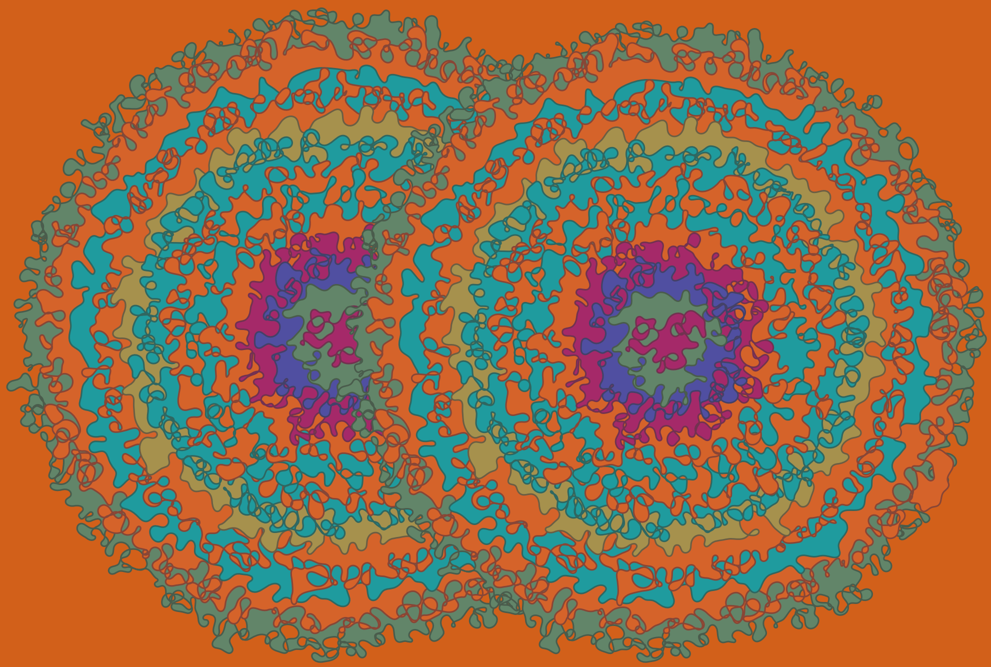
Wiskunde

1 HAVO / VWO

Katern 3 / Theorie

ConTeXt College



Inhoud

Voorwoord

Het lesmateriaal in dit katern is gebaseerd op het materiaal dat je kunt vinden op de Math4All website `www.math4all.nl`. In de tekst staan dan ook regelmatig verwijzingen naar die website. Waar je precies moet zijn op die website kun je zien in de kopregel van iedere pagina.

Ieder hoofdstuk bestaat uit een aantal paragrafen en wordt steeds afgesloten met een paragraaf *Totaalbeeld* waar de leerstof wordt samengevat en/of herhaald. Iedere paragraaf is ingedeeld in vaste rubrieken die houvast geven bij de bestudering van het lesmateriaal.

- Verkennen
- Uitleg
- Theorie en Voorbeelden
- Verwerken
- Toepassen

Indien er in het lesmateriaal wordt verwezen naar werkbladen dan kun je deze terugvinden op de website en achterin je katern.

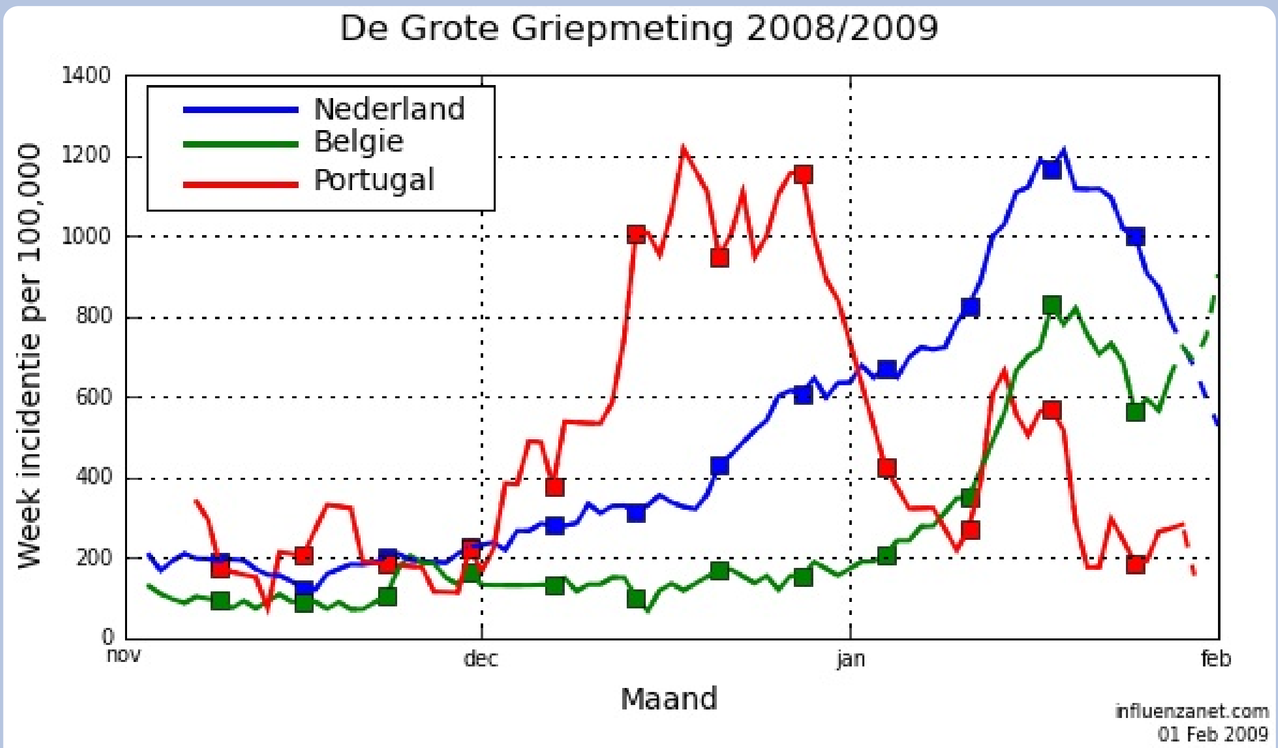
Begrippen

- grafiek — horizontale, verticale as — grootheid met eenheid — verband — stijgen, dalen, constant
- x-as, y-as — waarden aflezen — scheurlijntje
- grafiek tekenen — scheurlijn
- somgrafiek — verschilgrafiek
- maximum — minimum — extremen, uiterste waarden
- periodieke grafiek — periode

Activiteiten

- grafieken globaal bekijken
- waarden uit grafieken aflezen
- grafieken tekenen vanuit een tabel
- som- en verschilgrafieken maken en gebruiken, ook met negatieve waarden
- stijgen en dalen herkennen — extremen, maxima en minima aflezen
- periodieke grafieken herkennen, tekenen en gebruiken — periode bepalen

Getallen in beeld



Domein

Grafieken en Formules

Hoofdstuk

Grafieken

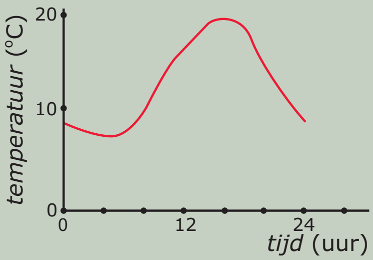
Inhoud

1

1.1 Verloop van een grafiek

Inleiding

De temperatuur verandert met de tijd, zoals alles. Je kunt de temperatuur meten in graden Celsius (°C) en je kunt de tijd meten in bijvoorbeeld uren. Dus wil je weten hoe de temperatuur van de tijd afhangt en daar een overzichtelijk plaatje van hebben.
Zoiets zie je hier.



Je leert in dit onderwerp

- de grootheden op de assen van een grafiek benoemen;
- het verloop van een grafiek beschrijven met de woorden stijgen, dalen en constant.

Voorkennis

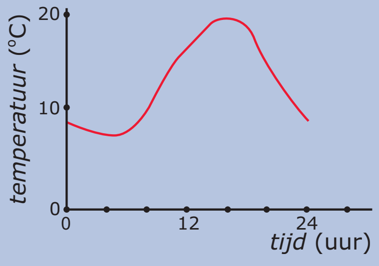
- getallen gebruiken om te tellen en te rekenen.

Opgave V1

Uitleg

Tijd en temperatuur kun je meten, het zijn grootheden. De temperatuur hangt af van het tijdstip op de dag: bij een zeker tijdstip hoort een bepaalde temperatuur. De grafiek geeft het verband aan tussen de twee grootheden:

- *tijd* staat op de horizontale as.
- *temperatuur* hangt af van tijd en staat daarom op de verticale as.



Grootheden zijn altijd voorzien van eenheden. *tijd* heeft in dit geval eenheid ‘uur’. *temperatuur* heeft in dit geval eenheid ‘graden Celsius’.

Je kunt het verloop van de grafiek beschrijven met de woorden: stijgen, dalen en constant.

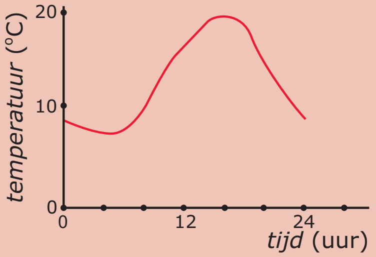
Deze grafiek laat zien: 's nachts daalt de temperatuur, maar vanaf het begin van de ochtend begint de temperatuur weer te stijgen. Dat gaat door tot tegen het eind van de middag, dan blijft de temperatuur even redelijk constant en vanaf het begin van de avond daalt de temperatuur snel.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

tijd en *temperatuur* zijn **grootheden**.
De temperatuur hangt af van het tijdstip op de dag: bij een zeker tijdstip hoort een bepaalde temperatuur. De **grafiek** geeft het **verband** aan tussen de twee grootheden.

- *tijd* staat op de **horizontale as**.
- *temperatuur* hangt af van *tijd* en staat daarom op de **verticale as**.

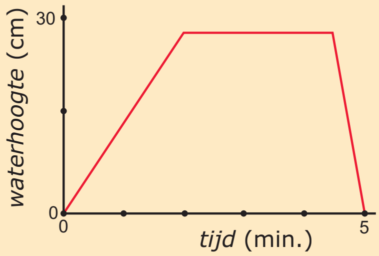


Je kunt het verloop van de grafiek beschrijven met de woorden: **stijgen**, **dalen** en **constant**.

Voorbeeld 1

Deze grafiek is gemaakt bij het volgende verhaal.

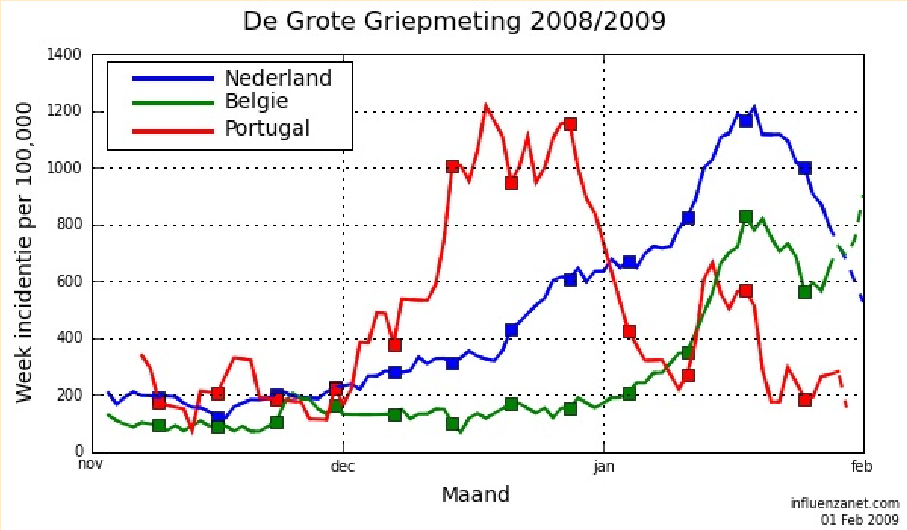
De stortbak van een toilet loopt langzaam vol. De hoogte van het waterpeil neemt toe, de grafiek stijgt in het begin. De stortbak is vol. De hoogte van het waterpeil verandert niet, de waterhoogte blijft constant. Er wordt doorgetrokken: de stortbak loopt weer snel leeg. De hoogte van het waterpeil neemt af, de grafiek daalt snel. Je noemt deze grafiek ook wel een 'vulgrafiek'.



Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Hier zie je grafieken van het verloop van het percentage grieppatiënten in Portugal, Nederland en België in de winter van 2008—2009.



Welk van deze drie landen heeft als eerste een golf van grieppatiënten?

Antwoord

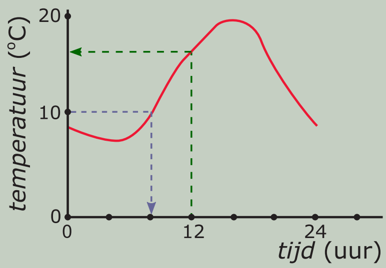
Bij Portugal gaat de grafiek het eerst sterk stijgen, dus dat land heeft als eerste een griepgolf.

Opgave 6

1.2 Grafieken aflezen

Inleiding

De temperatuur verandert met de tijd, zoals alles. Je kunt de temperatuur meten in graden Celsius (°C) en je kunt de tijd meten in bijvoorbeeld uren. Dus wil je weten hoe de temperatuur van de tijd afhangt en daar een overzichtelijk plaatje van hebben.
Zoiets zie je hier.



Je wilt nu wat nauwkeuriger kunnen aflezen uit grafieken.

Je leert in dit onderwerp

- grootheden en eenheden onderscheiden;
- de y-waarde van een punt op een grafiek aflezen bij gegeven x-waarde;
- de x-waarde van een punt op een grafiek aflezen bij gegeven y-waarde;
- waarden aflezen in een grafiek met een scheurlijn.

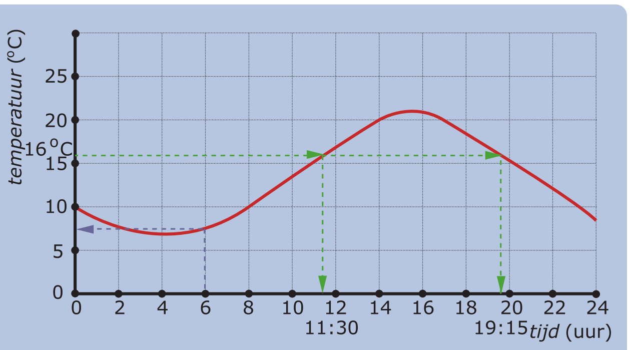
Voorkennis

- de grootheden op de assen van een grafiek benoemen;
- het verloop van een grafiek beschrijven met de woorden stijgen, dalen en constant;
- het verloop van een verband in een grafiek tekenen.

Opgave V1

Uitleg 1

Je ziet een grafiek met het temperatuurverloop op een bepaalde dag. In deze grafiek staat op de x-as de *tijd* in uren en op de y-as de *temperatuur* in °C. *tijd* en *temperatuur* zijn grootheden. Grootheden worden uitgedrukt in eenheden. In dit geval zijn de eenheden uren en graden Celsius.



Uit deze grafiek kun je antwoorden aflezen op vragen als:
“Hoeveel graden Celsius was het om 6:00 uur?”

Je vindt een antwoord op deze vraag door vanaf het punt op de x-as bij 6 een lijn omhoog te trekken naar de grafiek. Door vanaf het snijpunt van deze lijn met de grafiek een lijn naar links te trekken, vind je de *temperatuur*.

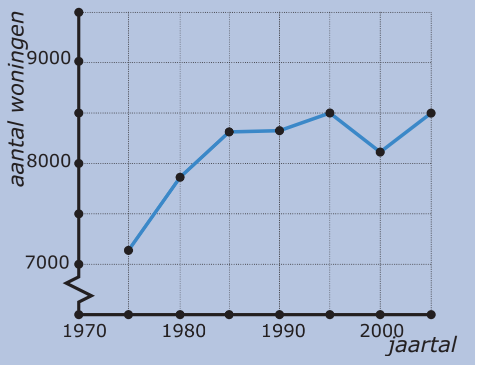
Ook kun je in de grafiek antwoorden aflezen op vragen als:

“Op welk(e) tijdstip(pen) was het 16 °C?”

Je vindt een antwoord op deze vraag door bij de waarde op de y-as bij 16 een lijn naar rechts naar de grafiek toe te trekken. Bij elk snijpunt van deze lijn met de grafiek kun je vanaf dat punt een lijn naar beneden trekken om de bijbehorende tijden op de x-as te vinden.

Uitleg 2

Bij het aflezen van een grafiek is het belangrijk goed te kijken naar de waarden op de assen. Soms begint een as namelijk niet bij 0. In dat geval wordt een scheurlijn gebruikt (zie de grafiek).

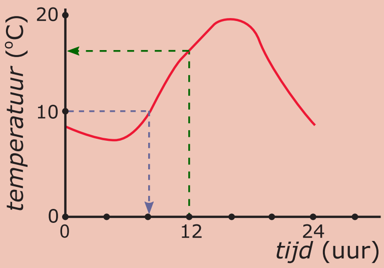


In de grafiek zie je het *totaal aantal woningen* in een wijk van een grote stad uitgezet tegen de *tijd* in jaartallen. In deze wijk schommelde het *aantal woningen* sinds 1975 tussen de 7000 en 8500. Er is een scheurlijn gebruikt om de y-as bij 7000 te kunnen laten beginnen.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Theorie

Je ziet een grafiek met het temperatuurverloop op een bepaalde dag. In deze grafiek staat op de **x-as** de *tijd* in uren en op de **y-as** de *temperatuur* in °C. *tijd* en *temperatuur* zijn **grootheden**. Grootheden worden uitgedrukt in **eenheden**. In dit geval zijn de eenheden uren en graden Celsius.



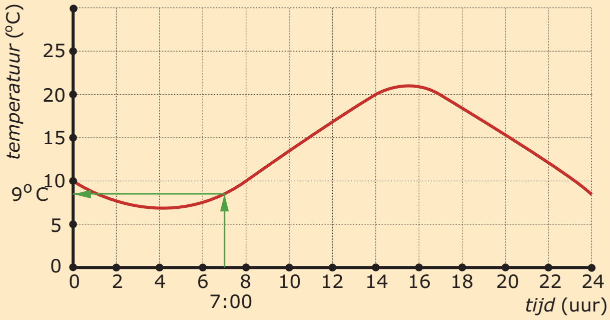
Nu wil je **waarden uit een grafiek aflezen**. In de figuur zie je:

- Als je op de x-as een waarde (als 12 uur) gegeven hebt, hoort daar op de y-as een waarde bij (ongeveer 16 °C).
- Als je op de y-as een waarde (als 10 °C) gegeven hebt, hoort daar op de x-as een waarde bij (ongeveer 9 uur en ook ongeveer 9 uur).

Soms wordt in een grafiek een deel van een as weggelaten. Dan wordt een **scheurlijntje** gebruikt.

Voorbeeld 1

Je kunt uit deze grafiek aflezen wat de *temperatuur* om 7:00 uur was.

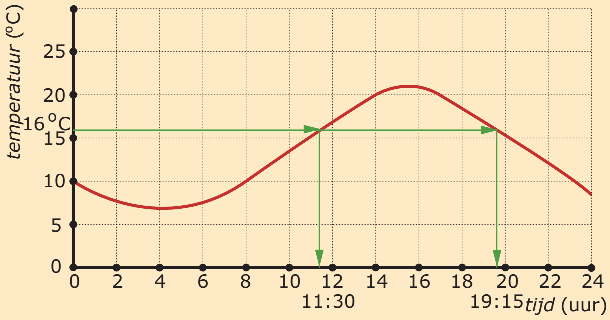


- Zoek op de x-as 7:00 uur op.
- Ga recht omhoog tot je bij de grafiek bent.
- Trek vanaf het snijpunt van die lijn met de grafiek een lijn naar links.
- Lees nu op de y-as de *temperatuur* af.
- Je ziet dat het om 7:00 uur ongeveer 8 °C was.

Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 2

Je ziet nogmaals de grafiek van het temperatuurverloop. Hoe kun je aflezen op welke tijdstippen het 16 °C was?



- Zoek op de y-as 16 °C op.
- Teken op die hoogte een horizontale lijn naar rechts door de grafiek.
- Trek vanaf de snijpunten van die lijn met de grafiek lijnen naar beneden.
- Lees nu op de x-as de tijdstippen af.
- Je ziet dat het 16 °C was om ongeveer 11:30 uur en om ongeveer 19:15 uur.

Opgave 8 Opgave 9

1.3 Grafieken tekenen

Inleiding

Inmiddels wil je natuurlijk wel eens weten hoe je grafieken maakt.
Je hebt immers gezien hoe gemakkelijk ze het verloop van bepaalde grootheden afhankelijk van een andere grootheid zichtbaar maken. Je moet dan eerst tabellen maken...

Je leert in dit onderwerp

- een grafiek tekenen bij een tabel;
- het gebruiken van een scheurlijn in een grafiek als dat nodig is.

Voorkennis

- coördinaten kunnen hanteren in een assenstelsel;
- de y-waarde van een punt op een grafiek aflezen bij gegeven x-waarde;
- de x-waarde van een punt op een grafiek aflezen bij gegeven y-waarde;
- waarden aflezen in een grafiek met een scheurlijn.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

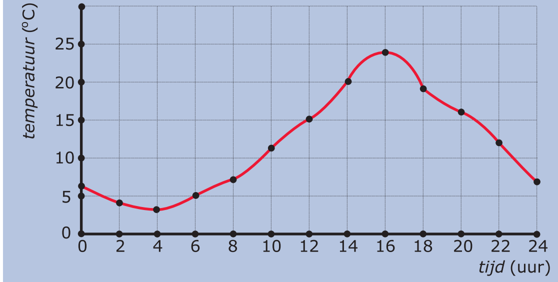
Bij een tabel kun je een grafiek tekenen.

tijd (uur)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
temperatuur (°C)	6	4	3	5	7	11	15	20	24	19	16	12	7

De *temperatuur* hangt af van de *tijd* op de dag. Dus komt de *temperatuur* op de y-as en de *tijd* op de x-as.

