

Wiskunde D

4 VWO

Deel 2, Antwoordenboek



Math4all



© 2020

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de recht-hebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaarden ze geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

5	Kansrekenen	3
5.1	Kansbomen	4
5.2	Kansen optellen/afrekken	10
5.3	Kansen vermenigvuldigen	17
5.4	Toevalsvariabelen	23
5.5	Totaalbeeld	30
6	Statistiek	35
6.1	Onderzoek	36
6.2	Data ordenen	40
6.3	Diagrammen gebruiken	46
6.4	Gegevens samenvatten	54
6.5	Uitspraken doen	64
6.6	Totaalbeeld	69
7	Lineair programmeren	73
7.1	Functies van meerdere variabelen	74
7.2	Beslissingsproblemen	81
7.3	De Oplosser in Excel	88
7.4	De simplexmethode	93
7.5	Totaalbeeld	103

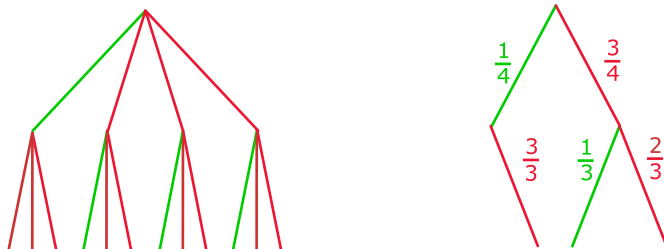
5

Kansrekenen

5.1	Kansbomen	4
5.2	Kansen optellen/afrekken	10
5.3	Kansen vermenigvuldigen	17
5.4	Toevalsvariabelen	23
5.5	Totaalbeeld	30

5.1 Kansbomen

- V1 a** In deze paragraaf leer je dat je dit als volgt berekent: $0,25 \cdot 0,25 = 0,0625$.
- b** In deze paragraaf leer je dit als volgt te beredeneren: hij kan nu één keer scoren of twee keer scoren, die kansen moet je optellen. Je vindt dan 0,4375.
- 1 a** Dezelfde kansboom als in de uitleg, maar bij alle groene takken staat de kans $\frac{3}{20}$ (of 0,15) en bij de rode takken staat de kans $\frac{17}{20}$ (of 0,85).
- b** In de kansboom zijn dit de route treffer-misser en de route misser-treffer en dus wordt de kans: $0,15 \cdot 0,85 \cdot 2 = 0,2550$
- c** In de kansboom is dit de route treffer-treffer en dus wordt de kans: $0,15 \cdot 0,15 = 0,0225$
- d** Dit is de kans op 0 treffers of 1 treffer: in de kansboom zijn dit alle routes behalve de route treffer-treffer uit c. Deze kans is gelijk aan 1 min de kans op 2 treffers en dit is gelijk aan $1 - 0,0225 = 0,9775$.
- 2 a** In het vaasmodel pak je nu 3 balletjes: voor iedere keer werpen 1 balletje. Gebruik dus een kansboom met drie lagen: voor ieder balletje 1 laag. Precies twee keer gooien zie je in 3 routes van deze kansboom en iedere route geeft een kans van $0,15^2 \cdot 0,85$.
- $P(X = 2) = 0,15^2 \cdot 0,85 \cdot 3 \approx 0,0573$.
- b** $0,15^2 \cdot 0,85 \cdot 3 + 0,15 \cdot 0,85^2 \cdot 3 + 0,85^3 \approx 0,9966$
- c** $0,15^2 \cdot 0,85 \cdot 3 + 0,15^3 \approx 0,0608$
- 3 a** Met terugleggen, de kans per schot blijft gelijk, dus je moet telkens dezelfde balletjes in de vaas hebben. En daarom moet je na elke trekking het getrokken balletje terugleggen (en dan de vaas schudden).
- b** Bij elk schot kan het schotpercentage anders zijn. Het gegeven schotpercentage is een experimentele kans, een gemiddelde over alle schoten tot dat moment.
- c** Zie figuur, er zijn voor het tweede balletje nu nog drie mogelijkheden.



- d** $P(X = 1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2}{4} = 0,5$
- e** $P(X = 1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2}{4} = 0,5$
- 4 a** Iemand kan meerdere taken uitvoeren.
- b** Dit is een trekking met terugleggen. In de bijbehorende kansboom zijn er drie routes die hieraan voldoen: $P(vvm)$, $P(vmv)$ en $P(mvv)$.
- Deze zijn elk gelijk aan $P(v) \cdot P(v) \cdot P(m) = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{100}{729}$
- $P(2 \text{ vrouwen, } 1 \text{ man}) = 3 \cdot \frac{100}{729} = \frac{300}{729}$
- c** Dit is een trekking met terugleggen. In de bijbehorende kansboom is er 1 route die hieraan voldoet: mmm .
- $P(mmm) = \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{64}{729}$
- d** Dit is een trekking met terugleggen. In de bijbehorende kansboom voldoen de volgende routes hieraan: mmm en 3 routes voor mmv en 3 routes voor mvv .
- $P(2 \text{ mannen, } 1 \text{ vrouw}) = \frac{240}{729}$ (zie het voorbeeld) en de andere kansen heb je hiervoor in deze opgave al berekend.

De gevraagde kans is: $P(\text{hoogstens 2 vrouwen}) = \frac{64}{729} + \frac{300}{729} + \frac{240}{729} = \frac{604}{729}$

- 5 a** Twee balletjes trekken, dus een kansboom van twee lagen.

Telkens de keuze tussen een blauw (met kans $\frac{4}{6}$) of een rood (met kans $\frac{2}{6}$) balletje.

De kansen blijven in beide lagen gelijk: het is een situatie met terugleggen.

b $P(br) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

c $P(rb) + P(br) = \frac{8}{36} + \frac{8}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

- 6 a** Niemand mag meerdere taken uitvoeren.

- b** Dit is een trekking zonder terugleggen. In de bijbehorende kansboom zijn er 3 routes die hieraan voldoen: vvm , vmv en mvv . De kans is gelijk aan

$$P(vvm \text{ of } vmv \text{ of } mvv) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{240}{504} = \frac{10}{21}$$

- c** Dit is een trekking zonder terugleggen. In de bijbehorende kansboom is er 1 route die hieraan voldoet: mmm .

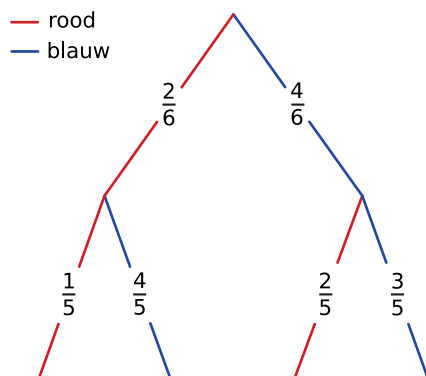
$$P(mmm) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21}$$

- d** Dit is een trekking zonder terugleggen. Hoogstens twee vrouwen betekent de volgende mogelijkheden: drie mannen, twee mannen en een vrouw of een man en twee vrouwen.

