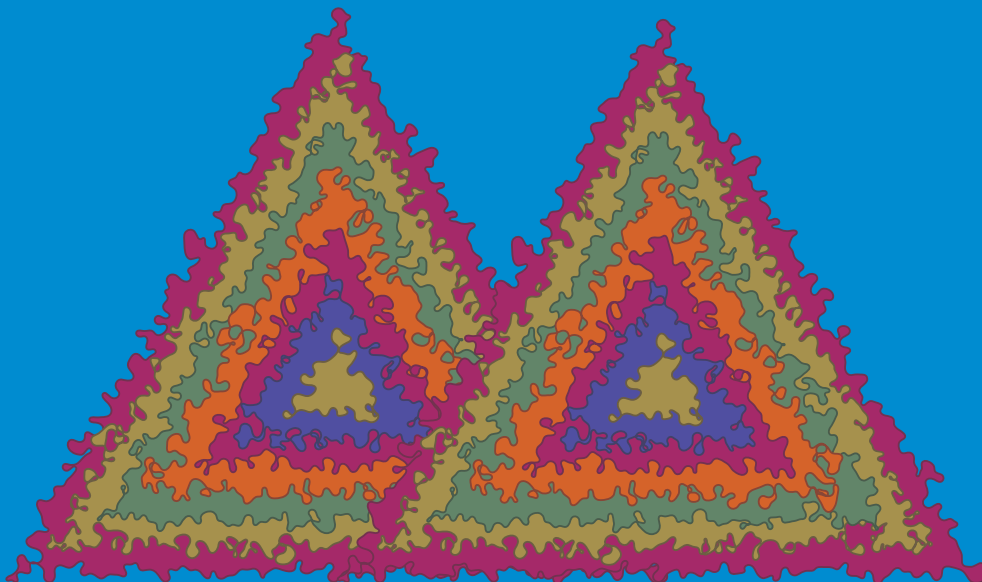


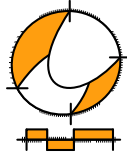
# Wiskunde / PGA

1 HAVO / VWO / docentmateriaal

## Verbanden

ConTeXt College





© 2024

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de rechthebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaardt Math4All geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website [www.math4all.nl](http://www.math4all.nl) is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via [info@math4all.nl](mailto:info@math4all.nl). Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

---

---

# Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website [www.math4all.nl](http://www.math4all.nl). In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

## PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je begeleidt dan als docent de leerlingen die in kleine groepjes aan wiskundige problemen werken en op die manier een eigen theoretisch kader opstellen. Dit gebeurt voornamelijk op de wijze die wordt beschreven in het boek *Building Thinking Classrooms in Mathematics* van Peter Liljedahl. Dit boek is ook in het Nederlands beschikbaar. Het is verstandig om dit boek vooraf door te werken, maar je kunt ook beginnen met deze **beknopte handleiding**.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee de leerling kan nagaan of de stof wordt beheersd. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding staat in de marge naast de opgave.

- ★ het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
- ★ ★ een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die de leerling alleen hoeft te maken als er genoeg tijd voor is
- ★ ★ ★ een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die een leerling alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk was

In de bijlage staat een "**Leerdoelentabel**" waarin staat aangegeven door welke opgave het specifieke leerdoel wordt afgedekt en op welk niveau dit gebeurt. Als je deze tabel aan de leerlingen uitreikt, kunnen ze hun eigen vorderingen bijhouden.

Opgaven uit de samenvattende paragraaf *Totaalbeeld* worden voorafgegaan door een T.



---

# 1

---

## Verbanden

1.1	Verbanden en variabelen	6
1.2	Formules opstellen	13
1.3	Formules en grafieken	20
1.4	Letterformules	26
1.5	Vergelijkingen	31
1.6	Totaalbeeld	38

# 1.1 Verbanden en variabelen

## Inleiding

Als je een smartphone hebt zou je moeten weten hoe het zit met de kosten voor bellen, appen, internetten en wat je allemaal niet met zo'n apparaat kunt doen. Het aantal gewenste belminuten speelt daarbij een rol. Meestal spreek je dit aantal belminuten af met de provider.



Figuur 1.1

### Je leert in dit onderwerp

- afhankelijke en onafhankelijke variabelen onderscheiden;
- een verband beschrijven in woorden;
- een tabel en/of grafiek maken bij een verband in woorden.

### Voorkennis

- je kunt een grafiek bij een tabel maken;
- je kunt rekenen met decimale getallen.

## Voor de docent

Bij het onderdeel 'Verbanden en variabelen' gaat het de begrippen 'variabele', 'afhankelijk', 'onafhankelijk' variabele en het herkennen ervan in een grafiek. Ook het omschrijven in woorden van verbanden tussen variabelen en het maken van bijpassende grafieken komt aan bod.

Wellicht zijn de leerlingen al meteen in staat om tot woordformules te komen. In dat geval kan het volgende onderdeel wellicht worden geschrapt.

Gewenste materialen:

- Maak desgewenst vooraf een kopie van het werkblad bij de eerste opdracht.
- Gebruik eventueel dit werkblad ook voor het laten maken van het theorieblok bij de derde opdracht.
- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken en eventueel plakband om de informatiebladen op te hangen.

### Opdracht 1.1



Figuur 1.2

Deze grafiek geeft het verband weer tussen twee grootheden waarvan de waarden kunnen variëren. Je spreekt van 'variabelen'.

Beschrijf in woorden hoe de afhankelijk variabele *kaarslengte* afhangt van de onafhankelijk variabele *brandtijd* en welke eenheden erbij horen.

**Toelichting**

Geef de opdracht mondeling. Kopieer de grafiek vooraf vanaf het **Werkblad** en deel dit uit.

De leerlingen zullen de gebruikte termen eerder hebben gehoord. Stel desgewenst vragen als “Welke twee variabelen zijn er?”, “Welke variabele hangt af van de andere? En wat betekent dit voor de grafiek?”, “Hoe kun je zien met hoeveel de *lengte* afneemt per uur?” en/of “Kun je nu beschrijven wat er gebeurt met de lengte van deze kaars?”.

Bekijk na afloop de verschillende werkvlakken en benoem de belangrijke termen nog eens. Wellicht hebben sommige groepjes al mooie compacte formules gemaakt en andere niet. Bespreek dan de voordelen (b.v. erg overzichtelijk) en de nadelen (je moet wel onthouden wat alles betekent, welke eenheden erbij horen) van de compacte schrijfwijze. Misschien alvast ruimte geven voor aantekeningen?

**Uitwerking**

Als je zo'n tabel maakt, zie je dat tijdens elk uur *brandtijd* de *lengte* twee centimeter korter wordt.

<i>brandtijd</i> (uur)	0	1	2	3
<i>lengte</i> (cm)	20	18	16	14

**Tabel 1.1**

In dit geval hangt de variabele *lengte* af van de variabele *brandtijd*. Daarom is *lengte* de afhankelijke variabele en *brandtijd* de onafhankelijke variabele. Bij de variabele *brandtijd* hoort de eenheid ‘uur’. Bij de variabele *lengte* hoort de eenheid ‘centimeter’.

Je kunt dit verband beschrijven in woorden: de *lengte* kun je berekenen door  $2 \times$  *brandtijd* af te trekken van 20.

**Opdracht 1.2**

In het begin van deze eeuw bestonden er nog telefoons waarmee je alleen kon bellen (en dan bedoel ik niet videobellen). Bij sommige providers betaalde je toen € 0,06 per belminuut. Gebruik de variabelen *belkosten* in euro en *tijd* in minuten en geef formules bij de volgende situaties.

1. De *belkosten* hangen alleen af van de *tijd*.
2. Vrijwel alle providers rekenden toen ook nog abonnementskosten. Neem aan dat die € 20,00 waren.  
Beschrijf in woorden hoe in dit geval de *belkosten per maand* afhangen van de *tijd* en teken een bijpassende grafiek.
3. Ga uit van de situatie met € 0,06 per belminuut en ook nog abonnementskosten van € 20,00.  
Beschrijf in woorden hoe in dit geval de *belkosten per minuut* afhangen van de *tijd* en teken een bijpassende grafiek.

**Toelichting**

Geef de opdracht mondeling en in drie stappen. Echte formules maken is nog niet aan de orde, maar als dit wel snel gebeurt, kun je met de leerlingen wellicht de volgende paragraaf overslaan.

Mogelijke hulpvragen: “Hoe houd je rekening met de abonnementskosten?”, “Wat betekent dit voor je tabel? En voor je figuur?”, “Moet je andere schaalverdelingen maken?” en tenslotte “Hoe vind je nu de belkosten per minuut terug?”.

Weer na afloop de verschillende uitwerkingen bij langs lopen.

**Uitwerking**

Eerste situatie:

De *belkosten* bereken je door  $0,06 \times$  de *tijd* te nemen

Tabel en grafiek:

<i>tijd</i> (min)	0	1	2	3	4	5
<i>belkosten</i> (euro)	0,00	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30

**Tabel 1.2**

Tweede situatie:

Het verband in woorden: de *belkosten per maand* bedragen € 20,00 plus € 0,06 per gebelde minuut.

Dit verband kun je ook weergeven in een tabel en in een grafiek.

<i>tijd</i> (min)	0	100	200	300
<i>belkosten</i> (euro per maand)	20,00	26,00	32,00	38,00

**Tabel 1.3**

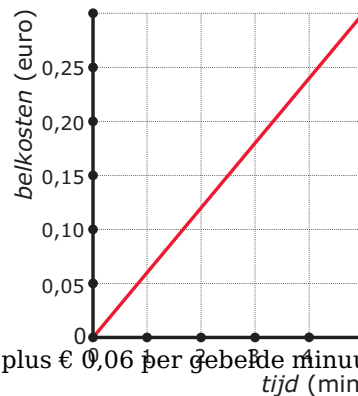
De grafiek komt nu 20 euro hoger te liggen, dus er moet een andere schaalverdeling komen, zeker op de verticale as.

Derde situatie:

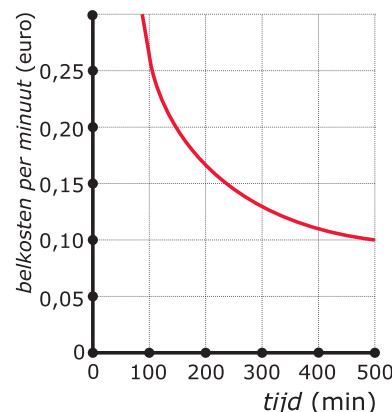
De *belkosten per minuut* (euro per maand) vind je door de *belkosten* (inclusief abonnementskosten) te delen door de *tijd*. Bij nul minuten bellen, betaal je alleen abonnementskosten. De *belkosten per minuut* bij nul minuten bellen kun je niet weergeven, omdat je niet door nul kunt delen. Tabel:

<i>tijd</i> (min)	0	100	200	300
<i>belkosten</i> (euro)	20,00	26,00	32,00	38,00
<i>belkosten per minuut</i> (euro/minuut)	-	0,26	0,16	0,13

**Tabel 1.4**



**Figuur 1.3**



**Figuur 1.4**

**Opdracht 1.3**

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het werken met variabelen, met verbanden tussen variabelen, met de bijbehorende omschrijvingen en grafieken.

Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

**Toelichting**

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Het lijkt nu een goed idee om de grafiek van opdracht 1 te laten gebruiken om er de begrippen 'grootheid', 'eenheid', 'afhankelijke variabele' en 'onafhankelijk variabele' bij te zetten.