- Teken een assenstelsel. Zet bij de x-as *tijd* in uren en bij de y-as *temperatuur* in °C. Maak een geschikte indeling voor de assen.
- Teken de punten uit de tabel in de grafiek: $(0,6)$, $(2,4)$, $(4,3)$, enzovoort.
- Verbind de punten door een vloeiende lijn of door lijnstukjes.

Door het verbinden van de punten maak je het aflezen van waarden tussen de punten mogelijk. En hier is dat logisch omdat er op tussenliggende tijdstippen ook temperaturen zijn.



Opgave 1

Theorie

Bij een tabel kun je een **grafiek tekenen**.

- Teken een assenstelsel. Zet bij de assen wat je meet (**grootheid**) en met welke maat (**eenheid**). Maak een geschikte indeling voor de assen.
- Teken de punten uit de tabel in de grafiek.
- Verbind als dat kan de punten door een vloeiende lijn of door lijnstukjes.

Door het verbinden van de punten maak je het aflezen van waarden tussen de punten mogelijk. Ook kun je daarmee het verloop van de grafiek beter laten zien.

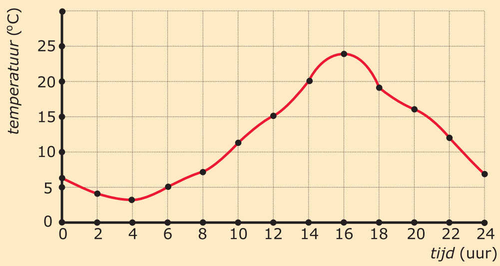
Als de waarden op de x-as of y-as ver van 0 af liggen, kun je een stukje van de grafiek weglaten. Zo blijft de grafiek mooi compact. Om aan te geven dat je een stukje weglaat, gebruik je een **scheurlijn**.

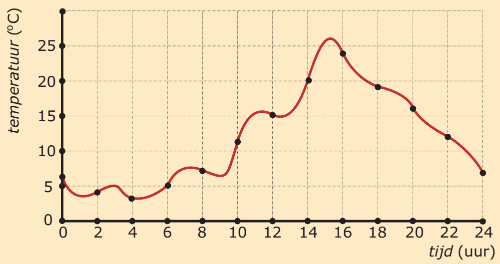
Voorbeeld 1

Bekijk de tabel van het temperatuurverloop.

tijd (uur)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
temperatuur (°C)	6	4	3	5	7	11	15	20	24	19	16	12	7

Hoe de grafiek bij de tabel precies moet lopen, weet je niet. Deze grafieken zijn beide mogelijk:





Kun je nu nauwkeurig aflezen welke *temperatuur* het om 13:00 uur is?

Antwoord

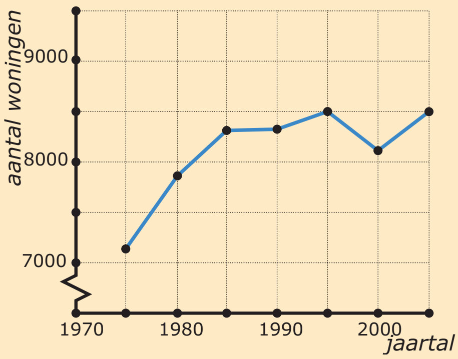
Als je in de eerste grafiek de temperatuur om 13:00 uur afleest, vind je dat de temperatuur 15 °C is. Maar als je de temperatuur in de tweede grafiek afleest, vind je een temperatuur van $17{,}5$ °C. Omdat je niet precies weet hoe de vloeiende lijn tussen de punten loopt, kun je nooit precies weten wat de temperatuur tussen de punten uit de tabel is geweest. Dat blijft altijd een inschatting.

Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

Het totaal aantal woningen in een wijk van een grote stad is afhankelijk van het jaartal. In een bepaalde wijk schommelt het aantal woningen sinds 1975 tussen de 7000 en de 8500. Deze waarden liggen ver van 0.

Let op! Bij jaartallen wordt geen scheurlijn gebruikt.

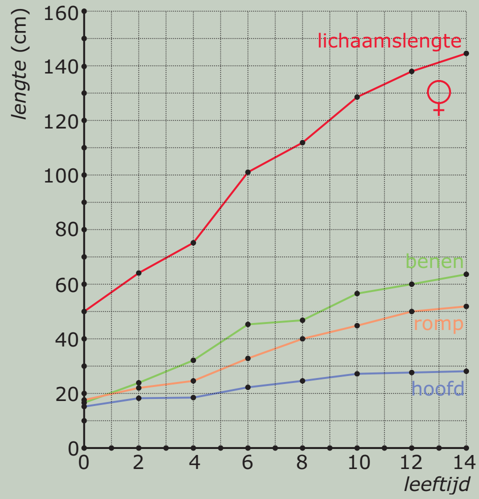


Opgave 5 Opgave 6

1.4 Som- en verschilgrafiek

Inleiding

Bekijk de grafieken met de groei van een meisje. Er is één grafiek voor de beenlengte, één voor de lengte van de romp (inclusief de nek) en één voor de lengte van het hoofd. Ook zie je een grafiek met de totale lichaamslengte. Je krijgt de grafiek van de totale lichaamslengte door steeds de waarden van beenlengte, romplengte en hoofdlengte die bij een bepaalde leeftijd horen op te tellen.



Je leert in dit onderwerp

- wat een somgrafiek is en hoe je hem maakt en interpreteert;
- wat een verschilgrafiek is en hoe je hem maakt en interpreteert.

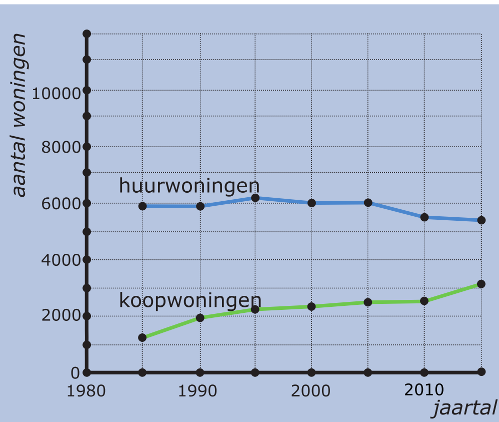
Voorkennis

- een tabel bij een grafiek maken en een grafiek bij een tabel maken;
- optellen en aftrekken van positieve en negatieve getallen;
- grootheden op de assen van een grafiek benoemen.

Opgave V1

Uitleg

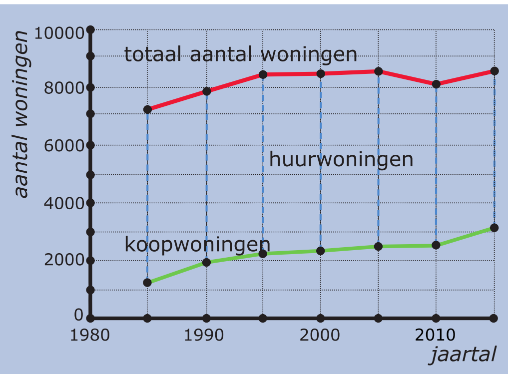
Soms staan er meerdere grafieken in een assenstelsel. Dat kan alleen als de grafieken een verband tussen dezelfde grootheden laten zien. In dit assenstelsel staan grafieken van de huur- en koopwoningen in een wijk. Beide grafieken laten het verloop tussen de grootheden *aantal woningen* en *jaartal* zien.



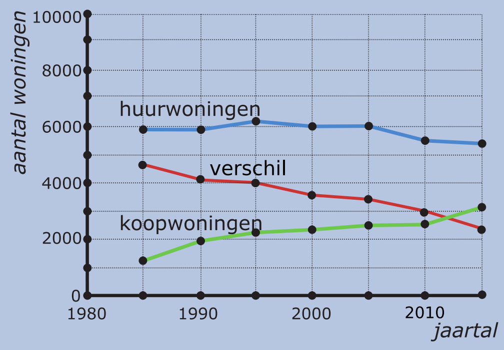
De aantallen koop- en huurwoningen kun je jaarlijks bij elkaar optellen. Je kunt de twee grafieken ook bij elkaar optellen. Dan krijg je een 'somgrafiek'.

Je kunt ook jaarlijks het verschil berekenen tussen het aantal huurwoningen en het aantal koopwoningen. Je kunt de twee grafieken dus ook van elkaar aftrekken. Dan krijg je een 'verschilgrafiek'.

Bekijk de somgrafiek van de huur- en koopwoningen en de verschilgrafiek van de huur- en koopwoningen.



somgrafiek



verschilgrafiek

Opgave 1

Theorie

Bekijk de groeigrafieken. Er is één grafiek voor de beenlengte, één voor de lengte van de romp (inclusief de nek) en één voor de lengte van het hoofd. Je krijgt de grafiek van de totale lichaamslengte door steeds de waarden van beenlengte, romplengte en hoofdlengte die bij een bepaalde leeftijd horen op te tellen.

Je kunt grafieken ook bij elkaar optellen, je krijgt dan een **somgrafiek**.

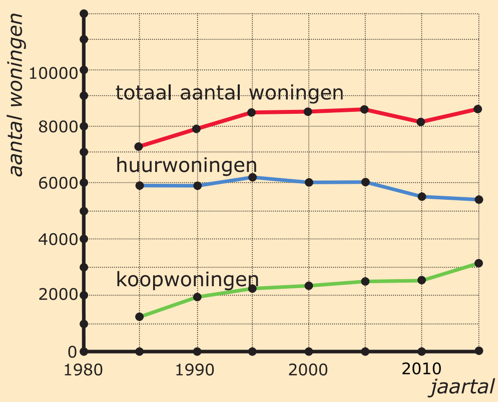
Je krijgt een grafiek van de lengte van romp en hoofd samen door steeds van de waarden van de totale lichaamslengte die van de beenlengte die bij een bepaalde leeftijd horen af te trekken.

Je kunt grafieken dus ook van elkaar aftrekken. Dan krijg je een **verschilgrafiek**.

Werk daarbij met tabellen om de optellingen en aftrekkingen te doen.

Voorbeeld 1

In het assenstelsel zie je een grafiek van het aantal koopwoningen en het aantal huurwoningen in een wijk. Bij deze twee grafieken kun je een somgrafiek maken. Als je namelijk het aantal huurwoningen en het aantal koopwoningen bij elkaar optelt, vind je het totaal aantal woningen in de wijk.



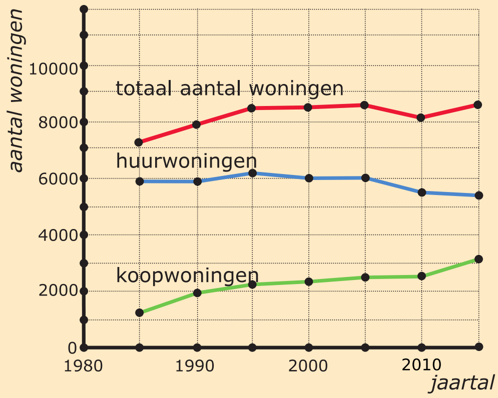
Dit gaat het handigst door eerst een tabel te maken.

tijd (jaar)	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
aantal koopwoningen	1250	1950	2200	2360	2500	2600	3100
aantal huurwoningen	5900	5900	6150	6000	6000	5500	5400
totaal aantal woningen	7150	7850	8350	8360	8500	8100	8500

Opgave 2 Opgave 3

Voorbeeld 2

Als je het verschil neemt tussen het totaal aantal woningen en het aantal huurwoningen vind je het aantal koopwoningen in een wijk. De grafiek van het aantal koopwoningen is een voorbeeld van een verschilgrafiek.



Deze maak je het makkelijkst door een tabel te gebruiken.

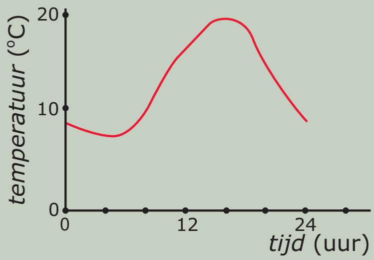
tijd (jaar)	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
totaal aantal woningen	7150	7850	8350	8360	8500	8100	8500
aantal huurwoningen	5900	5900	6150	6000	6000	5500	5400
aantal koopwoningen	1250	1950	2200	2360	2500	2600	3100

Opgave 4 Opgave 5

1.5 Maximum en minimum

Inleiding

De temperatuur verandert met de tijd, zoals alles. Je kunt de temperatuur meten in graden Celsius (°C) en je kunt de tijd meten in bijvoorbeeld uren. Dus wil je weten hoe de temperatuur van de tijd afhangt en daar een overzichtelijk plaatje van hebben.
Zoiets zie je hier.



Je wilt nu de hoogste en de laagste temperatuur weten.

Je leert in dit onderwerp

- een maximum en/of minimum in een grafiek herkennen en aflezen;
- de extremen van een grafiek benoemen.

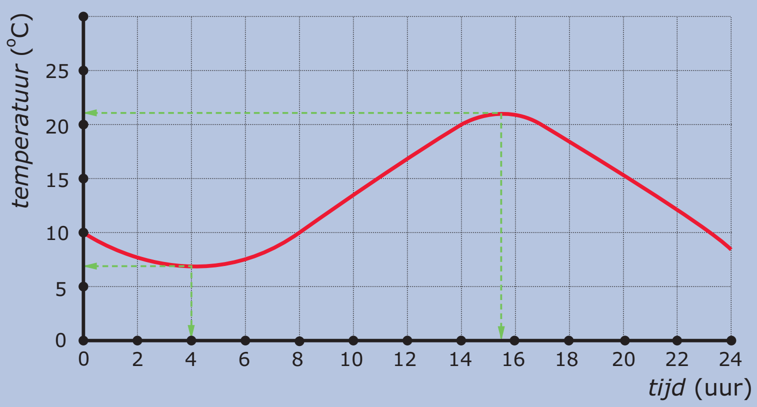
Voorkennis

- waarden in een grafiek aflezen;
- een tabel bij een grafiek maken en een grafiek bij een tabel maken;
- optellen en aftrekken van positieve en negatieve getallen;
- grootheden op de assen van een grafiek benoemen.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Je ziet de grafiek van het temperatuurverloop op een dag. De grafiek beschrijft een verband tussen de *temperatuur* en de *tijd* op deze dag.



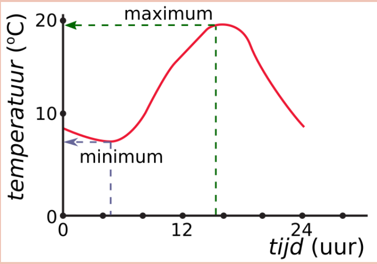
Die dag werd de maximum temperatuur om ongeveer 15:30 uur bereikt. De minimum temperatuur werd om ongeveer 4:00 uur 's ochtends bereikt. De bijbehorende temperaturen kun je aflezen uit de grafiek.

Als een grafiek overgaat van stijgen in dalen, dan ontstaat er een maximum, een grootste uitkomst. Als een grafiek overgaat van dalen in stijgen, dan ontstaat er een minimum, een laagste uitkomst. Maxima en minima noem je de extreme waarden of uiterste waarden.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Als een grafiek overgaat van stijgen in dalen, dan heeft de grafiek een hoogste waarde. Die waarde noem je een **maximum**. Sommige grafieken hebben meerdere maxima.

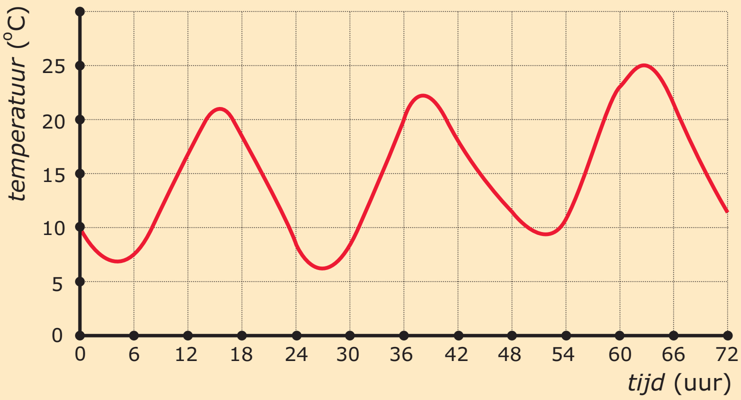


Als een grafiek overgaat van dalen in stijgen, dan heeft de grafiek een laagste waarde. Die waarde noem je een **minimum**. Sommige grafieken hebben meerdere minima.

Maxima en minima noem je de **extremen** of **uiterste waarden**. Het zijn altijd y-waarden.

Voorbeeld 1

Bekijk de grafiek van het temperatuurverloop op drie achtereenvolgende dagen.

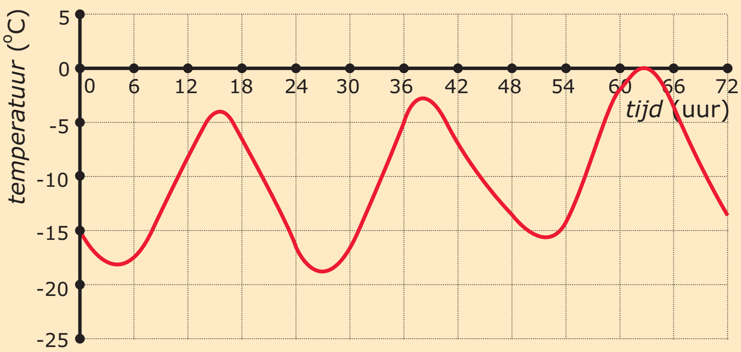


Er zijn nu meerdere maxima: elke dag heeft een maximum temperatuur.
Er zijn ook meerdere minima: elke dag heeft een minimum temperatuur.
Er zijn in totaal zes extremen.

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

Bekijk de grafiek van het temperatuurverloop op drie opeenvolgende dagen in de winter.



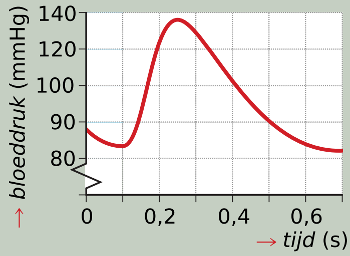
De meeste extremen zijn nu negatief! De eerste dag is de maximum temperatuur -4 °C.
De eerste dag is de minimum temperatuur -18 °C.

Opgave 5 Opgave 6

1.6 Periodieke grafieken

Inleiding

Het hart pompt bloed door je aderen. Door het pompen varieert de bloeddruk in je aderen. Hier zie je daar een grafiek van. In de periode van $0{,}1$ tot $0{,}7$ seconden maakt dit hart één hartslag. De druk in de slagaderen is het laagst als het hart zich met bloed vult (diastolische bloeddruk), en stijgt als het hart bloed wegpompt (systolische bloeddruk). De eenheid van druk is millimeter kwik (mmHg).



Na elke periode herhaalt zich de hartslag. Het is daarom een periodiek verschijnsel.

Je leert in dit onderwerp

- een periodieke grafiek herkennen en interpreteren;
- de periode in een periodieke grafiek aflezen, herkennen of berekenen;
- een periodieke grafiek tekenen aan de hand van gegevens over één periode.

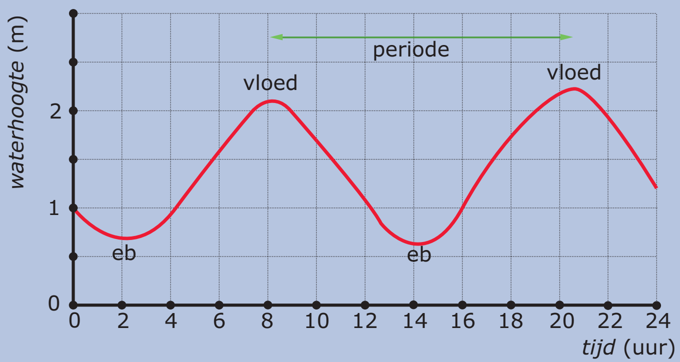
Voorkennis

- waarden in een grafiek aflezen;
- een tabel bij een grafiek maken en een grafiek bij een tabel maken;
- grootheden op de assen van een grafiek benoemen.

Opgave V1

Uitleg

Dit is een grafiek van de waterstand boven een bepaalde plek op de bodem van de Waddenzee in de loop van een dag. Het is een voorbeeld van een periodieke grafiek. Een bepaald deel van de grafiek wordt steeds weer (ongeveer) herhaald. De tijd die daarbij hoort, heet de periode. De periode van deze grafiek is ongeveer 12 uur en 20 minuten.



De grafiek is elke dag (afhankelijk van de omstandigheden) anders, dus de waterstand is niet zuiver periodiek.

Opgave 1 **Opgave 2**

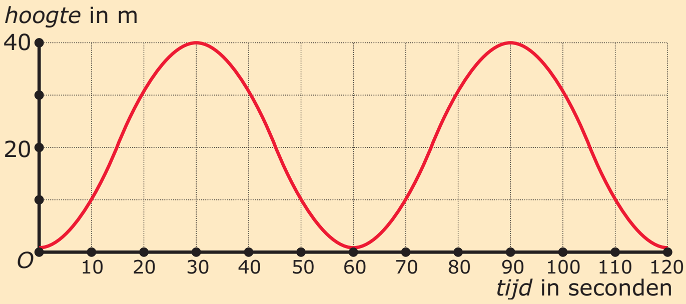
Theorie

Dit is een **periodieke grafiek**. Een bepaald deel van de grafiek wordt steeds weer (ongeveer) herhaald. De tijd die daarbij hoort, heet de **periode**. De periode van deze grafiek is ongeveer $0{,}6$ seconden.

Je kunt de grafiek verder tekenen door steeds het deel van de grafiek binnen één periode achter de laatste periode te 'plakken'.

Voorbeeld 1

Dit is een voorbeeld van een zuivere periodieke grafiek. Het gaat om *hoogte* (in meters boven de grond) afhankelijk van *tijd* (de ronddraaitijd in seconden) van een bakje in een draaiend reuzenrad. De periode is 60 seconden, dus in 1 minuut ga je één keer helemaal rond. Je komt tot een maximale hoogte van wel 40 meter.