Deze kansen zijn al bekend uit het voorbeeld en uit b en c. De totale kans is dan:

$$P(\text{hoogstens twee vrouwen}) = \frac{1}{21} + \frac{5}{14} + \frac{10}{21} = \frac{2+15+20}{42} = \frac{37}{42}$$

- 7 a** Bekijk de figuur.



- b** Dit zijn de kansboomroutes 'eerst rood en dan blauw' en 'eerst blauw en dan rood'.

$$P(rb \text{ of } br) = P(rb) + P(br) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

- c** Dit zijn de kansboomroutes 'twee keer rood' en 'twee keer blauw'.

$$P(rr \text{ of } bb) = P(rr) + P(bb) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

- 8 a** Je moet nu systematisch tellen en dus gebruik maken van combinatoriek. Bedenk dat dit een trekking zonder terugleggen is. Je kiest telkens een duo uit een geheel van 6: dit is een combinatie van 6 boven 2.

$$\binom{6}{2} = 15$$

- b** Verschillende kleur: 4 mogelijkheden voor de witte, gecombineerd met 2 mogelijkheden voor de rode geeft $4 \times 2 = 8$ mogelijkheden. Je kunt hier zelfs een boomdiagram voor gebruiken: de eerste laag geeft 4 takken voor de witte balletjes; de tweede laag geeft telkens 2 takken voor de rode balletjes.

Zelfde kleur: Wit: je kiest nu 2 uit 4 en dat geeft een combinatie van 4 boven 2 en dat geeft $\binom{4}{2} = 6$ mogelijkheden. Rood: er is precies 1 duo dat helemaal rood is. Samen: 7 mogelijkheden.

- c Er zijn dus 8 mogelijkheden met verschillende kleur en 7 mogelijkheden met gelijke kleur en 15 mogelijkheden in totaal.

$$P(\text{verschillende kleur}) = P(rw) + P(ri) = \frac{8}{15} = P(rw \text{ of } ri)$$

$$P(\text{gelijke kleur}) = P(rr) + P(ww) = \frac{7}{15} = P(rr \text{ of } ww)$$

9 a $P(X = 2) = 0,25 \cdot 0,16 = 0,04$

b $P(X = 0) = 0,75 \cdot 0,84 = 0,63$

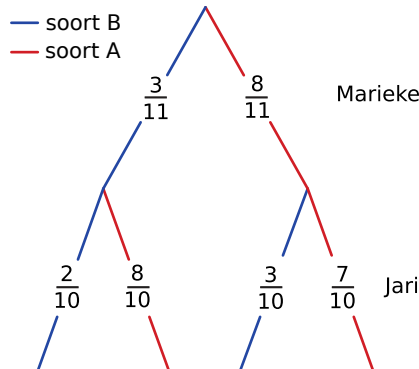
c $P(\text{minstens 1 treffer}) = P(1 \text{ treffer}) + P(2 \text{ treffers})$

$P(1 \text{ treffer})$ staat uitgewerkt in het voorbeeld en is 0,33.

$P(2 \text{ treffers})$ heb je hiervoor in deze opgave berekend.

$$P(\text{minstens 1 treffer}) = 0,33 + 0,04 = 0,37$$

- 10 a Zie de figuur.



- b Er is een route in de kansboom die hieraan voldoet:

$$P(\text{Jari en Marieke hebben beiden eenzelfde cadeau}) = \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{6}{110} = \frac{3}{55}$$

- c Er is een route in de kansboom die hieraan voldoet:

$$P(\text{Marieke een A, Jari een B}) = \frac{8}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{24}{110} = \frac{12}{55}$$

- d Nu zijn er twee routes die voldoen:

$$P(\text{Jari en Marieke hebben samen een A en een B gepakt}) =$$

$$\frac{3}{11} \cdot \frac{8}{10} + \frac{8}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{24}{55}$$

- 11 a Maak eventueel een kansboom van drie lagen.

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \approx 0,0220$$

- b Er zijn drie mogelijkheden: RRG, RGR, GRR.

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot 3 \approx 0,0879$$

- c Er zijn zes mogelijkheden: GRB, GBR, RGB, RBG, BGR, BRG.

$$\frac{4}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{6}{13} \cdot 6 \approx 0,2637$$

- 12 a $\frac{3}{8}$

- b Nee, de eerste taak slaat op de eerste taak die verloot wordt. Dan zijn er nog 8 mensen waar uit gekozen kan worden. Bij de tweede loting zijn er nog maar 7 mensen.

- c Teken een kansboom van twee lagen: voor beide taken 1 laag.

De bovenste laag heeft een tak voor de mannen en een tak voor de vrouwen.

Bedenk dat dit een situatie zonder terugleggen is.

$$P(VV) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

- d** Gebruik een kansboom met twee lagen: in iedere laag staan dezelfde kansen. In de bovenste laag zijn 8 takken: voor iedere persoon één.

Voor de gevraagde kans gelden 8 routes.

$$P(2 \text{ maal zelfde persoon}) = 8 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

- e** Zie de uitwerking bij d.

Er zijn echter nu 3 routes geldig.

$$P(2 \text{ maal zelfde man}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{64}$$

- f** $P(VV) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64} \approx 0,391$. Dit is groter dan $\frac{5}{14} \approx 0,357$.

De kans is dus groter.

- 13 a** Gebruik eventueel een kansboom van twee lagen. Alleen route Rh, Bp is geldig:

$$P(\text{eerste rood hout, tweede blauw plastic}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{100} = 0,04$$

- b** Gebruik eventueel een kansboom van twee lagen. Twee routes zijn nu geldig: Rh, Bp en Bp, Rh:

$$P(\text{rood hout, blauw plastic}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0,04 + 0,04 = 0,08$$

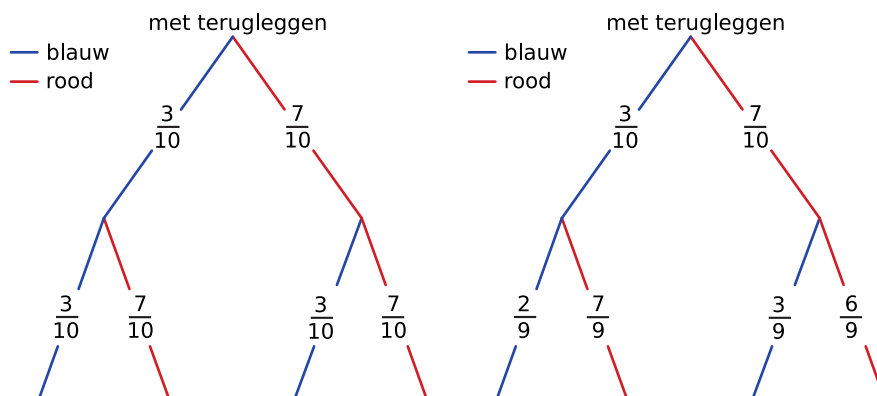
- c** Gebruik eventueel een kansboom van twee lagen. Alleen route Rh, Bp is geldig:

$$P(\text{eerste rood hout, tweede blauw plastic}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$$

- d** Gebruik eventueel een kansboom van twee lagen. Twee routes zijn nu geldig: Rh, Bp en Bp, Rh:

$$P(\text{rood hout, blauw plastic}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{90} + \frac{4}{90} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$$

- e** Zie de figuur.



