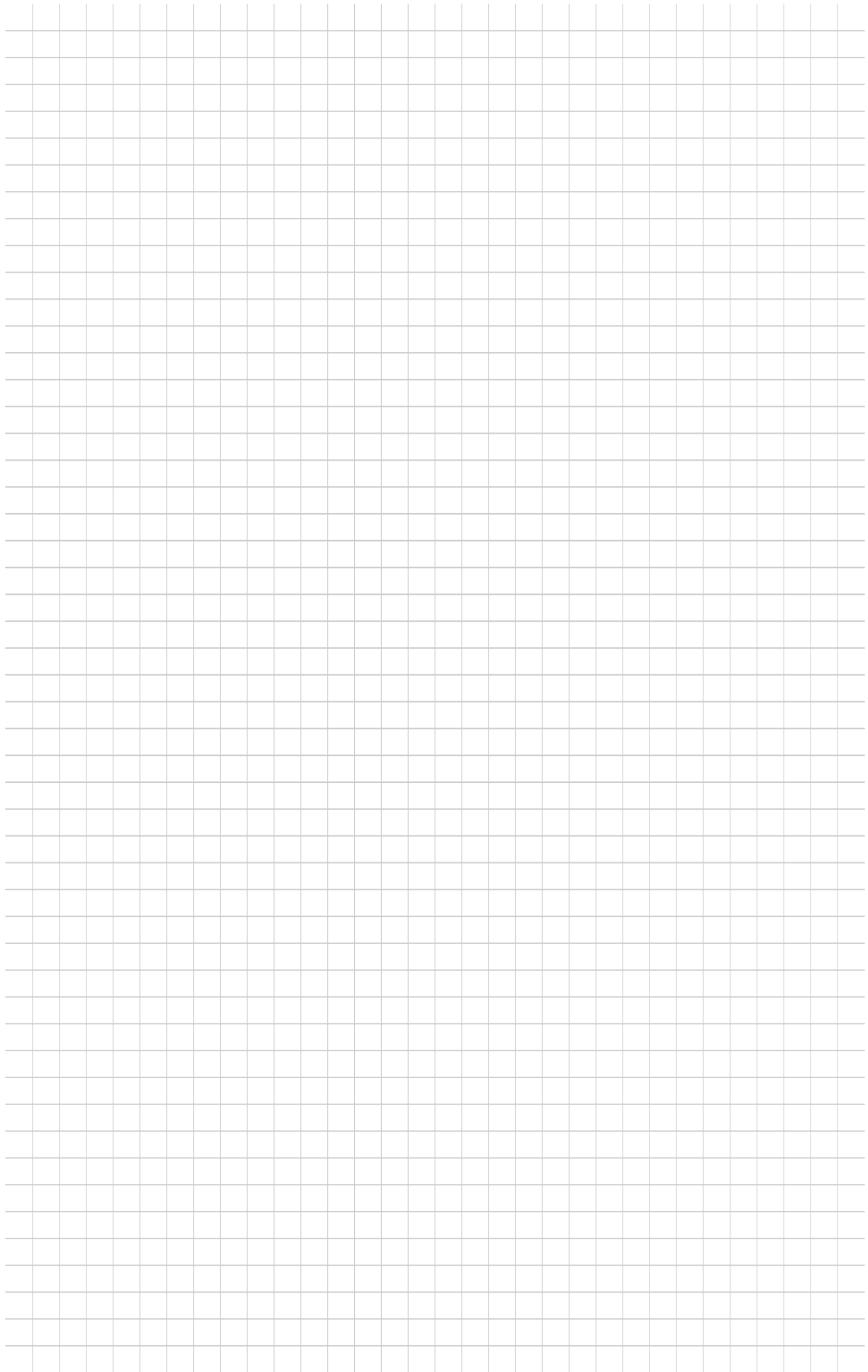


Figuur 4.2 Bron: Wikipedia

- a Noem het gemiddeld aantal tjirpen per minuut n . Welke formule geldt dan voor de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$?
- b Een sneeuwboomkrekkel tjirpt 96 keer per minuut. Bereken de temperatuur.
- c Het is makkelijker om 15 seconden lang te tellen hoeveel tjirpen de sneeuwboomkrekkel maakt. Hoe hoog is de temperatuur als de krekel 27 keer tjirpt in 15 seconden?
- d Teken een bijpassende grafiek.
- e Geef in je grafiek het gedeelte aan dat hoort bij temperaturen van 20°C tot 25°C . Welke waarden voor n horen daar ongeveer bij?