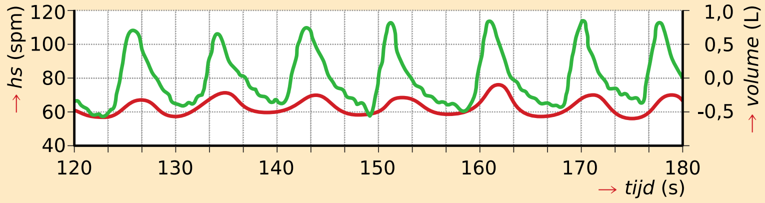
Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

Veel periodieke verschijnselen hebben met het menselijk lichaam te maken. Denk maar aan:

- de longinhoud bij de ademhaling;
- de bloeddruk in je aderen als gevolg van het kloppen van je hart.

Je ziet in één figuur een ademhalingsgrafiek (groen) en een hartslaggrafiek (rood). Op de horizontale as staat de *tijd* in seconden.
Op de verticale as staat voor de rode grafiek *hs* (spm), ofwel *hartslag* in slagen per minuut. Voor de groene grafiek staat er *volume* in liters.



Opgave 5 Opgave 6

Begrippen

- verband — grootheid met eenheid — afhankelijke en onafhankelijke variabele
- (woord)formule
- grafiek bij een formule — invoervariabele — substitueren
- lettervariabele — vermenigvuldigingspunt
- vergelijking, linker- en rechterzijde — oplossing(en) van een vergelijking — inklemmen

Activiteiten

- verbanden beschrijven in woorden, en er tabellen en grafieken bij maken — variabelen gebruiken
- verbanden beschrijven in (woord)formules en daar tabellen en grafieken bij maken
- grafieken tekenen vanuit een formule
- letters gebruiken voor variabelen — formules zo kort mogelijk schrijven
- formules vergelijken — vergelijkingen oplossen met behulp van grafieken en inklemmen in een tabel — vergelijkingen oplossen door handig rekenen

Waarom welk abonnement?

Domein

Grafieken en formules

Hoofdstuk

Verbanden

Inhoud

2

2.1 Verbanden en variabelen

Inleiding

Als je een smartphone hebt zou je moeten weten hoe het zit met de kosten voor bellen, appen, internetten en wat je allemaal niet met zo´n apparaat kunt doen. Het aantal gewenste belminuten speelt daarbij een rol. Meestal spreek je dit aantal belminuten af met de provider.

Je leert in dit onderwerp

- afhankelijke en onafhankelijke variabelen onderscheiden;
- een verband beschrijven in woorden;
- een tabel en/of grafiek maken bij een verband in woorden.

Voorkennis

- je kunt een grafiek bij een tabel maken;
- je kunt rekenen met decimale getallen.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Een kaars is twintig centimeter lang en wordt aangestoken. Je meet de lengte aan het begin van elk uur.

In de tabel zie je dat tijdens elk uur *brandtijd* de *lengte* twee centimeter korter wordt. Er is een relatie tussen de *brandtijd* en de *lengte* van de kaars. De tabel brengt het verband tussen de grootheden *brandtijd* en *lengte* in beeld.

brandtijd (uur)	0	1	2	3
lengte (cm)	20	18	16	14

Omdat deze grootheden veranderen, heten ze variabelen (veranderlijken). In dit geval hangt de variabele *lengte* af van de variabele *brandtijd*. Daarom is *lengte* de afhankelijke variabele en *brandtijd* de onafhankelijke variabele. Bij de variabele *brandtijd* hoort de eenheid ‘uur’. Bij de variabele *lengte* hoort de eenheid ‘centimeter’.

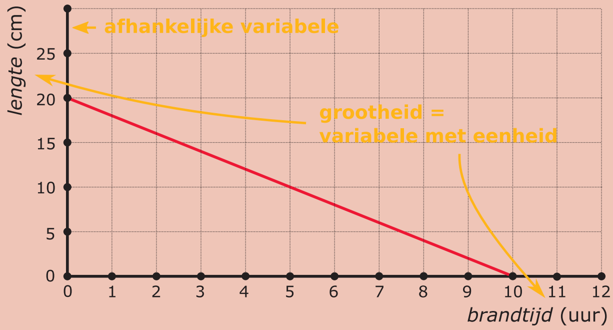
Je kunt dit verband beschrijven in woorden: als de *brandtijd* toeneemt, neemt de *lengte* af.

Een verband kun je ook weergeven in een grafiek. De grafiek blijkt in dit geval een rechte lijn te zijn.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Soms is er een **verband** tussen twee **grootheden**.

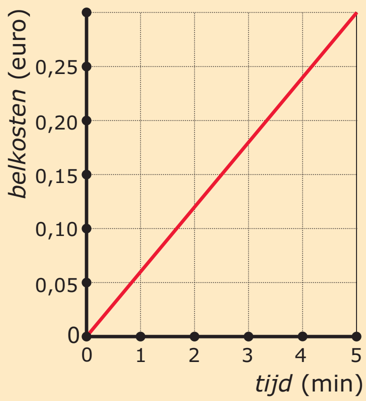


De éne grootheid kan steeds andere waarden aannemen en van de andere kun je dan de waarde uitrekenen, het zijn **variabelen**. De variabele waarvan je de waarden kunt kiezen heet de **onafhankelijke variabele** en de variabele waarvan je dan de waarden berekent heet de **afhankelijke variabele**.

Bij zo'n verband maak je vaak een tabel. Je kiest dan oplopende waarden voor de onafhankelijke variabele en rekent de waarden van de afhankelijke variabele uit. Bij die tabel past dan weer een grafiek. Er kunnen daarbij verschillende schaalverdelingen op de twee assen worden gebruikt.

Voorbeeld 1

Neem even aan, dat je met je telefoon alleen belt, verder niks.



Als je belt, kost dat bijvoorbeeld € 0,06 per belminuut. Je *belkosten* (euro) hangen dan af van de *tijd* (min) die je belt. Er is een verband tussen de variabelen *belkosten* en *tijd*.

De variabele *belkosten* is de afhankelijke variabele en de variabele *tijd* de onafhankelijke variabele. Bij de variabele *tijd* hoort de eenheid minuut. Bij de variabele *belkosten* hoort de eenheid euro.

Het verband in woorden: als de *beltijd* met één minuut toeneemt, nemen de *belkosten* met € 0,06 toe.

Dit verband tussen de variabelen *belkosten* en *tijd* kun je weergeven in een tabel en in een grafiek.

tijd (min)	0	1	2	3	4	5
belkosten (euro)	0,00	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30

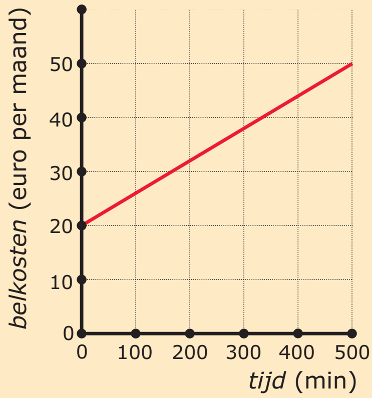
Opgave 3

Voorbeeld 2

Neem even aan, dat je met je telefoon alleen belt, verder niks.

Als je belt, kost dit bijvoorbeeld € 0,06 per minuut. Met een abonnement betaal je ook abonnementskosten per maand, bijvoorbeeld € 20,00. Dit zijn je startkosten. Ook al bel je niet, die € 20,00 betaal je sowieso (zie de tabel).

Tijd is de onafhankelijke variabele en *belkosten* is de afhankelijke variabele. Bij de variabele *tijd* hoort de eenheid minuut. Bij de variabele *belkosten* hoort de eenheid euro per maand.



Het verband in woorden: de *belkosten* bedragen € 20,00 plus € 0,06 per gebelde minuut.

Dit verband kun je ook weergeven in een tabel en in een grafiek.

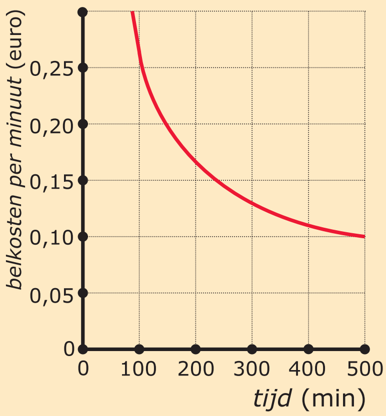
tijd (min)	0	100	200	300
belkosten (euro per maand)	20,00	26,00	32,00	38,00

Opgave 4 **Opgave 5**

Voorbeeld 3

Neem even aan, dat je met je telefoon alleen belt, verder niks.

Als je belt, kost dit € 0,06 per minuut. Je hebt een abonnement van € 20,00 per maand. Je *belkosten* (euro) hangen af van de *tijd* (min) die je belt. De *belkosten per minuut* (euro per maand) vind je door de *belkosten* te delen door de *tijd* (aantal minuten dat je belt). Bij nul minuten bellen, betaal je alleen abonnementskosten. De *belkosten* per minuut bij nul minuten bellen kun je niet weergeven, omdat je niet door nul kunt delen.



tijd (min)	0	100	200	300
belkosten (euro)	20,00	26,00	32,00	38,00
belkosten per minuut (euro)	-	0,26	0,16	0,13

De *belkosten per minuut* hangen af van de *tijd* die je belt. Er is dus een verband tussen de variabelen *tijd* en *belkosten per minuut*. *Tijd* is de onafhankelijke variabele en *belkosten per minuut* is de afhankelijke variabele. Bij de variabele *tijd* hoort de eenheid minuten. Bij de variabele *belkosten per minuut* hoort de eenheid euro per maand.

Opgave 6 **Opgave 7**

2.2 Formules opstellen

Inleiding

Als je een smartphone hebt zou je moeten weten hoe het zit met de kosten voor bellen, appen, internetten en wat je allemaal niet met zo´n apparaat kunt doen. Het aantal gewenste belminuten speelt daarbij een rol, zeker als je je telefoon nergens anders voor gebruikt...
Er was zelfs een tijd dat je per belminuut betaalde.

Je leert in dit onderwerp

- een formule bij een verband opstellen.

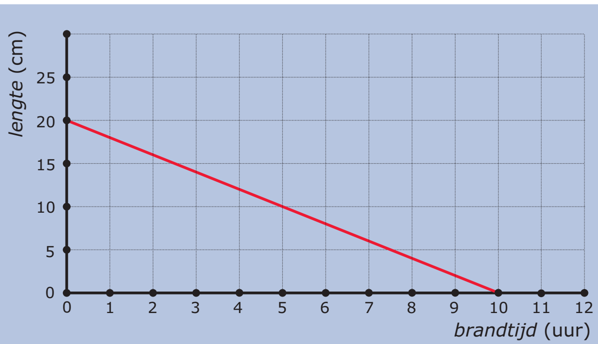
Voorkennis

- het kunnen onderscheiden van de afhankelijke en de onafhankelijke variabele;
- een verband in woorden kunnen beschrijven met de informatie uit een tabel of een grafiek;
- een verband in woorden kunnen beschrijven.

Opgave V1

Uitleg

Een kaars is twintig centimeter lang en wordt aangestoken. Je meet aan het begin van elk uur de lengte van de kaars.



De tabel beschrijft een verband tussen de variabelen *brandtijd* en *lengte*. Elk uur wordt de *lengte* twee centimeter korter vanaf een beginlengte van twintig centimeter.
Als *brandtijd* is 5 uur, dan geldt *lengte* $= 20 - 5 \times 2 = 10$ cm.

brandtijd (uur)	0	1	2	3
lengte (cm)	20	18	16	14

Dus: *lengte* $= 20 -$ *brandtijd* $\times 2$. Dit noem je een formule. Er zijn twee variabelen: *brandtijd* en *lengte*. Let op als je gaat rekenen met deze formule: vermenigvuldigen gaat voor aftrekken.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

Soms is er een **verband** tussen twee **grootheden**.

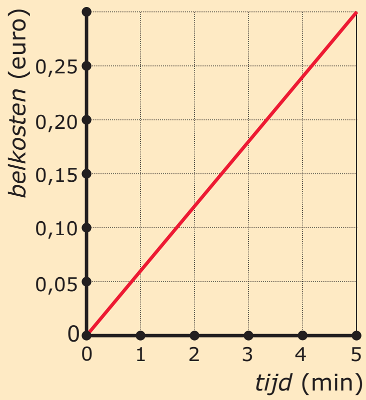
Vaak kun je door een bepaalde berekening de afhankelijke variabele uitrekenen als je voor de onafhankelijke variabele een waarde kiest. Zo'n berekening kun je kort weergeven, zoals: *lengte* $= 20 -$ *brandtijd* $\times 2$.

Zo'n verkorte weergave van een berekening noem je een **formule**. In dit geval zijn de twee variabelen: *brandtijd* (in uur) en *lengte* (in cm).

Voorbeeld 1

Als je belt, betaal je bijvoorbeeld € 0,06 per minuut. Je *belkosten* (euro) hangen af van de *tijd* (min) die je belt.

tijd (min)	0	1	2	3
belkosten (euro)	0,00	0,06	0,12	0,18



Er is een verband tussen de variabelen *belkosten* en *tijd*.

Als *tijd* $= 5$ minuten, dan is *belkosten*: $5 \times 0{,}06 = 0{,}30$ euro.

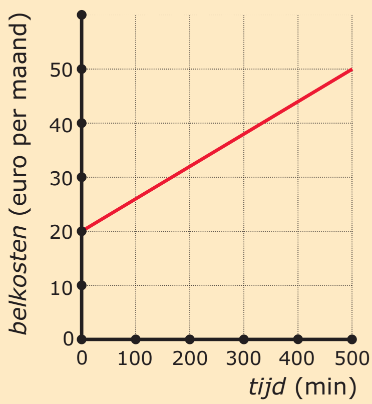
De formule is: *belkosten* $=$ *tijd* $\times 0{,}06$.
Je mag ook schrijven: *belkosten* $= 0{,}06 \times$ *tijd*.

Opgave 4

Voorbeeld 2

Als je belt, betaal je daarvoor € 0,06 per minuut. Heb je een abonnement, dan betaal je ook abonnementskosten per maand, hier € 20,00. Je *belkosten* (euro) hangen af van de *tijd* (min) die je belt.

tijd (min)	0	100	200	300
belkosten (euro per maand)	20	26	32	38



Er is een verband tussen de variabelen *belkosten* en *tijd*.

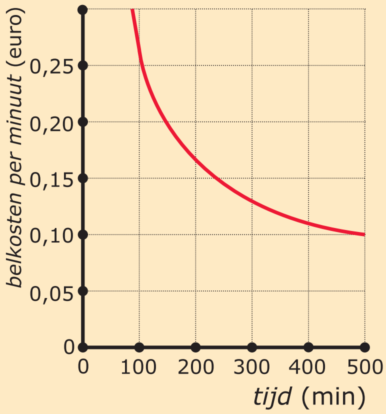
Als *tijd* $= 500$ minuten, dan is *belkosten*: $500 \times 0{,}06 + 20{,}00 = 50{,}00$ euro.

De formule is: *belkosten* $=$ *tijd* $\times 0{,}06 + 20{,}00$.

Opgave 5 Opgave 6

Voorbeeld 3

Als je belt, betaal je € 0,06 per minuut. Heb je een bepaald abonnement, dan betaal je ook abonnementskosten per maand, bijvoorbeeld € 20,00. Je *belkosten* (euro) hangen af van de *tijd* (min) die je belt. De *belkosten per minuut* (euro per maand) vind je door de *belkosten* te delen door het aantal minuten.



tijd (min)	0	100	200	300
belkosten (euro per maand)	20,00	26,00	32,00	38,00
belkosten per minuut (euro)	-	0,26	0,16	0,13

Er is een verband tussen de variabelen *belkosten per minuut* en *tijd*.

Als *tijd* $= 500$ minuten, dan is *belkosten per minuut*: $\frac{500 \times 0{,}06 + 20}{500} = 0{,}10$ euro.

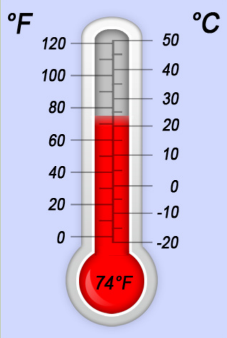
Een passende formule is: *belkosten per minuut*$= \frac{tijd \times 0{,}06 + 20}{tijd}$.

Opgave 7 Opgave 8

2.3 Formules en grafieken

Inleiding

Op de iPhone is deze thermometer als app beschikbaar. De temperatuur staat er niet alleen in graden Celsius, maar ook in graden Fahrenheit. Dat komt omdat in veel Engelstalige landen met graden Fahrenheit wordt gewerkt. Voor het omrekenen van de ons vertrouwde graden Celsius naar graden Fahrenheit bestaat een formule. Daar kun je een grafiek bij maken.



Je leert in dit onderwerp

- bij een formule de afhankelijk variabele berekenen bij een gegeven waarde van de invoervariabele;
- een grafiek maken bij een formule.

Voorkennis

- een formule kunnen gebruiken als rekenmethode.

Opgave V1

Uitleg

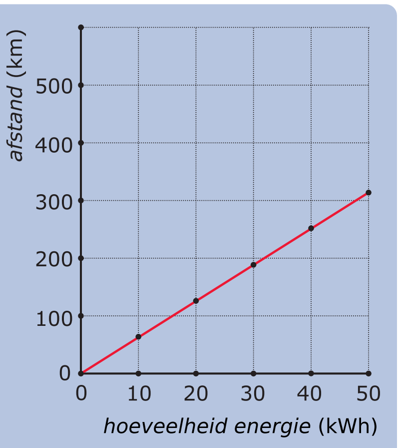
Een auto rijdt met 16 (kWh) kiloWattuur elektriciteit een afstand van 100 kilometer. Als je de *hoeveelheid energie* (in kWh) weet, kun je de *afstand* (in km) uitrekenen. De formule is:
afstand $= 6{,}25\times$ *hoeveelheid energie*

Je kunt met deze formule eenvoudig de *afstand* (uitkomst) uitrekenen, door voor *hoeveelheid energie* een getal in de formule in te vullen. Het invullen van een getal voor de invoervariabele noem je substitueren. In deze formule is *hoeveelheid energie* de onafhankelijke variabele, die wordt ook de invoervariabele genoemd. *afstand* is de afhankelijke variabele en heet uitvoervariabele.

Als je 30 kWh hebt opgeladen, kun je de *afstand* die je daarmee kunt rijden, uitrekenen door dertig te substitueren voor *hoeveelheid energie*.
Dus: *afstand* $= 6{,}25 \times 30 = 187{,}5$ km.

Je kunt bij deze formule ook een grafiek tekenen. Daarvoor maak je eerst een tabel. Je kiest voor *hoeveelheid energie* een getal. Je rekent daar *afstand* bij uit.

hoeveelheid energie (kWh)	0	10	20	30	40	50
afstand (km)	0	62,5	125	187,5	250	315,5



Bij de tabel teken je een passende grafiek. De invoervariabele komt op de horizontale as, de uitvoervariabele op de verticale as. Kijk naar de getallen in de tabel om een goede schaalverdeling te maken.

De grafiek wordt een rechte lijn omdat de *afstand* in kilometers altijd 6,25 keer de *hoeveelheid energie* in kWh is. De verhouding tussen *afstand* en *hoeveelheid energie* blijft altijd hetzelfde, waardoor er een rechte lijn ontstaat.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

In de formule *lengte* = 20− *brandtijd* ×2 is *brandtijd* de **onafhankelijke variabele**, deze wordt ook de **invoervariabele** genoemd. *lengte* is de **afhankelijke variabele**, ook de **uitvoervariabele** genoemd. Daarom kun je met deze formule eenvoudig de *lengte* (uitkomst) uitrekenen, voor verschillende waarden van *brandtijd* (invoer). Dit doe je door voor *brandtijd* een getal in de formule in te vullen. Het invullen van een getal voor de invoervariabele noem je **substitueren**.

Als je dit voor verschillende waarden van de invoervariabele doet, kun je een tabel maken. En daarbij past dan weer een grafiek.

Voorbeeld 1

Je brengt eens per week huis-aan-huisfolders rond. Je krijgt daarvoor een vast bedrag van € 6,00 per week (een fietsvergoeding). Bovendien krijg je € 0,05 per folder.

Maak hierbij een formule en een grafiek van *weekloon* afhankelijk van *aantal folders*.

Antwoord

Voor je weekloon geldt de formule:

weekloon $= 6{,}00 +$ *aantal folders* $\times 0{,}05$

Breng je 100 folders rond, dan is je weekloon:

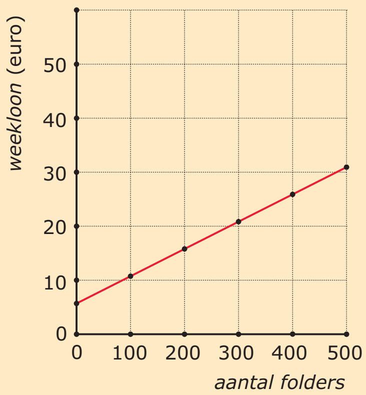
weekloon $= 6{,}00 + 100 \times 0{,}05 = 11{,}00$ euro.

Breng je 200 folders rond, dan is je weekloon:

weekloon $= 6{,}00 + 200 \times 0{,}05 = 16{,}00$ euro.

Breng je 0 folders rond, dan is je (theoretische) weekloon:

weekloon $= 6{,}00 + 0 \times 0{,}05 = 6{,}00$ euro.



aantal folders	0	100	200	300
weekloon (euro)	6	11	16	21

Weekloon komt als uitvoervariabele op de verticale as, omdat het afhangt van het *aantal folders*. *Aantal folders* is de invoervariabele en komt op de horizontale as.

Opgave 3

Voorbeeld 2

Voor de lengte van een kaars die zojuist is aangestoken, geldt:

lengte $= 30 - 1{,}5\times$ *brandtijd*, waarbij de *lengte* in centimeters is en de *brandtijd* in uren.

Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?