- f** Met terugleggen: $P(RB \text{ of } BR) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{42}{100} = \frac{21}{50}$

$$\text{Zonder terugleggen: } P(RB \text{ of } BR) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

- g** Als je er een rood (blauw) balletje uit haalt, wordt daarna de kans op een blauw (rood) balletje iets groter.

- 14 a** Met drie dobbelstenen kun je maximaal 18 ogen gooien: dit kan alleen door drie keer een 6 te gooien.

17 ogen kun je gooien met de combinaties 5,6,6 en 6,5,6 en 6,6,5.

Er zijn dus 4 routes in de kansboom die hierbij passen. Bedenk dat elk takje in de kansboom een kans van $\frac{1}{6}$ heeft.

$$P(17 \text{ of } 18 \text{ ogen}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$$

- b** 16 ogen gooi je met de combinaties 4,6,6 en 6,4,6 en 6,6,4 maar ook met 6,5,5 en 5,6,5 en 5,5,6.

Dit zijn 6 routes in de kansboom; elk van deze routes heeft een kans van $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

$$P(16 \text{ ogen}) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

c $P(\text{minstens 2 zessen}) = P(2 \text{ zessen}) + P(3 \text{ zessen})$

$P(2 \text{ zessen})$:

De andere dobbelsteen mag dan 1 t/m 5 ogen hebben. Stel dat die andere dobbelsteen 1 is: er zijn 3 routes in de kansboom met twee zessen en een 1 (6,6,1 en 6,1,6 en 1,6,6). Zo zijn er 3 routes voor elk van de 5 mogelijke waarden van de andere dobbelsteen. Elke route heeft wederom een kans van $\frac{1}{216}$.

$$P(2 \text{ zessen}) = 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{216} = \frac{15}{216}$$

$$P(3 \text{ zessen}) = \frac{1}{216}$$

$$\text{Dus } P(\text{minstens 2 zessen}) = \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$$

d 5 rode (geen zes) met 1 wit balletje(wel een zes); drie keer trekking met terugleggen.

15 a Vaasmodel:

2 rode balletjes en 8 witte; 3 keer trekken met terugleggen; bereken de kans dat twee van de drie balletjes rood zijn.

Kansboom:

3 lagen met in de bovenste laag twee takken met kans 0,2 en 0,8; de kansen blijven in alle lagen gelijk.

$$P(\text{twee van de drie keer verhinderd}) = 3 \cdot (0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8) = 0,096$$

b Vaasmodel:

een vaas voor Anne met 3 blauwe (ziek) en 7 groene (gezond) balletjes en een vaas voor de heer Nijdam met 2 rode (verhinderd) en 8 witte balletjes. Trek uit elke vaas een balletje. Bij de uitkomsten blauw rood, blauw wit en groen rood gaat de bijles niet door.

$$P(\text{bijles gaat niet door}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{10} = 0,44$$

Kansboom:

$$P(\text{bijles gaat niet door}) = 0,3 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,44$$

16 a Mogelijk hebben beide clubs in het verleden bijvoorbeeld 6 keer bij Arsenal en ook 6 keer bij Juventus tegen elkaar gespeeld. Bij de thuiswedstrijden heeft Arsenal er 3 gewonnen en 2 verloren. Bij de uitwedstrijden heeft Arsenal er 2 gewonnen en 2 verloren.

b Kansboom met twee lagen, één voor iedere wedstrijd.

Bovenste laag heeft drie takken: winst voor Arsenal (kans $\frac{1}{2}$), winst voor Juventus (kans $\frac{1}{3}$) en gelijkspel (kans $\frac{1}{6}$).

In de onderste laag hebben alle drie de takken kans $\frac{1}{3}$.

c In de kansboom zijn dit de routes AJ en JA.

$$P(\text{ieder wint een wedstrijd}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$$

17 a Een kansboom met vier lagen, voor iedere inzittende een laag. Iedere keer splitsen er 2 takken: inzittende is wel kleurenblind (kans $\frac{1}{12}$) of niet kleurenblind (kans $\frac{11}{12}$).

b Vanuit de kansboom:

Je ziet 6 routes met 2 wel- en 2 niet-kleurenblinde mannen; alle zes hebben deze routes een kans $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} = \frac{121}{20736}$.

$$P(2 \text{ inzittenden zijn kleurenblind}) = 6 \cdot \frac{121}{20736} = \frac{726}{20736} = \frac{121}{3456} \approx 3,5\%.$$

Zonder kansboom, maar met combinatoriek:

In totaal zijn er $\binom{4}{2} = 6$ manieren om een groepje van 2 uit een totaal van 4 te kiezen en elk van deze manieren heeft dezelfde kans. Verder als boven.

18 a Redenering:

Er zijn evenveel zakjes met 9 rode en 7 gele als er zakjes zijn met 7 rode en 9 gele: over het totaal gezien zijn er dus evenveel rode als gele gomballen in omloop.

De bovenste laag van de kansboom heeft 3 takken: voor ieder soort zakje een tak met kansen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{4}$.

De tweede laag uit telkens 2 takken: voor rode en voor gele gomballen.

Zo ontstaan 3 routes om een rode gombal te kiezen. De bijbehorende kans:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{1}{2}$$

b Teken eventueel een kansboom van 3 lagen diep; het betreft hier een gebeurtenis zonder terugleggen.

Er is maar 1 route met 3 gele gomballen.

$$P(3 \text{ gele gomballen}) = \frac{7}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = 0,0625 = 6,25\%.$$

c Eerste geval:

$$P(3 \text{ gele gomballen}) = \frac{7}{16} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{210}{2912} \approx 7,2\%.$$

Tweede geval:

$$P(3 \text{ gele gomballen}) = \frac{7}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{13} = \frac{210}{3120} \approx 6,7\%.$$

5.2 Kansen optellen/afrekken

V1 a $\frac{1}{52}$

b Zo'n kaart bestaat niet.

c Een kwart van een spel kaarten bestaat uit hartenkaarten:

$$P(X = \text{harten}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

d $P(X \neq \text{aas})$

e Harten en ruiten vormen samen de helft van een spel kaarten:

$$P(X = \text{harten of } X = \text{ruiten})$$

f $P(X = \text{harten of } X = \text{boer}) =$

$$P(X = \text{harten}) + P(X = \text{boer maar geen hartenboer}) = \frac{13}{52} + \frac{3}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

g $P(X = \text{harten of } X = \text{plaatje}) =$

$$P(X = \text{harten}) + P(X = \text{plaatje maar geen hartenplaatje}) = \frac{13}{52} + \frac{3 \times 4}{52} = \frac{25}{52}$$