Antwoorden

- 4.1 a** $r = 4,50 + 1,25k$, met r de ritprijs en k het aantal klantkilometers.
- b** $l = \frac{800}{b}$, met l de lengte en b de breedte.
- c** $j = \frac{m+v+13}{2}$, met j lengte jongen, m lengte moeder en v lengte vader.
- d** $a = vt$, met a de afstand, v de gemiddelde snelheid en t de tijd.
- 4.2 a** 7
- b** Het hoogste cijfer is een 10.
- c** D punten liggen op een rechte lijn van (0,1) tot (60,10).
- d** Vanaf 30 punten: $c = \frac{30}{60} \cdot 9 + 1 = 5,5$.
- 4.3 a** $k = \frac{0,15x+5,95}{x}$ of $k = 0,15 + \frac{5,95}{x}$.
- b** $k \approx 0,55$ euro.
- c** Ja, k daalt naarmate je meer foto's hebt, tot € 0,15 per foto.
- 4.4 a** De formule is fout, het moet zijn $L = 3 + Z$.
- b** De formule is goed.
- c** Deze formule is fout het moet zijn: $k = 2,50 + 5,00t$.
- 4.5 a** $k = \frac{10+3a}{a}$
- b** $k \approx 3,33$ euro.
- c** Hoe groot zijn de totale kosten per boekje als je dertig boekjes bestelt?
- d** Nee, een boekje kost altijd minimaal € 3,00.
- 4.6 a** $T = \frac{n-40}{7} + 10$
- b** $T = 18$ °C.
- c** $T \approx 19,7$ °C.
- d** Een rechte lijn door (12,6) en (110,20).
- e** Bij 20 °C hoort $n = 110$ en bij 25 °C hoort $n = 145$.



Theorie

Om te onthouden

A large grid of graph paper with a light blue background and a fine grid of light gray lines, intended for taking notes or drawing graphs.

Verwerken

★ Opgave 5.1

Bij het opbranden van een kaars hoort de formule $L = 30 - 4t$, waarin L de lengte in centimeters en t de brandtijd in uren is.

- Waarom zie je dat dit een lange dunne kaars is?
- Welke vergelijking hoort bij de vraag: "Na hoeveel uren branden is deze kaars nog zestien centimeter lang?"
- Los deze vergelijking op met behulp van een grafiek.
- Controleer je antwoord door de oplossing in de vergelijking in te vullen.

★ Opgave 5.2

Hoveniersbedrijf Jongman rekent voor het winterklaar maken van een tuin € 75,00 plus € 2,50 per m^2 .

- Maak een formule bij het verband tussen de oppervlakte A van de tuin en de kosten K voor het winterklaar maken.
- Meneer Van Gils heeft zijn tuin laten opknappen. Hij krijgt een rekening van € 475,00. Welke vergelijking moet je oplossen om te weten hoe groot de tuin van meneer Van Gils is?
- Los deze vergelijking op met behulp van een tabel en een grafiek. Hoe groot is de tuin van meneer Van Gils? Geef je antwoord in m^2 nauwkeurig.

Het concurrerende hoveniersbedrijf Green Garden rekent voor het winterklaar maken slechts € 25,00 en daarbij € 3,60 per m^2 .

- Welke vergelijking hoort bij "Bij welk aantal m^2 zijn beide bedrijven even duur"?
- Los deze vergelijking op met behulp van tabellen en een grafiek door in te klemmen. Geef je antwoord in gehele m^2 nauwkeurig.

★ Opgave 5.3

Van een vierkant heeft elke zijde een lengte van z cm.

- Welke formule geldt voor de oppervlakte A (cm^2) van dit vierkant?
- Zo'n vierkant heeft een oppervlakte van $100 cm^2$.
Hoe groot is z dan?
- Zo'n vierkant heeft een oppervlakte van $10 cm^2$.
Met welke vergelijking kun je bepalen hoe groot z is?
- Los die vergelijking op met behulp van inklemmen en bereken z in drie decimalen nauwkeurig.

★ Opgave 5.4

Een aannemer krijgt de opdracht een kantoor te bouwen. Deze opdracht houdt 24000 manuren werk in. Dus als één man al het werk zou doen, zou hij er 24000 uur mee bezig zijn.

