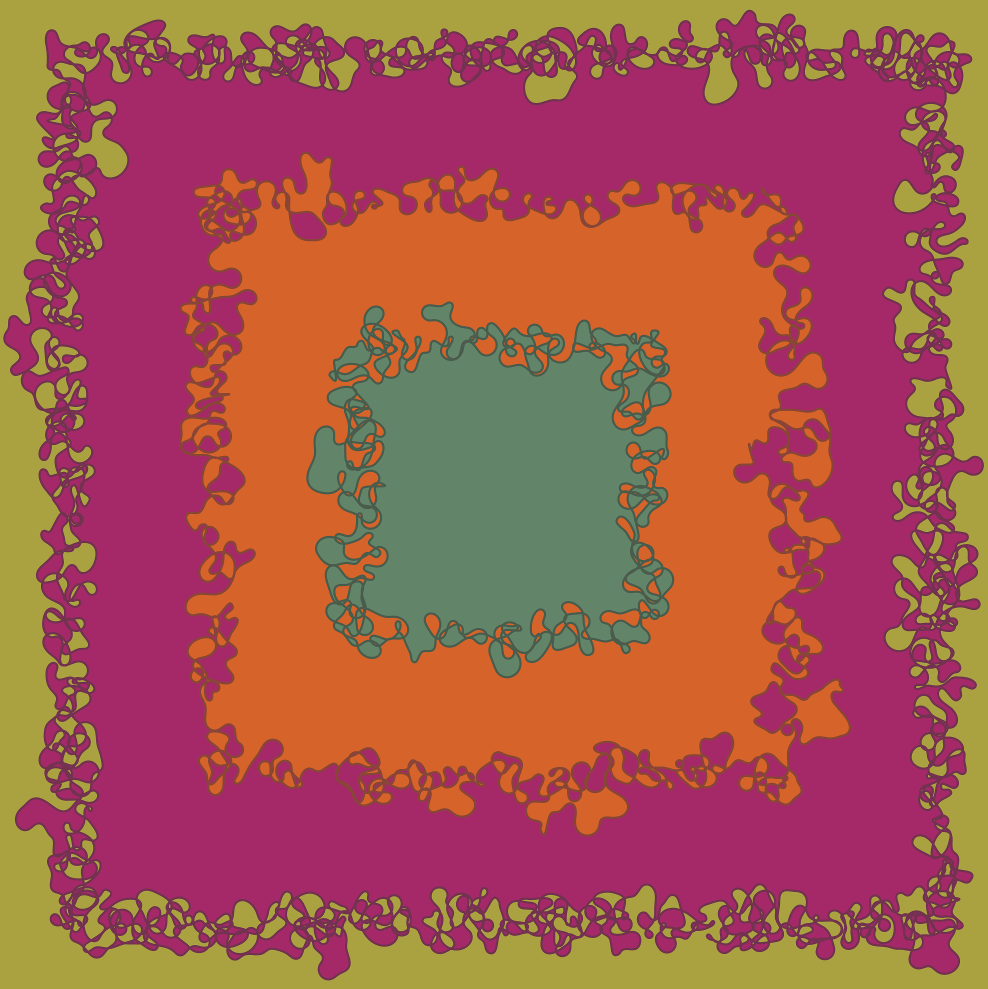
Wiskunde / PGA

1 HAVO / VWO / docentmateriaal

Breuken

ConTeXt College



Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald.

PGA

PGA staat voor 'probleemgestuurde aanpak'. Je begeleidt dan als docent de leerlingen die in kleine groepjes aan wiskundige problemen werken en op die manier een eigen theoretisch kader opstellen. Dit gebeurt voornamelijk op de wijze die wordt beschreven in het boek *Building Thinking Classrooms in Mathematics* van Peter Liljedahl. Dit boek is ook in het Nederlands beschikbaar. Het is verstandig om dit boek vooraf door te werken, maar je kunt ook beginnen met deze **beknopte handleiding**.

De PGA wordt ondersteund door verwerkings- en toepassingsopgaven waarmee de leerling kan nagaan of de stof wordt beheersd. Deze opgaven worden op drie niveaus aangeboden. De niveau aanduiding staat in de marge naast de opgave.

★	het basale niveau, dat iedereen zou moeten behalen
★ ★	een iets pittiger niveau, waarin iets meer uitdaging zit en die de leerling alleen hoeft te maken als er genoeg tijd voor is
★ ★ ★	een bijzondere toepassing of een echt pittige opgave die een leerling alleen maakt als de rest veel te gemakkelijk was

In de bijlage staat een “**Leerdoelentabel**” waarin staat aangegeven door welke opgave het specifieke leerdoel wordt afgedekt en op welk niveau dit gebeurt. Als je deze tabel aan de leerlingen uitreikt, kunnen ze hun eigen vorderingen bijhouden.
Opgaven uit de samenvattende paragraaf *Totaalbeeld* worden voorafgegaan door een T.

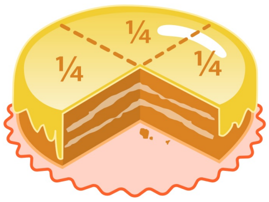
1

Breuken

1.1 Wat is een breuk?

Inleiding

Weet je wat bij rekenen onder een breuk wordt verstaan?
En waar gebruik je breuken ook alweer voor? Is er verschil tussen een breuk en een deling?
En wat is een samengestelde breuk?



Figuur 1.1 bron: Wikipedia

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen breuk (met teller en noemer) en samengestelde breuk;
- breuken vereenvoudigen.

Voorkennis

- wat decimale getallen zijn en hoe ons decimale getallensysteem in elkaar zit;
- hoe je getallen op een getallenlijn kunt plaatsen en hoe je aangeeft dat het éne getal groter|kleiner is dan het andere;
- rekenen met decimale getallen, zowel met de hand als met de rekenmachine, in de juiste rekenvolgorde;
- afronden en schatten, de orde van grootte bepalen.

Voor de docent

Bij het onderdeel 'Wat is een breuk?' gaat het erom dat leerlingen (weer) weten wat een breuk is, wat de teller en wat de noemer van een breuk is, hoe je breuken vereenvoudigt en wat een samengestelde breuk is. Ook de notatie van samengestelde breuken moet nog wel even aan de orde komen. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale uitwisbare werkvlakken.
- Een werkblad bij de eerste opgave om uit te delen.

Opdracht 1.1

Een ietwat bijzondere bakker besluit om zijn vierkante taarten telkens anders te snijden.

Op het **Informatieblad** zie je er tien voorbeelden van.

Schrijf in elke taart in welke delen hij is verdeeld.
Gebruik daarbij breuken met een zo klein mogelijke noemer.

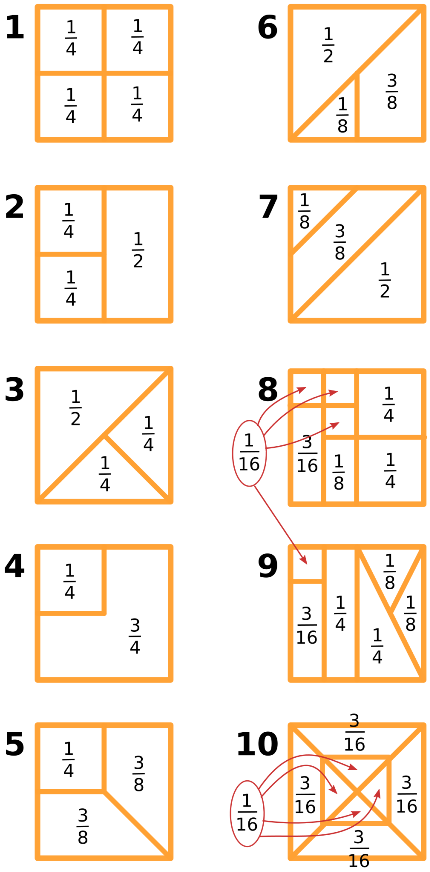
Toelichting

Geef de opdracht mondeling. Deel het **Informatieblad** uit.

Mogelijke hulpvragen: "Wat is ook alweer de noemer/teller van een breuk?", "Wat betekent 'schrijven met een zo klein mogelijke noemer'? Zie je een voorbeeld?".

Bespreek eventueel na afloop nog even de begrippen 'teller', 'noemer' en 'vereenvoudigen' van een breuk.

Uitwerking



Figuur 1.2

Opdracht 1.2

Dit balkje is in 12 even grote delen verdeeld en 7 daarvan zijn ingekleurd.

$\frac{7}{12}$ 

Figuur 1.3

Teken telkens van deze balkjes en geef daarmee de volgende breuken weer:

1. $\frac{3}{4}$
2. $1\frac{3}{4}$
3. $\frac{13}{4}$
4. $2\frac{1}{2}$
5. $\frac{5}{6}$
6. $1\frac{1}{6}$
7. $\frac{1}{12}$ deel van 5
8. $\frac{3}{4}$ deel van 5
9. $\frac{5}{6}$ deel van 2
10. $1\frac{5}{6}$ deel van 2

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in stappen.

Mogelijke hulpvragen zijn: “Hoeveel twaalfden is (bijvoorbeeld) $\frac{3}{4}$?”, “Wat betekent $1\frac{3}{4}$ precies?” en “Hoeveel twaalfden zijn dat in totaal? Hoe haal je dus de gehelen uit een breuk?”, etc.