Antwoord

Bij het aansteken van de kaars: *brandtijd* is 0. Dan is: *lengte* $= 30 - 1{,}5 \times 0 = 30$ cm.

Eén uur na het aansteken geldt: *brandtijd* is 1. Dan is: *lengte* $= 30 - 1{,}5 \times 1 = 28{,}5$ cm.

Twee uur na het aansteken geldt: *brandtijd* is 2. Dan is: *lengte* $= 30 - 1{,}5 \times 2 = 27$ cm.

Zo kun je een tabel maken en daarmee ook een grafiek tekenen:

brandtijd (uur)	0	1	2	3	4	5
lengte (cm)	30	28,5	27	25,5	24	22,5

Na 20 uur is de kaars opgebrand.

Opgave 4

Voorbeeld 3

In sommige winkels kun je kopieën maken. De eigenaar van zo'n winkel huurt daarvoor een kopieermachine, zeg voor € 200,00 per maand. Elke kopie kost in werkelijkheid € 0,08 (papier, inkt en elektriciteit). Voor de eigenaar zijn deze kosten per kopie van belang om te bepalen welke prijs hij zijn klanten moet vragen. Voor hem geldt de formule:

kosten per kopie= $\frac{200+0{,}08 \times aantal}{aantal}$

Als hij verwacht 1000 kopieën per maand te verkopen, kost hem dat:

kosten per kopie = $\frac{200+0{,}08 \times 1000}{1000} = 0{,}28$ euro.

Als hij verwacht 2000 kopieën per maand te verkopen, kost hem dat:

kosten per kopie = $\frac{200+0{,}08 \times 2000}{2000} = 0{,}18$ euro

Afhankelijk van het aantal kopieën dat hij maandelijks denkt te verkopen, kiest hij zijnprijs per kopie. Om de juiste prijs per kopie te bepalen, maakt de winkelier een tabel en met de gegevens uit de tabel ook een grafiek.

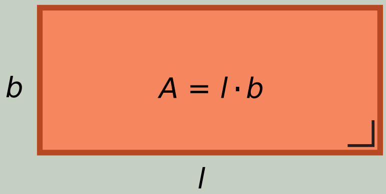
Opgave 5 Opgave 6

2.4 Letterformules

Inleiding

Je ziet hier een rechthoek.
Maar wat betekenen al die letters en symbolen in de figuur?

Daar ga je nu achter komen...



Je leert in dit onderwerp

- woordformules omzetten in een letterformule, dus formules verkort noteren;
- de vermenigvuldigingspunt gebruiken en weglaten in daarvoor geschikte situaties.

Voorkennis

- het werken met woordformules.

Opgave V1

Uitleg

Formules wil je graag zo overzichtelijk mogelijk houden. Daarom worden variabelen als *lengte*, *breedte*, *tijd* en *kosten* aangegeven met maar één letter.

Bijvoorbeeld:
Bij een telefoonabonnement betaal je € 10,00 abonnementskosten en € 0,08 per minuut bellen.
In een formule ziet dat er zo uit: *belkosten* $= 0{,}08\times$ *tijd* $+10{,}00$.
Dit kun je korter schrijven als: $k = 0{,}08 \times t + 10{,}00$.
Je moet dan wel onthouden dat k de belkosten zijn en t de tijd is. Ook moet je bijpassende eenheden afspreken. In dit geval is k in euro en t in minuten.

Misschien zie je meteen al het nadeel van het teken × voor vermenigvuldigen: het lijkt op de letter x. Daarom gebruik je in formules meestal een vermenigvuldigingspunt · in plaats van het kruisje.

Dan krijg je dus de volgende letterformule: $k = 0{,}08 \cdot t + 10{,}00$.

In het geval dat de vermenigvuldigingspunt tussen een getal en een letter of tussen twee letters staat, mag je deze ook weglaten. De formule wordt dan nog korter: $k = 0{,}08t + 10{,}00$.

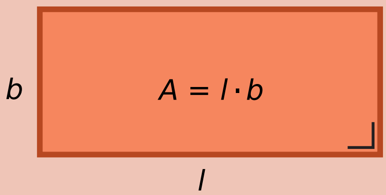
Wil je de belkosten weten als je 200 minuten belt, dan moet je voor t de waarde 200 in de formule invullen:

$k = 0{,}08 \cdot 200 + 10{,}00 = 26{,}00$ euro.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Formules wil je graag zo overzichtelijk mogelijk houden. Daarom worden variabelen als *lengte*, *breedte*, *tijd* en *kosten* aangegeven met maar één letter, vaak hun beginletter. Je moet wel van tevoren goed afspreken wat elke letter precies betekent en je daar dan ook nauwgezet aan houden.



Het teken × voor vermenigvuldigen lijkt teveel op de letter x.
Daarom gebruik je in formules de **vermenigvuldigingspunt** · in plaats van het kruisje.
En als dat geen verwarring oplevert, laat je de vermenigvuldigingspunt gewoon weg.

Voorbeeld 1

Een kaars is veertig centimeter lang en wordt aangestoken. De kaars wordt elk uur twee centimeter korter.

Er is dus een verband tussen de variabelen *lengte* in centimeters en *brandtijd* in uren.
De formule is: *lengte* $= 40 - 2\cdot$ *brandtijd*

Schrijf deze formule zo kort mogelijk.

Antwoord

Door voor de variabelen één letter te gebruiken, kun je de formule korter en overzichtelijker opschrijven.
De formule wordt dan: $l = 40 - 2 \cdot t$, waarbij l de *lengte* in centimeters is en t de *brandtijd* in uren.

Je kunt deze formule nog korter schrijven door de vermenigvuldigingspunt weg te laten: $l = 40 - 2t$.

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

Via een website kun je foto's laten afdrukken. Dat kost € 0,07 aan afdrukkosten per foto. Daarnaast betaal je € 1,95 bezorgkosten. De totale kosten per foto zijn afhankelijk van het aantal foto's dat je laat afdrukken.

Stel hierbij een zo overzichtelijk mogelijke formule op.

Antwoord

De variabelen zijn *aantal* (het aantal foto's dat je laat afdrukken) en *kosten* (de kosten per foto in euro).

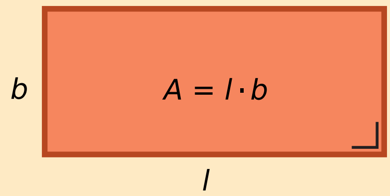
Kies daarvoor de lettervariabelen a voor *aantal* en k voor kosten per foto.

De formule wordt: $k = \frac{0{,}07a + 1{,}95}{a}$.

Opgave 5 Opgave 6

Voorbeeld 3

De formule voor de oppervlakte van een rechthoek is:
oppervlakte = lengte · breedte



Deze formule kun je korter schrijven door voor de variabelen een letter te nemen. Dan krijg je: $A = l \cdot b$; hier is A de oppervlakte, l de lengte en b de breedte. Hierbij moeten l en b in dezelfde lengte-eenheid zijn (bijvoorbeeld cm) en moet A in de bijbehorende oppervlakte-eenheid zijn (bijvoorbeeld cm^2).

Deze formule kun je nog korter schrijven door de vermenigvuldigingspunt weg te laten. Je krijgt: $A = lb$. Dit ziet er misschien wat raar uit, maar bedenk dat je in een formule altijd maar één letter voor een variabele gebruikt. Daardoor weet je dat zowel l als b een variabele is en er dus een vermenigvuldigingspunt tussen zou kunnen staan, ofwel dat er vermenigvuldigd moet worden.

Opgave 7 Opgave 8

2.5 Vergelijkingen

Inleiding

Je bepaalt je (Europese) schoenmaat s door de lengte van je voet v in centimeters te meten. Er geldt: $s = 1{,}5 \cdot (v + 2)$.

Hiermee kun je ook iemand's voetlengte berekenen als je zijn schoenmaat weet.

Je leert in dit onderwerp

- een vergelijking opstellen aan de hand van gegeven informatie;
- een vergelijking oplossen door inklemmen;
- een vergelijking oplossen door handig rekenen.

Voorkennis

- werken met formules.

Opgave V1

Uitleg

Op school staat een kopieermachine. Leerlingen mogen daar voor € 0,10 per kopie gebruik van maken. De school huurt deze machine voor € 150,00 per maand en elke kopie kost de school 7,5 eurocent.

De vraag: “Vanaf hoeveel kopieën per maand zijn de kosten voor het gebruik van deze kopieermachine even groot als de inkomsten?” noem je een vergelijking.

Noem het aantal kopieën per maand a en zet 7,5 eurocent om in euro: € 0,075.
Je kunt de vergelijking schrijven als: $150 + 0{,}075a = 0{,}10a$.

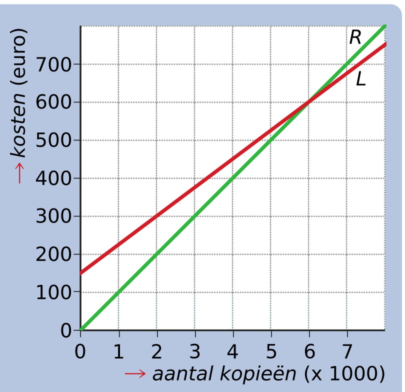
Aan de linkerzijde van het isgelijkteken zie je de kosten per maand en aan de rechterzijde de inkomsten per maand. Deze vergelijking bevat één variabele: a. Je zoekt de waarde voor a die ervoor zorgt dat de linker- en rechterzijde van de vergelijking gelijk zijn, de oplossing van de vergelijking.
Deze oplossing is $a = 6000$.
Ga maar na: $150 + 0{,}075 \cdot 6000 = 0{,}10 \cdot 6000$.

Maar hoe kom je aan die oplossing en waarom is er maar één?

Los de vergelijking $150 + 0{,}075a = 0{,}10a$ op.

Als je de oplossing niet meteen ziet, kun je er altijd uitkomen door getallen voor a in te vullen, net zolang tot je de juiste waarde voor a gevonden hebt. Doe dat wel systematisch, dus met een tabel. Links van het isgelijkteken heb je: $L = 150 + 0{,}075a$. Rechts van het isgelijkteken heb je: $R = 0{,}10a$.

a	0	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
L	150	225	300	375	450	525	600	675	750
R	0	100	200	300	400	500	600	700	800



In dit geval zit de oplossing meteen in de tabel: bij $a = 6000$ zijn L en R gelijk! Vaak moet je nog verder zoeken door de tabel te verfijnen. Dan kun je ook een grafiek gebruiken: bij het snijpunt van L en R zijn L en R gelijk. De waarde van a die daarbij hoort, kun je aflezen (vaak: schatten). Met behulp van verfijndere tabellen rond het snijpunt kun je de waarden van a steeds nauwkeuriger bepalen. Dit proces noem je inklemmen.

In dit geval zijn de grafieken van L en R rechte lijnen en is er maar één snijpunt, en dus precies één oplossing.

Opgave 1

Theorie

In een **vergelijking** zijn twee uitdrukkingen met één of meer variabelen gelijk aan elkaar. Vaak bevat een vergelijking één variabele: x.
Je zoekt dan de waarde(n) voor x die ervoor zorgen dat de linker- en rechterzijde van de vergelijking gelijk zijn. De waarden van x die deze vergelijking kloppend maken, heten de **oplossingen van een vergelijking**.

Om deze oplossingen te vinden kun je gebruik maken van grafieken.
Je vergelijkt dan in een grafiek de uitkomsten van de linkerzijde met die van de rechterzijde van de vergelijking. In een snijpunt hebben linker- en rechterzijde dezelfde uitkomst. Soms kun je zo'n snijpunt exact aflezen en is de bijbehorende x-waarde een oplossing van de vergelijking.
Vaak kun je zo'n snijpunt alleen benaderen door systematisch **inklemmen** met behulp van een tabel, zie **Voorbeeld 1**.

Het is soms ook mogelijk om een oplossing te bepalen door **handig rekenen**, zie **Voorbeeld 3**.

Voorbeeld 1

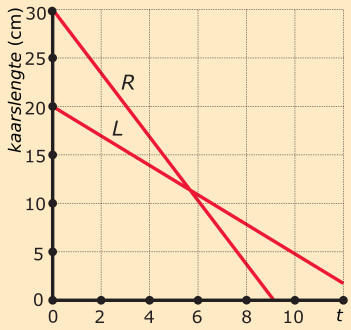
Twee kaarsen worden tegelijk aangestoken.
De eerste kaars is 20 cm en wordt elk uur 1,5 cm korter.
De tweede kaars is 30 cm en wordt elk uur 3,25 cm korter.
Noem je de brandtijd in uren t, dan geeft de vergelijking $20 - 1{,}50t = 30 - 3{,}25t$ aan wanneer de kaarsen even lang zijn.

Bereken nu wanneer deze twee kaarsen even lang zijn. Ofwel: voor welke waarden van t is deze vergelijking waar?

Antwoord

Maak een tabel en een grafiek bij $L = 20 - 1{,}50t$ en $R = 3 - 3{,}25t$.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L	20,00	18,50	17,00	15,50	14,00	12,50	11,00	9,50	8,00
R	30,00	26,75	23,50	20,25	17,00	13,75	10,50	7,25	4,00



Je ziet dat de oplossing tussen $t = 5$ en $t = 6$ zit. Je maakt dan een nieuwe tabel tussen 5 en 6 met t in één decimaal.

Nu vind je dat de oplossing tussen $t = 5{,}7$ en $t = 5{,}8$ zit. Op gehelen afgerond krijg je $t \approx 6$. De kaarsen zijn dus na ongeveer zes uur even lang.

Wil je het antwoord nog nauwkeuriger krijgen, dan maak je een tabel tussen 5,7 en 5,8 met t in twee decimalen. Je vindt dan de oplossing tussen $t = 5{,}71$ en $t = 5{,}72$. Op één decimaal nauwkeurig wordt je antwoord $t \approx 5{,}7$. De kaarsen zijn dus na ongeveer 5,7 uur even lang, dat is na 5 uur en 42 minuten (0,7 maal 60 minuten).

Wil je een nog nauwkeuriger antwoord, dan maak je een tabel tussen 5,71 en 5,72 met t in drie decimalen.

En zo kun je eindeloos doorgaan met inklemmen.

Opgave 2 Opgave 3

Voorbeeld 2

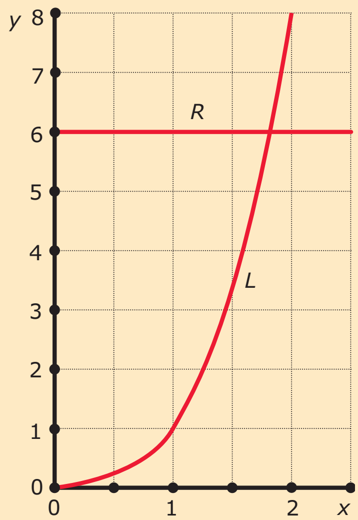
Hoe lang is de ribbe van een kubus als de kubus een inhoud heeft van 6 cm^3?

Antwoord

Deze vraag kun je omzetten in een vergelijking. Noem je de lengte van de ribbe die wordt gevraagd, bijvoorbeeld x cm, dan krijg je de vergelijking: $x \cdot x \cdot x = 6$.

Je ziet hier de bijbehorende grafiek. In de grafiek kun je de oplossing op één decimaal nauwkeurig schatten: $x \approx 1{,}8$ (snijpunt).

Je kunt de oplossing preciezer benaderen door verder in te klemmen, dus door nieuwe tabellen te maken.



Opgave 4

Voorbeeld 3

Iemand's schoenmaat s kun je bepalen vanuit de lengte v van zijn voet in cm. Er geldt:

$s = 1{,}5 \cdot (v + 2)$

Weet je iemand's schoenmaat, dan kun je zijn voetlengte bepalen. Neem bijvoorbeeld iemand met schoenmaat 42. Dan geldt volgens de formule de vergelijking:

$42 = 1{,}5 \cdot (v + 2)$

Deze vergelijking hoef je niet op te lossen door inklemmen. Even nadenken helpt ook.

De vergelijking ziet er uit als $42 = 1{,}5 \cdot [...]$.

Je kunt dan [...] vinden door $\frac{42}{1{,}5}$ uit te rekenen, uitkomst 28.

Omdat [...] eigenlijk $v + 2$ is, krijg je dus $v + 2 = 28$ en dit klopt als $v = 26$.
De gevraagde voetlengte is 26 cm.

(In werkelijkheid is 42 een schoenmaat voor iedereen vanaf $s = 41{,}5$ tot en met $S = 42{,}4$ en zijn er meerdere voetlengtes met deze schoenmaat.)

Opgave 5 Opgave 6 Opgave 7

Begrippen

- spiegellijn, symmetrieas — lijnsymmetrisch — origineel, beeld
- centrum van puntsymmetrie — puntsymmetrisch
- centrum van draaisymmetrie — draaisymmetrisch — kleinste draaihoek
- rechthoekige, gelijkbenige, gelijkzijdige driehoek
- vierkant, rechthoek, ruit, parallellogram, vlieger, trapezium

Activiteiten

- de begrippen lijnsymmetrie, symmetrieas, spiegeling in een lijn, origineel en beeld, middelloodlijn en lijnsymmetrische figuren herkennen en tekenen;
- de begrippen puntsymmetrie en symmetriecentrum en puntsymmetrische figuren herkennen en tekenen;
- de begrippen draaisymmetrie, draaicentrum en kleinste draaihoek en draaisymmetrische figuren herkennen en tekenen;
- de namen van de verschillende symmetrische driehoeken en hun eigenschappen herkennen en toepassen;
- de namen van de verschillende symmetrische vierhoeken en hun eigenschappen herkennen en toepassen.

Wat maakt een vlinder mooi?

Domein

Meten en tekenen

Hoofdstuk

Symmetrie

Inhoud

3

3.1 Lijnsymmetrie

Inleiding

Een verkeersbord, wat is daar nou voor bijzonders aan?
Wel, van sommige verkeersborden is de éne helft het spiegelbeeld van de andere helft.

Je leert in dit onderwerp

- in een figuur lijnsymmetrie herkennen en de symmetrieas tekenen;
- een lijnsymmetrische figuur tekenen door lijnspiegelen.

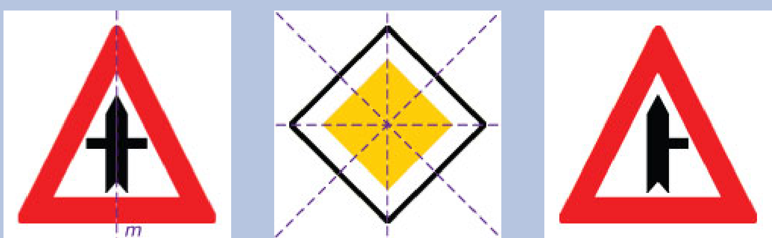
Voorkennis

- de namen en enkele basiseigenschappen van vlakke en ruimtelijke figuren;
- de begrippen loodrecht, afstand, lengte, oppervlakte, inhoud/volume en werken met eenheden;
- werken met een coördinatenstelsel.

Opgave V1 Opgave V2

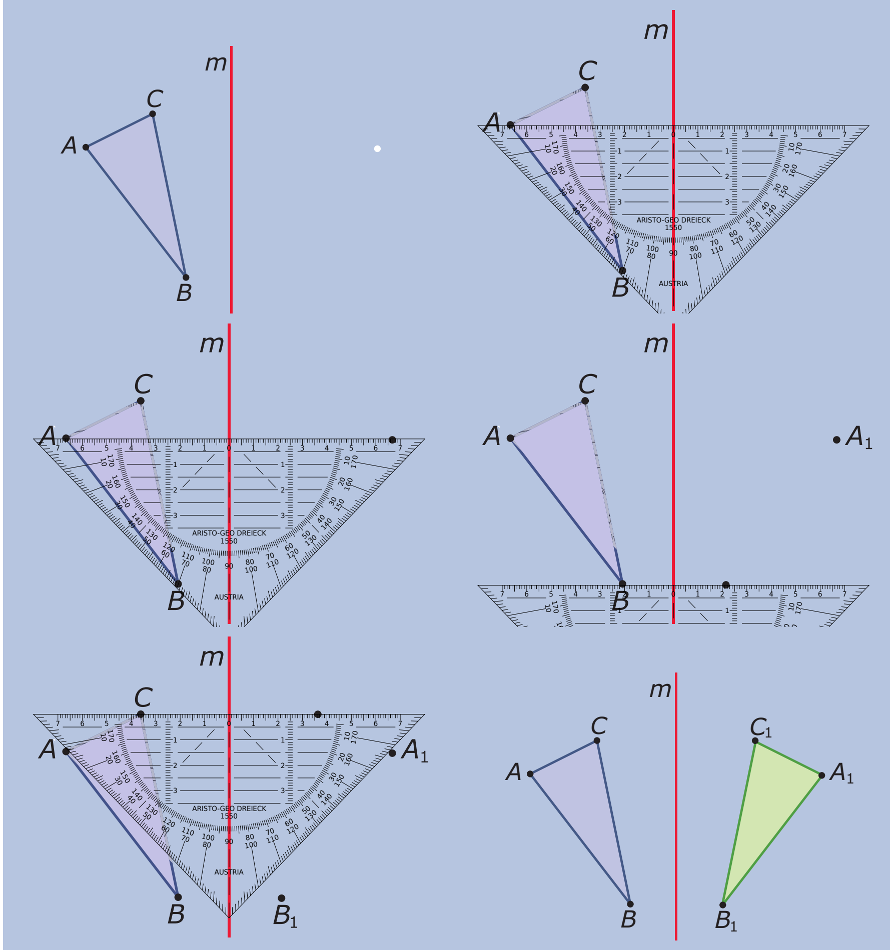
Uitleg 1

Het linker verkeersbord wordt door lijn m in twee stukken verdeeld die elkaars spiegelbeeld zijn. Lijn m is de symmetrieas (of spiegellijn) van de figuur. Een figuur met één of meer symmetrieassen heet lijnsymmetrisch. Zet je een spiegeltje op de spiegellijn dan zie je een deel op papier en een deel in de spiegel; de twee helften vormen samen de figuur. Het middelste verkeersbord heeft zelfs vier symmetrieassen. Het rechter verkeersbord is niet lijnsymmetrisch.