- Stel dat er twintig mensen aan het kantoorgebouw werken. Hoeveel uur zal ieder dan gemiddeld bezig zijn met deze klus?
- Hoeveel uur werkt iedere werknemer gemiddeld als er honderd mensen het werk zijn? In hoeveel weken van veertig uur kan het kantoor dan gebouwd worden?
- Stel een formule op voor het gemiddeld aantal te werken uren per werknemer a afhankelijk van het aantal werknemers w dat aan dit gebouw werkt.
- De opdrachtgever wil dat de aannemer het kantoorgebouw in drie maanden bouwt. Ga weer uit van een 40-urige werkweek. Met welke vergelijking kan de aannemer uitrekenen hoeveel werknemers hij in moet zetten?
- Los die vergelijking op. Hoeveel werknemers zal de aannemer inzetten?

★ **Opgave 5.5**

Los de volgende vergelijkingen op door slim rekenen. Geef het antwoord exact, zonder benaderingen.

a $60 - 1,9 \cdot t = 10$

b $\frac{2v}{3} + 15 = 21$

c $\frac{1}{4} \cdot (20 - x) = 2$

d $126 - 2 \cdot z \cdot z = 28$

Toepassen

Een fabrikant brengt het nieuwe zuivelproduct ActivExtra uit.

De productiekosten zijn tweeledig:

- vaste maandelijkse kosten (machines, opslag, e.d.): € 25.000.
- kosten per liter (ingrediënten, verpakking): € 0,80.

Hij denkt ActivExtra voor € 1,15 per liter te kunnen verkopen.

Economen spreken in deze situatie van een **break-even-point**. Dat is het punt waarin de opbrengst R gelijk is aan de totale kosten K .

Noem het aantal liters dat per maand wordt verkocht x , dan geldt: $R = 1,15 \cdot x$.

Ga je er van uit dat ook het aantal maandelijks geproduceerde liters x is, dan geldt: $K = 25000 + 0,80 \cdot x$.

Maak je een grafiek van R en een grafiek van K in één figuur, dan is het break-even-point het snijpunt van beide.

Voor het break-even-point geldt de vergelijking: $1,15 \cdot x = 25000 + 0,80 \cdot x$.

Deze vergelijking levert op: $x \approx 71429$. (Afgerond op gehelen.)

De fabrikant gaat winst maken als hij 71.429 L of meer ActivExtra per maand produceert en verkoopt.

★ ★ **Opgave 5.6: Break-even-point**

In **Toepassen** zie je dat in de economie soms met vergelijkingen wordt gewerkt en wat onder een 'break-even-point' wordt verstaan.

- a Los de vergelijking $1,15 \cdot x = 25000 + 0,80 \cdot x$ op.
- b Wat is nu het break-even-point in dit geval?
- c Waarom is het in feite niet erg nuttig om de vergelijking tot op liters nauwkeurig op te lossen?
De firma ArtDraw verkoopt een bepaald tekenpotlood van € 1,20 per stuk. De kosten om deze potloden te kunnen produceren bedragen € 0,45 per potlood plus € 35000,00 vaste kosten per maand. Ga er van uit dat elk geproduceerd potlood ook wordt verkocht.
- d Met welke vergelijking kun je nu het break-even-point berekenen voor de verkoop van deze potloden?
- e Vanaf welk aantal potloden gaat ArtDraw winst maken?

★ ★ **Opgave 5.7: Tsjirpende krekels**

Volgens bioloog Midas Dekkers kun je de temperatuur T in °C berekenen met behulp van het gemiddeld aantal tsjirpen n per minuut van de sneeuwboomkrekkel. Er geldt:

$$T = \frac{n-40}{7} + 10$$

- a De temperatuur bedraagt 20 °C. Hoeveel keer per minuut tsjirpt de sneeuwboomkrekkel dan? Bepaal je antwoord door de bijbehorende vergelijking op te lossen.
- b De temperatuur bedraagt 25 °C. Hoeveel keer per minuut tsjirpt de sneeuwboomkrekkel nu gemiddeld vaker dan bij 20 °C?