Bespreek na afloop nog even wanneer breuken gelijk zijn en hoe je ze vereenvoudigt, dan wel verbouwt naar een grotere noemer. Bespreek ook het begrip ‘samengestelde breuk’ en de merkwaardige gewoonte om dan het plusteken weg te laten.

Uitwerking

1. 9 twaalfden
2. 1 hele rechthoek en 9 twaalfden
3. 1 hele rechthoek en 3 twaalfden
4. 2 hele rechthoeken en 6 twaalfden
5. 10 twaalfden
6. 1 hele rechthoek en 2 twaalfden
7. 5 twaalfden
8. 3 hele rechthoeken en 9 twaalfden
9. 1 hele rechthoek en 8 twaalfden
10. 3 hele rechthoeken en 4 twaalfden

Opdracht 1.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over ‘breuken’, ‘teller/noemer’, ‘vereenvoudigen’ en ‘samengestelde breuk’.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

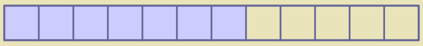
Theorie

Om te onthouden

$\frac{7}{12}$ heet een **breuk**, spreek uit 'zeven twaalfden'.

7 is de **teller** en 12 is de **noemer**.

Van de balk is $\frac{7}{12}$ deel gekleurd.

$\frac{7}{12}$ 

Figuur 1.4

$\frac{7}{12}$ en $\frac{14}{24}$ geven hetzelfde deel weer: $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$.

Dus omgekeerd kun je zeggen $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$.

Je hebt dan $\frac{14}{24}$ **vereenvoudigd** tot $\frac{7}{12}$ door teller en noemer door hetzelfde getal 2 te delen.

$2 + \frac{7}{12}$ schrijf je als $2\frac{7}{12}$. Dit is een **samengestelde breuk**.

Als je $\frac{31}{12} = \frac{24}{12} + \frac{7}{12} = 2 + \frac{7}{12} = 2\frac{7}{12}$ schrijft, haal je de **gehelen uit een breuk**.

Verwerken

★ **Opgave 1.1**

Uit onderzoek uit het einde van de vorige eeuw bleek dat iemand elke dag gemiddeld ongeveer 8 uur slaapt, 1,5 uur eet en 2 uur televisie keek.

a Hoe groot was toen het deel van de dag dat iemand slaapt?

b Als een mens in totaal 84 jaar oud wordt en zijn leven lang dit gedrag heeft gehad, hoeveel jaar heeft hij dan geslapen?

c Hoe groot is het deel van de dag dat iemand aan het eten was?

d Hoeveel keek een mens toen gemiddeld in zijn leven televisie?

★ **Opgave 1.2**

Schrijf de volgende breuken zo eenvoudig mogelijk en haal indien mogelijk de gehelen er uit.

a $\frac{15}{12} = \ldots$

b $\frac{12}{15} = \ldots$

c $\frac{13}{4} = \ldots$

d $\frac{4}{13} = \ldots$

e $\frac{5}{85} = \ldots$

f $\frac{85}{5} = \ldots$

Toepassen

★★ **Opgave 1.3: Fietsen**

Fietsen hebben een voortandwiel (dat aan de trapas vastzit) en een achtertandwiel aan de achteras. Het aantal tanden van die tandwielen bepalen de versnelling. Voortandwielen hebben gemiddeld 42 tot 54 tanden; achtertandwielen 12 tot 34 tanden.

a Waarom heeft het voortandwiel de meeste tanden?

b Met één pedaalslag gaat het voortandwiel één keer rond. Hoeveel keer gaat het achterwiel dan rond als het voortandwiel 48 tanden en het achtertandwiel 20 tanden heeft?

Het getal dat je bij b hebt gevonden heet de overbrenging. Bij elke verhouding van de tanden op de twee tandwielen kun je die overbrenging berekenen in twee decimalen nauwkeurig.

c Vul deze tabel in (vereenvoudig de breuken zover mogelijk):

tanden voor	tanden achter	overbrenging
42	15	
43	16	
45	15	
46	16	
51	17	
54	18	

Tabel 1.1

d Kun je bij verschillende aantallen tandwielen toch dezelfde overbrenging hebben?

De afstand die de fiets met één pedaalslag vooruit gaat noemen we het verzet. Het verzet hangt af van de overbrenging en de grootte van de wielen. Stel dat je fiets 2,83 m vooruit gaat als het achterwiel één keer rond draait.

e Hoe groot is het verzet bij een overbrenging van $\frac{12}{5}$ bij één pedaalslag?

f Hoe groot is het verzet bij 54 tanden voor en 18 tanden achter?

g Breid de tabel bij c uit met een kolom waarin het verzet staat.

h Toen Francesco Moser in 1988 het indoor uurrecord verbeterde (ruim 50 km afgelegd in 1 uur), gebruikte hij een fiets met een versnelling van 47 bij 17. Wat was de overbrenging? Hij had een speciale fiets laten maken met een verzet van 8,93 meter! Hoe groot was de omtrek van zijn achterwiel wel niet?

1.2 Van breuk naar decimaal getal

Inleiding

Bij decimale getallen zijn de decimalen tienden, honderdsten, duizendsten, enzovoorts.

Daarom kun je decimale getallen schrijven als breuken.
En omgekeerd kun je breuken schrijven als decimale getallen. Alleen heb je daar soms wel heel veel decimalen voor nodig...

$0{,}1 = \frac{1}{10}$

$0{,}01 = \frac{1}{100}$

$0{,}001 = \frac{1}{1000}$

$0{,}0001 = \frac{1}{10000}$

Figuur 2.1

Je leert in dit onderwerp

- breuken en decimale getallen in elkaar omzetten;
- breuken gebruiken als exacte antwoorden vereist zijn.

Voorkennis

- rekenen met decimale getallen, zowel met de hand als met de rekenmachine, in de juiste rekenvolgorde;
- de begrippen breuk (met teller en noemer) en samengestelde breuk kennen;
- breuken vereenvoudigen.

Voor de docent

Bij het onderdeel 'Breuk naar decimaal getal' gaat het erom dat leerlingen breuken en decimale getallen naar elkaar kunnen omrekenen. Met name de herhaling van cijfers komt aan de orde. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale uitwisbare werkvlakken.

Opdracht 2.1

Omdat $\frac{1}{10} = 0{,}1$, $\frac{1}{100} = 0{,}01$, enzovoorts, kun je breuken schrijven als decimale getallen. Maar soms is dat nog best lastig als de deling niet uitkomt, zo is $\frac{1}{2} = 0{,}5$, maar $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}\underline{3}$. De breuk gaat zich herhalen, wat je aangeeft met een streep onder de cijfers die zich steeds herhalen. Zelfs een rekenmachine biedt niet altijd een oplossing, alleen een staartdeling helpt dan.

Schrijf de volgende breuken als decimale getallen, doe dit zowel handmatig als met de rekenmachine:

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{3}{5}$
3. $2\frac{3}{4}$
4. $\frac{5}{8}$
5. $\frac{5}{3}$
6. $\frac{5}{6}$
7. $1\frac{1}{6}$

8. $\frac{1}{7}$

9. $\frac{5}{7}$

10. $\frac{1}{17}$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling in stappen, de laatste is een echte uitdaging (die kan de rekenmachine niet).

Mogelijke hulpvragen: “Hoe kun je een breuk invoeren in je rekenmachine?”, “Hoe maak je hierbij een staartdeling?”.

Uitwerking

1. $\frac{1}{4} = 0{,}25$

2. $\frac{3}{5} = 0{,}6$

3. $2\frac{3}{4} = 2{,}75$

4. $\frac{5}{8} = 0{,}625$

5. $\frac{5}{3} = 1{,}666... = 1{,}\underline{6}$

6. $\frac{5}{6} = 0{,}8333... = 0{,}8\underline{3}$

7. $1\frac{1}{6} = 1{,}1666... = 1{,}1\underline{6}$

8. $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857... = 0{,}\underline{142857}$

9. $\frac{5}{7} = 0{,}\underline{714285}$

10. $\frac{1}{17} = 0{,}\underline{0588235294117647}$

Opdracht 2.2

Van elk decimaal getal kun je een breuk maken.
Maak van de volgende decimale getallen een zo eenvoudig mogelijke breuk.

1. 0,05
2. 0,123
3. 0,16
4. 0,06
5. 2,0014
6. $0{,}\underline{3}$
7. $0{,}\underline{14}$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in stappen.

Mogelijke hulpvragen zijn: “Hoeveel is 0,1 ook weer? En 0,01?” en “Hoe kun je dat hier gebruiken?”. De laatste is echt een uitdaging die verder gaat dan in dit onderdeel de bedoeling is.

Uitwerking

1. $0{,}05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$
2. $0{,}123 = \frac{123}{1000}$
3. $0{,}16 = \frac{16}{100} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$
4. $1{,}06 = 1\frac{6}{100} = 1\frac{3}{50}$
5. $2{,}0014 = 2\frac{14}{10000} = 2\frac{7}{5000}$
6. $0{,}\underline{3} = \frac{1}{3}$ (dat weten de leerlingen vast wel)
7. $0{,}\underline{14}$ gaat zo: $100 \times 0{,}\underline{14} - 0{,}\underline{14} = 99 \times 0{,}\underline{14} = 14$ geeft $0{,}\underline{14} = \frac{14}{99}$.