**Uitwerking**

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.



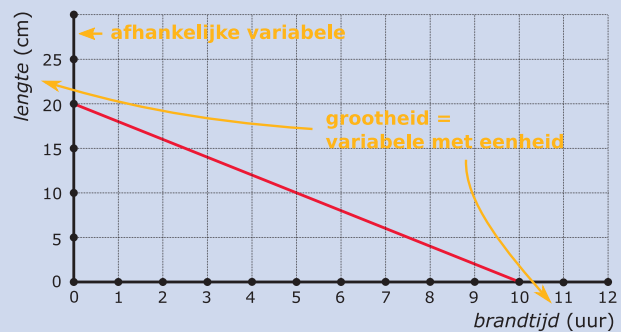
## Theorie

### Om te onthouden

Soms is er een **verband** tussen twee **grootheden**.

De éne grootheid kan steeds andere waarden aannemen en van de andere kun je dan de waarde uitrekenen, het zijn **variabelen**. De variabele waarvan je de waarden kunt kiezen heet de **onafhankelijke variabele** en de variabele waarvan je dan de waarden berekent heet de **afhankelijke variabele**.

Bij zo'n verband maak je vaak een tabel. Je kiest dan oplopende waarden voor de onafhankelijke variabele en rekt de waarden van de afhankelijke variabele uit. Bij die tabel past dan weer een grafiek. Er kunnen daarbij verschillende schaalverdelingen op de twee assen worden gebruikt.



Figuur 1.5

## Verwerken

### ★ Opgave 1.1

Anneke gaat in de zomervakantie tomaten plukken. Hoeveel ze verdient, hangt af van het aantal kistjes dat ze met geplukte tomaten vult.

<i>aantal kistjes</i>	2	4	6	8	10
<i>loon (euro)</i>	4,50	9,00	13,50	18,00	22,50

Tabel 1.5

- Tussen welke twee variabelen is er een verband? Welke eenheden worden er gebruikt?
- Welke variabele is de onafhankelijke variabele en welke is de afhankelijke variabele?
- Hoeveel verdient Anneke per kistje?
- Hoe zou je het verband tussen het *loon* van Anneke en het *aantal kistjes* tomaten dat ze plukt, in woorden kunnen beschrijven?
- Anneke vult op een dag vijf kistjes met de door haar geplukte tomaten. Hoeveel verdient ze die dag?
- En hoeveel verdient ze als ze twaalf kistjes met tomaten vult?
- Bij dit verband zou je een grafiek kunnen tekenen. Is die grafiek stijgend of dalend? Is de grafiek een rechte lijn?

### ★ Opgave 1.2

Michiel houdt van lezen. Hij is begonnen in een boek van 120 bladzijden.

- Hoeveel dagen leest hij in dit boek als hij 10 bladzijden per dag leest?
- En hoeveel dagen als hij 12 bladzijden per dag leest?
- Tussen welke twee variabelen bestaat er dus een verband? Beschrijf het verband in woorden.
- Welke variabele is de onafhankelijke variabele en welke is de afhankelijke variabele?
- Maak een tabel bij dit verband.
- Teken een grafiek bij dit verband. Waarom is die grafiek geen rechte lijn?

### ★ Opgave 1.3

Bij een taxibedrijf hangt de prijs van een rit af van het aantal kilometers dat een klant meerijdt.

<i>ritlengte (km)</i>	4	5	6	7	8	9	10
<i>ritprijs (euro)</i>	11	13	15	17	19	21	23

Tabel 1.6

- Hoeveel betaal je voor een rit van elf kilometer?
- Teken een grafiek bij dit verband.
- Hoe zou jij aan de klant uitleggen hoe de *ritprijs* berekend wordt?
- Vanaf hoeveel kilometer betaal je meer dan € 30,00?

### ★ Opgave 1.4

Bij een bedrijf kun je pennen met je naam erop bestellen. Hoeveel zo'n pen kost, hangt af van het aantal pennen dat je bestelt.

<i>aantal pennen</i>	100	200	400	600	800
<i>prijs per pen (euro)</i>	1,00	0,80	0,60	0,50	0,45

Tabel 1.7

- Teken de grafiek bij het verband tussen de variabelen *aantal pennen* en *prijs per pen*.

- b Je bestelt honderd pennen. Hoeveel betaal je per pen? En hoeveel betaal je in totaal?
- c Maak nu zelf een tabel en een grafiek bij het verband tussen *aantal pennen* en *totale kosten*.
- d Het bedrijf beweert: "Hoe meer pennen u bestelt, hoe goedkoper u uit bent." Is deze uitspraak juist? Licht je antwoord toe.
- e Waarom is de grafiek van het verband tussen *aantal pennen* en *totale kosten* geen rechte lijn?

★ **Opgave 1.5**

Voor je energie in huis betaal je een vast bedrag per maand (vastrecht) en een bedrag per kWh die je verbruikt. In de tabel zie je de totale kosten van de stroomrekening (zonder belastingen) bij verschillende hoeveelheden stroom die je per maand verbruikt.

<i>stroomverbruik</i> (kWh)	0	100	200	300	400	500
<i>prijs</i> (euro)	3,50	11,55	19,60	27,65	35,70	43,75

**Tabel 1.8**

- a Maak nu zelf een tabel waarin het verband tussen de variabelen *stroomverbruik* (kWh) en *stroomkosten per kWh* (euro per maand) zichtbaar wordt. Rond de *stroomkosten per kWh* af op drie decimalen.
- b Bij dit verband kun je een grafiek tekenen. Is de grafiek stijgend of dalend? Is de grafiek een rechte lijn? Licht je antwoord toe.

**Toepassen**

Een digitaal plaatje bestaat uit pixels (afkomstig van de Engelse term 'picture elements'). Als het een zwart/wit plaatje is, heeft elke pixel één waarde, meestal lopend van 0 (zwart) t/m 255 (wit) waarmee de grijswaarde ervan wordt bepaald. Is het een kleurenplaatje dan heeft elke pixel drie waarden één voor rood (R), één voor geel (G) en één voor blauw (B): tenminste in het RGB-formaat.

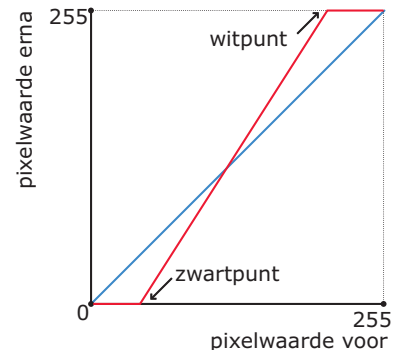
Als je zo'n beeld wilt bewerken, dan bereken je nieuwe waarden voor elke pixel. In een grafiek kun je het verband tussen de waarden van de pixels voor de bewerking en die erna laten zien.

Deze grafiek zorgt ervoor dat de donkere gedeelten van het plaatje donkerder worden en de lichte gedeelten lichter: je verhoogt zo het 'contrast'.

Het punt waar vanaf de grafiek schuin omhoog gaat lopen heet het 'zwartpunt' van de grafiek.

Het punt waar vanaf de grafiek weer horizontaal loopt heet het 'witpunt' van de grafiek.

Maak je andere grafieken voor het omrekenen van de pixelwaarden, dan kun je hele bijzondere effecten krijgen!



**Figuur 1.6**

★★ **Opgave 1.6: Beeldbewerking**

Bekijk het verhaal over het bewerken van een zwart-wit foto in [Toepassen](#).

- a Tussen welke twee variabelen geeft de grafiek het verband weer?
- b Wat betekent de blauwe lijn in deze figuur?
- c Welke pixelwaarden veranderen het minste als je het contrast van de foto verhoogt?
- d Waarom krijg je altijd een zwartpunt en een witpunt bij contrast vergroten? Welke betekenis hebben deze punten?

★ ★ **Opgave 1.7: Twee taxibedrijven**

In een stad zijn twee taxibedrijven actief. Ze hebben verschillende tarieven. Je betaalt bij beide een vast bedrag als je een taxi laat komen (het basistarief of de voorrijkosten) en daarbovenop een bedrag voor elke kilometer die je wordt vervoerd.

- taxibedrijf A: voorrijkosten € 4,00 en de prijs per km € 2,75
- taxibedrijf B: voorrijkosten € 7,50 en de prijs per km € 2,20

- a** Tussen welke twee variabelen bestaat hier steeds een verband?
- b** Welke variabele is de onafhankelijke variabele en welke is de afhankelijke variabele?
- c** Maak voor beide taxibedrijven een tabel en een grafiek van de ritprijs.
- d** Bepaal bij welke afstand beide taxibedrijven even duur zijn.

## 1.2 Formules opstellen

### Inleiding

Als je een smartphone hebt zou je moeten weten hoe het zit met de kosten voor bellen, appen, internetten en wat je allemaal niet met zo'n apparaat kunt doen. Het aantal gewenste belminuten speelt daarbij een rol, zeker als je je telefoon nergens anders voor gebruikt...

Er was zelfs een tijd dat je per belminuut betaalde.



Figuur 2.1

### Je leert in dit onderwerp

- een formule bij een verband opstellen.

### Voorkennis

- het kunnen onderscheiden van de afhankelijke en de onafhankelijke variabele;
- een verband in woorden kunnen beschrijven met de informatie uit een tabel of een grafiek;
- een verband in woorden kunnen beschrijven.

### Voor de docent

Bij het onderdeel 'Formules opstellen' gaat het om het begrip 'formule' als een verkorte schrijfwijze van een verband tussen variabelen. Ook het maken van bijpassende grafieken en/of het redeneren met formules komt desgewenst al aan bod.

Wellicht zijn de leerlingen al meteen in staat om grafieken bij formules te maken. In dat geval kan het volgende onderdeel wellicht worden geschrapt, bedenk dan wel dat de begrippen 'invoervariabele' (voor de onafhankelijk variabele) en 'uitvoervariabele' (voor de afhankelijk variabele) en 'substitueren' voor het invoeren van een getal voor een variabele dan voorbij moeten komen in dit onderdeel.

Gewenste materialen:

- Maak desgewenst vooraf een kopie van het werkblad bij de eerste opdracht.
- Gebruik eventueel dit werkblad ook voor het laten maken van het theorieblok bij de vierde opdracht.
- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken en eventueel plakband om de informatiebladen op te hangen.

### Opdracht 2.1



Figuur 2.2

Deze grafiek geeft het verband weer tussen twee variabelen. Een 'formule' is een zo kort mogelijke beschrijving van dit verband.

Schrijf een mogelijke bij de grafiek passende formule op.

— **Toelichting** —

Geef de opdracht mondeling. Kopieer de grafiek vooraf vanaf het **Werkblad** en deel dit uit.

De uitdaging is het vinden van een zo kort mogelijke formule. Mogelijke hulpvragen: “Kun je (net als in het vorige onderdeel) het verband onder woorden brengen?”, “Welke uitdrukkingen kun je daarna weglaten, inkorten, door rekensymbolen vervangen?”.

Bekijk na afloop de verschillende werkvlakken en ga na welke groepjes al mooie compacte formules hebben gemaakt. Misschien hebben ze zelfs al letters gebruikt voor de variabelen. Bespreek de voordelen (b.v. erg overzichtelijk) en de nadelen (je moet wel onthouden wat alles betekent, welke eenheden erbij horen) van de compacte schrijfwijze.

— **Uitwerking** —

In dit geval hangt de variabele *lengte* af van de variabele *brandtijd*.