Uitleg 2

Bekijk hoe je een lijnsymmetrische figuur maakt.



ΔABC wordt gespiegeld in lijn m. ΔABC noem je het origineel.

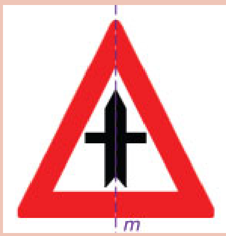
$\Delta A_1B_1C_1$ is het (spiegel)beeld van ΔABC.

Beeldpunt A_1 wordt zo getekend dat het even ver van de spiegellijn m af ligt als punt A. Lijn m is de symmetrieas van lijnstuk AA_1.

Lijn m snijdt AA_1 loodrecht middendoor en heet daarom de middelloodlijn van AA_1. Lijn m is ook de middelloodlijn van BB_1 en CC_1.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Theorie



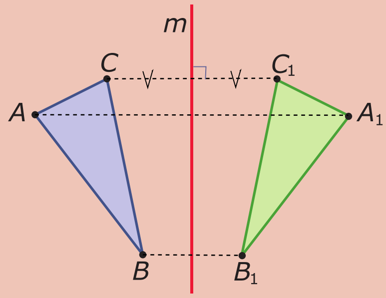
Een figuur die door een lijn in twee stukken wordt verdeeld die elkaars **spiegelbeeld** zijn, noem je **lijnsymmetrisch**. Zet je een spiegeltje op de spiegellijn dan zie je een deel op papier en een deel in de spiegel; de twee helften vormen samen de figuur. Lijn m is de **symmetrieas** of de **spiegellijn** van de figuur. Een figuur kan één of meer symmetrieassen hebben.

Je kunt ook zelf een lijnsymmetrische figuur tekenen.
Je moet dan de symmetrieas weten en de helft van de figuur kennen. De andere helft maak je er dan bij door **lijnspiegelen**.

ΔABC wordt gespiegeld in lijn m. ΔABC noem je het **origineel**.

$\Delta A_1B_1C_1$ is het **beeld** van ΔABC.

Beeldpunt A_1 ligt even ver van de spiegellijn m af ligt als punt A. Symmetrieas m snijdt AA_1 loodrecht middendoor en heet daarom de **middelloodlijn** van AA_1. Lijn m is ook de middelloodlijn van BB_1 en CC_1.



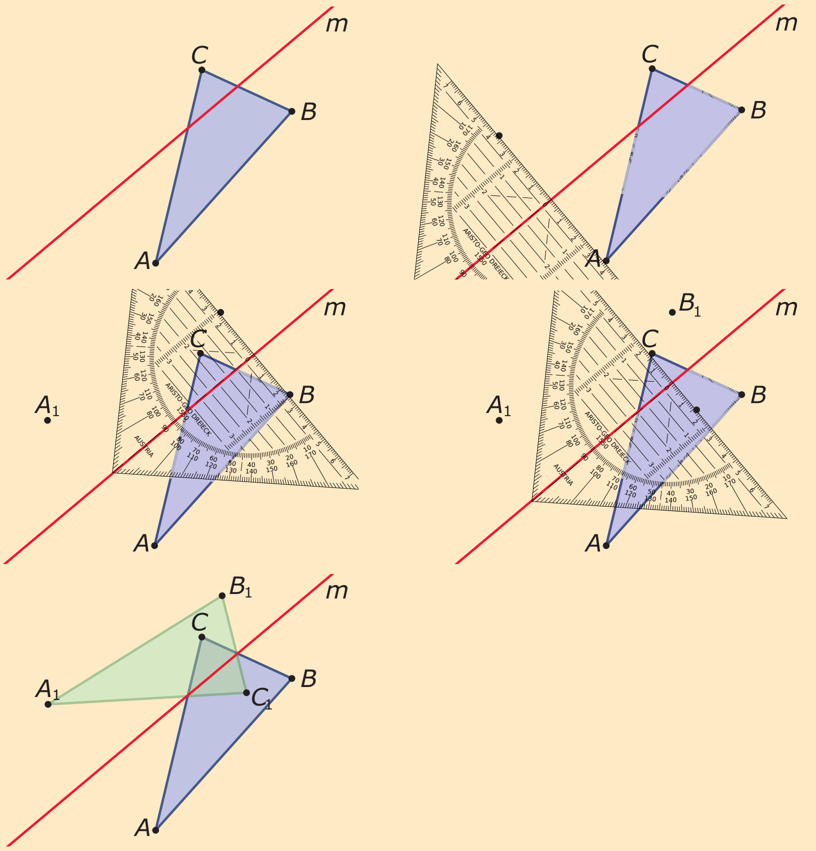
Voorbeeld 1

Je ziet hier een achttal logo's (beeldmerken) van bekende bedrijven en instellingen. Ze zijn vaak lijnsymmetrisch, vaak met meerdere symmetrieassen.

Opgave 5

Voorbeeld 2

Bekijk hoe ΔABC met behulp van de geodriehoek wordt gespiegeld in de schuine symmetrieas m.

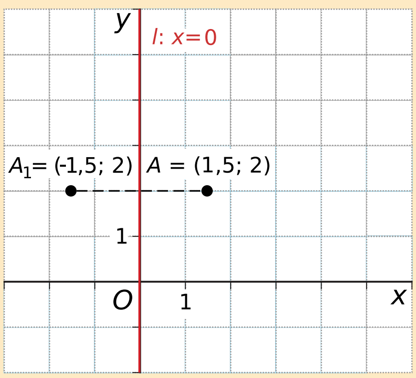


Opgave 6 Opgave 7

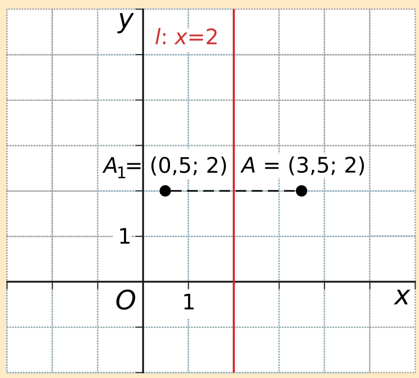
Applet

Voorbeeld 3

Je ziet een punt $A(a,b)$ in het assenstelsel.
A_1 is het beeldpunt van A. In figuur a wordt A gespiegeld in de y-as. In figuur b wordt A gespiegeld in een roosterlijn evenwijdig aan de y-as ($x = 2$).



Figuur a



Figuur b

Ga na:

- Bij spiegeling in de y-as is het beeldpunt van elk punt $A(a,b)$ gelijk aan $A_1(-a,b)$.
- Is de spiegellijn de roosterlijn met $x = 2$ dan is het beeldpunt van elk punt $A(a,b)$ gelijk aan $A_1(4-a,b)$.

Opgave 8 Opgave 9

3.2 Puntsymmetrie

Inleiding

Een verkeersbord, wat is daar nou voor bijzonders aan?
Wel, van sommige verkeersborden is de éne helft het spiegelbeeld van de andere helft.

Je leert in dit onderwerp

- in een figuur puntsymmetrie herkennen en het centrum van puntsymmetrie bepalen;
- een puntsymmetrische figuur tekenen door spiegelen ten opzichte van een punt.

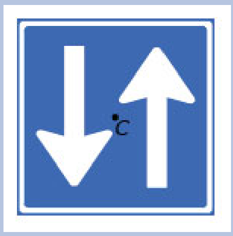
Voorkennis

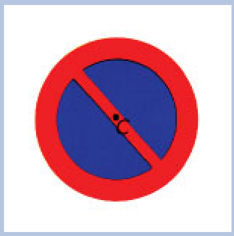
- de namen en enkele basiseigenschappen van vlakke en ruimtelijke figuren;
- de begrippen loodrecht, afstand, lengte, oppervlakte, inhoud/volume en werken met eenheden;
- werken met een coördinatenstelsel;
- lijnsymmetrie herkennen, een symmetrieas tekenen en een figuur spiegelen in een lijn.

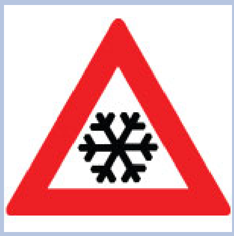
Opgave V1 Opgave V2

Uitleg 1

Het linker verkeersbord is niet lijnsymmetrisch. Toch is er wel iets bijzonders mee: als je het ‘op zijn kop zet’ zie je hetzelfde verkeersbord. Zo'n figuur noem je puntsymmetrisch. Een puntsymmetrische figuur blijft gelijk als je hem een halve slag draait om het symmetriecentrum C. Ook het middelste verkeersbord ziet er hetzelfde uit als je het een halve slag draait. Elk punt op de figuur kun je spiegelen in C en komt dan op de tegenoverliggende plaats op de figuur uit. Het rechter verkeersbord is niet puntsymmetrisch. Op zijn kop ziet de figuur er heel anders uit.

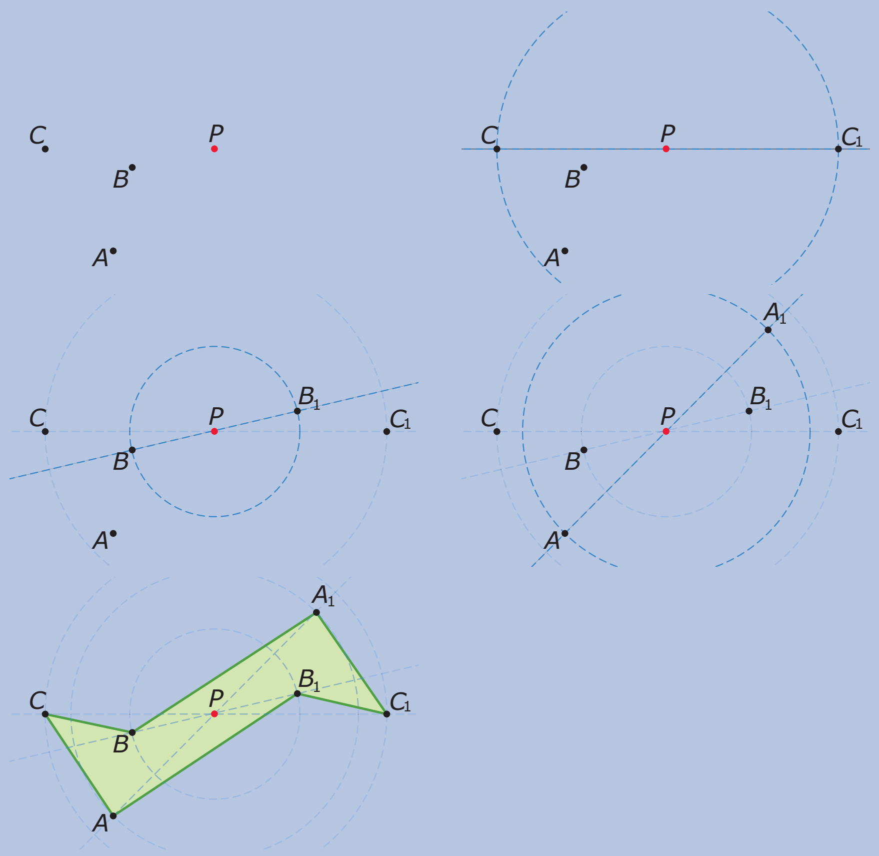






Uitleg 2

Bekijk hoe je een puntsymmetrische figuur maakt. De punten A, B en C worden gespiegeld in punt P.

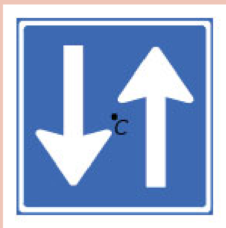


A_1 is het spiegelbeeld van A, B_1 is het beeld van B en C_1 is het beeld van C. Het beeldpunt A_1 wordt zo getekend dat het even ver van het centrum P af ligt als het originele punt A. Punt P is het midden van lijnstuk AA_1.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Theorie

Een figuur heet **puntsymmetrisch** als hij hetzelfde blijft als je hem op de kop zet. Zo' n figuur heeft een **symmetriecentrum** C. Elk punt van de figuur heeft een spiegelbeeld precies aan de andere kant van het centrum C.

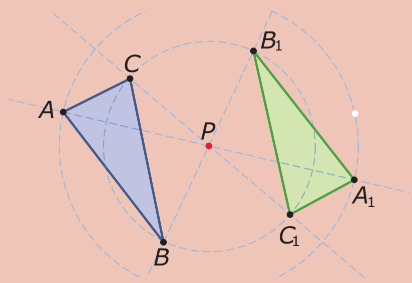


Je kunt ook zelf een puntsymmetrische figuur tekenen.
Je moet dan het centrum van symmetrie weten en de helft van de figuur kennen. De andere helft maak je er dan bij door **puntspiegelen**.

ΔABC wordt gespiegeld in punt P. ΔABC noem je het **origineel**.

$\Delta A_1B_1C_1$ is het **beeld** van ΔABC.

Beeldpunt A_1 ligt even ver van het centrum P af ligt als punt A.



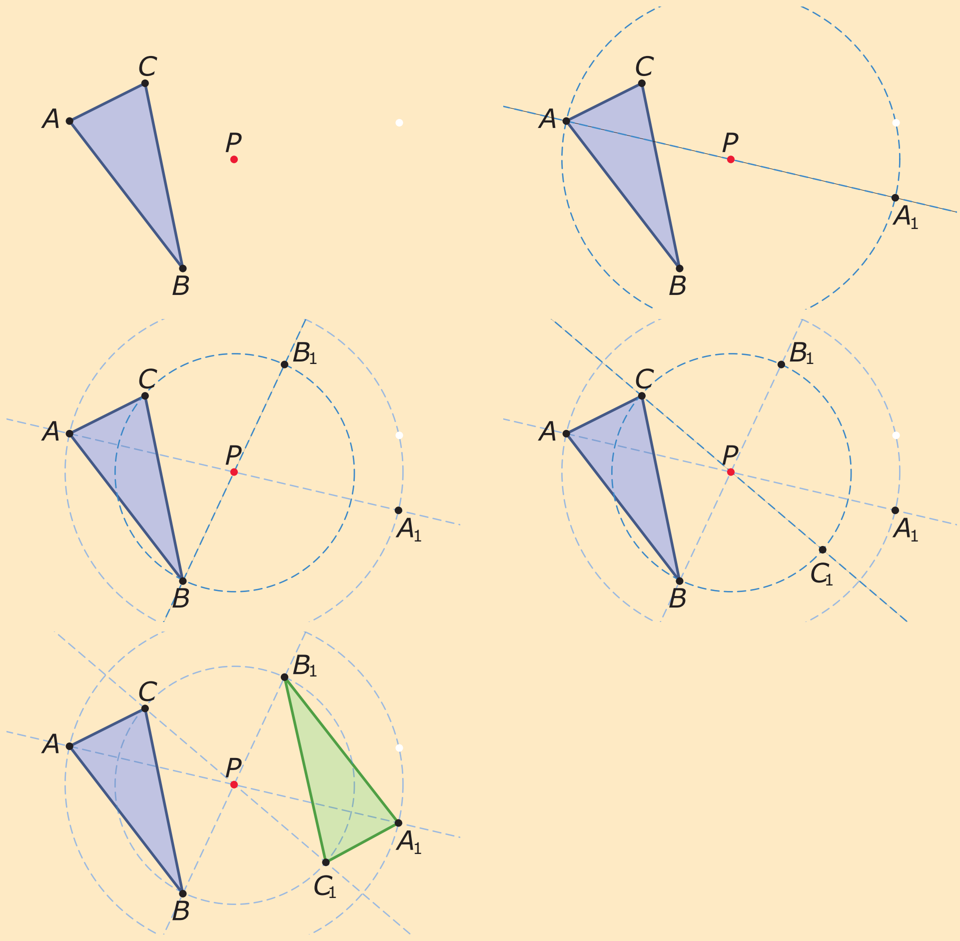
Voorbeeld 1

Je ziet hier een achttal logo's (beeldmerken) van bekende bedrijven en instellingen. Ze zijn vaak puntsymmetrisch. Wat is het centrum van symmetrie?

Opgave 5

Voorbeeld 2

Bekijk hoe ΔABC wordt gespiegeld in punt P. De gelijke afstanden worden met een passer gemaakt, dat kan eventueel ook met de geodriehoek.

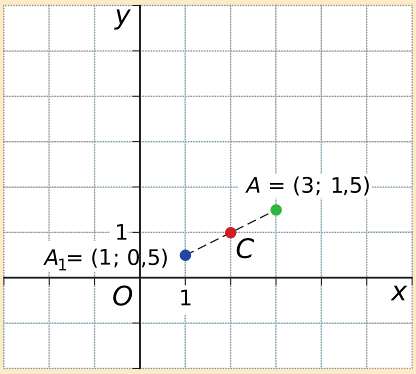


Opgave 6 Opgave 7

Applet

Voorbeeld 3

Je ziet een punt $A(a,b)$ in een assenstelsel. A_1 is zijn beeldpunt bij spiegelen in punt C.



Ga na:

- Bij spiegeling in $O(0,0)$ is het beeldpunt van elk punt $A(a,b)$ gelijk aan $A_1(-a,-b)$.
- Bij spiegeling in $C(2,1)$ is het beeldpunt van elk punt $A(a,b)$ gelijk aan $A_1(4-a,2-b)$.

Dit laatste komt omdat ook de beide assen worden gespiegeld. De x-as komt op op de horizontale lijn door $(0,2)$ te liggen en de y-as op de verticale lijn door $(4,0)$. De gespiegelde oorsprong wordt $O_1(4,2)$. De positie van A_1 wordt vanuit O_1 gespiegeld.

Opgave 8 Opgave 9

3.3 Draaisymmetrie

Inleiding

Een verkeersbord, wat is daar nou voor bijzonders aan?
Wel, sommige verkeersborden kun je een stukje draaien om het middelpunt en dan blijf je toch hetzelfde zien.

Je leert in dit onderwerp

- draaisymmetrie herkennen en het draaicentrum van een figuur aanwijzen en de kleinste draaihoek bepalen;
- een figuur draaien over een gegeven hoek ten opzichte van een punt.

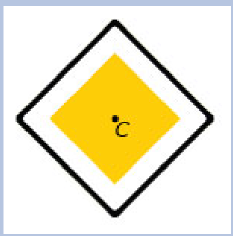
Voorkennis

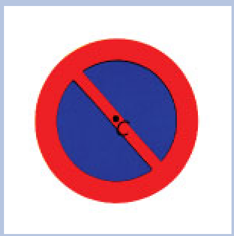
- de namen en enkele basiseigenschappen van vlakke en ruimtelijke figuren;
- de begrippen loodrecht, afstand, lengte, oppervlakte, inhoud/volume en werken met eenheden;
- werken met een coördinatenstelsel;
- lijnsymmetrie en puntsymmetrie herkennen, een symmetrieas of symmetriepunt tekenen en een figuur spiegelen in een lijn of een punt.

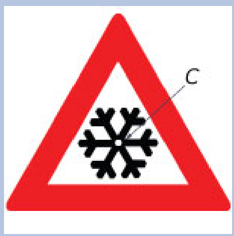
Opgave V1

Uitleg 1

Ook met deze verkeersborden is iets speciaals. Je kunt ze draaien en dan zie je toch weer hetzelfde bord. Soms hoef je maar een klein aantal graden te draaien. Zo'n figuur heet draaisymmetrisch. Een draaisymmetrische figuur blijft gelijk als je hem een bepaald aantal graden draait om draaicentrum C.
Het linker verkeersbord kun je over $90°$, $180°$ en $270°$ draaien. Dat zijn veelvouden van $90°$, dus $90°$ is de kleinste draaihoek.
Het middelste verkeersbord heeft een kleinste draaihoek van $180°$.
Bij het rechter verkeersbord is de kleinste draaihoek $120°$. Je draait steeds een derde slag door en ziet dan drie keer hetzelfde bord tot het weer in de beginstand staat.
Het linker en het middelste verkeersbord zijn naast draaisymmetrisch ook puntsymmetrisch.

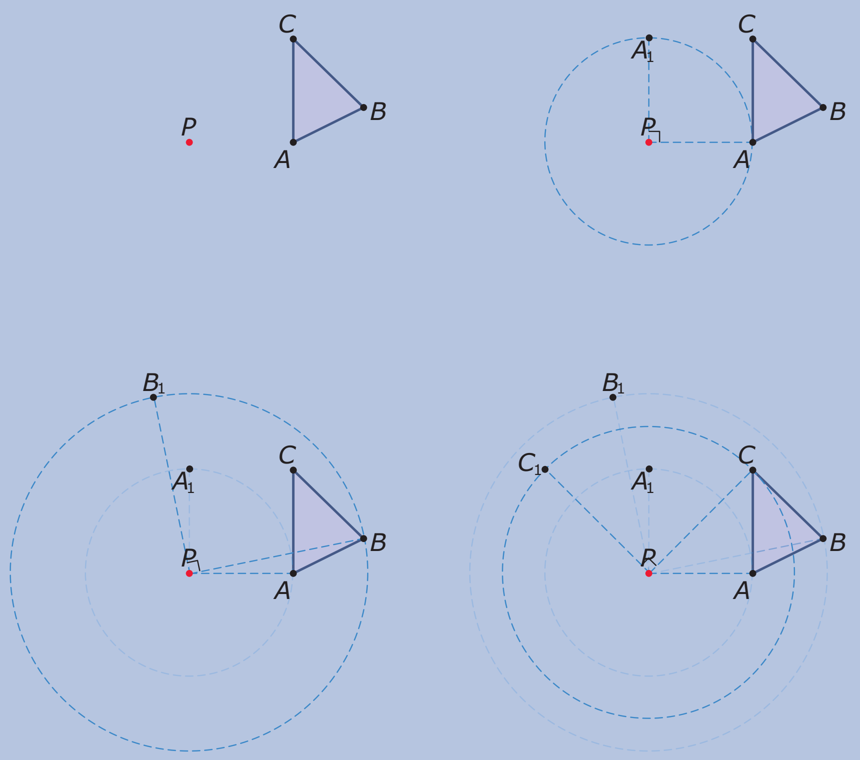




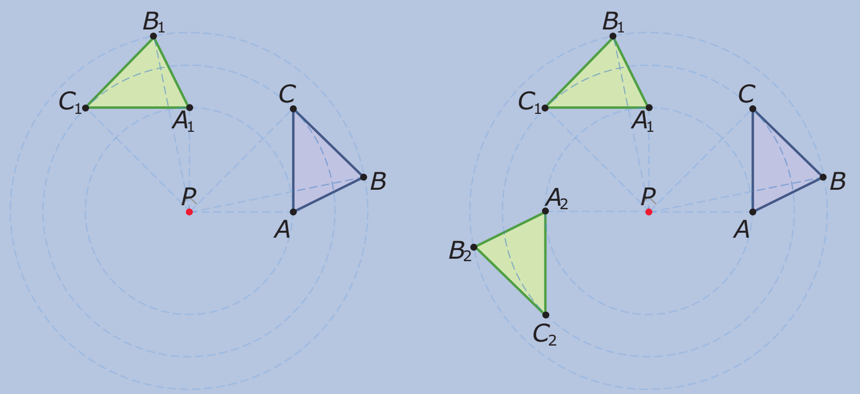


Uitleg 2

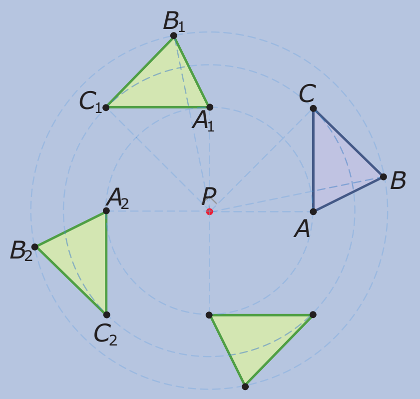
Je ziet hoe een draaisymmetrische figuur wordt gemaakt door driehoek ABC om punt P over $90°$ (tegen de wijzers van de klok in) te draaien.