1 a $P(X = \text{plaatje}) = \frac{4 \cdot 4}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

b $P(X \neq \text{plaatje}) = \frac{4 \cdot 9}{52} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$

c $P(X = \text{harten}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

d $P(X = \text{hartenplaatje}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

e $P(X = \text{harten of } X = \text{heer}) =$

$$P(X = \text{harten}) + P(X = \text{heer maar geen hartenheer}) = \frac{13}{52} + \frac{3}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

f Die gebeurtenissen sluiten elkaar niet wederzijds uit.

g In totaal zitten er nu niet 13 maar 12 hartenkaarten en 2 niet-harten-heren in het spel en is het totaal 50 i.p.v. 52.

$$P(X = \text{harten of heer}) = \frac{12}{50} + \frac{2}{50} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

2 A C

3 a Deze twee gebeurtenissen sluiten elkaar uit.

$$P(\text{harten of schoppen}) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

b Deze twee gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: er is 1 kaart die zowel harten als vrouw is.

$$P(\text{harten of vrouw}) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

c Deze twee gebeurtenissen sluiten elkaar uit.

$$P(\text{even of plaatje}) = \frac{4 \cdot 5}{52} + \frac{4 \cdot 4}{52} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

d Deze twee gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: er zijn 5 kaarten die zowel even als ruit zijn.

$$P(\text{even of ruit}) = \frac{4 \cdot 5}{52} + \frac{13}{52} - \frac{5}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

4 Al deze gebeurtenissen sluiten elkaar wederzijds uit, dus:

$$P(6 \text{ of meer doelpunten}) = \frac{19+10+3+2}{306} = \frac{1}{9}$$

5 a Dit betreft de nummers 10, 20, ..., 90.

$$P(0) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

b Er is maar één briefje met zowel een 0 als een 2 en dat is het briefje met nummer 20. De kans is dus $\frac{1}{90}$.

- c Bedenk dat je $P(0)$ bij a berekend hebt en $P(2)$ in het voorbeeld.

Deze twee gebeurtenissen sluiten elkaar *niet* uit: er is 1 briefje dat zowel 0 als 2 bevat (briefje met 20).

$$P(0 \text{ of } 2) = \frac{9}{90} + \frac{18}{90} - \frac{1}{90} = \frac{26}{90} = \frac{13}{45}$$

- d $P(\text{geen } 0 \text{ en geen } 2)$ met complementregel:

Uit c ken je al de kans op een briefje met een 0 of met een 2 en elk ander briefje is een briefje waarop geen 0 en geen 2 staat.

$$P(\text{geen } 0 \text{ en geen } 2) = 1 - P(0 \text{ of } 2) = 1 - \frac{13}{45} = \frac{32}{45}$$

- 6 a Een rooster met 6 rijen voor de 6 waarden van de ene dobbelsteen en 6 kolommen voor de 6 waarden van de andere dobbelsteen: in totaal $6 \cdot 6 = 36$ mogelijkheden.

	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

- b In totaal zijn er $6 \cdot 6 = 36$ mogelijke uitkomsten. In 6 ervan zit een rode met 5 ogen.

$$P(R = 5) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- c In totaal zijn er $6 \cdot 6 = 36$ mogelijke uitkomsten. In 6 ervan zit een blauwe met 4 ogen.

$$P(B = 4) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- d Er is maar één worp waarbij de rode 5 ogen heeft en de blauwe 4 ogen.

$$P(R = 5 \text{ en } B = 4) = \frac{1}{36}$$

- e Nee, want de kans op $R = 5$ en $B = 4$ is niet nul (zie d).

- f Deze gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: zie je antwoord bij e.

$$P(R = 5 \text{ of } B = 4) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

- 7 a $P(3^{\text{e}} \text{ worp is eerste } 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0,116$

- b $P(8^{\text{e}} \text{ worp is eerste } 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \frac{1}{6} = \frac{78125}{1679616} \approx 0,047$

- c Je kunt hier de complementregel gebruiken:

$$P(\text{max. 10 keer werpen voor een } 6) =$$

$$1 - P(10 \text{ keer geen } 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,838$$

- d Anders moet je 10 afzonderlijke kansen uitrekenen en die alle tien bij elkaar optellen: veel werk.

- 8 A D

- 9 a Roos R, tulp T, kleuren w, g, p.

In totaal zitten er 45 bloemen in de emmer, waarvan 25 rozen:

$$P(R) = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

- b Er zitten alleen paarse tulpen in de emmer en dat zijn er 5:

$$P(p) = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

- c Deze gebeurtenis is complementair aan de gebeurtenis uit b.

$$P(\text{geen } p) = 1 - P(p) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

- d** Er zitten zowel gele tulpen als gele rozen in de emmer: de gebeurtenissen 'gele tulp' en 'gele roos' sluiten elkaar uit.

$$P(g) = P(gT \text{ of } gR) =$$

$$P(gT) + P(gR) = \frac{5}{45} + \frac{13}{45} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

- e** De gebeurtenissen 'gele bloem' en 'tulp' overlappen elkaar deels: ze sluiten elkaar niet uit.

< not enough right fences : 1 >

$$\frac{18}{45} + \frac{20}{45} - \frac{5}{45} = \frac{33}{45} = \frac{11}{15}$$

- 10 a** Rond ro, vierkant vk, rechthoek rh, driehoek dh, kleuren r, g, b.

Deze gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: er zijn ook gele vierkantjes.

Er zijn 2 grote en 2 kleine gele stukjes per vorm: in totaal zijn er $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ gele stukjes en er zijn 12 vierkante stukjes.

4 stukjes zijn geel en vierkant.

$$P(g \text{ of } vk) = P(g) + P(vk) - P(g \text{ en } vk) =$$

$$\frac{16}{48} + \frac{12}{48} - \frac{4}{48} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

- b** Deze gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: er zijn rode ronde, rode rechthoekige en rode driehoekige stukjes.

Totaal aantal rode stukjes is $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$.

Het totaal aantal niet-vierkante stukjes is $48 - 12 = 36$.

Het aantal rode niet-vierkante stukjes is $16 - 2 \cdot 2 = 12$.

$$P(r \text{ of niet } vk) = P(r) + P(\text{niet } vk) - P(r \text{ en niet } vk) =$$

$$\frac{16}{48} + \frac{36}{48} - \frac{12}{48} = \frac{40}{48} = \frac{5}{6}$$

- c** Deze gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: er zijn kleine ronde, kleine rechthoekige en kleine driehoekige stukjes.

Totaal aantal kleine stukjes is $6 \cdot 4 = 24$.

Totaal aantal niet-vierkante stukjes is $48 - 12 = 36$.