Je kunt dit verband beschrijven met de woordformule: de *lengte* =  $20 - 2 \times \text{brandtijd}$ .

**Opdracht 2.2**

In het begin van deze eeuw bestonden er nog telefoons waarmee je alleen kon bellen (en dan bedoel ik niet videobellen). Bij sommige providers betaalde je toen € 0,06 per belminuut. Gebruik de variabelen *belkosten* in euro en *tijd* in minuten.

Vrijwel alle providers rekenden toen ook nog abonnementskosten. Neem aan dat die € 20,00 waren.

Geef een formule voor de *belkosten per maand* afhankelijk van de *tijd*.

Je moet een bepaalde maand € 38,24 betalen. Hoeveel belminuten had je die maand?

— **Toelichting** —

Geef de opdracht mondeling.

Mogelijke hulpvragen: “Kun je (net als in de vorige opdracht) het verband onder woorden brengen?”, “Welke uitdrukkingen kun je daarna weglaten, inkorten, door rekensymbolen vervangen?” en (voor groepjes die willen terugredeneren) “Als je het totale eindbedrag weet, hoe kun je dan bepalen hoeveel je kwijt bent geweest aan alleen het bellen?”, “Hoe reken je dan het aantal belminuten uit?”, of (voor groepjes die geen idee hebben) “Kun je een tabel maken?”, “Helpt een grafiek?”.

Weer na afloop de verschillende uitwerkingen bij langs lopen.

— **Uitwerking** —

Het verband in woorden: de *belkosten per maand* bedragen € 20,00 plus € 0,06 per gebelde minuut.

Formule: *belkosten per maand* =  $0,06 \times \text{tijd} + 20$ .

Als je een bepaalde maand € 38,24 moet betalen, dan heb je voor  $38,24 - 20 = 18,24$  euro aan echte belkosten. Dat betekent dat je  $18,24/0,06 = 304$  belminuten hebt gehad die maand.

Maar een tabel gebruiken (en misschien zelfs een grafiek) is ook goed mogelijk.

**Opdracht 2.3**

Als je begin deze eeuw belde met je mobiele telefoon, betaalde je € 0,06 per minuut. Had je een bepaald abonnement, dan betaalde je ook abonnementskosten per maand, bijvoorbeeld € 20,00. Je *belkosten* (euro) hingen af van de *tijd* (min) die je belde. De *belkosten per minuut* (euro per maand) vind je door de *belkosten* te delen door het aantal minuten.

Geef een formule voor de *belkosten per minuut* afhankelijk van de *tijd*.

Een bepaalde maand betaalde je € 0,12 per minuut. Hoeveel belminuten had je die maand?

---

**Toelichting**

Geef de opdracht mondeling.

Mogelijke hulpvragen: “Kun je (net als in de vorige opdracht) het verband onder woorden brengen?”, “Welke uitdrukkingen kun je daarna weglaten, inkorten, door rekensymbolen vervangen?” en (voor groepjes die willen terugredeneren) “Kun je de formule ook eenvoudiger schrijven?”, “Kun je de deling uitvoeren?”, of (voor groepjes die geen idee hebben) “Kun je een tabel maken?”, “Helpt een grafiek?”.

Weer na afloop de verschillende uitwerkingen bij langs lopen.

---

**Uitwerking**

Een passende formule is:  $belkosten\ per\ minuut = \frac{tijd \times 0,06 + 20}{tijd}$ .

Je moet nu uitzoeken bij welke waarde van *tijd* je uitkomt op 0,12.

Dat kan op verschillende manieren:

- Een tabel maken (en eventueel een grafiek). Bij  $tijd = 333$  minuten kom je het dichtst bij 0,12.
- Schrijf de formule als  $belkosten\ per\ minuut = 0,06 + \frac{20}{tijd}$ . Dan moet hier 0,12 uitkomen, dus

$$\frac{20}{tijd} = 0,06. \text{ Dit betekent } tijd = \frac{20}{0,06} = 333\frac{1}{3}.$$

### Opdracht 2.4

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het opstellen en werken met formules. Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

---

**Toelichting**

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevrraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Het lijkt nu een goed idee om de grafiek van opdracht 1 te laten gebruiken om er de begrippen ‘variabele’, ‘eenheid’ en de bijpassende formule bij te zetten. En dan goed aan te geven welke variabele de afhankelijk variabele is, zowel in de grafiek als in de formule.

Het is denkbaar om de derde paragraaf over te slaan als de leerlingen al veel met tabellen en grafieken bij formules hebben gewerkt, of daarvan alleen een aantal verwerkingsopdrachten van te doen. Noem in dat geval nog wel de termen ‘invoervariabele’ (voor de onafhankelijk variabele) en ‘uitvoervariabele’ (voor de afhankelijk variabele) en ‘substitueren’ voor het invoeren van een getal voor een variabele. E.e.a. zal afhangen van het tempo waarmee de leerstof wordt opgepikt.

---

**Uitwerking**

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

## Theorie

### Om te onthouden

Soms is er een **verband** tussen twee **grootheden**.

Vaak kun je door een bepaalde berekening de afhankelijke variabele uitrekenen als je voor de onafhankelijke variabele een waarde kiest. Zo'n berekening kun je kort weergeven, zoals:  $lengte = 20 - brandtijd \times 2$ .

Zo'n verkorte weergave van een berekening noem je een **formule**. In dit geval zijn de twee variabelen: *brandtijd* (in uur) en *lengte* (in cm).



Figuur 2.3



## Verwerken

### ★ Opgave 2.1

Voor het gebruik van water in een woonhuis betaal je jaarlijks een vast bedrag (vastrecht) en een bedrag voor het aantal  $m^3$  (kubieke meter) water dat je hebt verbruikt (een  $m^3$  is 1000 liter). PWN Waterleidingbedrijf Noord-Holland hanteerde in 2014 de volgende tarieven:

- vastrecht: € 50,70 per jaar
- kosten per  $m^3$ : € 1,31

- Tussen welke twee variabelen is er een verband? Welke eenheden worden gebruikt?
- Welke formule kun je opstellen bij dit verband voor het watergebruik per jaar?

### ★ Opgave 2.2

De oppervlakte van een rechthoek is  $750 \text{ cm}^2$ .

- Bereken de lengte van deze rechthoek als de breedte 15 cm is.
- Hoe breed is de rechthoek als de lengte 150 cm is?
- Geef een formule die het verband tussen *lengte* en *breedte* van deze rechthoek weergeeft.

### ★ Opgave 2.3

In een recreatiegebied zijn twee skeelerverhuurbedrijven actief. Ze hebben verschillende tarieven. Je betaalt bij beide bedrijven een vast bedrag voor onder andere een kaart van de omgeving. Daarbovenop betaal je een bedrag voor elk uur dat je de skeelers huurt.

- Skeelerverhuurbedrijf A: de vaste kosten zijn € 3,00 en de prijs per uur is € 2,50.
- Skeelerverhuurbedrijf B: de vaste kosten zijn € 1,50 en de prijs per uur is € 3,00.

- Tussen welke twee variabelen is er een verband?
- Maak voor beide skeelerverhuurbedrijven een formule voor de *prijs* afhankelijk van het *aantal uur skeelers*.

### ★ Opgave 2.4

Evert spaart voor een computerspelletje. In de tabel zie je hoeveel geld hij gespaard heeft.

<i>week</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>spaargeld</i> (euro)	20	23	26	29	32	35	38	41	44

Tabel 2.1

- Er is een verband tussen het aantal weken dat Evert spaart, en de hoeveelheid geld die hij in zijn spaarpot heeft. Beschrijf dit verband in woorden.
- Geef een formule voor het verband tussen het *aantal weken* dat Evert spaart, en zijn *hoeveelheid spaargeld*.

★ **Opgave 2.5**

In de krant staan twee advertenties voor de aankoop van parket:



**Figuur 2.4**

- a Tussen welke variabelen is in de advertenties van SuperParket en Woonwinkel een verband?
- b Met welke formule kun je de prijs voor parket bij SuperParket uitrekenen?
- c Geef ook een passende formule voor het parket van Woonwinkel. Ga ervan uit dat je de advertentie inlevert.

**Toepassen**

★★ **Opgave 2.6: De formule van Pick**

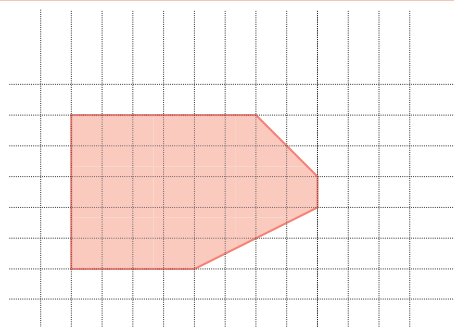
In 1899 bewees de Oostenrijkse wiskundige Georg Alexander Pick (1859—1942) de zogenaamde **formule van Pick** waarmee je de oppervlakte van een veelhoek op een rooster kunt berekenen door punten binnen en op de rand van die veelhoek te tellen.

**Bekijk de applet: formule van Pick**

Hij toonde aan dat als de veelhoek alleen roosterpunten als hoekpunten heeft, geldt:

$$opp = \text{aantal inwendige punten} + \text{aantal randpunten} / 2 - 1$$

- a Bereken met behulp van de formule van Pick de oppervlakte van de figuur hiernaast. Bereken die oppervlakte ook op een andere manier. Klopt de formule van Pick voor deze figuur?
- b Je kunt de formule van Pick testen door veelhoeken te maken waarvan de hoekpunten roosterpunten zijn. Controleer steeds de formule van Pick.
- c Welke waarden kan de oppervlakte van een veelhoek hebben als het aantal randpunten 10 is?
- d Hoe kun je de formule van Pick gebruiken om de oppervlakte van een gebied op een landkaart te bepalen?



**Figuur 2.5**

★ ★ **Opgave 2.7: Energieverbruik door volwassenen**

Je BMR (Basal Metabolic Rate of Basale Stofwisselingsnelheid) is het aantal calorieën dat je lichaam verbrandt om de normale lichaamsfuncties te kunnen uitvoeren, waaronder je bloedcirculatie, temperatuurregulering, spijsvertering en ieder ander stofwisselingsproces in je lichaam. Je BMR neemt lichaamsactiviteit (zoals lopen, fietsen, enzovoorts) niet mee in de berekening.

Je BMR zorgt voor de grootste hap van je dagelijkse caloriebehoefte, zo'n tweederde van het totaal. De BMR verschilt enorm van persoon tot persoon, afhankelijk van erfelijke factoren. Om die BMR te berekenen zijn er voor volwassenen de formules van Harris en Benedict (uit 1919):

- Mannen:  

$$BMR = 66 + 13,7 \times gewicht + 5 \times lengte - 6,8 \times leeftijd$$
- Vrouwen:  

$$BMR = 655 + 9,6 \times gewicht + 1,8 \times lengte - 4,7 \times leeftijd$$

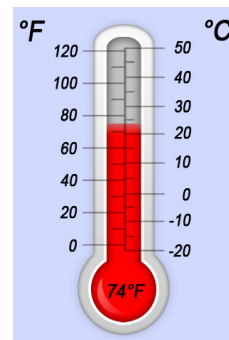
Hierin is *gewicht* in kg, *lengte* in cm en *leeftijd* in jaren uitgedrukt.