Antwoorden

- 5.1 a** Er gaat elk uur 4 cm vanaf.
b $16 = 30 - 4t$
c Je vindt $t = 3,5$ uur.
d $30 - 4 \cdot 3,5 = 16$, klopt.
- 5.2 a** $K = 75,00 + 2,50A$
b $475,00 = 75,00 + 2,50A$
c De tuin van meneer Van Gils is 160 m^2 .
d $75,00 + 2,50A = 25,00 + 3,60A$
e $A = 45 \text{ m}^2$.
- 5.3 a** $A = z \cdot z$
b $z = 10 \text{ cm}$.
c $z \cdot z = 10$
d Op drie decimalen nauwkeurig is de oplossing: $z \approx 3,162$.
- 5.4 a** 1200 uur.
b 240 uur dus 6 weken van 40 uur.
c $a = \frac{24000}{w}$.
d $520 = \frac{24000}{w}$
e Hij zet dus 47 werknemers in.
- 5.5 a** $t = \frac{500}{19}$
b $v = 9$.
c $x = 12$.
d $z = 7$ of $z = -7$.
- 5.6 a** $x \approx 71429$.
b Het punt (71429,82143) (afgerond op gehele).
c Het voor een bedrijf niet doenlijk om te mikken op het verkopen van precies 71429 liter van dit zuivelproduct. Bovendien wil het bedrijf winst maken, dus men zal mikken op een behoorlijk grotere verkoop.
d $1,20 \cdot a = 0,45 \cdot a + 35000$
e Ongeveer 47000 stuks.
- 5.7 a** $n = 110$ tsjirpen.
b 35 tsjirpen per minuut meer.

1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- verband — grootheid met eenheid — afhankelijke en onafhankelijke variabele
- (woord)formule
- grafiek bij een formule — invoervariabele — substitueren
- lettervariabele — vermenigvuldigingspunt
- vergelijking, linker- en rechterzijde — oplossing(en) van een vergelijking — inklemmen

Activiteitenlijst

- verbanden beschrijven in woorden, en er tabellen en grafieken bij maken — variabelen gebruiken
- verbanden beschrijven in (woord)formules en daar tabellen en grafieken bij maken
- grafieken tekenen vanuit een formule
- letters gebruiken voor variabelen — formules zo kort mogelijk schrijven
- formules vergelijken — vergelijkingen oplossen met behulp van grafieken en inklemmen in een tabel — vergelijkingen oplossen door handig rekenen

Opgave 6.1

Taxibedrijf A berekent de ritprijs als volgt: als de rit begint, staat de taximeter op 4,00 euro. Voor iedere afgelegde kilometer betaal je 2,50 euro.

- Tussen welke variabelen is er een verband?
- Geef dit verband zo kort mogelijk in woorden weer.
- Bereken de ritprijs als je 18 kilometer met de taxi meerijsdt.
- Maak een tabel bij dit verband en teken een grafiek bij die tabel.
- Verklaar de vorm van de geschetste grafiek.

Opgave 6.2

Je rekt opnieuw met de gegevens van Taxibedrijf A: als de rit begint, staat de taximeter op 4,00 euro. Voor iedere afgelegde kilometer betaal je 2,50 euro.

- Beschrijf dit verband met een formule. Gebruik de variabelen *ritlengte* in km en *ritprijs* in euro.
- Gebruik de formule. Welke ritprijs hoort er bij *ritlengte* = 8,5?
- Gebruik de grafiek uit de vorige opgave. Schat welk aantal gereden kilometers hoort bij *ritprijs* = 25.

Opgave 6.3

Taxibedrijf B berekent de ritprijs met de formule: $ritprijs = 3,25 + 2,75 \times ritlengte$. Hierin is *ritprijs* in euro en *ritlengte* in km.

- Welke ritprijs hoort bij *ritlengte* = 8,5?
- Vergelijk taxibedrijf B met taxibedrijf A uit de vorige opgave. Welk van beide bedrijven kies je als je 8,5 km met de taxi moet rijden om op een bestemming te komen?
- Maak een grafiek bij de formule die hoort bij het taxibedrijf B. Teken deze grafiek in dezelfde grafiek als die van taxibedrijf A.
- Lees uit je grafiek af welk van beide taxibedrijven voor welke aantallen kilometers voordeliger is.

Opgave 6.4

Formules wil je graag zo kort en overzichtelijk mogelijk hebben. Daarbij gebruik je de eigenschappen van het rekenen met getallen en stel je variabelen voor door letters. Schrijf de volgende formules zo kort en overzichtelijk mogelijk.

- a $omtrek = lengte + breedte + lengte + breedte$
- b $oppervlakte = zijde \times zijde$
- c $prijs\ per\ foto = \frac{4,50 + 7 \cdot aantal}{aantal}$.

Opgave 6.5

Taxibedrijf C gebruikt de volgende formule om de ritprijs te berekenen:

$$p = 3,50 + 2,80 \cdot x.$$

Hierin is p de ritprijs in euro en x het aantal gereden km.