Opdracht 2.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het omzetten van breuken naar decimale getallen en omgekeerd.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Als de noemer 10, 100, 1000, ... is, kun je de **breuk als decimaal getal** schrijven:

$\frac{13}{100} = 0{,}13$; $\frac{2}{10} = 0{,}2$; $\frac{123}{1000} = 0{,}123$.

Bij andere breuken kan dat ook door de deling uit te voeren, met de hand of met een rekenmachine. Soms gaat het aantal decimalen eindeloos door:

$\frac{2}{7} = 0{,}28571428571428... = 0{,}\underline{285714}$.

Dan werk je vaak met een benadering: $\frac{2}{7} \approx 0{,}286$.

Worden er **exacte uitkomsten** gevraagd, mag je niet benaderen en blijft de breuk staan.

Verwerken

★ **Opgave 2.1**

Schrijf de volgende breuken als decimale getallen.

a $\frac{7}{3} = ...$

b $\frac{13}{12} = ...$

c $8\frac{3}{25} = ...$

d $\frac{1}{19} = ...$

e $\frac{4}{21} = ...$

★ **Opgave 2.2**

Schrijf de volgende getallen als een zo eenvoudig mogelijke breuk.

a $2{,}17 = ...$

b $0{,}0125 = ...$

c $0{,}675 = ...$

d $0{,}0002 = ...$

★ **Opgave 2.3**

Je kunt de euromunten die delen van 1 euro voorstellen, weergeven door een breuk. Zo is de munt van 50 eurocent weer te geven als $\frac{1}{2}$. En zo kun je € 2,50 weergeven als $2 + \frac{1}{2}$.

a Laat zien dat € 2,50 ook is te schrijven als $2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{10}$.

b Geef nog minstens twee andere manieren om € 2,50 weer te geven met breuken.

c Geef ook € 0,99 op minstens drie manieren weer met behulp van breuken.

d Waarom kun je € 50 niet exact verdelen met 6 anderen?

Toepassen

Je wilt $\frac{3}{8}$ deel van € 60,00 berekenen.

Dat kan op twee manieren:

- $\frac{1}{8}$ deel krijg je door de € 60,00 door 8 te delen.
  Dat is € 7,50.
  $\frac{3}{8}$ deel is 3 keer zoveel, dus € 22,50.
- $\frac{3}{8} = 0{,}375$ (met de rekenmachine).
  Je krijgt dan $0{,}375 \times 60{,}00 = 22{,}50$, dus € 22,50.

★ ★ **Opgave 2.4: Een deel van...**

Hierboven zie je hoe je $\frac{3}{8}$ deel van 60 op twee manieren kunt berekenen.

a Bereken $\frac{5}{16}$ deel van 80 op dezelfde twee manieren.

b Bereken $\frac{7}{20}$ deel van 90 op dezelfde twee manieren.

c Bereken $\frac{4}{7}$ deel van 90. Geef je antwoord eerst exact en dan in twee decimalen nauwkeurig.

★ ★ ★

Opgave 2.5: Stambreuken

In het tientallig stelsel worden de stambreuken ééntiende, éénhonderdste, en dergelijke gebruikt. Maar in bijvoorbeeld Nederland werd het tientallig stelsel pas omstreeks 1600 ingevoerd, nadat Simon Stevin het boek ‘De Thiende’ (1585, over decimale getallen) had gepubliceerd.

Voor die tijd rekende men met de stambreuken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, enzovoorts.

De wiskundige J.J. Sylvester (1814—1897) bewees veel later dat elke breuk kan worden geschreven als de som van een aantal stambreuken. Hij ontwierp een eenvoudige manier waarmee elke breuk als som van stambreuken kan worden geschreven. Daarbij trek je telkens van de breuk die je wilt omzetten in een som van stambreuken een zo groot mogelijke stambreuk af.

Bijvoorbeeld: $\frac{13}{20} = \frac{10}{20} + \frac{3}{20} = \frac{1}{2} + \frac{3}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{140}$.

a Reken dit voorbeeld zelf na.

b Schrijf $\frac{10}{13}$ en $\frac{5}{12}$ als som van stambreuken.

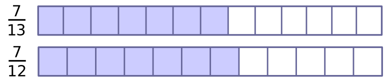
c Bereken nu $\frac{10}{13} + \frac{5}{12}$ met behulp van deze stambreuken.

1.3 Breuken vergelijken

Inleiding

Wat is meer, $\frac{7}{12}$ of $\frac{7}{13}$?

Hoe kun je in het algemeen breuken vergelijken? Moet je dan steeds zo'n plaatje maken?



Figuur 3.1

Je leert in dit onderwerp

- breuken met elkaar vergelijken door (als nodig) gelijknamig maken.

Voorkennis

- rekenen met decimale getallen, zowel met de hand als met de rekenmachine, in de juiste rekenvolgorde;
- de begrippen breuk (met teller en noemer) en samengestelde breuk kennen;
- breuken vereenvoudigen en als decimaal getal schrijven.

Voor de docent

Bij het onderdeel 'Breuken vergelijken' gaat het erom dat leerlingen breuken met elkaar kunnen vergelijken door ze gelijknamig te maken. Het begrip KGV (kleinste gemeenschappelijke veelvoud) is daarbij belangrijk. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale uitwisbare werkvlakken.

Opdracht 3.1

In twee klassen is een toets gemaakt. In B1A waren er 3 onvoldoendes en in B1B waren dat er 4. In B1A hebben 20 leerlingen de toets gemaakt, in B1B hebben 30 leerlingen de toets gemaakt.

In welke klas is de toets beter gemaakt?

Toelichting

Geef de opdracht mondeling.

Mogelijke hulpvragen: "Hoe kun je twee groepen eerlijk vergelijken?", "Hoe bepaal je welk deel een (on)voldoende heeft?" en "Hoe kun je twee breuken eerlijk vergelijken?".
In ieder geval moeten in deze opdracht de begrippen 'gelijknamige breuken' en 'KGV (kleinste gemeenschappelijke veelvoud)' voorbij komen en moeten leerlingen doorkrijgen hoe ze twee breuken gelijknamig kunnen maken.

Uitwerking

In 1A heeft $\frac{3}{20}$ deel een onvoldoende.

In 1B heeft $\frac{4}{30}$ deel een onvoldoende.

Beide breuken moeten worden vergeleken. Dat kan door ze om te zetten naar decimale getallen, of door ze gelijknamig te maken. Dit laatste verdient hier de voorkeur: $\frac{3}{20} = \frac{9}{60}$ en $\frac{4}{30} = \frac{8}{60}$. Dan blijkt dat in B1B de toets naar verhouding beter is gemaakt.

Opdracht 3.2

Laat zien, welke breuk het grootst is zonder ze naar decimale getallen om te rekenen. Zet er het teken < of > tussen.

1. $\frac{2}{10}$ of $\frac{19}{100}$
2. $\frac{2}{15}$ of $\frac{1}{5}$
3. $\frac{3}{4}$ of $\frac{2}{3}$
4. $\frac{4}{15}$ of $\frac{6}{25}$
5. $\frac{2}{7}$ of $\frac{4}{15}$
6. $\frac{7}{18}$ of $\frac{5}{12}$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in stappen.

Mogelijke hulpvragen zijn: “Hoe maak je twee breuken gelijknamig?”, “Hoe bepaal je het KGV (kleinste gemeenschappelijke veelvoud) van de noemers?” en “Hoe bepaal je van twee breuken met dezelfde noemers welke het grootste is?”.

Uitwerking

1. $\frac{2}{10} = \frac{20}{100} > \frac{19}{100}$
2. $\frac{2}{15} < \frac{1}{5} = \frac{3}{15}$
3. $\frac{3}{4} = \frac{9}{12} > \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$
4. $\frac{4}{15} = \frac{20}{75} > \frac{6}{25} = \frac{18}{75}$
5. $\frac{2}{7} = \frac{30}{105} \frac{4}{15} = \frac{28}{105}$
6. $\frac{7}{18} = \frac{14}{36} < \frac{5}{12} = \frac{15}{36}$

Opdracht 3.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het gelijknamig maken van breuken om zo het vergelijken van twee breuken mogelijk te maken. Het begrip KGV (kleinste gemeenschappelijke veelvoud) zou je ook moeten hebben leren kennen.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Wil je **breuken met elkaar vergelijken** dan moet je ze eerst **gelijknamig maken**.
Je maakt dan de noemers van beide breuken gelijk. Je zoekt dan het **kleinste gemeenschappelijke veelvoud (KGV)** van beide noemers, zie **Voorbeeld 2**.
Je kunt er ook decimale getallen van maken.

Verwerken

★ Opgave 3.1

Hier wordt vijf keer een breuk beschreven.

a. 3 van de 5
b. 3/4
c. vijf-zevende deel
d. 0,55
e. 7 van de 11

a Zet de breuk er telkens achter.

b Schrijf de breuken uit a van klein naar groot op. Gebruik daarbij het teken voor 'kleiner dan'.