- a** Bereken de BMR van een volwassen man van 42 jaar die 1,82 m lang is en 76 kg weegt. Schat ook de totale dagelijkse caloriebehoefte.
- b** Bereken de BMR van een volwassen vrouw van 42 jaar die 1,82 m lang is en 76 kg weegt. Schat ook de totale dagelijkse caloriebehoefte.
- c** Kun je het verschil van beide antwoorden verklaren?
- d** Hoeveel zal jouw eigen BMR zijn als je 21 jaar bent? Maak eerst een zo goed mogelijke schatting van je lengte en je gewicht op die leeftijd.

## 1.3 Formules en grafieken

### Inleiding

Op de iPhone is deze thermometer als app beschikbaar. De temperatuur staat er niet alleen in graden Celsius, maar ook in graden Fahrenheit. Dat komt omdat in veel Engelstalige landen met graden Fahrenheit wordt gewerkt. Voor het omrekenen van de ons vertrouwde graden Celsius naar graden Fahrenheit bestaat een formule. Daar kun je een grafiek bij maken.



Figuur 3.1

#### Je leert in dit onderwerp

- bij een formule de afhankelijk variabele berekenen bij een gegeven waarde van de invoervariabele;
- een grafiek maken bij een formule.

#### Voorkennis

- een formule kunnen gebruiken als rekenmethode.

### Voor de docent

Bij het onderdeel 'Formules en grafieken' gaat het om het 'substitueren' van waarden voor de afhankelijk variabele, de 'invoervariabele' ten einde een tabel een grafiek te kunnen maken bij een formule.

Gewenste materialen:

- Roosterpapier om grafieken op te maken.
- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken.

#### Opdracht 3.1

Je brengt eens per week huis-aan-huisfolders rond. Je krijgt daarvoor een vast bedrag van € 6,00 per week (een fietsvergoeding). Bovendien krijg je € 0,05 per folder.

Maak hierbij een formule en een grafiek van *weekloon* afhankelijk van *aantal folders*.

Bepaal hiermee bij hoeveel folders per week je weekloon € 30,00 wordt.

#### — Toelichting —

Geef de opdracht mondeling.

Mogelijke hulpvragen: "Hoeveel leveren 100 folders per week op? En 200 folders per week?" (laat de termen 'substitueren' en 'substitutie' vallen), "Kun je een tabel maken?", "Hoe ziet de bijpassende formule er uit?" "Welke variabele komt op welke as?" (laat de termen 'invoervariabele' en 'uitvoervariabele' vallen).

Bespreek na afloop de gebruikte terminologie, laat dit aantekenen.

**Uitwerking**

Voor je weekloon geldt de formule:

$$\text{weekloon} = 6,00 + \text{aantal folders} \times 0,05$$

Breng je 100 folders rond, dan is je weekloon:

$$\text{weekloon} = 6,00 + 100 \times 0,05 = 11,00 \text{ euro.}$$

Breng je 200 folders rond, dan is je weekloon:

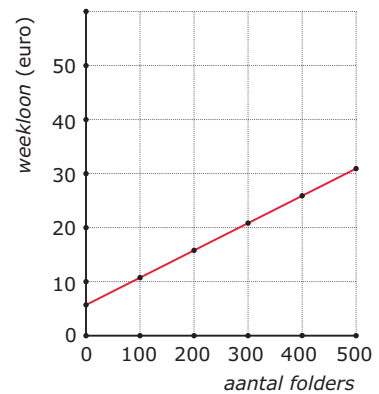
$$\text{weekloon} = 6,00 + 200 \times 0,05 = 16,00 \text{ euro.}$$

Breng je 0 folders rond, dan is je theoretische weekloon:

$$\text{weekloon} = 6,00 + 0 \times 0,05 = 6,00 \text{ euro.}$$

aantal folders	0	100	200	300
weekloon (euro)	6	11	16	21

Tabel 3.1



Figuur 3.2

Weekloon komt als uitvoervariabele op de verticale as, omdat het afhangt van het aantal folders. Aantal folders is de invoervariabele en komt op de horizontale as. Je komt uit op 30 euro als je  $(30 - 6)/0,05 = 480$  folders rondbrengt in een week.

**Opdracht 3.2**

Voor de lengte van een kaars die zojuist is aangestoken, geldt:

$$\text{lengte} = 30 - 1,2 \times \text{brandtijd}, \text{ waarbij de lengte in centimeters is en de brandtijd in uren.}$$

Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?

**Toelichting**

Geef de opdracht mondeling.

Mogelijke hulpvragen: (voor groepjes die willen terugredeneren) "Hoeveel cm moet er zijn opgebrand wil de kaars 'op' zijn?", "Hoe reken je dan het aantal branduren uit?", of (voor groepjes die geen idee hebben) "Kun je een tabel maken?", "Helpt een grafiek?".

Na afloop de verschillende uitwerkingen bij langs lopen.

**Uitwerking**

Maak een tabel en/of een grafiek. Na 25 uur is de kaars opgebrand.

Of:

$$\text{Redeneer: } = 30 - 1,2 \times \text{brandtijd} = 0 \text{ betekent } 1,2 \times \text{brandtijd} = 30, \text{ dus } \text{brandtijd} = 30/1,2 = 25 \text{ uur.}$$

**Opdracht 3.3**

In sommige winkels kun je kopieën maken. De eigenaar van zo'n winkel huurt daarvoor een kopiemachine, zeg voor € 200,00 per maand. Elke kopie kost in werkelijkheid € 0,08 (papier, inkt en elektriciteit). Voor de eigenaar zijn deze kosten per kopie van belang om te bepalen welke prijs hij zijn klanten moet vragen. Bepaal met behulp van een formule en/of een bijbehorende tabel/grafiek hoeveel hij per maand moet vragen om geen verlies te lijden.

**Toelichting**

Geef de opdracht mondeling.

Mogelijke hulpvragen: "Welke formule geldt voor de totale kosten per maand?", "En welke formule geldt voor de kosten per kopie?", "Kun je een tabel maken?" en "Helpt een grafiek?". Tenslotte: "Kun je hier een eenduidig antwoord op geven? Wat zou jij doen?".

Weer na afloop de verschillende uitwerkingen bij langs lopen.

— **Uitwerking** —

Een passende formule is:  $\text{kosten per kopie} = \frac{200 + 0,08 \times \text{aantal}}{\text{aantal}}$ .

Bijpassende tabel:.

<i>aantal</i>	500	1000	1500	2000	2500	3000
<i>kosten per kopie</i>	0,48	0,28	0,21	0,18	0,16	0,15

**Tabel 3.2**

Antwoord: hij zal moeten schatten/ontdekken hoeveel kopieën er per maand worden gemaakt en daar zijn prijs op afstemmen.

**Opdracht 3.4**

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het werken met formules. Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

— **Toelichting** —

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Het lijkt nu een goed idee om de grafiek van één van de opdrachten te laten gebruiken om er de begrippen ‘invoervariabele’ (voor de onafhankelijk variabele) en ‘uitvoervariabele’ (voor de afhankelijk variabele) en ‘substitueren’ voor het invoeren van een getal voor een variabele bij te zetten.

— **Uitwerking** —

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

## Theorie

### Om te onthouden

In de formule  $lengte = 20 - brandtijd \times 2$  is *brandtijd* de **onafhankelijke variabele**, deze wordt ook de **invoervariabele** genoemd. *lengte* is de **afhankelijke variabele**, ook de **uitvoer-variabele** genoemd. Daarom kun je met deze formule eenvoudig de *lengte* (uitkomst) uitrekenen, voor verschillende waarden van *brandtijd* (invoer). Dit doe je door voor *brandtijd* een getal in de formule in te vullen. Het invullen van een getal voor de invoervariabele noem je **substitueren**.

Als je dit voor verschillende waarden van de invoervariabele doet, kun je een tabel maken. En daarbij past dan weer een grafiek.



Figuur 3.3

## Verwerken

### ★ Opgave 3.1

Een benzineauto rijdt met één liter benzine vijftien kilometer.

- Welke formule hoort bij het verband tussen *hoeveelheid benzine* en *afstand*?
- Neem de tabel over en vul verder in.

<i>hoeveelheid benzine</i> (liter)	0	10	20	30	40	50
<i>afstand</i> (km)	0					

Tabel 3.3

- Teken de grafiek bij dit verband.
- Waarom is de grafiek een rechte lijn?

### ★ Opgave 3.2

Lisanne heeft een prepaid telefoon. Ze heeft nog € 12,00 beltegoed. Ze belt voor € 0,08 per minuut.

- Welke formule hoort bij het verband tussen de variabelen *beltegoed* en *beltijd*?
- Teken een grafiek bij deze formule.
- Waarom is de grafiek een rechte lijn?

### ★ Opgave 3.3

Van een rechthoek is de oppervlakte  $600 \text{ cm}^2$ . Voor het verband tussen *lengte* en *breedte* van deze rechthoek geldt:  $lengte = \frac{600}{breedte}$ .

- Leg uit waarom deze formule correct is.
- Maak een tabel bij deze rechthoek. Neem voor *breedte* de waarden 10, 20, 30, 40, 50, 60 en 100.
- Teken een grafiek bij deze formule.
- Waarom is deze grafiek geen rechte lijn?

### ★ Opgave 3.4

Een restaurant heeft nieuwe borden nodig. Deze borden kun je bij twee bedrijven kopen. Bij beide bedrijven betaal je naast de prijs per bord ook een bedrag aan bezorgkosten.

- bedrijf A: de bezorgkosten zijn € 1,95 en de prijs per bord is € 1,80.
- bedrijf B: de bezorgkosten zijn € 7,50 en de prijs per bord is € 1,55.

- Maak voor beide bedrijven een formule voor de *totale kosten* afhankelijk van het *aantal borden*.
- Teken bij beide bedrijven de bijbehorende grafiek (maak hiervoor eerst een tabel).
- Hebben beide grafieken een snijpunt? Wat betekent dit snijpunt?

### ★ Opgave 3.5

Een docent berekent het cijfer voor een toets met de punten die een leerling heeft gescoord. De docent gebruikt de formule:  $cijfer = \text{aantal punten} / 4 + 1$ .

- Welk cijfer krijg je als je 23 punten hebt gehaald?
- Waarom kun je voor deze toets maximaal 36 punten halen?
- Maak een tabel bij deze formule. Kies zelf geschikte waarden voor *aantal punten*.
- Maak een grafiek bij deze tabel.
- Waarom moet die grafiek eigenlijk uit losse punten bestaan? En uit hoeveel punten?



### ★★ **Opgave 3.6**

Er zijn meerdere methodes om de verwachte lengte op volwassen leeftijd te berekenen. Een van deze methodes is de methode van Tanner die uitgaat van de lengte van de ouders. Je krijgt deze formules waarin alle lengtes in cm zijn:

- $\text{lengte jongen} = (\text{lengte moeder} + \text{lengte vader} + 13)/2$
- $\text{lengte meisje} = (\text{lengte moeder} + \text{lengte vader} - 13)/2$

- a De moeder van Achmed is 1,64 meter lang en zijn vader is 1,81 meter lang. Hoe lang zal Achmed worden als hij volwassen is?
- b De moeder van Klasien is 1,76 meter lang en haar vader is 1,84 meter lang. Hoe lang zal Klasien worden?
- c Hoeveel lengteverschil zal er zijn tussen een broer en zus?

## Toepassen

### ★★ **Opgave 3.7: Body Mass Index**

Voor volwassenen is de *BMI* (Body Mass Index, een index voor het gewicht in verhouding tot de lichaamslengte) een getal waaraan je kunt zien of je overgewicht hebt of niet. Dat wordt zo berekend:

$$BMI = \text{gewicht} / (\text{lengte} \times \text{lengte})$$

Hierin is de *lengte* in meters en het *gewicht* in kg. Bij een *BMI* tussen de 18,5 en 25 heb je een normaal gezond gewicht.