- a Bereken p als $x = 16$.
- b Je wilt x berekenen als $p = 50$. Welke vergelijking hoort hier bij?
- c Los de vergelijking op met behulp van een grafiek.
- d Los de vergelijking van deelvraag b op met behulp van inkleppen in twee decimalen nauwkeurig.
- e Je kunt de vergelijking ook oplossen door handig rekenen. Laat zien hoe.

Testen

★ Opgave 6.6

Je gaat in de zomervakantie kersen plukken en krijgt per gevuld kistje € 2,50. Ook krijg je per dag een vast bedrag, de 'voorfietskosten', van € 7,50.

- a Hoeveel verdien je op een dag als je vijf kistjes vult?
- b Tussen welke twee variabelen bestaat er een verband?
- c Wat is de afhankelijke variabele en wat is de onafhankelijke variabele?
- d Geef een zo kort mogelijke formule die je loon uitdrukt in het aantal kistjes. Gebruik voor je loon de letter L en voor het aantal kistjes de letter k .
- e Substitueer $k = 12$ in de formule en bereken L .

★ Opgave 6.7

Wanneer je op reis gaat, kun je een reisverzekering afsluiten. Daarvoor betaal je de verzekeringsmaatschappij een bepaalde premie. Bij DALIV betaal je een eenmalige afsluitprovisie en daarnaast een vast bedrag per dag. De tabel laat enkele premies zien.

reistijd (dag)	5	10	15	20
premie (euro)	17,50	30,00	42,50	55,00

Tabel 6.1

- a Tussen welke variabelen is hier een verband? Wat is de afhankelijke variabele en wat is de onafhankelijke variabele?
- b Hoe kun je aan de tabel zien dat je een vast bedrag per dag betaalt? Hoe groot is dat bedrag?
- c Hoe kun je uit de tabel afleiden dat de bijbehorende grafiek niet door $O(0,0)$ gaat?
- d Beschrijf dit verband in woorden.
- e Beschrijf het verband tussen *reistijd* en *premie* met een formule.
- f Bereken de *premie* bij een *reistijd* van achttien dagen.
- g Schrijf de formule zo kort mogelijk.

★ **Opgave 6.8**

Schrijf de volgende formules zo kort mogelijk. Geef ook aan waar de letters in de formule voor staan, en geef mogelijke eenheden.

- a $beltegoed = 20,00 - 0,15 \cdot beltijd$
- b $inhoud\ balk = lengte \cdot breedte \cdot hoogte$
- c $kosten\ per\ foto = \frac{250,00 + 0,08 \cdot aantal}{aantal}$
- d $BMI = \frac{gewicht}{lengte \cdot lengte}$

★ **Opgave 6.9**

Van een cilindervormige kaars verandert de lengte L (cm) als je hem aansteekt volgens de formule $L = 32 - 1,5t$. Hierin is t de brandtijd in uren.

- a Hoe zie je aan deze formule dat de kaars telkens korter wordt?
- b Je wilt weten na hoeveel uur deze kaars is opgebrand. Welke vergelijking hoort daarbij?
- c Los deze vergelijking op in één decimaal nauwkeurig door handig rekenen.

Een andere cilindervormige kaars wordt tegelijk met de eerste kaars aangestoken. Bij deze kaars verandert de lengte L (cm) als je hem aansteekt volgens de formule $L = 39 - 3t$. Ook bij deze formule is t de brandtijd in uren.

- d Na hoeveel uur branden zijn beide kaarsen even lang? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

★ **Opgave 6.10**

De kosten voor het drukwerk van folders bestaan bij ImPrint uit:

- een vast bedrag van € 31,50
- een bedrag van € 0,02 per folder

- a Hoe hoog zijn de drukkosten per folder als je duizend folders bestelt?
- b Stel een formule op voor de drukkosten per folder k (euro) afhankelijk van het aantal folders a dat je bestelt.
- c Maak een grafiek bij deze formule.
- d Verklaar de vorm van de grafiek.
- e Hoeveel folders moet je bestellen als je per folder niet meer dan € 0,03 aan drukkosten wilt hebben? Bereken door middel van inklemmen.
- f Is het mogelijk om zo veel folders te bestellen dat je per folder € 0,015 aan drukkosten betaalt?

★ **Opgave 6.11**

Het bedrijf Overmars is gespecialiseerd in verhuizingen. De kosten van een verhuizing worden bepaald door:

- de *tijd* in uren die de verhuizers bezig zijn met het inpakken en uitpakken van de spullen: € 150,00 per uur;
- de *afstand* in km waarover verhuisd wordt: € 2,50 per km.