Totaal aantal kleine niet-vierkante stukjes is $6 \cdot 3 = 18$.

$$P(\text{klein of geen } vk) =$$

$$P(\text{klein}) + P(\text{niet } vk) - P(\text{klein en niet } vk) = \frac{24}{48} + \frac{36}{48} - \frac{18}{48} = \frac{42}{48} = \frac{7}{8}$$

- d** Deze gebeurtenis kun je uitsplitsen tussen 'blauw of driehoekje' of 'geel of driehoekje' maar deze gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: ze delen beide de gebeurtenis 'driehoekje'.

$$P(b \text{ of } g \text{ of } dh) = P(b \text{ of } dh) + P(g \text{ of } dh) - P(dh)$$

Deze eerste twee kansen zijn gelijk aan de kans uit a en $P(dh) = \frac{12}{48}$.

$$P(b \text{ of } g \text{ of } dh) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{12}{48} = \frac{3}{4}$$

of

$$P(b \text{ of } g \text{ of } dh) = P(b \text{ of } g) + P(dh) - P(bdh, gdh) =$$

$$\frac{32}{48} + \frac{12}{48} - \frac{8}{48} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

- 11 a** Je kunt alleen 12 ogen werpen als je met twee dobbelstenen hebt gegooid en dat kan alleen als je eerst munt hebt gegooid.

Je kunt maar op 1 manier 12 ogen gooien met twee dobbelstenen:

$$P(12 \text{ ogen met twee dobbelstenen}) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{munt}) = \frac{1}{2}$$

$$P(12 \text{ ogen}) = P(\text{munt}) \cdot P(12 \text{ ogen met twee dobbelstenen}) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{72}$$

- b** Je kunt alleen 7 ogen werpen als je met twee dobbelstenen hebt gegooid en dat kan alleen als je eerst munt hebt gegooid.

Je kunt op 6 manieren 7 ogen gooien met twee dobbelstenen (6 - 1, 1 - 6, 5 - 2, 2 - 5, 4 - 3, 3 - 4):

$$P(7 \text{ ogen met twee dobbelstenen}) = \frac{6}{36}$$

$$P(\text{munt}) = \frac{1}{2}$$

$$P(7 \text{ ogen}) = P(\text{munt}) \cdot P(7 \text{ ogen met twee dobbelstenen}) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{36} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}$$

- c** Zie ook a en b:

$$P(7 \text{ of } 12 \text{ ogen}) = P(\text{munt}) \cdot (P(7 \text{ ogen met twee dobbelstenen}) + P(12 \text{ ogen met twee dobbelstenen})) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{36} + \frac{1}{36} \right) = \frac{7}{72}$$

- d** Zie ook bij b.

$$P(\text{meer of minder dan 7 ogen}) = P(\text{geen 7 ogen}) = 1 - P(7 \text{ ogen}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

- e** Je kunt zowel met één als met twee dobbelstenen 6 ogen gooien:

$$P(6 \text{ ogen}) =$$

$$P(\text{kop en 6 ogen met 1 dobbelsteen}) + P(\text{munt en 6 ogen met twee dobbelstenen})$$

Met één dobbelsteen 6 ogen gooien, kan slechts op 1 van de 6 manieren.

Met twee dobbelstenen 6 ogen gooien, kan op 5 van de 36 manieren (5 - 1, 1 - 5, 4 - 2, 2 - 4, 3 - 3).

$$P(6 \text{ ogen}) = P(\text{kop}) \cdot P(6 \text{ ogen met 1 dobbelsteen}) +$$

$$P(\text{munt}) \cdot P(6 \text{ ogen met twee dobbelstenen}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{36} = \frac{11}{72}$$

- 12 a** $P(\text{leerling met hoofddoek}) = P(\text{meisje en hoofddoek}) =$

$$P(\text{meisje}) \cdot P(\text{meisje met hoofddoek}) = \frac{52}{100} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{25} = 4\%$$

$$P(\text{leerling met petje}) = P(\text{jongen en petje}) = P(\text{jongen}) \cdot P(\text{jongen met petje}) =$$

$$\frac{48}{100} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{100} = 3\%$$

- b** $P(\text{leerling is jongen zonder pet}) = P(\text{jongen en geen pet}) =$

$$P(\text{jongen}) \cdot P(\text{jongen zonder pet}) = \frac{48}{100} \cdot \frac{15}{16} = \frac{45}{100} = 0,45$$

- c** De gebeurtenissen 'leerling is meisje' en 'leerling draagt iets op het hoofd' zijn complementair aan de gebeurtenis 'jongen zonder petje'.

$$P(\text{jongen zonder petje}) = 0,45$$

$$P(\text{leerling is meisje of draagt iets op het hoofd}) = 1 - 0,45 = 0,55$$

of

$$P(\text{meisje of hoofdbedekking}) =$$

$$P(\text{meisje}) + P(\text{iets op hoofd}) - P(\text{meisje met iets op hoofd}) = 0,52 + 0,07 - 0,04 = 0,55$$

- d** $P(\text{jongen of niets op hoofd}) =$

$$P(\text{jongen}) + P(\text{niets op hoofd}) - P(\text{jongen die niets op hoofd heeft}) = 0,48 + 0,93 - 0,45 = 0,96$$

of

De gebeurtenissen 'leerling is jongen' en 'leerling draagt niets op het hoofd' zijn afhankelijk van elkaar (ze sluiten elkaar niet uit): de jongens zonder petjes horen bij beide gebeurtenissen.

$P(\text{leerling is jongen of draagt niets op het hoofd}) =$

$P(\text{jongen}) + P(\text{leerling draagt niets op het hoofd}) - P(\text{jongen zonder petje}) =$

$P(\text{jongen}) + P(\text{meisje zonder hoofddoek}) + P(\text{jongen zonder petje}) -$

$P(\text{jongen zonder petje}) =$

$$P(\text{jongen}) + P(\text{meisje zonder hoofddoek}) = \frac{48}{100} + \left(\frac{52}{100} \cdot \frac{12}{13} \right) = \frac{96}{100} = 0,96$$

e De leerling is een meisje met een hoofddoek.

13 a Er zijn dertien leerlingen die maar één van deze drie vakken hebben, dus: $5 + (8 - x) + (4 - x) = 13$
Dit levert op: $x = 2$.

b $\frac{16}{26} = \frac{8}{13}$

c $\frac{2}{26} = \frac{1}{13}$

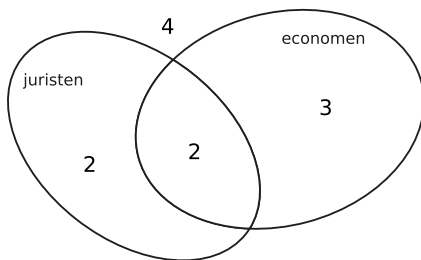
d $\frac{3}{26}$

e $\frac{6}{26} = \frac{3}{13}$

f $\frac{24}{26} = \frac{12}{13}$

14 a Zie de figuur.