- a Kun je bij deze formule een grafiek tekenen?
- b Hoeveel bedraagt de BMI van een volwassene met een lengte van 180 cm en een gewicht van 80 kg?
- c Meestal is de lengte van een persoon een vast gegeven, maar zijn of haar gewicht niet. Neem bijvoorbeeld een volwassen persoon met een lengte van 180 cm. Welke formule geldt voor de BMI van deze persoon?
- d Teken een bijpassende grafiek. Maak eerst een tabel met voor gewicht de waarden 50, 60, 70, 80, 90 en 100.
- e Geef in je grafiek het gedeelte aan dat hoort bij een normaal gewicht. Welke gewichten horen daarbij?
- f Als iemand een gewicht van 90 kg heeft, dan denk je al snel aan iemand met overgewicht. Maar dat hoeft niet. Welke formule voor de BMI geldt voor mensen van 90 kg?
- g Teken een bijpassende grafiek. Maak eerst een tabel met voor lengte de waarden 1,5; 1,6; 1,7...2,2.
- h Geef in je grafiek het gedeelte aan dat hoort bij een normaal gewicht. Welke lengtes horen daarbij?

## Practicum

Het maken van grafieken is vaak nogal tijdrovend. Computerprogramma's zoals MS-Excel, Open Office Calc en Google Sheets kunnen je daarbij helpen. Je noemt dergelijke programma's **rekenbladen** of **spreadsheets**.

Werk daartoe één van deze practica door:

- **MS-Excel: Grafieken bij tabellen**
- **OO Calc: Grafieken bij tabellen**
- **Google Sheets: Grafieken bij tabellen**

. Heb je echt nog nooit met zo'n rekenblad gewerkt, doe dan eerst één van deze practica:

- **MS-Excel: Tafels van vermenigvuldiging**
- **OO Calc: Tafels van vermenigvuldiging**
- **Google Sheets: Tafels van vermenigvuldiging**

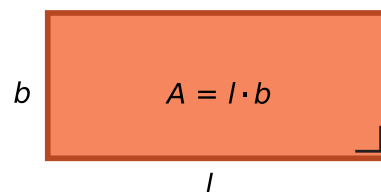
## 1.4 Letterformules

### Inleiding

Je ziet hier een rechthoek.

Maar wat betekenen al die letters en symbolen in de figuur?

Daar ga je nu achter komen...



Figuur 4.1

### Je leert in dit onderwerp

- woordformules omzetten in een letterformule, dus formules verkort noteren;
- de vermenigvuldigingssymbool gebruiken en weglaten in daarvoor geschikte situaties.

### Voorkennis

- het werken met woordformules.

### Voor de docent

Bij het onderdeel 'Letterformules' gaat het om het gebruiken van maar één letter voor elk van de variabelen in een formule.

Gewenste materialen:

- Roosterpapier om grafieken op te maken voor de groepjes die op die manier willen werken. Desgewenst kan hierbij het werken met een spreadsheet worden ingezet.
- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken.

### Opdracht 4.1

In de wiskunde is het gebruikelijk om variabelen niet als woord, maar als één letter weer te geven. Nadeel is dan dat het keerteken  $\times$  dan op een  $\times$  kan lijken. Daarom wordt daarvoor in formules een punt  $\cdot$  gebruikt.

Bij een bioscoop kun je een kortingskaart voor een jaar kopen voor € 15,00. Met deze kortingskaart kun je voor € 5,00 naar de film. Je kunt daarmee berekenen hoeveel je per jaar kwijt bent afhankelijk van het aantal keren dat je naar de film gaat.

Schrijf een bijpassende zo kort mogelijke formule op. Doe dit ook voor de kosten per film.

#### ———— Toelichting ————

Geef de opdracht mondeling.

Mogelijke hulpvragen per formule: "Met welke variabelen heb je te maken?", "Welke letters kies je ervoor?", "Is het handig om bijvoorbeeld de beginletters van variabelen te kiezen? Waarom?", "Welke berekening moet je uitvoeren?"

Bespreek na afloop de gemaakte afspraken, laat dit aantekenen.

#### ———— Uitwerking ————

Je hebt voor de eerste formule te maken met de variabelen  $K$  die de totale jaarlijkse kosten in euro voorstelt en de variabele  $a$  die het aantal keren dat je per jaar naar de film gaat voorstelt. De formule wordt dan  $K = 15 + 5 \cdot a$ .

Je hebt voor de tweede formule te maken met de variabelen  $k$  die de kosten per film in euro voorstelt en de variabele  $a$  die het aantal keren dat je per jaar naar de film gaat voorstelt. De formule wordt dan  $K = \frac{15+5 \cdot a}{a}$  of  $K = \frac{15}{a} + 5$ .

## Opdracht 4.2

Voor de lengte van een kaars die zojuist is aangestoken, geldt:

$$L = 40 - 2,5t$$

daarin is:

- $L$  de lengte van de kaars in cm;
- $t$  het aantal minuten na het aansteken op  $t = 0$ .

Het vermenigvuldigingsteken tussen 2,5 en  $t$  is weggelaten om de formule echt zo kort mogelijk te laten zijn.

1. Kun je altijd zomaar het vermenigvuldigingsteken weglaten?
2. Hoe lang is deze kaars na 5 uur branden?
3. Na hoeveel uur is deze kaars opgebrand?

---

### Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in drie stappen. Schrijf desgewenst de gegevens op je eigen bord.

Mogelijke hulpvragen bij de tweede vraag: "Van welke variabele weet je nu de waarde?", "Kun je die waarde substitueren? Hoe gaat dat?" (goed om dit woord nog eens te laten vallen).

Mogelijke hulpvragen bij de derde vraag: (voor groepjes die willen terugredeneren) "Hoeveel cm moet er zijn opgebrand wil de kaars 'op' zijn?", "Hoe reken je dan het aantal branduren uit?", of (voor groepjes die geen idee hebben) "Kun je een tabel maken?", "Helpt een grafiek?".

Na afloop de verschillende uitwerkingen bij langs lopen. Desgewenst kan hierbij het werken met een spreadsheet opnieuw worden ingezet.

---

### Uitwerking

Het vermenigvuldigingsteken kun je alleen weglaten als er geen misverstand door ontstaat. Dus niet bij het vermenigvuldigen van twee getallen met elkaar, maar wel bij vermenigvuldigingen van variabelen of van getallen met variabelen. (Maar dan moeten die variabelen wel door één letter worden aangegeven.

Na 5 uur branden is deze kaars  $40 - 2,5 \cdot 5 = 40 - 12,5 = 27,5$  cm lang.

Je kunt op twee manieren bepalen na hoeveel uur de kaars op is:

Tabel en/of grafiek gebruiken. Dan zie je dat bij  $t = 16$  geldt dat  $L = 0$ .

Redeneren:  $40 - 2,5 \cdot t = 0$  betekent  $2,5 \cdot t = 40$ , dus  $t = 40/2,5 = 16$  uur.

## Opdracht 4.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het gebruiken van lettervariabelen in formules.

Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

---

### Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

---

### Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

## Theorie

### Om te onthouden

Formules wil je graag zo overzichtelijk mogelijk houden. Daarom worden variabelen als *lengte*, *breedte*, *tijd* en *kosten* aangegeven met maar één letter, vaak hun beginletter. Je moet wel van tevoren goed afspreken wat elke letter precies betekent en je daar dan ook nauwgezet aan houden.

Het teken  $\times$  voor vermenigvuldigen lijkt teveel op de letter  $x$ . Daarom gebruik je in formules de **vermenigvuldigingspunt**  $\cdot$  in plaats van het kruisje.

En als dat geen verwarring oplevert, laat je de vermenigvuldigingspunt gewoon weg.

The diagram shows a rectangle with a red border. The top side is labeled 'b' and the left side is labeled 'l'. Inside the rectangle, the formula  $A = l \cdot b$  is written. A small L-shaped corner symbol is in the bottom right corner of the rectangle.

Figuur 4.2

## Verwerken

### ★ Opgave 4.1

Schrijf de volgende formules zo kort mogelijk.

- a  $\text{ritprijs} = 4,50 + 1,25 \cdot \text{aantal klantkilometers}$
- b  $\text{lengte} = \frac{800}{\text{breedte}}$
- c  $\text{lengte jongen} = \frac{\text{lengte moeder} + \text{lengte vader} + 13}{2}$
- d  $\text{afstand} = \text{gemiddelde snelheid} \times \text{tijd}$

### ★ Opgave 4.2

Een docent berekent het cijfer  $c$  voor een toets vanuit de punten  $p$  die een leerling heeft gescoord.

De docent gebruikt deze formule:  $c = \frac{p}{60} \cdot 9 + 1$ .

- a Wat is je cijfer als je veertig punten hebt?
- b Waarom kun je voor deze toets maximaal zestig punten halen?
- c Maak een grafiek bij deze formule.
- d Lees in de grafiek af vanaf hoeveel punten je een 5,5 of hoger krijgt. Reken dat na met de formule.

### ★ Opgave 4.3

Voor het maken van een fotoboek met eigen digitale foto's betaal je € 5,95. Voor elke foto die je erin wilt zetten betaal je € 0,15 bij. Als  $x$  het aantal foto's is, wat zijn dan de kosten  $k$  per foto?

- a Maak een bijpassende formule.
- b Neem  $x = 15$  en bereken  $k$ .
- c Zal  $k$  ooit minder worden dan € 0,20? Licht je antwoord toe.

### ★ Opgave 4.4

Bekijk de volgende situaties waarbij een formule is gegeven. Niet alle formules zijn goed. Geef aan of de formule goed of fout is. Als de formule fout is, verbeter deze dan.

- a Leo is drie jaar ouder dan zijn broer Zack. Er is een verband tussen hun leeftijden.  
De formule is:  $L = 3Z$ , waarbij  $L$  de leeftijd van Leo in jaren is en  $Z$  de leeftijd van Zack in jaren.
- b Een machine produceert tweehonderd fotolijstjes per uur. Je kunt het totale aantal fotolijstjes dat de machine produceert, met een formule berekenen.  
De formule is:  $A = 200t$ ; hierbij is  $A$  het aantal fotolijstjes dat de machine geproduceerd heeft en  $t$  de tijd in uren.
- c Aan een meer kun je waterfietsen huren. Daarvoor betaal je € 2,50 administratiekosten en € 5,00 huur per uur. Er is een verband tussen de totale kosten en het aantal uur dat je de waterfietsen huurt.  
De formule is:  $t = 2,50 + 5,00k$ , waarbij  $t$  de tijd in uren is waarin je een waterfiets huurt en  $k$  de totale kosten die je betaalt in euro's.

### ★ Opgave 4.5

Bij een drukkerij kun je boekjes laten drukken. Een boekje van ongeveer twintig bladzijden kost € 3,00 per boekje. Daarbij komen nog de algemene kosten voor onder andere de digitale bewerking. Deze kosten zijn € 10,00.

- a Als  $a$  het aantal boekjes is en  $k$  de totale kosten per boekje in euro, wat is dan de formule voor de totale kosten per boekje?
- b Neem  $a$  is 30 en bereken  $k$ .
- c Hoe verwoord je "Bereken  $k$  als  $a = 30$ " in normaal Nederlands?
- d Kan  $k$  kleiner worden dan € 3,00?