- a De familie De Bruijn verhuist met Overmars van Haarlem naar Zutphen (125 km). Voor het in- en uitpakken hebben de verhuizers zes uur nodig. Wat kost deze verhuizing?
- b Stel een formule op voor de kosten K (euro) afhankelijk van de in- en uitpaktijd t (uur) en de te rijden afstand a (km).
- c Een verhuizing van Breda naar Tilburg (20 km) met Overmars kost € 1550,00. Hoeveel uur zijn de verhuizers bezig geweest met inpakken en uitpakken? Gebruik een vergelijking.
- d Een andere verhuizing met Overmars kostte € 965,00. Voor het in- en uitpakken was 5,5 uur nodig. Over welke afstand ging deze verhuizing? Gebruik hier ook een vergelijking.

★ **Opgave 6.12**

Los de volgende vergelijkingen op door slim rekenen.

- a $8 \cdot x + 450 = 560$
- b $8 \cdot (x + 15) = 200$
- c $\frac{100}{2 \cdot x + 7} = 4$
- d $4 \cdot x \cdot x - 9 = 91$

Toepassen

Opgave 6.13: Formules en grafieken met XL

Het spreadsheetprogramma MS-Excel is zeer geschikt voor het werken met tabellen, grafieken en formules. Met behulp van een practicum 'Grafieken bij tabellen' kun je leren hoe je met dit programma een grafiek bij een tabel en een tabel bij een formule maakt.

Via [Grafieken bij tabellen in Excel 2007 of 2010](#) vind je het genoemde practicum. Heb je een nieuwere versie van Excel, ga dan naar [Grafieken bij tabellen in Excel 2013 of hoger](#). Voer het practicum uit.

★★ **Opgave 6.14: Snelheid van schaatsters**

Vrouwen leggen tijdens een schaatstoernooi onder andere 3000 meter af. In de tabel staan de tijden van een schaatster tijdens een rit over 3000 meter:

afstand (m)	200	600	1000	1400	1800	2200	2600	3000
tijd (sec)	19,7	53,7	87,8	121,6	155,5	188,7	222,5	256,5

Tabel 6.2

Uit de tabel kun je opmaken dat de schaatster niet steeds even hard schaatste. Toch kun je proberen een formule te maken bij het verband tussen de *afstand* en de *tijd*.

- a Teken in een assenstelsel de acht punten uit de tabel. Teken zo goed mogelijk een rechte lijn door de punten (de lijn gaat door de oorsprong). Door welk punt moet die lijn in ieder geval gaan?
- b Hoeveel meter schaatste deze schaatster gemiddeld per seconde?
- c Welke formule geldt voor deze schaatster bij het verband tussen de afgelegde afstand a (in m) en de tijd t (in seconden)?

Verzamel actuele gegevens met betrekking tot de eindtijden van zowel voor mannen als vrouwen. Gebruik bijvoorbeeld de wereldrecords op de 500, de 1500, de 3000, de 5000 en de 10.000 m.

- d Stel voor ieder van deze afstanden een formule op voor de afgelegde afstand a (in m) en de tijd t (in seconden). Verklaar de verschillen.

Antwoorden

6.1 a Tussen de variabelen *ritlengte* in km en *ritprijs* in euro.

b De ritprijs is 4,00 euro plus 2,50 maal de ritlengte.

c De ritprijs is $4,00 + 2,50 \times 18 = 49,00$ euro.

d Een begin van de tabel:

<i>ritlengte</i> (km)	0	1	2	3	4	5
<i>ritprijs</i> (euro)	4,00	6,50	9,00	11,50	14,00	16,50

Je grafiek moet een rechte lijn vanaf (0,4) en door bijvoorbeeld (10,29).

Denk om de bijschriften bij de assen.

e De grafiek is een rechte lijn, omdat er bij elke extra gereden kilometer een vast bedrag (2,50 euro) bijkomt.

6.2 a $ritprijs = 4 + 2,50 \times ritlengte$

b $ritprijs = 4 + 8,5 \cdot 2,50 = 31,25$.

c 8,4 km.

6.3 a $ritprijs = 3,25 + 8,5 \cdot 2,75 \approx 32,21$.

b Bedrijf A is het goedkoopst:

Bedrijf A: $4 + 2,5 \cdot 8,5 = 25,25$ euro;

Bedrijf B: $3,25 + 2,75 \cdot 8,5 = 26,63$ euro.

c Maak eerst deze tabel:

<i>ritlengte</i> (in km)	0	1	2	3	4	5	6
<i>ritprijs</i> (in euro)	3,25	6,00	8,75	11,50	14,25	17,00	19,75

d Bij ritlengtes van minder dan 3 km is taxibedrijf B voordeliger.