Raad van commissarissen



Vier leden zijn geen econoom en ook geen jurist.

b $\frac{2}{11}$

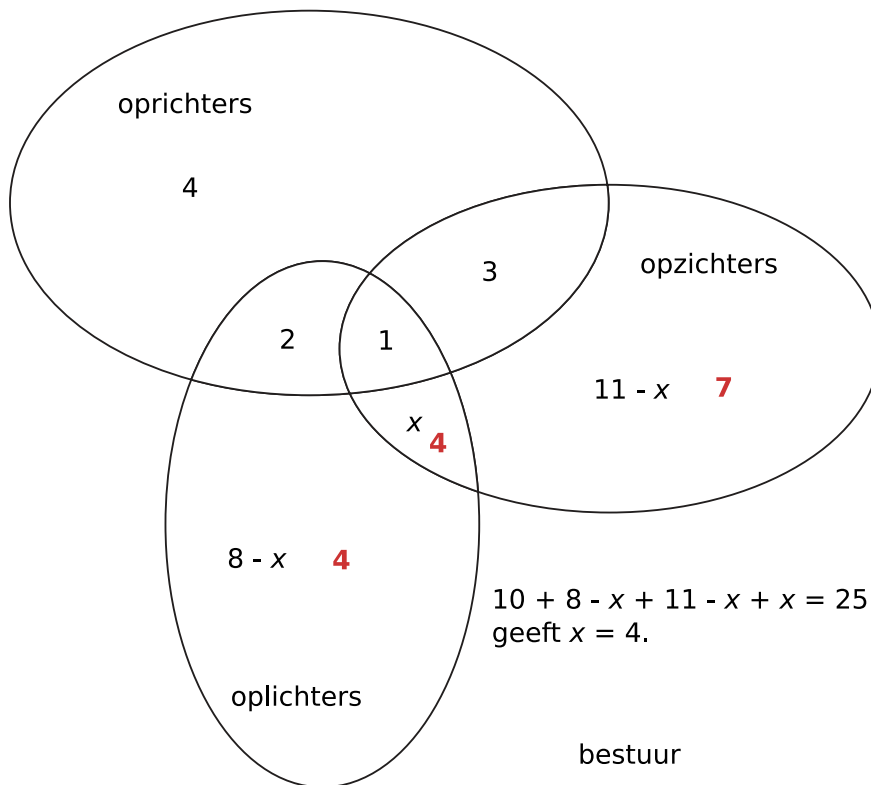
c Hier betreft het de 7 personen die econoom, jurist of econoom en jurist tegelijk zijn. De kans is $\frac{7}{11}$.

d In de kansboom voor deze situatie zou elke laag een maand zijn.

Het gaat hier om een situatie met terugleggen: elke maand is voor iedereen de kans weer hetzelfde (ze loten).

$$P(\text{eerste maand en tweede maand een econoom of jurist}) = \frac{7}{11} \cdot \frac{7}{11} = \frac{49}{121}$$

15 a De gegeven getallen kun je alvast in het diagram zetten, zoals in dit tussenresultaat (bedenk dat door de twee 'misschiens' het aantal van 4 eentje lager wordt en het aantal van 3 ook).



Daarna kun je verder rekenen: alle vakjes bij elkaar zijn samen 25 en je weet dat er in totaal 15 opZ's zijn, 11 opL's en 10 opR's. Daarmee bereken je dat het vraagteken uit 4 personen bestaat.

- b** Complementregel: iedereen behalve opLichters.

$$P(\text{keurig bestuurder}) = P(\text{geen opL}) = \frac{25-11}{25} = \frac{14}{25} = 0,56$$

- c** $P(\text{opR}) = \frac{10}{25} = 0,40$

$$P(\text{opL}) = \frac{11}{25} = 0,44$$

$$P(\text{opR en opL}) = \frac{2+1}{25} = 0,12$$

(zie Venndiagram: de twee door opL en opR gedeelde vakjes)

- d** opR of opL betekent in het venndiagram: alle vakjes behalve het vakje met alleen opZ.

Complementregels dus: alles min alleen opZ en dat is gelijk aan $25 - 7 = 18$ van de 25 personen.

$$P(\text{opR of opL}) = \frac{18}{25} = 0,72$$

- e** Bedenk: 'de kans dat hij oprichter of oplichter is', heb je al uitgerekend in vraag d. en die was 0,72.

De 'kans dat iemand opzichter is', is gelijk aan $\frac{15}{25} = 0,60$. Samen is dat 1,32 (132%).

Als je bovenstaande kansen optelt, dan tel je eigenlijk in het Venndiagram de 3 vakjes die door opzichters gedeeld wordt met oprichters en oplichters dubbel mee. In die 3 vakjes staan $3 + 1 + 4 = 8$ personen: dat zijn de personen die opzichter zijn en ook nog eens oplichter of oprichter. De kans op zo'n persoon is $\frac{8}{25} = 0,32$.

- 16 a** Er zijn 8 ruitenkaarten en er zijn 16 kaarten met plaatjes.

Maar er zijn ook 4 ruitenplaatjes.

Somregel:

$$P(\text{ruiten of een plaatje}) = \frac{8}{32} + \frac{16}{32} - \frac{4}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

- b** Er zijn 8 hartenkaarten en er zijn 4 kaarten met een 9 en 4 kaarten met een 10.

Maar er is ook een harten 9 en een harten 10.

Somregel:

$$P(\text{harten of een 9 of een 10}) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} - \frac{1}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$

- c** Er zijn 4 kaarten met een 9 en 4 kaarten met een 10 en er zijn 24 geen-hartenkaarten.
Maar er zijn ook 3 negens zonder harten en 3 tienens zonder harten.

Somregel:

$$P(9 \text{ of } 10 \text{ of geen harten}) = \frac{4}{32} + \frac{4}{32} + \frac{24}{32} - \frac{3}{32} - \frac{3}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$$

- 17 a** NIET rood: gebruik de complementregel.

$$P(\text{een balletje dat NIET rood is}) = 1 - P(\text{een balletje dat WEL rood is}) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Alternatieve denkwijze:

het betreft een blauw of een geel balletje en daar zijn er 6 van, op een totaal van 9 balletjes.

$$P(\text{een balletje dat niet rood is}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

- b** Er zijn 3 rode balletjes en er zijn 3 balletjes met nummer 2.

Maar er is ook 1 rood balletje met nummer 2.