## Toepassen

★ ★

### Opgave 4.6: Krekels

Midas Dekkers is bioloog en schrijver van verschillende boeken. Hij schrijft bijvoorbeeld over het getjirp van de krekel. Hoe hoger de temperatuur, hoe sneller de krekel tjirpt. Daarom kun je door het aantal tjirpen van een krekel te tellen, de temperatuur in graden Celsius bepalen. Midas Dekkers gebruikt voor de sneeuwboomkrekkel een formule waarbij je moet uitgaan van het gemiddeld aantal tjirpen per minuut. Je trekt er 40 af, deelt de uitkomst door 7 en telt er 10 bij op.



Figuur 4.3 Bron: Wikipedia

- a Noem het gemiddeld aantal tjirpen per minuut  $n$ . Welke formule geldt dan voor de temperatuur  $T$  in  $^{\circ}\text{C}$ ?
- b Een sneeuwboomkrekkel tjirpt 96 keer per minuut. Bereken de temperatuur.
- c Het is makkelijker om 15 seconden lang te tellen hoeveel tjirpen de sneeuwboomkrekkel maakt. Hoe hoog is de temperatuur als de krekel 27 keer tjirpt in 15 seconden?
- d Teken een bijpassende grafiek.
- e Geef in je grafiek het gedeelte aan dat hoort bij temperaturen van  $20^{\circ}\text{C}$  tot  $25^{\circ}\text{C}$ . Welke waarden voor  $n$  horen daar ongeveer bij?

## 1.5 Vergelijkingen

### Inleiding

Je bepaalt je (Europese) schoenmaat  $s$  door de lengte van je voet  $v$  in centimeters te meten. Er geldt:  $s = 1,5 \cdot (v + 2)$ .

Hiermee kun je ook iemand's voetlengte berekenen als je zijn schoenmaat weet.



Figuur 5.1

### Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking opstellen aan de hand van gegeven informatie;
- een vergelijking oplossen door inklemmen;
- een vergelijking oplossen door handig rekenen.

### Voorkennis

- werken met formules.

### Voor de docent

Bij het onderdeel 'Vergelijkingen' gaat het om de begrippen vergelijking en oplossing(en). En ook om het vinden van die oplossingen met tabellen en/of grafieken (inklemmen). Tenslotte is het de bedoeling dat de leerlingen er achter komen dat een zo tijdrovend middel als inklemmen soms niet nodig is, handig rekenen kan vaak ook.

Gewenste materialen:

- Roosterpapier om grafieken op te maken voor de groepjes die op die manier willen werken. Desgewenst kan hierbij het werken met een spreadsheet worden ingezet.
- Schrijfmateriaal voor op de verticale werkvlakken.

### Opdracht 5.1

Op school staat een kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor € 0,10 per kopie gebruik van maken. De school huurt deze machine voor € 150,00 per maand en elke kopie kost de school 7,5 eurocent.

De vraag: "Vanaf hoeveel kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?" noem je een vergelijking.

Stel formules op voor de kosten per maand en voor de inkomsten per maand.

Schrijf met die formules de vergelijking in formulevorm.

Probeer een oplossing te vinden.

### Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Mogelijke hulpvragen per formule: "Met welke variabelen heb je te maken?", "Welke letters kies je ervoor?", "Hoe schrijf je het vergelijken van twee formules als één vergelijking op?", "Hoe kun je nu bepalen wanneer uit beide formules hetzelfde komt?" en "Is een grafiek nuttig?".

Besprek na afloop de werkwijzen van de verschillende groepen. Misschien alvast de vraag neerleggen hoe je dit doet als de uitkomst niet gemakkelijk is te vinden, of op decimalen uitkomt?

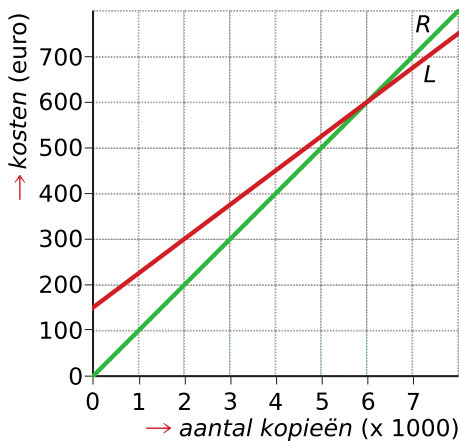
**Uitwerking**

Je hebt voor de kostenformule te maken met de variabelen  $K$  die de totale maandelijkse kosten in euro voorstelt en de variabele  $a$  die het aantal kopieën per maand voorstelt. De formule wordt dan  $K = 150 + 0,75a$ .

Je hebt voor de inkomstenformule te maken met de variabelen  $I$  die de inkomsten per maand in euro voorstelt en de variabele  $a$  die het aantal het aantal kopieën per maand voorstelt. De formule wordt dan  $I = 0,10a$ .

De vergelijking wordt:  $150 + 0,075a = 0,10a$ .

Als je de oplossing niet meteen ziet, kun je er altijd uitkomen door getallen voor  $a$  in te vullen, net zolang tot je de juiste waarde voor  $a$  gevonden hebt. Doe dat wel systematisch, dus met een tabel. Links van het isgelijktteken heb je:  $K = 150 + 0,075a$ . Rechts van het isgelijktteken heb je:  $I = 0,10a$ . De bijbehorende grafiek wordt:



**Figuur 5.2**

In dit geval zit de oplossing meteen in de tabel: bij  $a = 6000$  zijn  $K$  en  $I$  gelijk!

**Opdracht 5.2**

Twee kaarsen worden tegelijk aangestoken.

De linkerkaars is 20 cm en wordt elk uur 1,5 cm korter.

De rechterkaars is 30 cm en wordt elk uur 3,25 cm korter.

Noem de brandtijd in uren  $t$ .

Met welke vergelijking kun je berekenen wanneer de kaarsen even lang zijn? Geef het antwoord in minuten nauwkeurig.

**Toelichting**

Geef de opdracht mondeling, schrijf desgewenst de gegevens op je eigen bord.

Mogelijke hulpvragen: “Welke formule kun je opschrijven voor de linkerkaars?”, “En voor de rechterkaars?”, “Welke vergelijking krijg je dus?”, “Kun je een tabel maken?”, “Helpt een grafiek?” en “Hoe kun je nauwkeuriger zoeken?”.

Na afloop de verschillende uitwerkingen bij langs lopen, laat daarbij het woord ‘inklemmen’ vallen. Desgewenst kan hierbij het werken met een spreadsheet opnieuw worden ingezet.



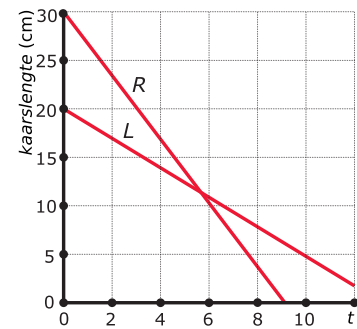
**Uitwerking**

De vergelijking is  $20 - 1,50t = 30 - 3,25t$ .

Maak een tabel en een grafiek bij  $L = 20 - 1,50t$  en  $R = 30 - 3,25t$ .

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	20,00	18,50	17,00	15,50	14,00	12,50	11,00	9,50	8,00
R	30,00	26,75	23,50	20,25	17,00	13,75	10,50	7,25	4,00

Tabel 5.1



Figuur 5.3

Je ziet dat de oplossing tussen  $t = 5$  en  $t = 6$  zit. Je maakt dan een nieuwe tabel tussen 5 en 6 met  $t$  in één decimaal.

Nu vind je dat de oplossing tussen  $t = 5,7$  en  $t = 5,8$  zit. Op gehelen afgerond krijg je  $t \approx 6$ . De kaarsen zijn dus na ongeveer zes uur even lang.

Wil je het antwoord nog nauwkeuriger krijgen, dan maak je een tabel tussen 5,7 en 5,8 met  $t$  in twee decimalen. Je vindt dan de oplossing tussen  $t = 5,71$  en  $t = 5,72$ . Op één decimaal nauwkeurig wordt je antwoord  $t \approx 5,7$ . De kaarsen zijn dus na ongeveer 5,7 uur even lang, dat is na 5 uur en 42 minuten (0,7 maal 60 minuten).

**Opdracht 5.3**

Iemand's schoenmaat  $s$  kun je bepalen vanuit de lengte  $v$  van zijn voet in cm. Er geldt:

$$s = 1,5 \cdot (v + 2)$$

Weet je iemand's schoenmaat, dan kun je zijn voetlengte bepalen. Neem bijvoorbeeld iemand met schoenmaat 42.

De daarbij horende vergelijking hoef je niet op te lossen door inklemmen. Even nadenken helpt ook. Laat dat zien.



Figuur 5.4

**Toelichting**

Geef de opdracht mondeling, schrijf de formule op je eigen bord.

Mogelijke hulpvragen: "Hebben jullie de vergelijking al opgeschreven?" en dan ga je indien nodig 'handoplegging' toepassen met vragen als "Welk getal moet er onder mijn hand(en) komen te staan?", "Hoe schrijf je dat dan op?" en herhaal dit tot het antwoord is gevonden. Stel tenslotte de vraag: "Hoe kun je het antwoord controleren?"

Weer na afloop de verschillende uitwerkingen bij langs lopen en bespreken wanneer het idee van 'handoplegging/afdekken' is te gebruiken. (De variabele moet maar op één plek voorkomen.)

**Uitwerking**

De vergelijking is:  $42 = 1,5 \cdot (v + 2)$ .

De vergelijking ziet er uit als  $42 = 1,5 \cdot [...]$ .

Je kunt dan [...] vinden door  $\frac{42}{1,5}$  uit te rekenen, uitkomst 28.

Omdat [...] eigenlijk  $v + 2$  is, krijg je dus  $v + 2 = 28$  en dit klopt als  $v = 26$ .

De gevraagde voetlengte is 26 cm.

(In werkelijkheid is 42 een schoenmaat voor iedereen vanaf  $s = 41,5$  tot en met  $S = 42,4$  en zijn er meerdere voetlengtes met deze schoenmaat.)

### **Opdracht 5.4**

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over wat een vergelijking is en over het oplossen van vergelijkingen met behulp van tabellen en grafieken, maar ook door 'handig rekenen'.  
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

---

#### **Toelichting**

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Het overzicht kan bestaan uit vier blokken: één met de kernwoorden naast één met een voorbeeld van een vergelijking ernaast en eronder twee voorbeelden (één met inkleppen als opdracht 2 en één met handig rekenen als opdracht 3).

---

#### **Uitwerking**

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

## Theorie

### Om te onthouden

In een **vergelijking** zijn twee uitdrukkingen met één of meer variabelen gelijk aan elkaar.

Vaak bevat een vergelijking één variabele:  $x$ .

Je zoekt dan de waarde(n) voor  $x$  die ervoor zorgen dat de linker- en rechterzijde van de vergelijking gelijk zijn. De waarden van  $x$  die deze vergelijking kloppend maken, heten de **oplossingen van een vergelijking**.

Om deze oplossingen te vinden kun je gebruik maken van grafieken.

Je vergelijkt dan in een grafiek de uitkomsten van de linkerzijde met die van de rechterzijde van de vergelijking. In een snijpunt hebben linker- en rechterzijde dezelfde uitkomst.

Soms kun je zo'n snijpunt exact aflezen en is de bijbehorende  $x$ -waarde een oplossing van de vergelijking.