A_1 is het beeldpunt van A, B_1 is het beeld van B en C_1 is het beeld van C. Elk beeldpunt wordt zo getekend dat het even ver van het centrum P af ligt als zijn origineel. De hoek tussen bijvoorbeeld PA en PA_1 is $90°$.

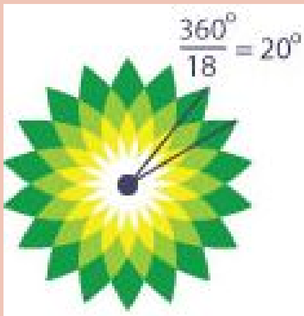


Om de figuur echt draaisymmetrisch te maken moet je $\Delta A_1B_1C_1$ ook weer $90°$ draaien en vervolgens het beeld van deze driehoek nog een keer $90°$ draaien (tegen de klok in).



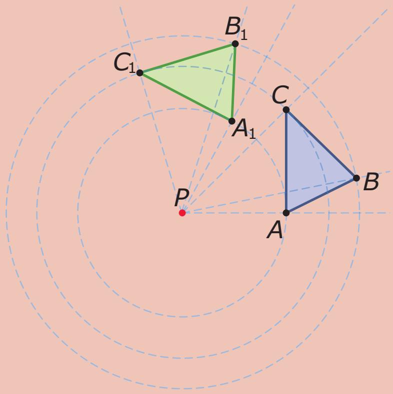
Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3 Opgave 4

Theorie



Een figuur noem je **draaisymmetrisch** als hij gelijk blijft als je hem een bepaald aantal graden draait om een **draaicentrum** C. Deze figuur kun je over $20°$, $40°$, $60°$, ... draaien. Dat zijn veelvouden van $20°$, dus $20°$ is de **kleinste draaihoek**.

Je kunt ook zelf een figuur draaien om een draaipunt over een gegeven aantal graden.
Je ziet hier het resultaat van zo'n draaiing.



ΔABC wordt gedraaid om punt P over $60°$. ΔABC noem je het **origineel**.

$\Delta A_1B_1C_1$ is het **beeld** van ΔABC.

Beeldpunt A_1 ligt even ver van het centrum P af ligt als punt A.

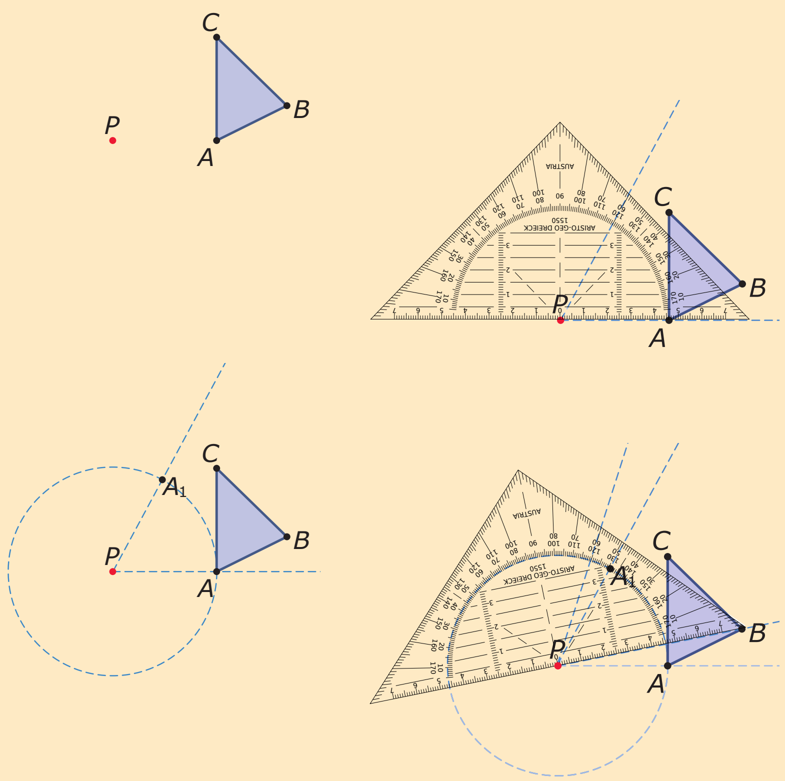
Voorbeeld 1

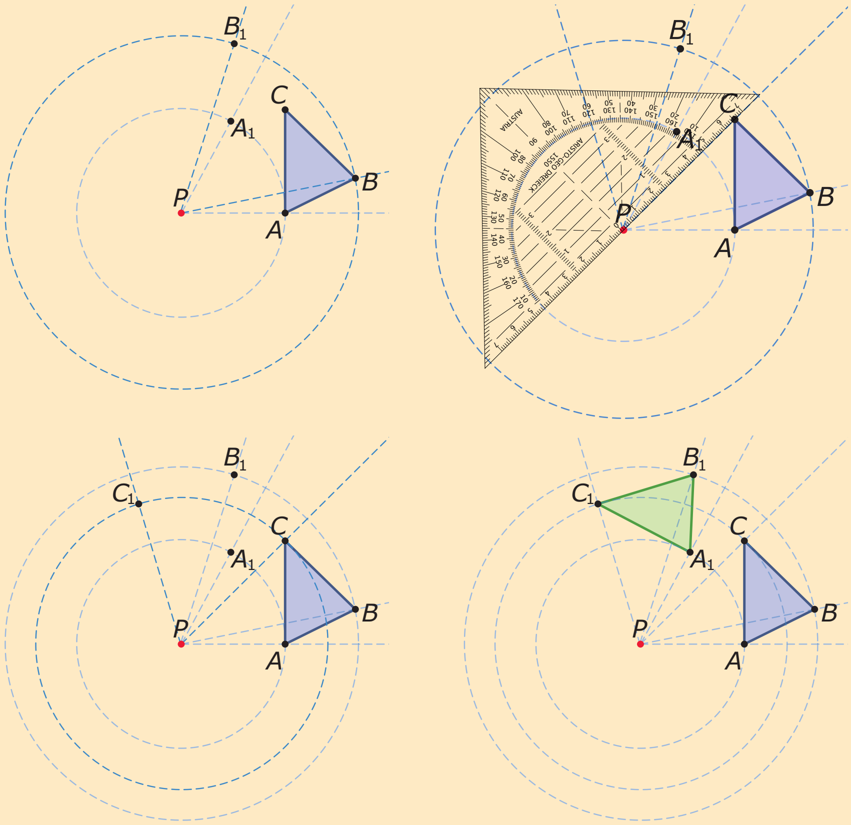
Je ziet hier een achttal logo's (beeldmerken) van bekende bedrijven en instellingen. Ze zijn vaak draaisymmetrisch. Wat is het centrum van symmetrie en hoeveel bedraagt de kleinste draaihoek?

Opgave 5

Voorbeeld 2

Bekijk hoe ΔABC wordt gedraaid om punt P over $60°$ (dus tegen de klok in). De hoeken maak je op papier met een geodriehoek. De gelijke afstanden worden met een passer gemaakt, dat kan eventueel ook met de geodriehoek.





Opgave 6 Opgave 7

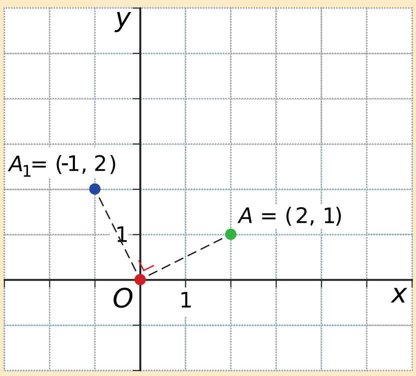
Voorbeeld 3

Applet

Je ziet punt $A(a,b)$ in een assenstelsel. A_1 is het beeldpunt bij draaiing om punt $O(0,0)$ over 90°, dus tegen de klok in.

Ga na:

- Bij draaiing om $O(0,0)$ over 90° is het beeldpunt van elk punt $A(a,b)$ gelijk aan $A_1(-b,a)$. Het gaat hier om een draaiing tegen de klok in. Neem het punt $A(2,1)$ (zie de tekening). Bij een draaiing over 90° om $O(0,0)$ is $A_1(-1,2)$ het beeldpunt van A.
- Bij draaiing om $O(0,0)$ over -90° is het beeldpunt van elk punt $A(a,b)$ gelijk aan $A_1(b,-a)$. Het gaat hier om een draaiing met de klok mee. Neem bijvoorbeeld het punt $A(0,2)$ op de y-as. Bij een draaiing over -90° om $O(0,0)$ valt $A_1(2,0)$ precies op de x-as.



Opgave 8 Opgave 9

3.4 Driehoeken

Inleiding

Dit verkeersbord is echt wel symmetrisch. Het heeft ook de vorm van een driehoek. Kennelijk kunnen driehoeken symmetrisch zijn, bijvoorbeeld door gelijke zijden te hebben.

Je leert in dit onderwerp

- een rechthoekige, gelijkbenige en gelijkzijdige driehoek herkennen vanuit symmetrie;
- de eigenschappen van deze driehoeken benoemen en gebruiken.

Voorkennis

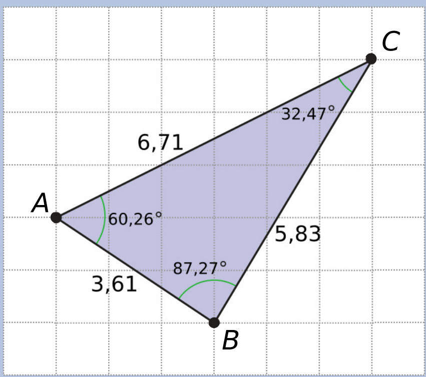
- de namen en enkele basiseigenschappen van vlakke en ruimtelijke figuren, de hoekensom van een driehoek;
- de begrippen loodrecht, afstand, lengte, oppervlakte, inhoud/volume en werken met eenheden;
- werken met een coördinatenstelsel;
- lijnsymmetrie, puntsymmetrie en draaisymmetrie herkennen, een symmetrieas of symmetriecentrum tekenen en een figuur spiegelen in een lijn of een punt of draaien om een punt over een bepaalde draaihoek.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

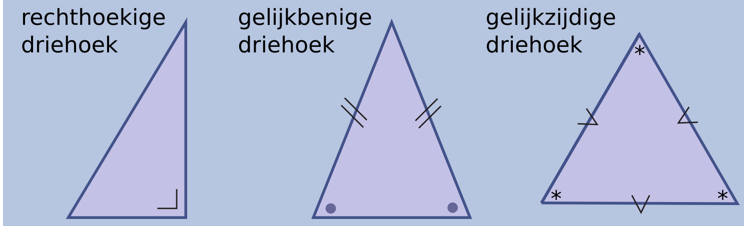
Applet

Een driehoek is een veelhoek met drie hoekpunten en drie zijden. Voor driehoek ABC schrijf je ook wel: ΔABC. De hoeken zijn samen $180°$. Soms zijn twee of drie zijden gelijk. De driehoeken zijn dan symmetrisch. Dan zijn ook bepaalde hoeken gelijk omdat de éne helft het spiegelbeeld van de andere helft is. Bijvoorbeeld:



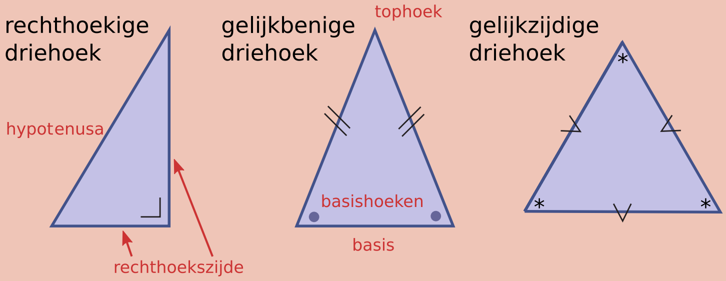
- de gelijkbenige driehoek heeft twee gelijke zijden en dus één symmetrieas en twee gelijke hoeken;
- de gelijkzijdige driehoek heeft drie gelijke zijden en dus drie symmetrieassen en drie gelijke hoeken;
- de rechthoekige driehoek heeft één rechte hoek tegenover de langste zijde, die ‘hypotenusa’ heet.

Bekijk de driehoeken. Gelijke zijden hebben een gelijke markering, gelijke hoeken ook.



Opgave 1 Opgave 2

Theorie



Een **rechthoekige driehoek** heeft twee zijden die de rechte hoek vormen; je noemt ze **rechthoekszijden**. De langste zijde heet de **hypotenusa**. Elke rechthoekige driehoek is de helft van een rechthoek. De kenmerkende eigenschappen zijn:

- Er is precies één rechte hoek.
- De twee scherpe hoeken zijn samen 90°.

Een **gelijkbenige driehoek** heeft twee zijden die even lang zijn. De hoek tussen deze benen heet de **tophoek**. De andere zijde heet de **basis**. Elke gelijkbenige driehoek heeft een symmetrieas. De kenmerkende eigenschappen zijn:

- De twee benen zijn even lang.
- De twee hoeken op de basis zijn even groot, ze heten de **basishoeken**.
- De symmetrieas deelt de basis in twee gelijke delen en staat er loodrecht op.

Bij een **gelijkzijdige driehoek** zijn alle drie de zijden even lang. De kenmerkende eigenschappen zijn:

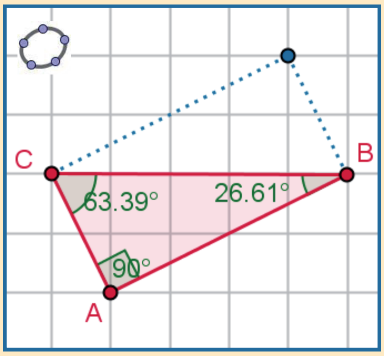
- De drie hoeken zijn even groot, elk 60°.
- Er zijn drie symmetrieassen.
- Elke symmetrieas deelt een zijde in twee gelijke delen en staat er loodrecht op.

Applet

Voorbeeld 1

Bekijk de rechthoekige ΔABC.
A, B en C zijn roosterpunten.

Hoeveel graden zijn de twee scherpe hoeken van een rechthoekige driehoek samen?



Antwoord

Omdat de hoeken van een driehoek opgeteld altijd $180°$ zijn en de rechte hoek altijd $90°$ is, weet je zeker dat de twee scherpe hoeken samen ook $90°$ zijn.

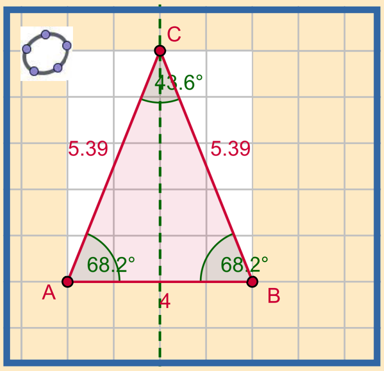
Opgave 3 Opgave 4

Applet

Voorbeeld 2

Bekijk de gelijkbenige ΔABC.
A, B en C zijn roosterpunten.

De basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn altijd gelijk. Hoeveel graden zijn de basishoeken A en B als de tophoek $\angle C = 40°$?



Antwoord

De hoeken van een driehoek zijn samen altijd $180°$. Als de tophoek $40°$ is, zijn de twee basishoeken samen $180° - 40° = 140°$.

Per basishoek is dat $\frac{140°}{2} = 70°$.

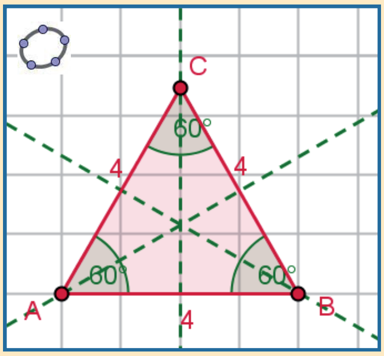
Opgave 5 Opgave 6

Applet

Voorbeeld 3

Bekijk de gelijkzijdige ΔABC.

Hoeveel symmetrieassen heeft de gelijkzijdige driehoek?



Antwoord

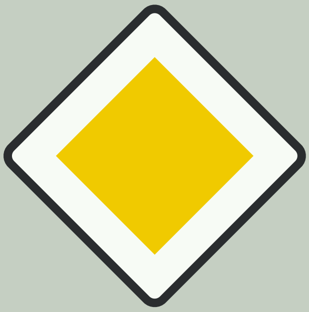
Een gelijkzijdige driehoek heeft altijd exact drie symmetrieassen. Een symmetrieas loopt door een hoekpunt en deelt de overliggende zijde in twee gelijke delen.

Opgave 7 Opgave 8

3.5 Vierhoeken

Inleiding

Dit verkeersbord is echt wel symmetrisch. Het heeft ook de vorm van een vierkant. Kennelijk kunnen ook vierhoeken symmetrisch zijn, bijvoorbeeld door gelijke zijden te hebben.



Je leert in dit onderwerp

- een rechthoek, vierkant, vlieger, ruit, trapezium en parallellogram herkennen vanuit symmetrie;
- de eigenschappen van bijzondere vierhoeken benoemen en gebruiken.

Voorkennis

- de namen van enkele vlakke figuren en de basiseigenschappen van driehoeken, de hoekensom van een driehoek;
- de begrippen loodrecht, evenwijdig, afstand, lengte, oppervlakte, inhoud/volume en werken met eenheden;
- werken met een coördinatenstelsel;
- lijnsymmetrie, puntsymmetrie en draaisymmetrie herkennen, een symmetrieas of symmetriecentrum tekenen en een figuur spiegelen in een lijn of een punt of draaien om een punt over een bepaalde draaihoek.

Opgave V1 Opgave V2

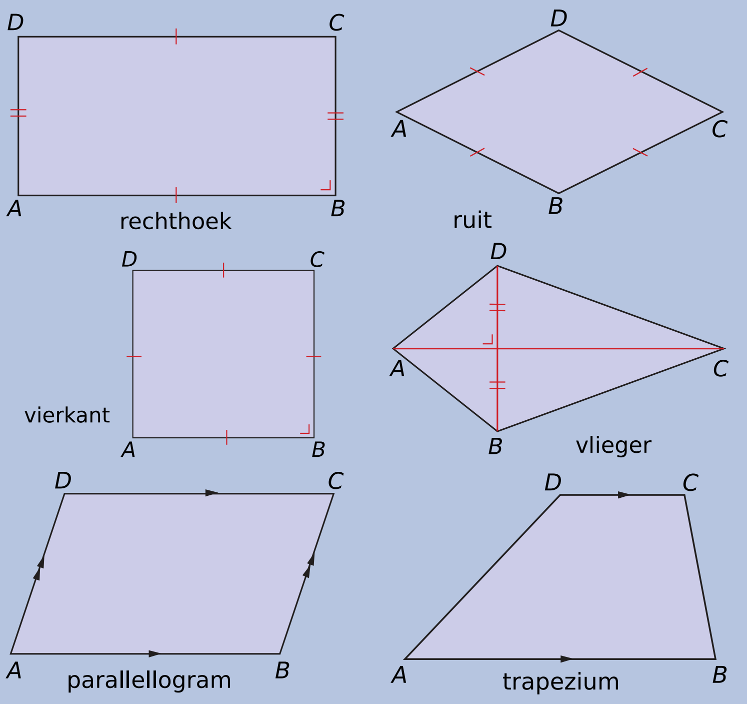
Applet

Uitleg

Een vierhoek heeft vier hoekpunten en vier zijden. Omdat elke vierhoek in twee driehoeken te verdelen is, zijn de hoeken van een vierhoek altijd samen $360°$.