Somregel:

$$P(\text{balletje is rood of heeft nummer 2}) = \frac{3}{9} + \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

- c** niet OF niet: de complementregel is dan handig.

$$P(\text{niet blauw OF niet nummer 3}) = 1 - P(\text{blauw EN nummer 3}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

5.3 Kansen vermenigvuldigen

- V1 a** Dit is een situatie zonder terugleggen. Hier hoort een kansboom bij met twee lagen. 4 van de 52 kaarten zijn aas. $< \text{not enough right fences} : 1 > \text{azen} = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221}$
- b** Deze gebeurtenissen sluiten elkaar NIET uit: 13 van de 52 kaarten zijn harten; 4 van de 52 zijn aas en 1 van de 52 is hartenaas. Splits deze kans dus uit:

$$P(\text{een harten en een aas}) = \frac{1}{52} \cdot \frac{51}{51} + \frac{3}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{29}{884}$$
- 1 a** Er wordt niet teruggelegd, dus bij de tweede trekking zijn er minder kaarten in het spel.
- b** $P(\text{eerste harten en tweede schoppen}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{13}{204}$
- c** Een harten- en een schoppenkaart is eerst een harten- en dan een schoppenkaart of eerst een schoppen- en dan een hartenkaart.

$$P(\text{een harten en een schoppen}) = 2 \cdot \frac{13}{204} = \frac{13}{102}$$

 NB $P(\text{eerste harten en tweede schoppen})$ ken je al uit b.
- d** De kans op een gebeurtenis als deze kans afhankelijk is van een vorige gebeurtenis.
- e** Op het moment dat we de tweede kaart trekken en dus de eerste al getrokken hebben, zitten er in totaal nog 51 kaarten in het spel waarvan 13 harten.

$$P(\text{tweede is schoppen gegeven dat eerste is harten}) = \frac{13}{51}$$
- f** Een vrouw en een heer kan op twee manieren, namelijk eerst een vrouw en dan een heer of eerst een heer en dan een vrouw.

$$P(\text{een vrouw en een heer}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} + \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{8}{663}$$
- 2 a** Gebruik de productregel voor onafhankelijke kansen:

$$P(B \text{ en } B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{25}$$
- b** $P(R \text{ en } R) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{25}$
- c** Hier wordt steeds teruggelegd.
- 3 a** $P(B \text{ en } B) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$
- b** $P(R \text{ en } R) = P(R_1) \cdot P(R_2|R_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$
- c** Nadat de eerste blauwe gekozen is, zijn er nog 3 blauwe over van de in totaal dan 9 balletjes.

$$P(B_2|B_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$
- d** Het zijn allebei knikkers van de tweede trekking: de ene gebeurtenis kan daarom nooit vooraf gaan aan de andere.
- 4 a** Dit is een situatie zonder terugleggen. De bijbehorende kansboom bestaat maar liefst uit 32 lagen en dus krijgen we veel vermenigvuldigingen volgens de productregel: $P(32 \text{ A's}) = \frac{200}{800} \cdot \frac{199}{799} \cdot \frac{198}{798} \cdot \dots \cdot \frac{169}{769}$
 Dit kan een stuk slimmer door gebruik te maken van combinatoriek:
 Het aantal gunstige mogelijkheden is $\binom{200}{32}$ en het totaal aantal mogelijkheden is $\binom{800}{32}$.
- $$P(32 \text{ A's}) = \frac{\binom{200}{32}}{\binom{800}{32}} \approx 7,4 \cdot 10^{-21} \approx 0.$$
- b** Ook dit kan worden uitgerekend met combinaties, alleen nu kies je uit drie verschillende groepen:

$$P(10 \text{ A's en } 15 \text{ C's en } 7 \text{ D's}) = \frac{\binom{200}{10} \cdot \binom{200}{15} \cdot \binom{200}{7}}{\binom{800}{32}} \approx 4,7 \cdot 10^{-7}$$

5 $P(B_2) = P(R_1 \text{ en } B_2) + P(B_1 \text{ en } B_2) =$

$$P(B_2|R_1) + P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{5}$$

Of bedenk dat er voor de tweede knikker twee mogelijkheden zijn: rood of blauw. De kans op blauw is dus: $P(B_2) = 1 - P(R_2) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

6 a Gevraagd: $P(B_1|B_2)$ volgens het voorbeeld is deze kans gelijk aan: $\frac{P(B_1 \text{ en } B_2)}{P(B_2)}$

$$P(B_1 \text{ en } B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$$

$$P(B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{36}{90}$$

$$\text{Dus: } P(B_1|B_2) = \frac{\frac{12}{90}}{\frac{36}{90}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

b $P(B_1|R_2) = \frac{P(B_1 \text{ en } R_2)}{P(R_2)}$

$$P(B_1 \text{ en } R_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90}$$

$$P(R_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{54}{90}$$

$$\text{Dus: } P(B_1|R_2) = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}$$

7 a Situatie met terugleggen dus afhankelijke kansen.

$$P(3 \text{ rode}) = \frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{5}{18} = \frac{7}{228}$$

b Na twee rode knikkers zijn er nog 18 knikkers in de vaas waarvan 8 blauw.

$$P(B_3|R_1 \text{ en } R_2) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

c Je kunt dit nu op twee manieren doen. De tot nu toe gebruikte manier is:

$$P(B_3 \text{ en } R_1 \text{ en } R_2) = P(R_1 R_2 B_3) = \frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{14}{285}$$

Of: gebruik de productregel voor afhankelijke kansen en de al berekende kans in b:

$$P(B_3 \text{ en } R_1 \text{ en } R_2) = P(R_1 R_2) \cdot P(B_3|R_1 R_2) = \frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{4}{9} = \frac{14}{285}$$

d In de bijbehorende kansboom kun je drie routes vinden waarbij twee knikkers rood zijn en de ander wit. Elk van deze routes heeft bijbehorende kans van $\frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{5}{18} = \frac{210}{6840}$.

Er zijn ook drie routes met twee rode knikkers en een blauwe. Ieder van deze routes heeft bijbehorende kans van $\frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{336}{6840}$.

$$P(\text{twee rode}) = 3 \cdot \frac{210}{6840} + 3 \cdot \frac{336}{6840} = \frac{91}{380}$$

e Er zijn 6 routes in de bijbehorende kansboom die hieraan voldoen:

$$P(\text{drie verschillende kleuren}) =$$

$$P(RWB) + P(RBW) + P(WRB) + P(WBR) + P(BRW) + P(BWR) =$$

$$6 \cdot P(RWB) = 6 \cdot \frac{7}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{1680}{6840} = \frac{14}{57}$$

8 a Dit is een voorwaardelijke kans: $P(\text{heeft tuberculose} | \text{geeft reactie op test})$. In totaal geven 197 mensen een reactie op de test; daarvan hebben er 98 ook echt tuberculose.

$$P(\text{heeft tuberculose} | \text{geeft reactie op test}) = \frac{98}{197} \approx 0,4975$$

- b** Dit is een voorwaardelijke kans: $P(\text{heeft tuberculose} | \text{geeft geen reactie op test})$. In totaal geven 9803 mensen geen reactie op de test; daarvan hebben er 2 toch tuberculose.

$$P(\text{heeft tuberculose} | \text{geeft geen reactie op test}) = \frac{2}{9803} \approx 0,0002$$

- 9 a** Hier hoort een kansboom bij van 3 lagen diep; situatie zonder terugleggen.

$$P(\text{vierde van de zeven sokken hoort bij allereerste}) = \frac{8}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{7}$$

- b** Een kansboom van twee lagen volstaat nu.

$$P(\text{tweede of derde sok hoort bij allereerste}) = \frac{8}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{8}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

- 10 a** Maak eventueel een kansboom met twee lagen: bovenste laag met de bloedgroepen, onderste laag per bloedgroep de twee Rhesus-factoren.

$$P(A \text{ en Rh-positief}) = \frac{40}{100} \cdot \frac{85}{100} = 0,34 = 34\%$$

- b** Maak eventueel een kansboom met twee lagen: bovenste laag met de bloedgroepen, onderste laag per bloedgroep de twee Rhesus-factoren.

$$P(O \text{ en Rh-negatief}) = \frac{45}{100} \cdot \frac{15}{100} = 0,0675 = 6,75\%$$

- c** $P(\text{Rh-negatief is en niet bloedgroep O}) = \frac{15}{100} \cdot \frac{100-45}{100} = 0,0825 = 8,25\%$

- d** Je kunt de acht kansen allemaal uitrekenen en dan de kleinste van de acht kiezen (0,75%).