★ Opgave 3.2

Vul <, > of = in:

a $\frac{2}{11} \dots \frac{3}{11}$

b $\frac{2}{11} \dots \frac{2}{10}$

c $\frac{2}{10} \dots \frac{3}{11}$

d $1\frac{3}{8} \dots 1\frac{1}{3}$

e $\frac{1}{3} \dots 0{,}33$

f $0{,}1538 \dots \frac{2}{13}$

★ Opgave 3.3

Volgens de statuten van sportclub LLDM moet $\frac{3}{4}$ deel van de leden op een vergadering aanwezig zijn om over een voorstel te mogen stemmen. Als men over een wijziging van de statuten stemt moet $\frac{2}{3}$ van de aanwezigen vóór stemmen om die wijziging aan te nemen.

a Op een ledenvergadering zijn 176 van de 234 leden aanwezig. Mag er worden gestemd?

b Voor een voorstel tot wijziging van de statuten stemmen 117 van de aanwezige leden. Wordt het voorstel aangenomen?

Toepassen

Het KGV van 10 en 13 is $10 \times 13 = 130$.
Maar het KGV van 10 en 15 is niet $10 \times 15 = 150$, maar 30.
Dat heeft te maken met de delers van de getallen.

Een **deler** van 10 is bijvoorbeeld 2, want je kunt 10 door 2 delen en dan komt daar weer een geheel getal uit. Dus is 3 geen deler van 10 en 4 ook niet, maar 5 weer wel. De delers van 10 zijn 1, 2, 5 en 10 zelf. Het getal 1 is trouwens van elk geheel getal een deler, net als het getal zelf.

Nu hebben 10 en 13 alleen 1 als gemeenschappelijke deler: de **grootste gemeenschappelijke deler** (GGD) van 10 en 13 is 1.
Maar de GGD van 10 en 15 is 5.

En dus is het KGV niet 150, maar $\frac{150}{5} = 30$.

★ ★ Opgave 3.4: KGV en GGD

Bij **Toepassen** zie je wat je onder de GGD van twee getallen verstaat en wat dit betekent voor het KGV.

a Laat zien dat het KGV van 10 en 15 inderdaad 30 is.

b Dit heeft te maken met de GGD van beide getallen. Schrijf de delers van 15 op en laat zien dat de GGD van 10 en 15 inderdaad 5 is.

c Leg uit waarom dit betekent dat het KGV van 10 en 15 wel $\frac{150}{5}$ moet zijn.

Het werken met KGV en GGD is pas nuttig als je breuken met grote tellers en noemer wilt vergelijken. Bij het vinden van de GGD werk je dan met de priemfactoren van een getal. Zie eventueel.

Bijvoorbeeld als je moet vergelijken: $\frac{37}{12444}$ en $\frac{23}{7930}$.

d Je kunt je hier nog steeds redden met behulp van decimale getallen. Welke van beide breuken is het grootst?

Je kunt je vast wel voorstellen dat het mogelijk is om de breuken zo te kiezen, dat je rekenmachine geen verschil meer ziet. Dan zou je een staartdeling moeten maken. Maar dan is het echt handiger om de breuken gelijknamig te maken.

e Ga na, dat $7930 = 2 \times 5 \times 13 \times 61$.

f Schrijf vervolgens 12444 als product van priemfactoren.

g Vergelijk de resultaten van e en f. Wat is de GGD van 7930 en 12444?

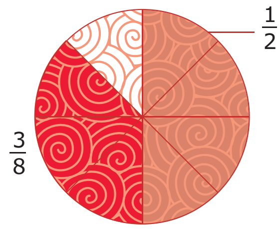
h Bepaal het KGV van 7930 en 12444 en maak de breuken gelijknamig. Welke is de grootste?

1.4 Breuken optellen en aftrekken

Inleiding

Hoeveel is $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{8}$ samen?

En hoeveel is het verschil van beide?



Figuur 4.1

Je leert in dit onderwerp

- breuken optellen en aftrekken.

Voorkennis

- rekenen met decimale getallen, zowel met de hand als met de rekenmachine, in de juiste rekenvolgorde;
- de begrippen breuk (met teller en noemer) en samengestelde breuk kennen;
- breuken vereenvoudigen en als decimaal getal schrijven;
- breuken met elkaar vergelijken.

Voor de docent

Bij het onderdeel 'Breuken optellen en aftrekken' gaat het erom dat leerlingen breuken bij elkaar kunnen optellen en van elkaar kunnen aftrekken, ook samengestelde breuken. Het gaat er om het begrip handmatig aan te leren, de rekenmachine gaat dit in de toekomst van ze overnemen, tot het ook bij algebraïsche uitdrukkingen moet worden toegepast. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale uitwisbare werkvlakken.

Opdracht 4.1

Ton en Hans bestellen samen een grote pizza. Ton eet de helft van de pizza op, Hans eet $\frac{3}{8}$ deel van de pizza.

Welk deel van de pizza eten ze samen op, welk deel van de pizza eet Ton meer op dan Hans en hoeveel krijgt ieder nog als ze het overgebleven deel eerlijk verdelen?

Toelichting

Geef de opdracht mondeling zonder de figuur te laten zien. (Misschien zien leerlingen in dat die in de inleiding staat?)

Mogelijke hulpvragen: "Hoe kun je dit in beeld brengen?", "Hoe tel je twee breuken op?" en "Hoe trek je twee breuken van elkaar af?".
In ieder geval moet in deze opdracht het begrip 'gelijknamig maken' vallen en kan er worden terug verwezen naar het voorgaande onderdeel.

Uitwerking

Samen eten ze $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$ deel op.

Ton eet $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$ deel meer op dan Hans.

Er blijft $\frac{1}{8}$ deel over, dus krijgen ze elk $\frac{1}{16}$ deel.

Opdracht 4.2

Schrijf als één breuk en vereenvoudig zoveel mogelijk:

1. $\frac{5}{9}+\frac{1}{9}$
2. $\frac{11}{12}-\frac{7}{12}$
3. $3\frac{7}{12}+\frac{11}{12}$
4. $4\frac{1}{3}-2\frac{2}{3}$
5. $\frac{7}{10}+\frac{2}{5}$
6. $\frac{5}{6}-\frac{5}{8}$
7. $3\frac{1}{6}+1\frac{1}{4}$
8. $3\frac{1}{6}-1\frac{1}{4}$
9. $5\frac{2}{7}+3\frac{5}{11}$
10. $5\frac{2}{7}-3\frac{51}{11}$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in stappen.

Mogelijke hulpvragen: “Hoe ga je om met gehelen?” en verder misschien even terug verwijzen naar de voorgaande opdracht. De eerste acht berekeningen zou iedereen moeten kunnen.

Uitwerking

1. $\frac{5}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$
2. $\frac{11}{12}-\frac{7}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$
3. $3\frac{7}{12}+\frac{11}{12}=3\frac{18}{12}=4\frac{6}{12}=4\frac{1}{2}$
4. $4\frac{1}{3}-2\frac{2}{3}=\frac{13}{3}-\frac{8}{3}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$
5. $\frac{7}{10}+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}+\frac{4}{10}=\frac{11}{10}=1\frac{1}{10}$
6. $\frac{5}{6}-\frac{5}{8}=\frac{20}{24}-\frac{15}{24}=\frac{5}{24}$
7. $3\frac{1}{6}+1\frac{1}{4}=\frac{19}{6}+\frac{5}{4}=\frac{38}{12}+\frac{15}{12}=\frac{53}{12}=4\frac{5}{12}$
8. $3\frac{1}{6}-1\frac{1}{4}=\frac{19}{6}-\frac{5}{4}=\frac{38}{12}-\frac{15}{12}=\frac{23}{12}=1\frac{11}{12}$
9. $5\frac{2}{7}+3\frac{5}{11}=\frac{37}{7}+\frac{38}{11}=\frac{407}{77}+\frac{266}{77}=\frac{673}{77}=8\frac{57}{77}$
10. $5\frac{2}{7}-3\frac{5}{11}=\frac{37}{7}-\frac{38}{11}=\frac{407}{77}-\frac{266}{77}=\frac{141}{77}=1\frac{64}{77}$

Opdracht 4.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het optellen en aftrekken van breuken. Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Wil je **breuken optellen of aftrekken** dan moet je ze eerst **gelijknamig maken**.
Je maakt dan de noemers van beide breuken gelijk. Je zoekt dan het **kleinste gemeenschappelijke veelvoud (KGV)** van beide noemers, zie het **Voorbeeld 2**.

Bij samengestelde breuken werk je eerst de gehelen weg, zie het **Voorbeeld 2**.

Verwerken

★ **Opgave 4.1**

Voer de volgende berekeningen handmatig uit. Controleer de antwoorden met de rekenmachine.

a $\frac{3}{5} + 2\frac{1}{3} = \dots$

b $2\frac{1}{6} + 1\frac{3}{4} - 2\frac{1}{12} = \dots$

c $3\frac{7}{12} - 2\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \dots$

d $4\frac{3}{10} - 2\frac{2}{5} + \frac{17}{20} = \dots$

★ **Opgave 4.2**

Voer de berekeningen in de voorgaande opgave ook uit met de rekenmachine, maar zonder gebruik te maken van de breukentoets.
Geef je antwoorden als exacte decimale getallen.

★ **Opgave 4.3**

Heb je nog niet genoeg geoefend? Oefen dan het handmatig optellen en aftrekken van breuken via het **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

★ **Opgave 4.4**

In een stad is 1/3 deel van mannen boven de 40 jaar en 1/7 deel van de vrouwen boven de 40 jaar. Er zijn ongeveer evenveel mannen als vrouwen.

a Welk deel van mensen in die stad is boven de 40 jaar?

b Waarom kun je het antwoord bij a alleen berekenen omdat er ongeveer evenveel mannen als vrouwen in deze stad wonen?