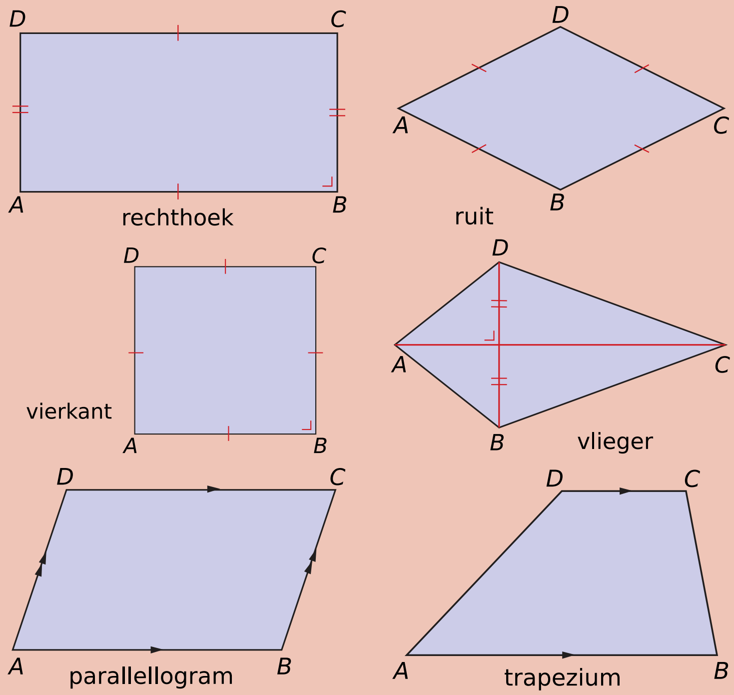
Je kunt bijzondere vierhoeken maken:

- de rechthoek met vier rechte hoeken en twee symmetrieassen;
- de ruit met vier gelijke zijden en twee symmetrieassen;
- het vierkant met vier rechte hoeken en vier gelijke zijden en vier symmetrieassen;
- de vlieger met één symmetrieas;
- het parallellogram met twee paren evenwijdige zijden;
- het trapezium met één paar evenwijdige zijden.



Opgave 1 Opgave 2

Theorie



Een **vierhoek** is een veelhoek met vier **hoekpunten** en vier **zijden**. Omdat elke vierhoek in twee driehoeken te verdelen is, zijn de hoeken van een vierhoek samen altijd 360°.

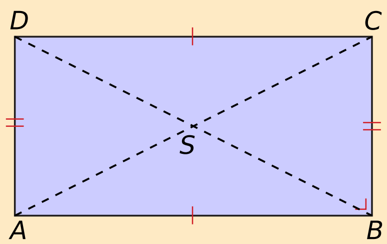
Bijzondere vierhoeken zijn:

- de **rechthoek** met vier rechte hoeken;
- de **ruit** met vier gelijke zijden;
- het **vierkant** met vier rechte hoeken en vier gelijke zijden;
- de **vlieger** met één symmetrieas;
- het **parallellogram** met twee paren evenwijdige zijden;
- het **trapezium** met één paar evenwijdige zijden.

Voorbeeld 1

Applet

Je ziet rechthoek $ABCD$. Er zijn twee diagonalen, namelijk AC en BD die elkaar snijden in S.



De kenmerkende eigenschappen zijn:

- Vier rechte hoeken.
- De vierhoek is puntsymmetrisch met centrum S en lijnsymmetrisch ten opzichte van lijnen door het midden van en loodrecht op de zijden.
- De zijden tegenover elkaar zijn gelijk en evenwijdig.
- De diagonalen delen elkaar doormidden en zijn even lang.

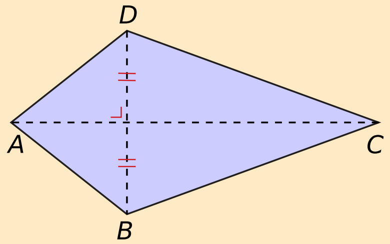
Maak je alle vier de zijden gelijk, dan krijg je een vierkant. Een vierkant is ook lijnsymmetrisch ten opzichte van de diagonalen.

Opgave 3 Opgave 4

Applet

Voorbeeld 2

Je ziet vlieger $ABCD$. Er is één symmetrieas. Dit betekent dat AB en AD even lang zijn, net als BC en CD.



De kenmerkende eigenschappen zijn:

- De vlieger is lijnsymmetrisch ten opzichte van lijn AC.
- De twee hoeken bij B en D zijn even groot.
- De diagonalen snijden elkaar loodrecht.
- Diagonaal BD deelt diagonaal AC doormidden.

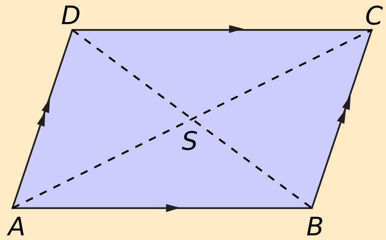
Als alle vier de zijden gelijk zijn, dan heb je een ruit. Er zijn dan (minstens) twee symmetrieassen. Een ruit is ook puntsymmetrisch en draaisymmetrisch met een kleinste draaihoek van $180°$.

Opgave 5 Opgave 6

Applet

Voorbeeld 3

Je ziet parallellogram $ABCD$. Er zijn twee paren evenwijdige zijden.



De kenmerkende eigenschappen zijn:

- Het snijpunt S van de twee diagonalen is het symmetriepunt.
- De diagonalen delen elkaar doormidden.
- De zijden tegenover elkaar zijn evenwijdig en even lang.
- De hoeken tegenover elkaar zijn even groot.

Als er maar één paar evenwijdige zijden is, spreek je van een trapezium. De genoemde eigenschappen gaan dan niet meer op.

Opgave 7 Opgave 8

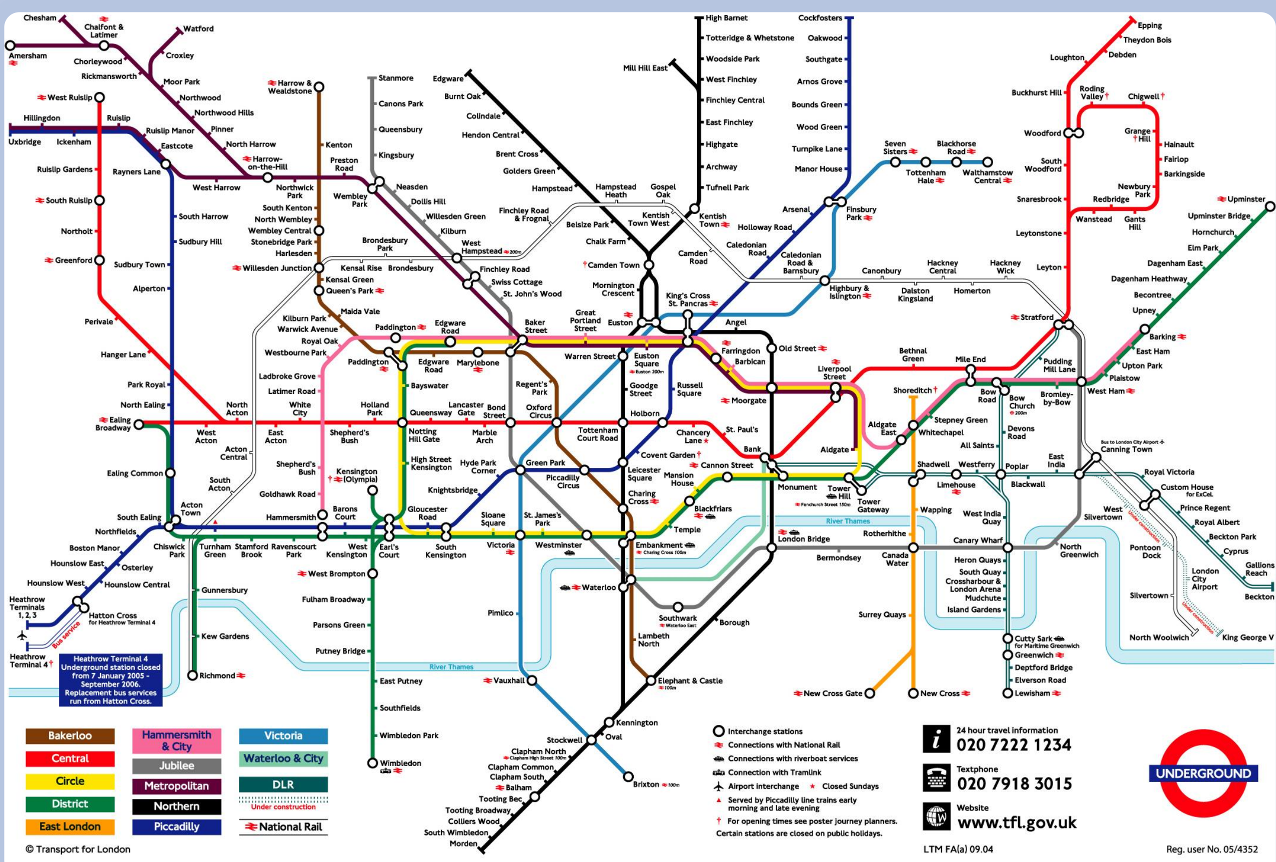
Begrippen

- schema — graaf — knooppunten en wegen — gerichte graaf
- gemiddelde — gewogen gemiddelde
- (relatieve) frequentie — (relatieve) frequentietabel
- beelddiagram — staafdiagram — lijndiagram
- steelbladdiagram — cirkeldiagram — sector en sectorhoek

Activiteiten

- schema's waaronder grafen bekijken en er informatie uit aflezen — werken met tabellen voor afstanden en reistijden in grafen
- gemiddelden berekenen, ook gewogen gemiddelden
- werken met frequenties, frequentietabellen en relatieve frequenties om gegevens te kunnen vergelijken — kruistabellen gebruiken
- beelddiagrammen, staafdiagrammen en lijndiagrammen maken en gebruiken
- (dubbelzijdige) steelbladdiagrammen en cirkeldiagrammen maken en gebruiken

Overzicht krijgen



Domein

Informatieverwerking

Hoofdstuk

Diagrammen

Inhoud

4

4.1 Schema's

Inleiding

Dit is een schema van de vaarroutes van Condor Ferries, een maatschappij die ferry-verbindingen met de Kanaaleilanden onderhoudt. Zo'n schema maakt in één klap duidelijk welke verbindingen er zijn. Maar je kunt er niet aan zien, hoe ze precies varen, hoe vaak ze varen en welke afstanden ze afleggen. Daarvoor is meer informatie nodig.

Je leert in dit onderwerp

- informatie aflezen uit schema's, waaronder (gerichte of ongerichte) grafen;
- grafen herkennen en tekenen en bepalen of ze gelijk zijn door het aantal knooppunten en wegen te tellen;
- bij grafen (afstands)tabellen maken en omgekeerd.

Voorkennis

- getallen gebruiken om te tellen en te rekenen.

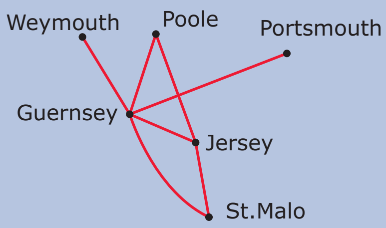
Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Bekijk het schema van de bootverbindingen naar en van de belangrijkste Kanaaleilanden, Jersey en Guernsey, tussen Groot-Brittannië en Frankrijk.

De ferry vanuit Poole vaart alleen van Poole naar Guernsey (100 km), vervolgens naar Jersey (62 km) en dan weer terug naar Poole (158 km). Daarnaast vaart de ferry vanuit St. Malo via Jersey (71 km) en Guernsey (62 km) naar Portsmouth (183 km) en de ferry vanuit Portsmouth vaart alleen via Guernsey (183 km) naar St. Malo (112 km). De ferry uit Weymouth gaat alleen naar Guernsey en weer terug (128 km).

Je kunt dit vaarschema weergeven door een zogenaamde 'graaf' met knooppunten (de eilanden en de plaatsen) en wegen (de bootverbindingen). De precieze vorm van de graaf is niet belangrijk, hij geeft alleen weer dat er een verbinding is. Je kunt met pijlen aangeven dat een bootverbinding maar één kant op gaat. Ook kun je een afstandentabel maken.



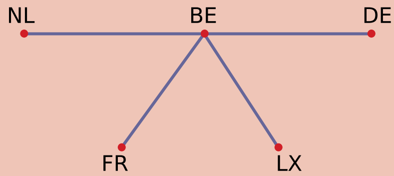
Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Een **schema** is een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid, vaak met punten, pijlen, routes en gebieden erin. Een speciaal soort schema is de **graaf**. Een graaf bestaat uit **knooppunten** en verbindingslijnen tussen de knooppunten, de **wegen**. Dat hoeven geen echte wegen te zijn. Als de knooppunten eilanden zijn, dan kunnen de wegen bootverbindingen zijn.

Als de knooppunten landen zijn, dan kan een weg bijvoorbeeld betekenen: 'grenst aan'.

België grenst over land aan...



Kijk maar eens naar deze graaf.

Soms horen er 'afstanden' bij de wegen. Als je de kortste afstanden tussen de knooppunten van een graaf in een tabel zet, krijg je een **afstandentabel**.

Twee grafen zijn gelijk als:

- ze dezelfde knooppunten hebben;
- in dezelfde knooppunten dezelfde wegen samenkomen.

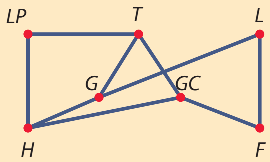
Soms is in een graaf de richting belangrijk. Je spreekt van een **gerichte graaf**. De wegen zijn dan voorzien van pijlen.

Gerichte grafen worden veel gebruikt in organisaties om aan te geven wie welke personen aanstuurt. Zo'n graaf noem je een **organogram**.

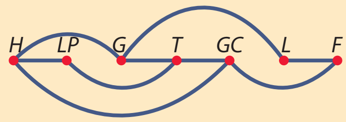
Voorbeeld 1

De zeven Canarische eilanden: Tenerife, Gran Canaria, Las Palmas, Gomera, Hierro, Fuerteventura en Lanzarote horen bij Spanje en liggen voor de kust van Marokko.

Je ziet twee grafen van de bootverbindingen tussen de Canarische eilanden. Hoewel ze er nogal verschillend uitzien, zijn ze gelijk.



graaf 1

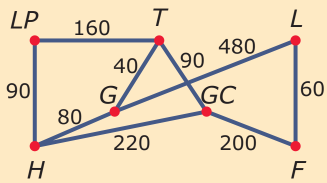


graaf 2

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

Je ziet een afstandentabel van rechtstreekse bootverbindingen tussen de zeven Canarische eilanden: Tenerife, Gomera, Gran Canaria, Las Palmas, Hierro, Fuerteventura en Lanzarote.



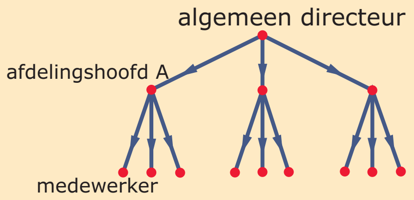
	T	*G*	*GC*	*LP*	*H*	*F*	*L*
T	-	40	90	160	-	-	-
G	40	-	-	-	80	-	480
GC	90	-	-	-	220	200	-
LP	160	-	-	-	90	-	-
H	-	80	220	90	-	-	-
F	-	-	200	-	-	-	60
L	-	480	-	-	-	60	-

Elk getal in de tabel is de lengte van de bootreis in kilometers (afgerond op tientallen).

Opgave 5 Opgave 6

Voorbeeld 3

Gerichte grafen, grafen met pijlen erin, worden veel gebruikt om in een organisatie aan te geven wie de baas is van wie. Hier zie je zo'n organogram.



Opgave 7 Opgave 8

4.2 Gemiddelden

Inleiding

Elke leerling weet hoe belangrijk gemiddeldes zijn. Je gemiddelde cijfer voor elk vak geeft aan of je voldoende presteert of niet. Maar hoe bereken je zo'n gemiddelde? Want soms tellen bepaalde zaken zwaarder mee...

Je leert in dit onderwerp

- het gemiddelde van een serie getallen berekenen;
- het gewogen gemiddelde van een serie getallen berekenen.

Voorkennis

- getallen gebruiken om te tellen en te rekenen.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg

Het gemiddelde van de getallen 55, 60 en 70, afgerond op één cijfer achter de komma, bereken je als volgt:

$\frac{55+60+70}{3} \approx 61{,}7$

Maar als het getal 70 drie keer zo zwaar moet meetellen als de andere getallen, wordt het gemiddelde:

$\frac{55+60+3 \cdot 70}{5} = 65$

De 3 is het ‘gewicht’ of de ‘wegingsfactor’ van het getal 70. Je deelt door 5 omdat de getallen nu eigenlijk 55, 60, 70, 70, 70 zijn. In feite zijn er nu dus 5 getallen.

Een gemiddelde waarbij de getallen verschillend gewicht hebben, noem je een ‘gewogen gemiddelde’.

Opgave 1 Opgave 2

Theorie

Het **gemiddelde** van een serie getallen bereken je door alle getallen op te tellen en de uitkomst te delen door het aantal getallen.

Bij het **gewogen gemiddelde** van een serie getallen moet je ermee rekening houden hoeveel keer een getal meetelt.
Je vermenigvuldigt dan eerst elk getal met zijn **wegingsfactor** en telt al die producten bij elkaar.
De uitkomst deel je door het totaal van de wegingsfactoren.

Voorbeeld 1

Voor wiskunde heeft Annette uit B1D de volgende cijfers gehaald: 4,9; 7,3; 7,5 en 6,0.

Bereken haar gemiddelde als alle cijfers even zwaar meetellen.

Bereken haar gewogen gemiddelde als het cijfer 7,3 twee keer en het cijfer 6,0 drie keer meetelt.

Antwoord

Het gemiddelde is: $\frac{4{,}9+7{,}3+7{,}5+6{,}0}{4} = 6{,}425$.

Het gewogen gemiddelde is: $\frac{4{,}9+2\cdot7{,}3+7{,}5+3\cdot6{,}0}{7} \approx 6{,}43$.

Afgerond op één cijfer achter de komma staat Annette dus een 6,4 gemiddeld voor wiskunde.

Opgave 3 Opgave 4

Voorbeeld 2

Een boer heeft twee velden met aardappelen. Beide velden zijn 2,5 hectare groot. Het ene veld levert hem 115 ton aardappelen op, het andere 103 ton. (Een ton is 1000 kg.)

De gemiddelde opbrengst per hectare, afgerond op één cijfer achter de komma $= \frac{115+103}{2{,}5+2{,}5} = 43{,}6$ ton.

Zijn buurvrouw teelt ook aardappelen. Zij heeft een veld van 3 hectare en een veld van 2 hectare. Het eerste veld levert 124 ton aardappelen op, het tweede veld 89 ton.

De gemiddelde opbrengst per hectare, afgerond op één cijfer achter de komma $= \frac{124+89}{3+2} = 42{,}6$ ton.

Opgave 5 Opgave 6

4.3 Frequentietabellen

Inleiding

Soms wil je resultaten met elkaar kunnen vergelijken. Maar dat is niet altijd eenvoudig. Hoe kun je bijvoorbeeld de cijfers voor engels vergelijken met die voor wiskunde? Of de cijfers van wiskunde in B1J vergelijken met die in B1H?

wiskunde	
RE	freq
3	1
4	0
5	3
6	8
7	10
8	5
9	2
10	0

Je leert in dit onderwerp

- een (relatieve) frequentietabel maken;
- relatieve frequentietabellen gebruiken om gegevens te vergelijken;
- een kruistabel (tweedimensionale frequentietabel) maken en gebruiken om gegevens te vergelijken.

Voorkennis

- getallen gebruiken om te tellen en te rekenen;
- het (gewogen) gemiddelde uitrekenen van een serie getallen.

Opgave V1

Uitleg 1

Je ziet de rapportcijfers voor het vak science van klas B1H.

6	6	5	4	7	7	7	8	6	6	6	6	8	7	7
9	5	7	7	5	7	6	7	6	6	7	5	7	8	

science	
cijfer	frequentie
4	1
5	4
6	9
7	11
8	3
9	1
totaal	29

Je kunt de cijfers overzichtelijker weergeven door te tellen hoeveel vieren, vijven, zessen, enzovoort voorkomen. Je krijgt dan een frequentietabel en de cijfers noem je de waarnemingen. Bekijk de frequentietabel van de science-cijfers van B1H.

De frequentie is het aantal keren dat een bepaalde waarneming voorkomt. Een frequentietabel heet ook wel een frequentieverdeling.

Wil je de cijfers van de ene klas vergelijken met die van een andere klas, waarin meer of minder leerlingen zitten, dan kun je de frequenties het beste omrekenen naar relatieve frequenties:

relatieve frequentie = $\frac{\text{frequentie}}{\text{totaal aantal waarnemingen}}$

Meestal wordt de relatieve frequentie weergegeven als percentage.

In de tabel zie je van de rapportcijfers voor science van klas B1H de relatieve frequentie als een percentage met één decimaal achter de komma.

cijfer	frequentie	berekening relatieve frequentie	rel. freq.
4	1	$\frac{1}{29} \approx 0{,}034129$ en dus $\approx 3{,}4\%$	3,4
5	4	$\frac{4}{29} \approx 0{,}138429$ en dus $\approx 13{,}8\%$	13,8
6	9	$\frac{9}{29} \approx 0{,}310929$ en dus $\approx 31{,}0\%$	31,0
7	11	$\frac{11}{29} \approx 0{,}3791129$ en dus $\approx 37{,}9\%$	37,9
8	3	$\frac{3}{29} \approx 0{,}103329$ en dus $\approx 10{,}3\%$	10,3
9	1	$\frac{1}{29} \approx 0{,}034129$ en dus $\approx 3{,}4\%$	3,4
totaal	29	1	99,8

Door de afronding komt het totale percentage zo op 99,8. Om 100% te krijgen rond je twee percentages verder naar boven af. Dat moet dan een percentage zijn dat maar één keer voorkomt anders krijg je onderlinge verschillen. Bijvoorbeeld $\frac{4}{29} \approx 13{,}9$ en $\frac{9}{29} \approx 31{,}1$.

Uitleg 2

Wil je de cijfers van twee vakken per leerling met elkaar vergelijken, dan kun je een tweedimensionale frequentietabel maken. Horizontaal staan dan bijvoorbeeld de cijfers voor wiskunde en verticaal de cijfers voor science. Dat heet een kruistabel. Je ziet dat er twee leerlingen zijn met een 6 voor wiskunde en een 5 voor science.