6.4 a $P = 2 \cdot l + 2 \cdot b$ wordt nog korter: $P = 2l + 2b$.

b $A = z \cdot z$

c $P = \frac{4,50+7 \cdot a}{a}$ wordt nog korter: $P = \frac{4,5+7a}{a}$.

6.5 a $p = 3,50 + 2,80 \cdot 16 = 54,60$.

b $3,50 + 2,80 \cdot x = 120$.

c Maak eerst een tabel bij de formule met voor x de waarden 0,5,10,15 en 20. Je vindt ongeveer 16,6 km.

d Schrijf uitgebreid op hoe je met een inklemtabel werkt. Je vindt $x \approx 16,61$.

e $3,50 + 2,80 \cdot x = 50$ lijkt op: $3,50 + [\dots] = 50$ en dus is: $[\dots] = 46,50$. Dit betekent: $2,80 \cdot x = 46,50$ en dit lijkt op: $2,80 \cdot [\dots] = 46,50$, zodat $[\dots] = \frac{46,50}{2,80} = 16,60714285$. Je vindt dus $x \approx 16,6$ km.

6.6 a Je verdient 20 euro.

b Tussen de variabelen *aantal kistjes* en *loon* (euro).

c De afhankelijke variabele is *je loon* en dit hangt af van het *aantal kistjes*.

d $L = 2,50k + 7,50$

e $L = 37,50$ euro.

6.7 a Er is een verband tussen de variabelen *premie* en *reistijd*. *premie* is de afhankelijke variabele en *reistijd* de onafhankelijke.

b Het vaste bedrag per dag is € 2,50.

c Voor 0 dagen betaal je € 5,00, de afsluitprovisie.

d Je betaalt € 5,00 afsluitprovisie en daarnaast betaal je € 2,50 premie per reisdag.

e $premie = 5,00 + 2,50 \cdot reistijd$

f 50,00 euro.

g $p = 5,00 + 2,50r$, waarbij p de premie in euro is en r de reistijd in dagen.

6.8 a $b = 20 - 0,15t$, met b het *beltegoed* in euro en t de *beltijd* in minuten.

b $I = lbh$, met I de inhoud, l de lengte, b de breedte en h de hoogte. Mogelijke eenheden zijn cm en cm^3 .

c $k = \frac{250+0,08a}{a}$, met k de *kosten per foto* in euro en a het *aantal*.

d $B = \frac{g}{l \cdot l}$, met B de BMI, g het gewicht in kg en l lengte in meter.

6.9 a Er gaat per uur 1,5 cm van de beginlengte van 32 cm af.

b $32 - 1,5t = 0$

c $t \approx 21,3$

d Inklekken geeft $t \approx 4,7$ uur, dat is 4 uur en ongeveer 42 minuten.

6.10 a $\frac{31,50+1000 \cdot 0,02}{1000} = 0,0515$, dus ongeveer € 0,05.

b Bijvoorbeeld $k = \frac{31,50+0,02a}{a}$, maar ook goed is $k = \frac{31,50}{a} + 0,02$.

c Maak eerst een tabel met stapgrootte 100 en vanaf 500 stapgrootte 500. Je krijgt dan de tabel:

a	0	100	200	300	400	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000
k (euro)		0,335	0,178	0,125	0,099	0,083	0,0515	0,041	0,0358	0,0326	0,0305	0,029	0,028

De grafiek is een kromme lijn door deze punten.

d De grafiek is geen rechte lijn, maar nadert steeds dichter de € 0,02.

e Je moet de vergelijking $\frac{31,50+0,02a}{a} = 0,03$ oplossen.

Gebruik de tabel en de grafiek bij c. Je ziet dat de oplossing tussen $a = 3000$ en $a = 3500$ ligt. Tussen deze waarden ga je inklekken met behulp van tabellen. Je vindt $a = 3150$.

f Nee, want je betaalt altijd minstens € 0,02 aan drukkosten per folder.

6.11 a 1212,50 euro.

b $K = 150t + 2,50a$

c $t = 10$ uur.

d $a = 56$ km.

6.12 a $x = 13,75$.

b $x = 10$.

c $x = 9$.

d $x = 5$ ($x = -5$ is ook mogelijk, denk aan het vermenigvuldigen van negatieve getallen!).