★ **Opgave 4.5**

Anneke, Henk en Frits verdelen een taartje. Vreetzak Frits neemt $\frac{2}{3}$ deel van de taart, Anneke snijdt (bescheiden als ze is) $\frac{1}{12}$ deel van de taart af.

Welk deel van de taart blijft er over voor Henk?

Toepassen

★★ **Opgave 4.6: Schilders**

Schilder A kan een huis in 5 uur geheel schilderen, schilder B kan dit in 3 uur.

a Welk deel van het huis kunnen beide schilders samen in een uur schilderen?

b Waarom moet het steeds over hetzelfde (of een zeer vergelijkbaar) huis gaan?

c Hoeveel tijd hebben beide schilders samen nodig om het huis te schilderen?

d Schilder C schildert het huis in 3,5 uur. Welke deel van het huis schilderen B en C in 1 uur? Hoeveel tijd hebben ze nodig voor het hele huis?

e Beantwoord de vragen uit d ook voor alle drie de schilders samen.

★ ★ ★

Opgave 4.7: Puzzel

De volgende puzzel is afkomstig uit ‘Puzzles, old and new’ van professor Hoffman uit 1893.

Stel met behulp van de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 twee breuken samen waarvan de som 1 is. Elk cijfer moet precies één keer worden gebruikt.

Practicum

Veel rekenwerk doe je met een **rekenmachine**, ook met breuken rekenen.
Voor de volgende twee types rekenmachine zijn er practica beschikbaar:

- **Basistechnieken TI-30XB Multiview**
- **Basistechnieken Casio fx-82NL**

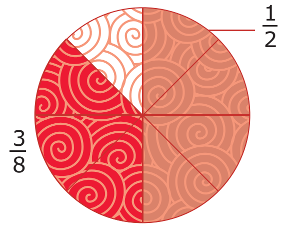
Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het optellen en aftrekken van breuken**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.5 Breuken vermenigvuldigen

Inleiding

Hier zie je dat $\frac{3}{8}$ deel hetzelfde is als $\frac{3}{4}$ van $\frac{1}{2}$. Kijk maar goed naar de figuur.
Maar wat heeft dit te maken met het vermenigvuldigen van breuken?



Figuur 5.1

Je leert in dit onderwerp

- breuken vermenigvuldigen.

Voorkennis

- rekenen met decimale getallen, zowel met de hand als met de rekenmachine, in de juiste rekenvolgorde;
- de begrippen breuk (met teller en noemer) en samengestelde breuk kennen;
- breuken vereenvoudigen, als decimaal getal schrijven en met elkaar vergelijken;
- breuken optellen en aftrekken.

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Breuken vermenigvuldigen’ gaat het erom dat leerlingen breuken kunnen vermenigvuldigen, ook samengestelde breuken. Het is nuttig om het begrip handmatig aan te leren, de rekenmachine gaat dit in de toekomst van ze overnemen, tot het ook bij algebraïsche uitdrukkingen moet worden toegepast. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale uitwisbare werkvlakken.

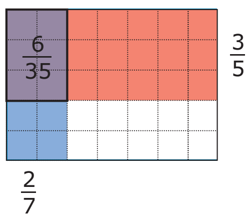
Opdracht 5.1

Teken een rechthoek met een lengte van 7 hokjes en een breedte van 5 hokjes.

Arceer of kleur in de lengterichting $\frac{2}{7}$ deel.

Arceer of kleur in de breedterichting $\frac{3}{5}$ deel.

Welke vermenigvuldiging van twee breuken zie je nu? En wat is de uitkomst van die vermenigvuldiging?
Hoe kun je dus snel breuken vermenigvuldigen?



Figuur 5.2

Toelichting

Geef de opdracht mondeling zonder de figuur te laten zien.

Mogelijke hulpvragen: “Hoeveel hokjes zijn nu dubbel gearceerd?”, “Hoeveel van het totaal aantal hokjes binnen de rechthoek zijn dat?”, “Welke breuk komt er dus uit?” en “Waarom gaat het hier om een vermenigvuldiging?”.
In ieder geval moet in deze opdracht duidelijk worden hoe je breuken vermenigvuldigt.

Uitwerking

Je ziet nu $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$.

Je ziet (hopelijk) ook $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$.

Opdracht 5.2

Bereken met de hand en vereenvoudig het antwoord zover mogelijk:

1. $\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$
2. $\frac{1}{4}$ deel van $\frac{3}{5}$
3. $\frac{3}{8} \times \frac{2}{5}$
4. $\frac{7}{10} \cdot \frac{2}{5}$
5. $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6}$
6. $\frac{5}{12} \times \frac{15}{8}$
7. $\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{4}$
8. $3\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{4}$
9. $3\frac{2}{7} \times 1\frac{3}{5}$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in stappen.

Mogelijke hulpvragen: “Hoe ga je om met gehelen?” en verder misschien even terug verwijzen naar de voorgaande opdracht. Ongetwijfeld komen er vragen over de vermenigvuldigingspunt. Deel dan mede dat die punt vooral in de wiskunde veel wordt gebruikt.

Uitwerking

1. $\frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$
2. $\frac{1}{4}$ deel van $\frac{3}{5}$ is $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$
3. $\frac{3}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$
4. $\frac{7}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$
5. $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{48}$
6. $\frac{5}{12} \times \frac{15}{8} = \frac{75}{96} = \frac{25}{32}$
7. $\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{4} = \frac{1}{6} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{24}$
8. $3\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{4} = \frac{19}{6} \times \frac{5}{4} = \frac{95}{24} = 3\frac{23}{24}$
9. $3\frac{2}{7} \times 1\frac{2}{5} = \frac{23}{7} \times \frac{7}{5} = \frac{23}{5} = 4\frac{3}{5}$

Opdracht 5.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het vermenigvuldigen van breuken.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

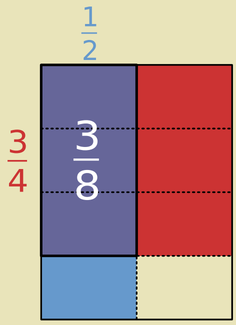
Theorie

Om te onthouden

Bij het **vermenigvuldigen van breuken** gaat het om het bepalen van een deel van een gedeelte, bijvoorbeeld $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ betekent $\frac{3}{4}$ van $\frac{1}{2}$.

In de figuur zie je dat $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{4 \times 2} = \frac{3}{8}$.
Dus zo kun je breuken vermenigvuldigen: je vermenigvuldigt de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.

In de wiskunde wordt voor vermenigvuldigen in plaats van het bekende teken × meestal het teken · gebruikt.



Figuur 5.3

Verwerken

★ **Opgave 5.1**

Voer de volgende berekeningen handmatig uit. Controleer de antwoorden met de rekenmachine.

a $\frac{3}{5} \times 2\frac{1}{3} = \ldots$

b $2\frac{1}{6} \times 1\frac{3}{5} = \ldots$

c $3\frac{7}{12} \times 2\frac{5}{6} = \ldots$

d $\frac{3}{10} \times 3\frac{1}{3} = \ldots$

★ **Opgave 5.2**

Voer de berekeningen in de voorgaande opgave ook uit met de rekenmachine, maar zonder gebruik te maken van de breukentoets.
Geef je antwoorden als exacte decimale getallen.

★ **Opgave 5.3**

Heb je nog niet genoeg geoefend? Oefen dan het handmatig vermenigvuldigen van breuken via het **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

★ **Opgave 5.4**

Je kunt het land van boer Groot Koerkamp voorstellen door een rechthoek. Als de boer sterft wordt het land verdeeld onder zijn zonen. Bart krijgt de helft, Dirk $\frac{3}{8}$ en Ben $\frac{1}{8}$ deel.

a Geef met drie kleuren aan wie van de zonen welk deel krijgt.

Bart verbouwt op $\frac{1}{4}$ deel van zijn land tulpen, op de helft narcissen en op de rest hyacinten. Dirk verbouwt op zijn stuk voor de helft tulpen en de rest hyacinten en Ben verbouwt alleen maar narcissen.

b Deel de vakken op en geef in elk vakje met een T, een N of een H aan welke soort bloemen er verbouwd wordt.

c Op welk deel van het totale land staan tulpen?

d Schrijf de berekening op waarmee je het deel tulpen kunt berekenen zonder het plaatje te gebruiken.

e Bereken op welk deel narcissen staan en controleer het in de tekening.

f Bereken het deel hyacinten.

Toepassen

Stel dat 1 op de 8 werkende Nederlanders werkt bij een bouwbedrijf. En ook dat daarvan $\frac{2}{10}$ deel op kantoor werkt.

Welk deel van alle werkende Nederlanders werkt dan bij een bouwbedrijf op kantoor?

Je moet nu $\frac{2}{10}$ deel van $\frac{1}{8}$ deel uitrekenen: $\frac{2}{10} \times \frac{1}{8} = \frac{2}{80} = \frac{1}{40}$.

Dus 1 op de 40 werkende Nederlanders zit dan bij een bouwbedrijf op kantoor.