Vaak kun je zo'n snijpunt alleen benaderen door systematisch **inklemmen** met behulp van een tabel, zie **Voorbeeld 3**.

Het is soms ook mogelijk om een oplossing te bepalen door **handig rekenen**, zie **Voorbeeld 3**.

## Verwerken

### ★ Opgave 5.1

Bij het opbranden van een kaars hoort de formule  $L = 30 - 4t$ , waarin  $L$  de lengte in centimeters en  $t$  de brandtijd in uren is.

- Waaraan zie je dat dit een lange dunne kaars is?
- Welke vergelijking hoort bij de vraag: "Na hoeveel uren branden is deze kaars nog zestien centimeter lang?"
- Los deze vergelijking op met behulp van een grafiek.
- Controleer je antwoord door de oplossing in de vergelijking in te vullen.

### ★ Opgave 5.2

Hoveniersbedrijf Jongman rekent voor het winterklaar maken van een tuin € 75,00 plus € 2,50 per  $m^2$ .

- Maak een formule bij het verband tussen de oppervlakte  $A$  van de tuin en de kosten  $K$  voor het winterklaar maken.
- Meneer Van Gils heeft zijn tuin laten opknappen. Hij krijgt een rekening van € 475,00. Welke vergelijking moet je oplossen om te weten hoe groot de tuin van meneer Van Gils is?
- Los deze vergelijking op met behulp van een tabel en een grafiek. Hoe groot is de tuin van meneer Van Gils? Geef je antwoord in  $m^2$  nauwkeurig.

Het concurrerende hoveniersbedrijf Green Garden rekent voor het winterklaar maken slechts € 25,00 en daarbij € 3,60 per  $m^2$ .

- Welke vergelijking hoort bij "Bij welk aantal  $m^2$  zijn beide bedrijven even duur"?
- Los deze vergelijking op met behulp van tabellen en een grafiek door in te klemmen. Geef je antwoord in gehele  $m^2$  nauwkeurig.

### ★ Opgave 5.3

Van een vierkant heeft elke zijde een lengte van  $z$  cm.

- Welke formule geldt voor de oppervlakte  $A$  ( $cm^2$ ) van dit vierkant?
- Zo'n vierkant heeft een oppervlakte van  $100 cm^2$ .  
Hoe groot is  $z$  dan?
- Zo'n vierkant heeft een oppervlakte van  $10 cm^2$ .  
Met welke vergelijking kun je bepalen hoe groot  $z$  is?
- Los die vergelijking op met behulp van inklemmen en bereken  $z$  in drie decimalen nauwkeurig.

### ★ Opgave 5.4

Een aannemer krijgt de opdracht een kantoor te bouwen. Deze opdracht houdt 24000 manuren werk in. Dus als één man al het werk zou doen, zou hij er 24000 uur mee bezig zijn.

- Stel dat er twintig mensen aan het kantoorgebouw werken. Hoeveel uur zal ieder dan gemiddeld bezig zijn met deze klus?
- Hoeveel uur werkt iedere werknemer gemiddeld als er honderd mensen het werk zijn? In hoeveel weken van veertig uur kan het kantoor dan gebouwd worden?
- Stel een formule op voor het gemiddeld aantal te werken uren per werknemer  $a$  afhankelijk van het aantal werknemers  $w$  dat aan dit gebouw werkt.
- De opdrachtgever wil dat de aannemer het kantoorgebouw in drie maanden bouwt. Ga weer uit van een 40-urige werkweek. Met welke vergelijking kan de aannemer uitrekenen hoeveel werknemers hij in moet zetten?
- Los die vergelijking op. Hoeveel werknemers zal de aannemer inzetten?

★ **Opgave 5.5**

Los de volgende vergelijkingen op door slim rekenen. Geef het antwoord exact, zonder benaderingen.

a  $60 - 1,9 \cdot t = 10$

b  $\frac{2v}{3} + 15 = 21$

c  $\frac{1}{4} \cdot (20 - x) = 2$

d  $126 - 2 \cdot z \cdot z = 28$

**Toepassen**

Een fabrikant brengt het nieuwe zuivelproduct ActivExtra uit.

De productiekosten zijn tweeledig:

- vaste maandelijkse kosten (machines, opslag, e.d.): € 25.000.
- kosten per liter (ingrediënten, verpakking): € 0,80.

Hij denkt ActivExtra voor € 1,15 per liter te kunnen verkopen.

Economen spreken in deze situatie van een **break-even-point**. Dat is het punt waarin de opbrengst  $R$  gelijk is aan de totale kosten  $K$ .

Noem het aantal liters dat per maand wordt verkocht  $x$ , dan geldt:  $R = 1,15 \cdot x$ .

Ga je er van uit dat ook het aantal maandelijks geproduceerde liters  $x$  is, dan geldt:  $K = 25000 + 0,80 \cdot x$ .

Maak je een grafiek van  $R$  en een grafiek van  $K$  in één figuur, dan is het break-even-point het snijpunt van beide.

Voor het break-even-point geldt de vergelijking:  $1,15 \cdot x = 25000 + 0,80 \cdot x$ .

Deze vergelijking levert op:  $x \approx 71429$ . (Afgerond op gehelen.)

De fabrikant gaat winst maken als hij 71.429 L of meer ActivExtra per maand produceert en verkoopt.

★ ★ **Opgave 5.6: Break-even-point**

In **Toepassen** zie je dat in de economie soms met vergelijkingen wordt gewerkt en wat onder een 'break-even-point' wordt verstaan.

a Los de vergelijking  $1,15 \cdot x = 25000 + 0,80 \cdot x$  op.

b Wat is nu het break-even-point in dit geval?

c Waarom is het in feite niet erg nuttig om de vergelijking tot op liters nauwkeurig op te lossen?

De firma ArtDraw verkoopt een bepaald tekenpotlood van € 1,20 per stuk. De kosten om deze potloden te kunnen produceren bedragen € 0,45 per potlood plus € 35000,00 vaste kosten per maand. Ga er van uit dat elk geproduceerd potlood ook wordt verkocht.

d Met welke vergelijking kun je nu het break-even-point berekenen voor de verkoop van deze potloden?

e Vanaf welk aantal potloden gaat ArtDraw winst maken?

★ ★ **Opgave 5.7: Tsjirpende krekels**

Volgens bioloog Midas Dekkers kun je de temperatuur  $T$  in °C berekenen met behulp van het gemiddeld aantal tsjirpen  $n$  per minuut van de sneeuwboomkrekkel. Er geldt:

$$T = \frac{n-40}{7} + 10$$

a De temperatuur bedraagt 20 °C. Hoeveel keer per minuut tsjirpt de sneeuwboomkrekkel dan? Bepaal je antwoord door de bijbehorende vergelijking op te lossen.

b De temperatuur bedraagt 25 °C. Hoeveel keer per minuut tsjirpt de sneeuwboomkrekkel nu gemiddeld vaker dan bij 20 °C?

## 1.6 Totaalbeeld

### Samenvatten

#### Begrippenlijst

- verband — grootheid met eenheid — afhankelijke en onafhankelijke variabele
- (woord)formule
- grafiek bij een formule — invoervariabele — substitueren
- lettervariabele — vermenigvuldigingspunt
- vergelijking, linker- en rechterzijde — oplossing(en) van een vergelijking — inklemmen

#### Activiteitenlijst

- verbanden beschrijven in woorden, en er tabellen en grafieken bij maken — variabelen gebruiken
- verbanden beschrijven in (woord)formules en daar tabellen en grafieken bij maken
- grafieken tekenen vanuit een formule
- letters gebruiken voor variabelen — formules zo kort mogelijk schrijven
- formules vergelijken — vergelijkingen oplossen met behulp van grafieken en inklemmen in een tabel — vergelijkingen oplossen door handig rekenen

#### Opgave 6.1

Taxibedrijf A berekent de ritprijs als volgt: als de rit begint, staat de taximeter op 4,00 euro. Voor iedere afgelegde kilometer betaal je 2,50 euro.

- Tussen welke variabelen is er een verband?
- Geef dit verband zo kort mogelijk in woorden weer.
- Bereken de ritprijs als je 18 kilometer met de taxi meerijs.
- Maak een tabel bij dit verband en teken een grafiek bij die tabel.
- Verklaar de vorm van de geschetste grafiek.

#### Opgave 6.2

Je rekt opnieuw met de gegevens van Taxibedrijf A: als de rit begint, staat de taximeter op 4,00 euro. Voor iedere afgelegde kilometer betaal je 2,50 euro.

- Beschrijf dit verband met een formule. Gebruik de variabelen *ritlengte* in km en *ritprijs* in euro.
- Gebruik de formule. Welke ritprijs hoort er bij *ritlengte* = 8,5?
- Gebruik de grafiek uit de vorige opgave. Schat welk aantal gereden kilometers hoort bij *ritprijs* = 25.

#### Opgave 6.3

Taxibedrijf B berekent de ritprijs met de formule:  $ritprijs = 3,25 + 2,75 \times ritlengte$ . Hierin is *ritprijs* in euro en *ritlengte* in km.

- Welke ritprijs hoort bij *ritlengte* = 8,5?
- Vergelijk taxibedrijf B met taxibedrijf A uit de vorige opgave. Welk van beide bedrijven kies je als je 8,5 km met de taxi moet rijden om op een bestemming te komen?
- Maak een grafiek bij de formule die hoort bij het taxibedrijf B. Teken deze grafiek in dezelfde grafiek als die van taxibedrijf A.
- Lees uit je grafiek af welk van beide taxibedrijven voor welke aantallen kilometers voordeliger is.

### Opgave 6.4

Formules wil je graag zo kort en overzichtelijk mogelijk hebben. Daarbij gebruik je de eigenschappen van het rekenen met getallen en stel je variabelen voor door letters. Schrijf de volgende formules zo kort en overzichtelijk mogelijk.

- a  $omtrek = lengte + breedte + lengte + breedte$
- b  $oppervlakte = zijde \times zijde$
- c  $prijs\ per\ foto = \frac{4,50 + 7 \cdot aantal}{aantal}$ .

### Opgave 6.5

Taxibedrijf C gebruikt de volgende formule om de ritprijs te berekenen:

$$p = 3,50 + 2,80 \cdot x.$$

Hierin is  $p$  de ritprijs in euro en  $x$  het aantal gereden km.

- a Bereken  $p$  als  $x = 16$ .
- b Je wilt  $x$  berekenen als  $p = 50$ . Welke vergelijking hoort hier bij?
- c Los de vergelijking op met behulp van een grafiek.
- d Los de vergelijking van deelvraag b op met behulp van inklemmen in twee decimalen nauwkeurig.
- e Je kunt de vergelijking ook oplossen door handig rekenen. Laat zien hoe.

## Testen

### ★ Opgave 6.6

Je gaat in de zomervakantie kersen plukken en krijgt per gevuld kistje € 2,50. Ook krijg je per dag een vast bedrag, de 'voorfietskosten', van € 7,50.

- a Hoeveel verdien je op een dag als je vijf kistjes vult?
- b Tussen welke twee variabelen bestaat er een verband?
- c Wat is de afhankelijke variabele en wat is de onafhankelijke variabele?
- d Geef een zo kort mogelijke formule die je loon uitdrukt in het aantal kistjes. Gebruik voor je loon de letter  $L$  en voor het aantal kistjes de letter  $k$ .
- e Substitueer  $k = 12$  in de formule en bereken  $L$ .