6.13 Laat je resultaten door je docent beoordelen.

6.14 a De lijn gaat in ieder geval door $O(0,0)$ en door het eindpunt $E(256,5; 3000)$.

b $\approx 11,70$ m/s.

c $a \approx 11,7 \cdot t$

d Werk met gegevens van internet.

Leerdoelentabel

In het achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:

✓ goed gemaakt — S wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — H hulp nodig gehad — G samen met groepje goed gemaakt — X fout gemaakt en niet goed begrepen — N niet bekeken

1	Verbanden en variabelen	★	★★	★★★
	Afhankelijke en onafhankelijke variabelen onderscheiden.	1.1 <input type="checkbox"/> 1.2 <input type="checkbox"/> 1.3 <input type="checkbox"/> 1.4 <input type="checkbox"/> 1.5 <input type="checkbox"/> T 6.6 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/>	1.6 <input type="checkbox"/> 1.7 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	
	Een verband in woorden beschrijven.	1.1 <input type="checkbox"/> 1.2 <input type="checkbox"/> 1.3 <input type="checkbox"/> T 6.6 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/>	1.6 <input type="checkbox"/> 1.7 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	
	Een tabel en/of grafiek maken bij een verband in woorden.	1.1 <input type="checkbox"/> 1.2 <input type="checkbox"/> 1.3 <input type="checkbox"/> 1.4 <input type="checkbox"/> 1.5 <input type="checkbox"/> T 6.6 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/>	1.6 <input type="checkbox"/> 1.7 <input type="checkbox"/>	
2	Formules opstellen	★	★★	★★★
	Een formule bij een verband opstellen.	2.1 <input type="checkbox"/> 2.2 <input type="checkbox"/> 2.3 <input type="checkbox"/> 2.4 <input type="checkbox"/> 2.5 <input type="checkbox"/> T 6.6 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/>	2.6 <input type="checkbox"/> 2.7 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	
	De waarde van de (on)afhankelijke variabele berekenen met behulp van een woordformule.		2.6 <input type="checkbox"/> 2.7 <input type="checkbox"/>	
3	Formules en grafieken	★	★★	★★★
	Bij een formule de afhankelijk variabele berekenen bij een gegeven waarde van de invoervariabele.	3.1 <input type="checkbox"/> 3.2 <input type="checkbox"/> 3.3 <input type="checkbox"/> 3.4 <input type="checkbox"/> 3.5 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/>	3.6 <input type="checkbox"/> 3.7 <input type="checkbox"/>	
	Een grafiek maken bij een formule.	3.1 <input type="checkbox"/> 3.2 <input type="checkbox"/> 3.3 <input type="checkbox"/> 3.4 <input type="checkbox"/> 3.5 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/>	3.6 <input type="checkbox"/> 3.7 <input type="checkbox"/>	
4	Letterformules	★	★★	★★★
	Woordformules omzetten in een letterformule, dus formules verkort noteren.	4.1 <input type="checkbox"/> 4.2 <input type="checkbox"/> 4.3 <input type="checkbox"/> 4.4 <input type="checkbox"/> 4.5 <input type="checkbox"/> T 6.6 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/> T 6.8 <input type="checkbox"/> T 6.9 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/>	4.6 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	
	De vermenigvuldigingspunt gebruiken en weglaten in daarvoor geschikte situaties.	4.1 <input type="checkbox"/> 4.2 <input type="checkbox"/> 4.3 <input type="checkbox"/> 4.4 <input type="checkbox"/> 4.5 <input type="checkbox"/> T 6.6 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/> T 6.8 <input type="checkbox"/> T 6.9 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/>	4.6 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	
5	Vergelijkingen	★	★★	★★★
	Een vergelijking opstellen aan de hand van gegeven informatie.	5.1 <input type="checkbox"/> 5.2 <input type="checkbox"/> 5.3 <input type="checkbox"/> 5.4 <input type="checkbox"/> T 6.9 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/>	5.6 <input type="checkbox"/>	
	Een vergelijking oplossen door inklemmen.	5.1 <input type="checkbox"/> 5.2 <input type="checkbox"/> 5.3 <input type="checkbox"/> 5.4 <input type="checkbox"/> T 6.9 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/>	5.6 <input type="checkbox"/>	
	Een vergelijking oplossen door handig rekenen.	5.5 <input type="checkbox"/> T 6.9 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/> T 6.12 <input type="checkbox"/>	5.6 <input type="checkbox"/> 5.7 <input type="checkbox"/>	

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConText College.

Stichting Math4All



www.math4all.nl