★ ★ **Opgave 5.5: Werkenden**

Bij **Toepassen** zie je hoe je het vermenigvuldigen van breuken toepast in de praktijk.

a Welk deel van de werkende Nederlanders werkt wel bij een bouwbedrijf, maar niet op kantoor?

In een stad bestaat $\frac{3}{5}$ deel van de beroepsbevolking uit mannen van 20 jaar of ouder. Van die mannen is ongeveer 1 op de 40 werkloos.

b Welk deel van de beroepsbevolking bestaat uit werkloze mannen van 20 jaar of ouder?

c Deze stad heeft op het moment een beroepsbevolking van 86315 mensen. Hoeveel werkloze mannen van 20 jaar of ouder zijn er?

★ ★ **Opgave 5.6: Sportblessures**

Zo'n 9 miljoen Nederlanders doen aan sport. Bij al die activiteit komen nogal wat blessures voor: elk jaar moet 1 op de 5 sporters medisch worden behandeld. 1/6 deel van alle sportblessures zijn knieblessures.

a Het hoeveelste deel van alle 17 miljoen Nederlanders doet aan sport?

b Het hoeveelste deel van alle Nederlanders moet voor een sportblessure worden behandeld?

c Hoeveel sportende Nederlanders krijgen in de loop van het jaar een knieblessure? Schrijf je berekening op.

Practicum

Veel rekenwerk doe je met een **rekenmachine**, ook met breuken rekenen.
Voor de volgende twee types rekenmachine zijn er practica beschikbaar:

- **Basistechnieken TI-30XB Multiview**
- **Basistechnieken Casio fx-82NL**

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het vermenigvuldigen van breuken**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.6 Breuken delen

Inleiding

Als je je afvraagt hoeveel munten van 50 cent er in € 3,50 passen, ben je breuken aan het delen. Je berekent dan $3\frac{1}{2}/\frac{1}{2}$. En wat komt daar uit?

Je leert in dit onderwerp

- breuken delen.

Voorkennis

- rekenen met decimale getallen, zowel met de hand als met de rekenmachine, in de juiste rekenvolgorde;
- de begrippen breuk (met teller en noemer) en samengestelde breuk kennen;
- breuken vereenvoudigen, als decimaal getal schrijven en met elkaar vergelijken;
- breuken optellen, aftrekken en vermenigvuldigen.

Voor de docent

Bij het onderdeel ‘Breuken delen’ gaat het erom dat leerlingen breuken kunnen delen, ook samengestelde breuken. Het gaat er om het begrip handmatig aan te leren, de rekenmachine gaat dit in de toekomst van ze overnemen, tot het ook bij algebraïsche uitdrukkingen moet worden toegepast. Je geeft de opdrachten mondeling.

Gewenste materialen:

- Schrijfmateriaal voor op de verticale uitwisbare werkvlakken.
- Bij de eerste opdracht de verschillende euromunten.
- Bij de eerste opdracht hoort een figuur op een informatieblad.

Opdracht 6.1

Hier zie je alle munten van ons geldstelsel. De basismunt is de munt van 1 euro.

1. Je moet € 3,50 betalen. Hoeveel munten van $\frac{1}{2}$ heb je daarvoor nodig? En welke deling van twee breuken heb je nu uitgevoerd?
2. Je moet € 3,50 betalen. Hoeveel munten van $\frac{1}{10}$ heb je daarvoor nodig? En welke deling van twee breuken heb je nu uitgevoerd?
3. Je krijgt nu twee even grote figuren waarvan bij elk een deel is ingekleurd. Wat is de uitkomst van de deling van deze twee breuken?


Figuur 6.1

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en stap voor stap. Misschien goed om een set van alle munten te hebben liggen?

Mogelijke hulpvragen: “Welke breuk hoort bij € 3,50 (de euro is de eenheid)?”, “Hoeveel halve euromunten zijn dat?” en “Welk getal komt er dus uit?” en hetzelfde voor de tweede vraag.
Bij de derde vraag wordt het **Informatieblad** uitgedeeld.
Mogelijke hulpvragen zijn nu: “Kun je beide breuken gelijknamig maken?” en “Waarom zijn nu bij de deling alleen de tellers nog van belang?”.

In ieder geval moet in deze opdracht het begrip ‘gelijknamig maken’ weer voorbij komen en wordt het delen van breuken op die wijze ingevoerd. Mochten er leerlingen zijn die ‘vermenigvuldigen met het omgekeerde’ in hun hoofd hebben, vraag die maar om uit te leggen aan anderen waarom dat werkt.

Uitwerking

1. $3\frac{1}{2}\Big/\frac{1}{2} = \frac{7}{2}\Big/\frac{1}{2} = 7$

2. $3\frac{1}{2}\Big/\frac{1}{10} = \frac{7}{2}\Big/\frac{1}{10} = \frac{35}{10}\Big/\frac{1}{10} = 35$

3. $\frac{3}{4}\Big/\frac{5}{6} = \frac{9}{12}\Big/\frac{10}{12} = \frac{9}{10}$

Opdracht 6.2

Bereken met de hand en vereenvoudig het antwoord zover mogelijk:

1. $\frac{1}{8}\Big/\frac{3}{8}$

2. $\frac{1}{8}\Big/\frac{3}{4}$

3. $\frac{3}{8}\Big/\frac{2}{5}$

4. $\frac{5}{12}\Big/\frac{15}{8}$

5. $\frac{1}{6}\Big/1\frac{1}{4}$

6. $3\frac{1}{6}\Big/1\frac{1}{4}$

7. $3\frac{2}{7}\Big/1\frac{3}{5}$

Toelichting

Geef de opdracht mondeling en in stappen.

Mogelijke hulpvragen: “Hoe ga je om met gehelen?” en verder misschien even terug verwijzen naar de voorgaande opdracht. Ongetwijfeld komen er vragen over de schuine deelstreep in plaats van : of ÷. Deel dan mede dat al die tekens wel worden gebruikt, maar dat de dubbele punt al een andere betekenis heeft en dat het andere tekentje weliswaar vaak op rekenmachines staat, maar bij handwerk iets lastiger te tekenen is. Overigens kun je zeggen dat $\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}$ eigenlijk de juiste schrijfwijze is (maar of dat nou zo prettig is...).

Uitwerking

1. $\frac{1}{8}\Big/\frac{3}{8} = \frac{1}{3}$

2. $\frac{1}{8}\Big/\frac{3}{4} = \frac{1}{8}\Big/\frac{6}{8} = \frac{1}{6}$

3. $\frac{3}{8}\Big/\frac{2}{5} = \frac{15}{40}\Big/\frac{16}{40} = \frac{15}{16}$

4. $\frac{5}{12}\Big/\frac{15}{8} = \frac{10}{24}\Big/\frac{45}{24} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$

5. $\frac{1}{6}\Big/1\frac{1}{4} = \frac{1}{6}\Big/\frac{5}{4} = \frac{2}{12}\Big/\frac{15}{12} = \frac{2}{15}$

6. $3\frac{1}{6}\Big/1\frac{1}{4} = \frac{19}{6}\Big/\frac{5}{4} = \frac{38}{12}\Big/\frac{15}{12} = \frac{38}{15} = 2\frac{8}{15}$

7. $3\frac{2}{7}\Big/1\frac{2}{5} = \frac{23}{7}\Big/\frac{7}{5} = \frac{115}{35}\Big/\frac{49}{35} = \frac{115}{49} = 2\frac{17}{49}$

Opdracht 6.3

Bekijk wat iedereen heeft gemaakt en heeft bedacht over het delen van breuken.
Maak een eigen overzicht van wat je hebt geleerd.

Toelichting

Loop samen met de leerlingen alle bedenksels na. Bevraag leerlingen of ze elkaars gedachtenspinsels kunnen toelichten. Samen zouden jullie naar een overzicht van de theorie moeten komen. Ieder schrijft het voor zichzelf op.

Bedenk dat het delen van breuken hier wordt gedaan door gelijknamig maken. Dat is uiteraard om didactische redenen: dit is voor eenieder te begrijpen en geen truc zoals voor veel leerlingen ‘delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde’ wel is.

Uitwerking

Het theorieblok geeft het gewenste overzicht.

Theorie

Om te onthouden

Bij het **delen van breuken** gaat het om de vraag hoe vaak de deler in het deeltal past, bijvoorbeeld $\frac{3}{4} \Big/ \frac{1}{2}$ betekent: hoe vaak past $\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{4}$?

Je kunt dit dit gemakkelijk zien door beide breuken gelijknamig te maken: $\frac{3}{4} \Big/ \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Big/ \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$.

En inderdaad past $\frac{1}{2}$ precies $1\frac{1}{2}$ keer in $\frac{3}{4}$.

LET OP:
Het deelteken / (net als andere deeltekens) levert bij het delen van breuken eigenlijk problemen op met de rekenvolgorde: $\frac{3}{4} \Big/ \frac{1}{2}$ moet eigenlijk zijn $\frac{3}{4} \Big/ \left(\frac{1}{2}\right)$.
De haken worden vaak weggelaten als de bedoeling duidelijk is. Bij twijfel kun je ze beter wel gebruiken.

In plaats van bijvoorbeeld $\frac{3}{4} \Big/ \frac{1}{2}$ wordt ook wel $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ gebruikt.

Dit laatste deelteken zie je vaak op rekenmachines.