### ★ Opgave 6.7

Wanneer je op reis gaat, kun je een reisverzekering afsluiten. Daarvoor betaal je de verzekeringsmaatschappij een bepaalde premie. Bij DALIV betaal je een eenmalige afsluitprovisie en daarnaast een vast bedrag per dag. De tabel laat enkele premies zien.

reistijd (dag)	5	10	15	20
premie (euro)	17,50	30,00	42,50	55,00

Tabel 6.1

- a Tussen welke variabelen is hier een verband? Wat is de afhankelijke variabele en wat is de onafhankelijke variabele?
- b Hoe kun je aan de tabel zien dat je een vast bedrag per dag betaalt? Hoe groot is dat bedrag?
- c Hoe kun je uit de tabel afleiden dat de bijbehorende grafiek niet door  $O(0,0)$  gaat?
- d Beschrijf dit verband in woorden.
- e Beschrijf het verband tussen *reistijd* en *premie* met een formule.
- f Bereken de *premie* bij een *reistijd* van achttien dagen.
- g Schrijf de formule zo kort mogelijk.

★ **Opgave 6.8**

Schrijf de volgende formules zo kort mogelijk. Geef ook aan waar de letters in de formule voor staan, en geef mogelijke eenheden.

- a  $beltegoed = 20,00 - 0,15 \cdot beltijd$
- b  $inhoud\ balk = lengte \cdot breedte \cdot hoogte$
- c  $kosten\ per\ foto = \frac{250,00 + 0,08 \cdot aantal}{aantal}$
- d  $BMI = \frac{gewicht}{lengte \cdot lengte}$

★ **Opgave 6.9**

Van een cilindervormige kaars verandert de lengte  $L$  (cm) als je hem aansteekt volgens de formule  $L = 32 - 1,5t$ . Hierin is  $t$  de brandtijd in uren.

- a Hoe zie je aan deze formule dat de kaars telkens korter wordt?
- b Je wilt weten na hoeveel uur deze kaars is opgebrand. Welke vergelijking hoort daarbij?
- c Los deze vergelijking op in één decimaal nauwkeurig door handig rekenen.

Een andere cilindervormige kaars wordt tegelijk met de eerste kaars aangestoken. Bij deze kaars verandert de lengte  $L$  (cm) als je hem aansteekt volgens de formule  $L = 39 - 3t$ . Ook bij deze formule is  $t$  de brandtijd in uren.

- d Na hoeveel uur branden zijn beide kaarsen even lang? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

★ **Opgave 6.10**

De kosten voor het drukwerk van folders bestaan bij ImPrint uit:

- een vast bedrag van € 31,50
- een bedrag van € 0,02 per folder

- a Hoe hoog zijn de drukkosten per folder als je duizend folders bestelt?
- b Stel een formule op voor de drukkosten per folder  $k$  (euro) afhankelijk van het aantal folders  $a$  dat je bestelt.
- c Maak een grafiek bij deze formule.
- d Verklaar de vorm van de grafiek.
- e Hoeveel folders moet je bestellen als je per folder niet meer dan € 0,03 aan drukkosten wilt hebben? Bereken door middel van inklemmen.
- f Is het mogelijk om zo veel folders te bestellen dat je per folder € 0,015 aan drukkosten betaalt?

★ **Opgave 6.11**

Het bedrijf Overmars is gespecialiseerd in verhuizingen. De kosten van een verhuizing worden bepaald door:

- de *tijd* in uren die de verhuizers bezig zijn met het inpakken en uitpakken van de spullen: € 150,00 per uur;
- de *afstand* in km waarover verhuisd wordt: € 2,50 per km.

- a De familie De Bruijn verhuist met Overmars van Haarlem naar Zutphen (125 km). Voor het in- en uitpakken hebben de verhuizers zes uur nodig. Wat kost deze verhuizing?
- b Stel een formule op voor de kosten  $K$  (euro) afhankelijk van de in- en uitpaktijd  $t$  (uur) en de te rijden afstand  $a$  (km).
- c Een verhuizing van Breda naar Tilburg (20 km) met Overmars kost € 1550,00. Hoeveel uur zijn de verhuizers bezig geweest met inpakken en uitpakken? Gebruik een vergelijking.
- d Een andere verhuizing met Overmars kostte € 965,00. Voor het in- en uitpakken was 5,5 uur nodig. Over welke afstand ging deze verhuizing? Gebruik hier ook een vergelijking.



★ **Opgave 6.12**

Los de volgende vergelijkingen op door slim rekenen.

- a  $8 \cdot x + 450 = 560$
- b  $8 \cdot (x + 15) = 200$
- c  $\frac{100}{2 \cdot x + 7} = 4$
- d  $4 \cdot x \cdot x - 9 = 91$

**Toepassen**

**Opgave 6.13: Formules en grafieken met XL**

Het spreadsheetprogramma MS-Excel is zeer geschikt voor het werken met tabellen, grafieken en formules. Met behulp van een practicum 'Grafieken bij tabellen' kun je leren hoe je met dit programma een grafiek bij een tabel en een tabel bij een formule maakt.

Via [Grafieken bij tabellen in Excel 2007 of 2010](#) vind je het genoemde practicum. Heb je een nieuwere versie van Excel, ga dan naar [Grafieken bij tabellen in Excel 2013 of hoger](#). Voer het practicum uit.

★ ★ **Opgave 6.14: Snelheid van schaatsters**

Vrouwen leggen tijdens een schaatstoernooi onder andere 3000 meter af. In de tabel staan de tijden van een schaatster tijdens een rit over 3000 meter:

afstand (m)	200	600	1000	1400	1800	2200	2600	3000
tijd (sec)	19,7	53,7	87,8	121,6	155,5	188,7	222,5	256,5

**Tabel 6.2**

Uit de tabel kun je opmaken dat de schaatster niet steeds even hard schaatste. Toch kun je proberen een formule te maken bij het verband tussen de *afstand* en de *tijd*.

- a Teken in een assenstelsel de acht punten uit de tabel. Teken zo goed mogelijk een rechte lijn door de punten (de lijn gaat door de oorsprong). Door welk punt moet die lijn in ieder geval gaan?
- b Hoeveel meter schaatste deze schaatster gemiddeld per seconde?
- c Welke formule geldt voor deze schaatster bij het verband tussen de afgelegde afstand  $a$  (in m) en de tijd  $t$  (in seconden)?

Verzamel actuele gegevens met betrekking tot de eindtijden van zowel voor mannen als vrouwen. Gebruik bijvoorbeeld de wereldrecords op de 500, de 1500, de 3000, de 5000 en de 10.000 m.

- d Stel voor ieder van deze afstanden een formule op voor de afgelegde afstand  $a$  (in m) en de tijd  $t$  (in seconden). Verklaar de verschillen.

# Leerdoelentabel

In het  achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:

✓ goed gemaakt — S wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — H hulp nodig gehad — G samen met groepje goed gemaakt — X fout gemaakt en niet goed begrepen — N niet bekeken

<b>1</b>	<b>Verbanden en variabelen</b>	★	★★	★★★
	Afhankelijke en onafhankelijke variabelen onderscheiden.	1.1 <input type="checkbox"/> 1.2 <input type="checkbox"/> 1.3 <input type="checkbox"/> 1.4 <input type="checkbox"/> 1.5 <input type="checkbox"/> T 6.6 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/>	1.6 <input type="checkbox"/> 1.7 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	
	Een verband in woorden beschrijven.	1.1 <input type="checkbox"/> 1.2 <input type="checkbox"/> 1.3 <input type="checkbox"/> T 6.6 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/>	1.6 <input type="checkbox"/> 1.7 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	
	Een tabel en/of grafiek maken bij een verband in woorden.	1.1 <input type="checkbox"/> 1.2 <input type="checkbox"/> 1.3 <input type="checkbox"/> 1.4 <input type="checkbox"/> 1.5 <input type="checkbox"/> T 6.6 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/>	1.6 <input type="checkbox"/> 1.7 <input type="checkbox"/>	
<b>2</b>	<b>Formules opstellen</b>	★	★★	★★★
	Een formule bij een verband opstellen.	2.1 <input type="checkbox"/> 2.2 <input type="checkbox"/> 2.3 <input type="checkbox"/> 2.4 <input type="checkbox"/> 2.5 <input type="checkbox"/> T 6.6 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/>	2.6 <input type="checkbox"/> 2.7 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	
	De waarde van de (on)afhankelijke variabele berekenen met behulp van een woordformule.		2.6 <input type="checkbox"/> 2.7 <input type="checkbox"/>	
<b>3</b>	<b>Formules en grafieken</b>	★	★★	★★★
	Bij een formule de afhankelijk variabele berekenen bij een gegeven waarde van de invoervariabele.	3.1 <input type="checkbox"/> 3.2 <input type="checkbox"/> 3.3 <input type="checkbox"/> 3.4 <input type="checkbox"/> 3.5 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/>	3.6 <input type="checkbox"/> 3.7 <input type="checkbox"/>	
	Een grafiek maken bij een formule.	3.1 <input type="checkbox"/> 3.2 <input type="checkbox"/> 3.3 <input type="checkbox"/> 3.4 <input type="checkbox"/> 3.5 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/>	3.6 <input type="checkbox"/> 3.7 <input type="checkbox"/>	
<b>4</b>	<b>Letterformules</b>	★	★★	★★★
	Woordformules omzetten in een letterformule, dus formules verkort noteren.	4.1 <input type="checkbox"/> 4.2 <input type="checkbox"/> 4.3 <input type="checkbox"/> 4.4 <input type="checkbox"/> 4.5 <input type="checkbox"/> T 6.6 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/> T 6.8 <input type="checkbox"/> T 6.9 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/>	4.6 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	
	De vermenigvuldigingspunt gebruiken en weglaten in daarvoor geschikte situaties.	4.1 <input type="checkbox"/> 4.2 <input type="checkbox"/> 4.3 <input type="checkbox"/> 4.4 <input type="checkbox"/> 4.5 <input type="checkbox"/> T 6.6 <input type="checkbox"/> T 6.7 <input type="checkbox"/> T 6.8 <input type="checkbox"/> T 6.9 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/>	4.6 <input type="checkbox"/> T 6.14 <input type="checkbox"/>	
<b>5</b>	<b>Vergelijkingen</b>	★	★★	★★★
	Een vergelijking opstellen aan de hand van gegeven informatie.	5.1 <input type="checkbox"/> 5.2 <input type="checkbox"/> 5.3 <input type="checkbox"/> 5.4 <input type="checkbox"/> T 6.9 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/>	5.6 <input type="checkbox"/>	
	Een vergelijking oplossen door inklemmen.	5.1 <input type="checkbox"/> 5.2 <input type="checkbox"/> 5.3 <input type="checkbox"/> 5.4 <input type="checkbox"/> T 6.9 <input type="checkbox"/> T 6.10 <input type="checkbox"/>	5.6 <input type="checkbox"/>	
	Een vergelijking oplossen door handig rekenen.	5.5 <input type="checkbox"/> T 6.9 <input type="checkbox"/> T 6.11 <input type="checkbox"/> T 6.12 <input type="checkbox"/>	5.6 <input type="checkbox"/> 5.7 <input type="checkbox"/>	

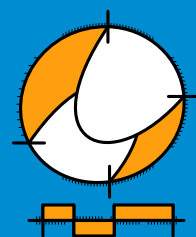
**Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.**

**De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConText College.**

**Stichting Math4All**



[www.math4all.nl](http://www.math4all.nl)



## Informatieblad bij Opdracht 1.1



# Informatieblad bij Opdracht 2.1