Aantal	wi						
sc	3	5	6	7	8	9	Eindtotaal
4			1				1
5	1	1	2				4
6		2	2	4	1		9
7			3	5	2	1	11
8				1	2		3
9						1	1
Eindtotaal	1	3	8	10	5	2	29

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

Je kunt getallen overzichtelijker weergeven door te tellen hoeveel ervan voorkomen. Je krijgt dan een **frequentietabel**. De getallen noem je de **waarnemingen**. Hier zie je de frequentietabel van de science-cijfers van B1A.

science	
cijfer	frequentie
4	1
5	4
6	9
7	11
8	3
9	1
totaal	29

De **frequentie** is het aantal keren dat een bepaalde waarneming voorkomt. Een frequentietabel heet ook wel een **frequentieverdeling**.

Wil je twee series getallen vergelijken als het totale aantal waarnemingen verschillend is, dan kun je de frequenties het beste omrekenen naar **relatieve frequenties**:

$$\text{relatieve frequentie} = \frac{\text{frequentie}}{\text{totaal aantal waarnemingen}}$$

Meestal wordt de relatieve frequentie weergegeven als percentage.

Wil je twee series getallen met elkaar vergelijken, dan kun je een tweedimensionale frequentietabel maken. Horizontaal staan dan de waarnemingen van de éne groep en verticaal die van de andere. Zo'n frequentietabel heet een **kruistabel**.

Voorbeeld 1

Een frequentietabel is erg handig bij het berekenen van een gemiddelde. Je ziet de frequentietabel voor de rapportcijfers van het vak science van klas B1H.
Bereken het gemiddelde.

science	
cijfer	frequentie
4	1
5	4
6	9
7	11
8	3
9	1
totaal	29

Antwoord

Om het gemiddelde uit te rekenen, moet je alle cijfers bij elkaar optellen en delen door 29. Voor het optellen is het handig om daarvoor een kolom frequentie · cijfer te maken. De frequentietabel wordt dan:

cijfer	frequentie	frequentie · cijfer
4	1	$1 \cdot 4 = 4$
5	4	$4 \cdot 5 = 20$
6	9	$9 \cdot 6 = 54$
7	11	$11 \cdot 7 = 77$
8	3	$3 \cdot 8 = 24$
9	1	$1 \cdot 9 = 9$
totaal	29	188

Het gemiddelde is $\frac{188}{29} \approx 6{,}5$.

Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Frequentietabellen zijn ook handig om de resultaten van twee series waarnemingen te vergelijken. Je gebruikt dan vooral relatieve frequenties. In dit voorbeeld worden de resultaten voor het vak science van klas B1H en klas B1J met elkaar vergeleken.

Resultaten science klas B1H		
cijfer	frequentie	relatieve frequentie (%)
4	1	3,4
5	4	13,8
6	9	31,0
7	11	37,9
8	3	10,3
9	1	3,4
totaal	29	100

Resultaten science klas B1J		
cijfer	frequentie	relatieve frequentie (%)
4	0	0,0
5	4	16,0
6	8	32,0
7	6	24,0
8	5	20,0
9	2	8,0
totaal	25	100

Opgave 6 Opgave 7

Voorbeeld 3

In de kruistabel, een tweedimensionale frequentietabel, worden de cijfers van twee vakken bij dezelfde klas met elkaar vergeleken. Een leeg vakje betekent: geen. In de tabel kun je bijvoorbeeld zien dat drie leerlingen een 6 hebben gehaald voor wiskunde en een 7 voor science.

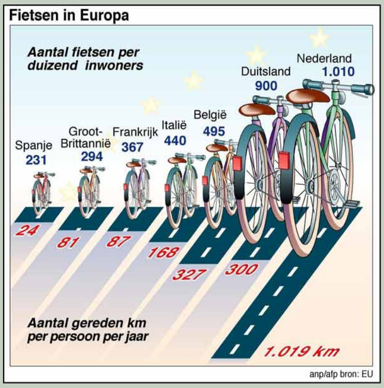
Aantal	wi						
sc	3	5	6	7	8	9	Eindtotaal
4			1				1
5	1	1	2				4
6		2	2	4	1		9
7			3	5	2	1	11
8				1	2		3
9						1	1
Eindtotaal	1	3	8	10	5	2	29

Opgave 8 Opgave 9 Opgave 10

4.4 Beeld-, staaf- en lijndiagram

Inleiding

Informatie kun je vaak overzichtelijk weergeven in afbeeldingen. Deze figuur bijvoorbeeld geeft informatie over fietsen in enkele Europese landen. (Er waren ten tijde van deze figuur nog geen e-bikes.) Bekijk maar eens goed welke informatie de figuur te bieden heeft.



Je leert in dit onderwerp

- informatie aflezen uit een beelddiagram;
- een staafdiagram maken en interpreteren;
- een lijndiagram maken en interpreteren;

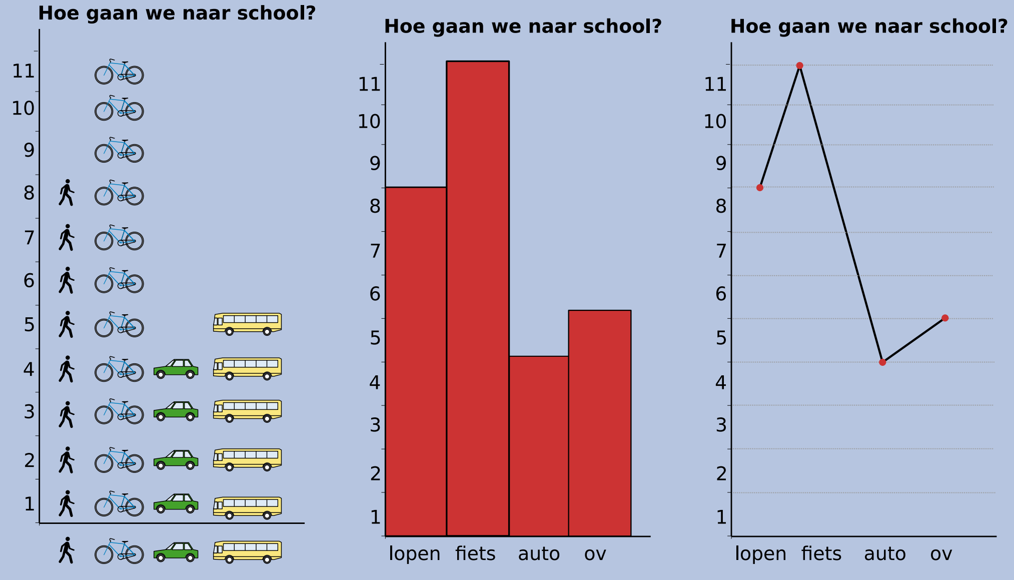
Voorkennis

- getallen gebruiken om te tellen en te rekenen;
- het (gewogen) gemiddelde uitrekenen van een serie getallen;
- werken met (relatieve) frequentietabellen.

Opgave V1

Uitleg

Dit beelddiagram laat zien hoeveel leerlingen van een klas met een bepaald vervoermiddel naar school komen. Dat is de frequentie van dat vervoermiddel, die kun je op de verticale as gemakkelijk aflezen.



beelddiagram staafdiagram lijndiagram

Je kunt dergelijke gegevens ook wel wat eenvoudiger weergeven, bijvoorbeeld in een staafdiagram. Zo'n diagram bestaat uit allemaal staven naast elkaar (of boven elkaar). Omdat je in een beelddiagram door ongelijke plaatjes te gebruiken gemakkelijk iets groter kan laten lijken dan het eigenlijk zou moeten zijn, is een staafdiagram meestal betrouwbaarder.

Wil je een bepaalde trend aangeven, dan kun je ook een lijndiagram maken door de middens van de bovenkanten van de staven te verbinden.

In Engelstalige landen spreek je niet van een diagram, maar van een ‘chart’, of een ‘graph’. Een ‘diagram’ in het Engels is eigenlijk wat wij een graaf noemen.

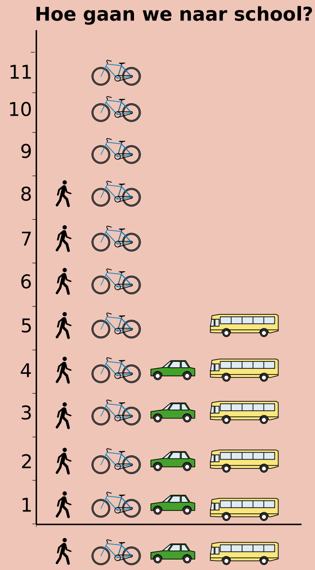
Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

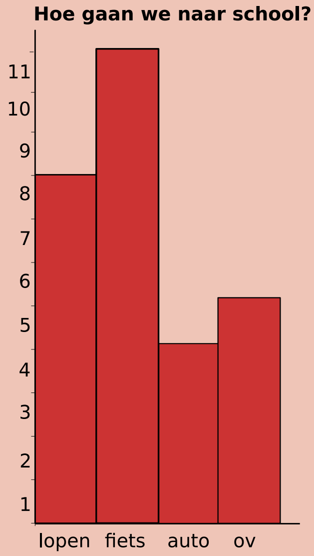
Een **diagram** is een grafische voorstelling van gegevens.
Diagrammen kunnen er heel verschillend uitzien. De belangrijkste zijn:

- **beelddiagram** (Engels: ‘pictograph’);
- **staafdiagram** (Engels: ‘bar graph’);
- **lijndiagram** (Engels: ‘line graph’);

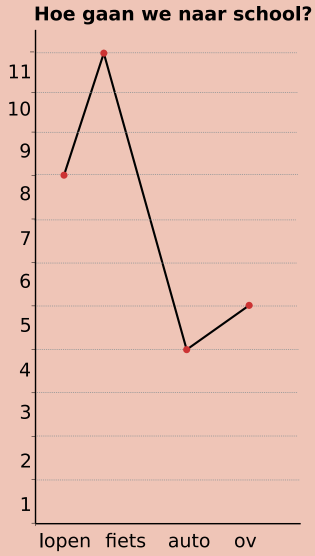
Dit beelddiagram laat zien hoeveel leerlingen van een klas met een bepaald vervoermiddel naar school komen. Dit is de frequentie van dat vervoermiddel.



beelddiagram



staafdiagram



lijndiagram

In Engelstalige landen spreek je van een ‘chart’, of een ‘graph’. Een ‘diagram’ in het Engels is eigenlijk wat wij een graaf noemen.

Voorbeeld 1

Bij de frequentietabel van de rapportcijfers voor science van klas B1H is een staafdiagram gemaakt. Op de horizontale as staan de rapportcijfers, op de verticale as de frequentie. Door de hoogte van de staven af te lezen krijg je snel een indruk van de verdeling van de cijfers.

science

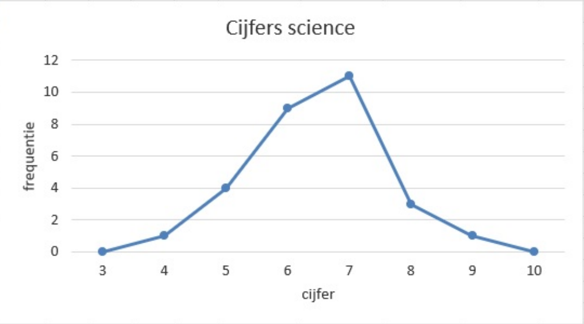
RE	freq
3	0
4	1
5	4
6	9
7	11
8	3
9	1
10	0

Opgave 4 Opgave 5 Opgave 6

Voorbeeld 2

Dit lijndiagram laat zien met welke frequentie de rapportcijfers voor science in B1H voorkomen. Het lijndiagram ontstaat uit een staafdiagram: de middens van de bovenkanten van de staven verbind je met elkaar. Een lijndiagram laat het verloop beter zien.

science	
RE	freq
3	0
4	1
5	4
6	9
7	11
8	3
9	1
10	0

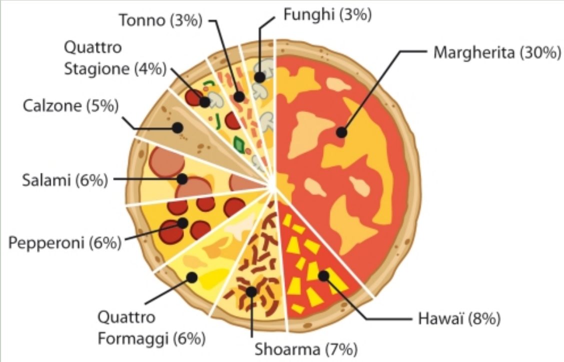


Opgave 7 Opgave 8

4.5 Cirkeldiagram en steelbladdiagram

Inleiding

Je hebt leren werken met beelddiagrammen, lijndiagrammen en staafdiagrammen.
Maar er bestaan ook nog andere soorten diagrammen.
Hiernaast zie je een cirkeldiagram.



Je leert in dit onderwerp

- een (dubbel) steelbladdiagram maken en interpreteren;
- een cirkeldiagram maken en interpreteren.

Voorkennis

- het (gewogen) gemiddelde uitrekenen van een serie getallen;
- werken met (relatieve) frequentietabellen;
- lijn-, staaf- en beelddiagrammen maken en interpreteren.

Opgave V1 Opgave V2

Uitleg 1

Je ziet een rijtje cijfers voor een toets in één decimaal nauwkeurig. Het ziet er wel netjes uit, maar je krijgt geen goed beeld van hoe deze dertig leerlingen hebben gescoord.

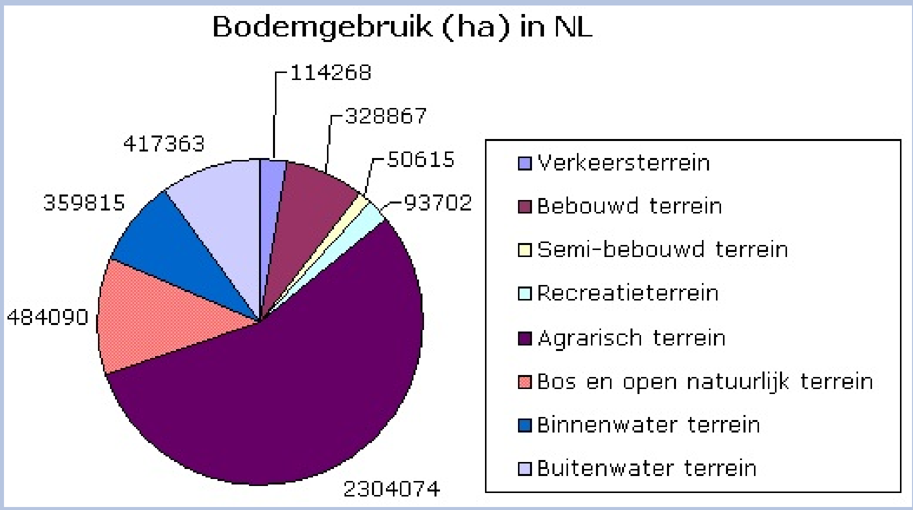
4,4	6,6	5,5	3,9	5,0	8,6	6,2	6,4	8,6	5,9
6,8	6,4	5,1	8,2	8,6	5,5	5,9	5,0	7,7	6,4
9,5	4,4	3,9	8,6	2,3	6,6	6,9	7,1	8,6	7,3

Je kunt dezelfde cijfers weergeven in een steelbladdiagram (Engels: 'stem-and-leaf-plot'). De gehelen staan in de steel, de decimalen op een blad (een naar rechts stekend rijtje cijfers). Zoek bijvoorbeeld 5,1 maar eens op: de 5 vind je in de steel en de 1 staat als derde cijfer in het blad ernaast. Je kunt ook zien welk cijfer het meest werd gehaald: een 8,6. Dat noem je het modale cijfer.

2	3							
3	9	9						
4	4	4						
5	0	0	1	5	5	9	9	
6	2	4	4	4	6	6	8	9
7	1	3	7					
8	2	6	6	6	6	6		
9	5							

Uitleg 2

Een andere zeer overzichtelijke figuur is het cirkeldiagram. Je ziet er een van het bodemgebruik in Nederland. Je kunt er onder andere in aflezen dat in Nederland 484090 ha (hectare) van de totale bodem ‘bos en open natuurlijk terrein’ was.



Om zo'n cirkeldiagram te kunnen maken, moet je weten hoe groot de sectorhoeken van de verschillende sectoren (taartpunten) zijn.

Daartoe bereken je eerst hoeveel (hectare) er in totaal (100%) in het cirkeldiagram moet worden weergegeven. Dit getal komt overeen met 360° in het cirkeldiagram.

Kies een sector uit waarvan je de sectorhoek wilt berekenen.

De sectorhoek is $\frac{\text{hoeveelheid behorend bij sector}}{\text{totale hoeveelheid}} \cdot 360°$.

Dit doe je voor alle sectoren en dan kun je het cirkeldiagram met behulp van passer en geodriehoek tekenen.

Opgave 1 Opgave 2 Opgave 3

Theorie

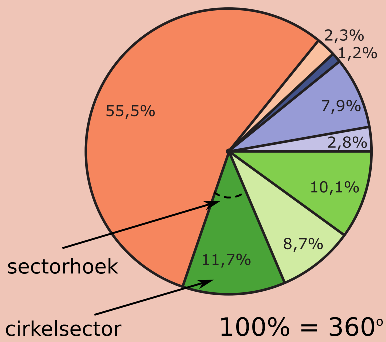
Je kunt cijfers soms weergeven in een **steelbladdiagram** (Engels: ‘stem-and-leaf-plot’). De gehelen staan in de **steel**, de decimalen op een **blad** (een naar rechts stekend rijtje cijfers). De 5,1 vind je met de 5 in de steel en de 1 als derde cijfer in het blad ernaast. De 8,6 werd het meest werd gehaald. Dat noem je het **modale cijfer**.

2	3							
3	9	9						
4	4	4						
5	0	0	1	5	5	9	9	
6	2	4	4	4	6	6	8	9
7	1	3	7					
8	2	6	6	6	6	6		
9	5							

Een ander zeer overzichtelijke figuur is het **cirkeldiagram**.
Om zo'n cirkeldiagram te kunnen maken, bepaal je de **sectorhoeken** van de verschillende **sectoren** (taartpunten):

sectorhoek $= \frac{\text{hoeveelheid behorend bij sector}}{\text{totale hoeveelheid}} \cdot 360°$.

Zo hoort bij 11,7% een sectorhoek van: $\frac{11{,}7}{100} \cdot 360° \approx 42°$.



Voorbeeld 1

Dit steelbladdiagram laat zien welke cijfers er in een bepaalde klas zijn gehaald. Je ziet meteen dat de meeste leerlingen (8) een cijfer vanaf 6,0 tot 7,0 hebben gehaald. En dat er 18 cijfers boven de 6,0 waren. Je kunt ook zien welk cijfer het meest werd gehaald: 8,6; het modale cijfer.

2	3							
3	9	9						
4	4	4						
5	0	0	1	5	5	9	9	
6	2	4	4	4	6	6	8	9
7	1	3	7					
8	2	6	6	6	6	6		
9	5							

Om het gemiddelde cijfer te berekenen, moet je de cijfers allemaal optellen en delen door 30.

Opgave 4 Opgave 5

Voorbeeld 2

Als je sport, gaat vaak je polsslag wat omhoog. In dit tweezijdige steelbladdiagram zie je dit terug voor een hele groep sporters. Je ziet bijvoorbeeld dat de hoogste polsslag vóór de oefening 83 slagen per minuut bedroeg. Na de oefening was dat 95 slagen per minuut.

polsslag voor de oefening								polsslag na de oefening				
		9	8	3	2	0	5	9				
7	6	6	4	1	0	0	6	2	4	7	8	8
				9	6	2	7	1	1	4	4	8
					3	1	8	2	4	9	9	
							9	2	5			

Opgave 6 Opgave 7

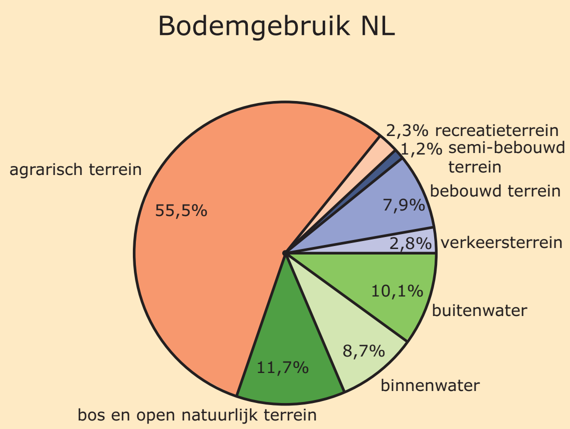
Voorbeeld 3

Deze tabel van het bodemgebruik in Nederland in 2003 is afkomstig van het **Centraal Bureau voor de Statistiek**.

Hierin is 1 ha = 1 hectare = 1 hm^2 = 10.000 m^2. Hier zie je hoe je er een cirkeldiagram bij maakt.

	oppervlakte (ha)	**percentage (%)**	**sectorhoek (°)**
Verkeersterrein	114268	2,8	10
Bebouwd terrein	328867	7,9	29
Semi-bebouwd terrein	50615	1,2	4
Recreatieterrein	93702	2,3	8
Agrarisch terrein	2304074	55,5	200
Bos en open natuurlijk terrein	484090	11,7	42
Binnenwater	359815	8,7	31
Buitenwater	417363	10,1	36
Totale bodemoppervlakte	4152794	100	360

Om het cirkeldiagram te maken begin je met het bepalen van de totale bodemoppervlakte door alle getallen op te tellen. Je rekent dan alle waarden om naar procenten door ze te delen door dit totaal en met 100 te vermenigvuldigen.
Bij de kolom met percentages maak je vervolgens een nieuwe kolom voor de sectorhoek in graden. Omdat 100% overeen moet komen met 360° moet je alle percentages met 3,6 vermenigvuldigen.
Je kunt nu het cirkeldiagram tekenen door alle hoeken naast elkaar uit te zetten.



Opgave 8 Opgave 9

Register

Het lesmateriaal in deze reader is gebaseerd op het materiaal dat ook op de Math4All website staat.

De reader is gegenereerd met de Math4All maatwerkdienst. De inhoud en de volgorde van de onderwerpen in deze reader zijn gekozen door docenten van het ConTeXt College.

Stichting Math4All

Inhoud Katern 3

www.math4all.nl