Verwerken

★ **Opgave 6.1**

Voer de volgende berekeningen handmatig uit. Controleer de antwoorden met de rekenmachine.

a $12 / \frac{2}{3} = ...$

b $\frac{2}{3} / 12 = ...$

c $\frac{3}{5} / \frac{2}{3} = ...$

d $2\frac{1}{6} / 1\frac{3}{5} = ...$

e $3\frac{7}{12} / 2\frac{5}{6} = ...$

f $\frac{3}{10} / 3\frac{1}{3} = ...$

★ **Opgave 6.2**

Voer de berekeningen in de voorgaande opgave ook uit met de rekenmachine, maar zonder gebruik te maken van de breukentoets.
Geef je antwoorden als exacte decimale getallen.

★ **Opgave 6.3**

Heb je nog niet genoeg geoefend? Oefen dan het handmatig delen van breuken via het **Practicum**.
Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

★ **Opgave 6.4**

Nathalie heeft vaak last van benauwdheid. Daarom slikt ze medicijnen. Ze slikt per dag $1\frac{1}{2}$ tablet. In een strip zitten 20 tabletjes.

a Hoeveel dagen doet Nathalie met één strip?

In de zomer moet ze een $\frac{1}{4}$ tablet méér nemen.

b Hoeveel dagen doet ze nu met één strip?

Toepassen

Als je naar Engeland op vakantie gaat, moet je met Engelse ponden (Pound Sterling) betalen. En elk Engelse pond is tegenwoordig 100 pence: £ 1,00= 100 p.

In de **Wikipedia** stond in juli 2005 deze tekst over het Engelse pond: “Tot de overgang naar het decimale stelsel in 1971 werd het pond onderverdeeld in 240 pence of 20 shilling. Elke shilling was daarbij 12 pence waard. Prijzen werden weergegeven in £ /s/d (zoveel pond, zoveel shilling en zoveel pence), wat het omrekenen voor toeristen zeer ingewikkeld maakte. De ‘s’ van shilling stond in principe niet voor het woord zelf, maar voor het Latijnse ‘solidus’. Het symbool voor de penny was tot de overgang een ‘d’, van het Latijnse ‘denarius’.”

Een shilling was dus $\frac{1}{20}$ deel van een pond. En een penny was het $\frac{1}{240}$ deel van een pond. En daarom gingen er $\frac{1}{20} / \frac{1}{240} = \frac{12}{240} / \frac{1}{240} = 12$ pence in een shilling.

★ ★ **Opgave 6.5: Geldsoorten**

In **Toepassen** zie je hoe in Groot Britannië voor 1971 met pennies en shilling werd gerekend.

a Welk deel van een shilling was 1 penny?

In Nederland gebruikten we tot 1 januari 2002 de gulden. Verder waren er kwartjes (kwart guldens), dubbeltjes ($\frac{1}{10}$ gulden), stuivers ($\frac{1}{20}$ gulden) en centen ($\frac{1}{100}$ gulden). Ook was er de rijksdaalder ($2\frac{1}{2}$ gulden).

b Hoeveel stuivers gingen er in een rijksdaalder?

c Hoeveel stuivers gingen er in een kwartje?

In de Wikipedia vind je een **artikel over de geschiedenis van de Tibetaanse munten**. In het begin van de twintigste eeuw toen Tibet een zelfstandig land was had het een eigen muntstelsel: 1 srang $= 6\frac{2}{3}$ tangkas, 1 tangka $= 1\frac{1}{2}$ sho $=$ 15 skar.

d Hoeveel sho gingen er in 1 srang?

e Welk deel van 1 srang is 1 skar?

★ ★ **Opgave 6.6: Diophantus**

Diophantus van Alexandrië was een Grieks wiskundige die omstreeks 250 jaar na het begin van onze jaartelling leefde. Over zijn leven is weinig bekend, maar een latere bron zegt dit: “Diophantus' jeugd duurde eenzesde deel van zijn leven. Zijn baard begon een twaalfde deel later te groeien. Hij trouwde een zevende deel later en zijn zoon werd vijf jaar daarna geboren. Die zoon leefde de helft van Diophantus' leeftijd. Diophantus stierf vier jaar na zijn zoon.”

Hoe oud was Diophantus toen hij overleed?

★ ★ ★ **Opgave 6.7: De Rhind-papyrus**

De Rhind-papyrus is het oudst bekende geschrift met wiskundige vraagstukken. Bijvoorbeeld deze:

“Een getal plus tweederde ervan plus een half ervan plus eenzevende ervan, is bij elkaar 37.”

a Wat is het getal?

“Ik heb een getal in gedachten en tel er tweederde van dat getal bij op. Dan trek ik er éénderde van het totaal van af. Mijn antwoord is 10.”

b Wat is het getal?

Practicum

Veel rekenwerk doe je met een **rekenmachine**, ook met breuken rekenen.
Voor de volgende twee types rekenmachine zijn er practica beschikbaar:

- **Basistechnieken TI-30XB Multiview**
- **Basistechnieken Casio fx-82NL**

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het vermenigvuldigen en delen van breuken**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

1.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Begrippenlijst

- breuk, samengestelde breuk — teller, noemer, deelstreep
- decimaal als breuk — tienden, honderdsten, enz.
- gelijknamig
- breuken optellen/aftrekken
- breuken vermenigvuldigen
- breuken delen

Activiteitenlijst

- de begrippen breuk, teller en noemer gebruiken;
- breuken omrekenen naar decimale getallen en omgekeerd;
- breuken vergelijken door gelijknamig maken;
- breuken optellen en aftrekken;
- breuken vermenigvuldigen;
- breuken delen.

Opgave 7.1

Bekijk de breuk $\frac{5}{7}$.

a Welke getal is de teller? En welk getal is de noemer?

b Breng deze breuk in beeld door het juiste deel van een rechthoek te kleuren.

c Laat in de figuur zien dat $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$.

d Schrijf $\frac{5}{7}$ als exact decimaal getal.

Opgave 7.2

Vul het juiste teken >, < of = in:

a $\frac{5}{9} \cdots \frac{7}{9}$

b $\frac{5}{9} \cdots \frac{5}{11}$

c $\frac{5}{9} \cdots \frac{2}{3}$

d $1\frac{2}{7} \ldots 1\frac{3}{8}$

Opgave 7.3

Breuken optellen en aftrekken.

a Geef een voorbeeld van het optellen van twee gelijknamige breuken.

b Geef een voorbeeld van het aftrekken van twee gelijknamige breuken.

c Geef een voorbeeld van het optellen van twee ongelijknamige breuken.

d Geef een voorbeeld van het aftrekken van twee ongelijknamige breuken.

Opgave 7.4

Bekijk de vermenigvuldiging $1\frac{3}{7} \times \frac{5}{6}$.

a Teken hierbij rechthoeken waarmee je de uitkomst van deze vermenigvuldiging duidelijk maakt.

b Doe de berekening handmatig.

c Doe de berekening met de breukentoets van de rekenmachine.

d Doe de berekening zonder de breukentoets van je rekenmachine te gebruiken en geef je antwoord exact.

Opgave 7.5

Bekijk de deling $1\frac{3}{7} / \frac{5}{6}$.

a Doe de berekening handmatig.

b Doe de berekening met de breukentoets van de rekenmachine.

c Doe de berekening zonder de breukentoets van je rekenmachine te gebruiken en geef je antwoord exact.

Testen

★ Opgave 7.6

Als meneer en mevrouw de Ruiter voor hun dochtertje een basisschool gaan zoeken informeren ze bij de drie basisscholen in Overdal welk deel van de leerlingen uiteindelijk naar havo of vwo gaat.

Basisschool	aantal in groep 8	aantal naar havo/vwo
't Kompas	38	11
De Dolfijn	38	12
De Schakel	39	12

Tabel 7.1

a Vergelijk de drie scholen. Geef van iedere school aan welk deel van de leerlingen naar havo/vwo gaat. Bij welke school is dit deel het grootst?

b Vind je dit een belangrijk gegeven bij de keuze voor een basisschool?

Op een havo/vwo-school komt $\frac{1}{5}$ deel van de brugklasleerlingen van ‘De Schakel’, $\frac{2}{15}$ deel van ‘De Dolfijn’ en $\frac{1}{10}$ deel van ‘’t Kompas’.

c Welk deel van de brugklassers heeft in Overdal op school gezeten?

★ Opgave 7.7

Bereken met de hand (dus zonder rekenmachine):

a $\frac{1}{4} + \frac{4}{15} = \ldots$

b $\frac{4}{15} - \frac{1}{4} = \ldots$

c $2\frac{1}{4} + 1\frac{4}{15} = \ldots$

d $2\frac{1}{4} - 1\frac{4}{15} = \ldots$

e $\frac{1}{4} \times \frac{4}{15} = \ldots$

f $\frac{1}{4} / \frac{4}{15} = \ldots$

g $2\frac{1}{4} \times 1\frac{4}{15} = \ldots$

h $2\frac{1}{4} \Big/ 1\frac{4}{15} = \ldots$

★ **Opgave 7.8**

Voer de berekeningen in de voorgaande opgave ook uit met de rekenmachine, maar zonder de breukentoets te gebruiken.
Geef exacte antwoorden in decimalen.

★ **Opgave 7.9**

De heer Daems zegt ontevreden tegen zijn mentorklas: “Op dit moment dreigen er 8 leerlingen te blijven zitten, dat is $\frac{2}{7}$ deel van de klas!”

a Bereken het aantal leerlingen in de klas.

Een kwart van de leerlingen die er slecht voor stonden en een vijfde deel van de leerlingen die er nog goed voor stonden, is uiteindelijk blijven zitten.

b Ga na of de klas zich heeft verbeterd na de waarschuwing van meneer Daems.

★ **Opgave 7.10**

Van de scooters die uit een fabriek komen is $\frac{2}{3}$ deel rood. $\frac{5}{8}$ deel van de rode scooters is elektrisch, de rest loopt op benzine.

a Welke deel van alle scooters is rood en elektrisch?

Per dag verlaten er 960 scooters de fabriek.

b Hoeveel daarvan zijn rood en elektrisch?

De rode scooters die op benzine lopen worden in de fabriek gevuld met elk $2\frac{1}{3}$ liter benzine.

c Hoeveel liter benzine wordt er dus op één dag getankt?

In de grote benzinetank van de fabriek gaat 7000 liter.

d Hoeveel scooters kunnen ze daarmee van $2\frac{1}{3}$ liter benzine voorzien?

★ **Opgave 7.11**

Oefen het handmatig rekenen met breuken via het **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

★ ★ **Opgave 7.12**

Maak de volgende berekeningen kloppend door het juiste getal of de juiste getallen (soms een breuk) in te vullen:

a $\frac{3}{8} + \frac{\ldots}{12} = \frac{19}{24}$

b $1\frac{7}{8} - \ldots = \frac{3}{4}$

c $\frac{7}{12} \cdot \frac{\ldots}{13} = \frac{14}{39}$

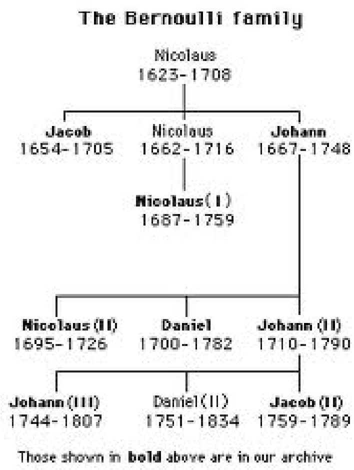
d $\frac{3}{5} \Big/ \ldots = 10$

Toepassen

★ ★

Opgave 7.13: Stamboom

De Zwitserse familie Bernoulli heeft een flink aantal bekende wiskundigen voortgebracht, allemaal mannen. Je ziet hier een deel van de mannelijke lijn van hun familiestamboom. De namen van de bekende wiskundigen zijn vet gedrukt. In het algemeen komen iemand's erfelijke eigenschappen voor de helft van de vader en voor de helft van de moeder. Bekijk nu Johann III Bernoulli.



Figuur 7.1

a Hoe groot is het deel dat zijn overgrootvader van vaders kant aan erfelijke eigenschappen heeft bijgedragen?

b Jakob en Johann Bernoulli waren de eerste bekende wiskundigen uit de familie. Als je aanneemt dat goed zijn in wiskunde erfelijk is, voor welk deel heeft Johann III dan zijn wiskundige capaciteiten geërfd?

c Kun je op grond van deze stamboom aannemen dat wiskundige kwaliteiten erfelijk zijn?

★ ★ ★

Opgave 7.14: Behangplaksel

In een receptenboek uit 1936 staat dit recept voor behangplaksel (dl staat voor deel of delen).

Rijstebloem 4 dl
Krijt (zeer fijn) 2 dl
Caseïne 1 dl
Aluin in poeder $\frac{1}{2}$ dl

Men kan het mengsel direct met heet water tot een bruikbare pap aanroeren.
Beter lost men de caseïne met iets ammoniak op als vroeger aangegeven en mengt deze oplossing met de gekookte rijstemeelpap.
Verder is een pap van zuivere tarwebloem zeer bruikbaar. Hiertoe mengt men de tarwebloem met koud water tot een dun papje aan en giet dit mengsel juist als bij stijfsel in een voldoende hoeveelheid kokend water.

a Rijstebloem koop je in pakken van 1 kg. Hoeveel moet je van de andere bestanddelen inkopen als je 1 pak rijstebloem tot behangplaksel wilt verwerken?

b Met 1 kg behangplaksel kun je 20 m^2 muur behangen. Hoeveel van elk van deze ingrediënten moet je kopen om 35 m^2 muur te kunnen behangen?

★ ★ ★

Opgave 7.15: Priemgetallen als noemer

Bij breuken waarvan de noemers wat grotere priemgetallen zijn is het lastig om ze te schrijven als een decimaal getal. Je rekenmachine helpt dan vaak niet goed.

a Schrijf $\frac{1}{29}$ als decimaal getal.

b Waarom kun je nu $\frac{3}{29}$ gemakkelijk als decimaal getal schrijven?

c Probeer als decimaal getal te schrijven: $\frac{3}{29} - \frac{3}{31}$.

Leerdoelentabel

In het ☐ achter de opgave kun je aangeven hoe je de opgave hebt gemaakt:
✓ goed gemaakt — **S** wel begrepen maar een slordige fout gemaakt — **H** hulp nodig gehad — **G** samen met groepje goed gemaakt — **X** fout gemaakt en niet goed begrepen — **N** niet bekeken

		★	★ ★	★ ★ ★
1	**Wat is een breuk?**	★	★ ★	★ ★ ★
	De begrippen breuk (met teller en noemer) en samengestelde breuk.	1.1 ☐ 1.2 ☐ **T** 7.6 ☐	1.3 ☐	
	Breuken vereenvoudigen.	1.1 ☐ 1.2 ☐ **T** 7.6 ☐	1.3 ☐	
2	**Van breuk naar decimaal getal**	★	★ ★	★ ★ ★
	Breuken en decimale getallen in elkaar omzetten.	2.1 ☐ 2.2 ☐ 2.3 ☐ **T** 7.6 ☐	2.4 ☐	2.5 ☐
	Breuken gebruiken als exacte antwoorden vereist zijn.	2.1 ☐ 2.3 ☐		2.5 ☐
3	**Breuken vergelijken**	★	★ ★	★ ★ ★
	Breuken met elkaar vergelijken door (als nodig) gelijknamig maken.	3.1 ☐ 3.2 ☐ 3.3 ☐ **T** 7.6 ☐	3.4 ☐	**T** 7.14 ☐ **T** 7.15 ☐
4	**Breuken optellen en aftrekken**	★	★ ★	★ ★ ★
	Breuken optellen en aftrekken.	4.1 ☐ 4.2 ☐ 4.3 ☐ 4.4 ☐ 4.5 ☐ **T** 7.6 ☐ **T** 7.7 ☐ **T** 7.8 ☐ **T** 7.9 ☐ **T** 7.11 ☐	4.6 ☐ **T** 7.12 ☐	4.7 ☐ **T** 7.14 ☐ **T** 7.15 ☐
5	**Breuken vermenigvuldigen**	★	★ ★	★ ★ ★
	Breuken vermenigvuldigen.	5.1 ☐ 5.2 ☐ 5.3 ☐ 5.4 ☐ **T** 7.7 ☐ **T** 7.8 ☐ **T** 7.9 ☐ **T** 7.10 ☐ **T** 7.11 ☐	5.5 ☐ 5.6 ☐ **T** 7.12 ☐ **T** 7.13 ☐	**T** 7.14 ☐
6	**Breuken delen**	★	★ ★	★ ★ ★
	Breuken delen.	6.1 ☐ 6.2 ☐ 6.3 ☐ 6.4 ☐ **T** 7.7 ☐ **T** 7.8 ☐ **T** 7.10 ☐ **T** 7.11 ☐	6.5 ☐ 6.6 ☐ **T** 7.12 ☐	6.7 ☐ **T** 7.15 ☐

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

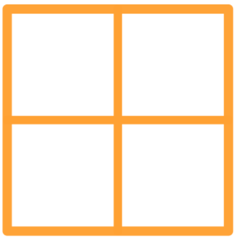
De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

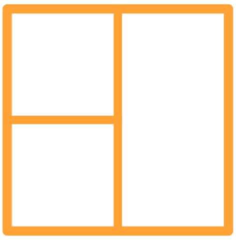
Math4all
www.math4all.nl

Informatieblad bij Opdracht 1.1

1

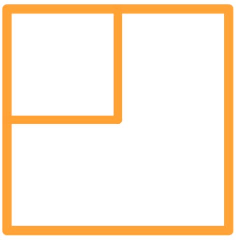


2



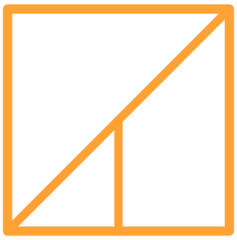
3

4



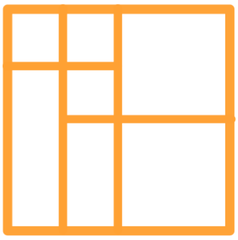
5

6



7

8

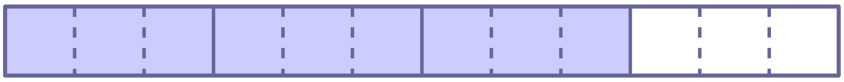


9

10

Informatieblad bij Opdracht 6.1

$\frac{3}{4}$



$\frac{5}{6}$