Je kunt ook redeneren:

Bloedgroep AB is de meest zeldzame bloedgroep en Rh-negatief is de meest zeldzame Rhesusfactor, dus hun combinatie zal de zeldzaamste combinatie zijn.

- 11 a** $P(\text{vrouw}) = \frac{55}{116} \approx 0,474 \approx 47,4\%$

- b** $P(\text{vrouw en een tatoeage}) = \frac{9}{116} \approx 0,078 \approx 7,8\%$

- c** $P(\text{piercing}) = \frac{18}{116} = \frac{9}{58}$

- d** $P(V \text{ man en } V \text{ piercing}) = \frac{6}{116} = \frac{3}{58}$

- e** $P(V \text{ piercing} | V \text{ man}) = \frac{P(V \text{ man en } V \text{ piercing})}{P(V \text{ man})} = \frac{\frac{6}{116}}{\frac{61}{116}} = \frac{6}{61}$

- 12 a** Gebruik eventueel een kansboom met vier lagen voor elke worp; de situatie is met terugleggen.

$$P(\text{minstens 1 zes}) = 1 - P(\text{geen zes}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,518 = 51,8\%$$

Dat is groter dan 50%.

- b** $P(\text{minstens 1 keer dubbel 6}) = 1 - P(\text{geen dubbel}) =$

$$1 - \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}\right)^{24} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491 = 49,1\%$$

Dit is kleiner dan 50%.

- c** Gebruik de grafische rekenmachine om te berekenen wanneer $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \geq 0,5$.

Of probeer een aantal waarden uit.

Je vindt dat deze kans bij $n = 25$ voor het eerste groter is dan 50%.

- 13 a** $P(1234) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{5040} = \frac{1}{210}$

- b** $P(4321) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{24}{5040} = \frac{1}{210}$

- c** $P(3344) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{72}{5040} = \frac{3}{210} = \frac{1}{70}$

- d** Je hebt dan telkens van alle vier de cijfers één kaartje nodig.

Rekenkundig gezien: je krijgt als teller altijd een vermenigvuldiging van de getallen 1, 2, 3 en 4 en als noemer krijg je altijd de vermenigvuldiging $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

- e Schrijf de algemene productregel om en dan krijg je:

$$P(T = 34|E = 12) = \frac{P(T=34 \text{ en } E=12)}{P(E=12)}$$

$$P(T = 34 \text{ en } E = 12) = P(1234) = \frac{1}{210}$$

$$P(E = 12) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{90}$$

$$P(T = 34|E = 12) = \frac{\frac{1}{210}}{\frac{2}{90}} = \frac{3}{14}$$

Op eenzelfde manier bereken je:

$$P(T = 12|E = 34) = \frac{P(T=12 \text{ en } E=34)}{P(E=34)} = \frac{\frac{1}{210}}{\frac{3 \cdot 4}{9 \cdot 10}} = \frac{1}{28}$$

f $\frac{1}{10}$

- g Zie ook a en b en bedenk dat er maar één gemerkte kaart is. Die kans is ook $\frac{1}{10}$.

h $P(\text{derde gemerkt}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{7} = \frac{1}{10}$

i $P(\text{getal begint met een 3}) = \frac{3}{10}$

$$P(\text{getal eindigt met een 3}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{10}$$

Dit kun je zien door te bedenken: voor het eerste cijfer heb je 9 mogelijkheden (één 3 moet je overhouden voor het vierde cijfer) en dus voor het tweede en derde cijfer nog 8 en 7 mogelijkheden. Als je dit niet ziet, kun je ook een kansboom maken (vier lagen met telkens de keuze 3 of niet 3) en dan zie je dat er zeven routes (met verschillende kansen) mogelijk zijn die als laatste cijfer een 3 opleveren.

$$P(\text{start en eindigt met een 3}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{332}{5040} = \frac{1}{15}$$

Ook voor deze kans kun je de kansboom gebruiken en de juiste routes zoeken.

- 14 Maak een kruistabel. Ga uit van 1000 personen en maak met de gegevens een kruistabel:

	medicijn A	medicijn B	totaal
genezen	855	75	930
niet genezen	45	25	70
totaal	900	100	1000

Het gaat om de 930 genezen personen. 75 hebben medicijn B gekregen.

$$P(\text{medicijn B}) = \frac{75}{930} \approx 0,081$$

of

Maak een kansboom: bovenste laag geeft de kansen op medicijn A en B, onderste laag geeft de kansen op wel of geen genezing.

Je kunt als volgt redeneren en rekenen:

Ga uit van 1000 zieken.

$$\frac{90}{100} \cdot \frac{95}{100} \cdot 1000 = 855 \text{ zieken genezen door medicijn A.}$$

$$\frac{10}{100} \cdot 0,75 \cdot 1000 = 75 \text{ zieken genezen door medicijn B.}$$

$$P(\text{genezen persoon heeft medicijn B gekregen}) = \frac{75}{855+75} = \frac{5}{62} \approx 0,081$$

of

Je kunt ook rekenen met de algemene productregel voor onafhankelijke kansen:

$P(\text{genezen persoon heeft medicijn B gekregen})$ is een voorwaardelijke kans: $P(B|\text{genezen})$

In woorden: de kans op medicijn B als je weet dat de persoon al genezen is.

Productregel:

$$P(B \text{ en genezen}) = P(\text{genezen}) \cdot P(B|\text{genezen}) \text{ dus } P(B|\text{genezen}) = \frac{P(B \text{ en genezen})}{P(\text{genezen})}$$

Reken zelf na dat je hiermee exact dezelfde kans berekent.

15 a De kans dat de winnaar meteen de juiste deur kiest, is $\frac{1}{3}$. Hij wisselt niet, dus die kans blijft $\frac{1}{3}$.

b Er zijn nu drie mogelijkheden:

- Je kiest de deur waar de prijs achter zit. De spelleider opent een lege deur. Jij wisselt en verliest.
- Je kiest de eerste deur waar geen prijs in zit. De spelleider opent de andere lege deur. Jij wisselt en wint.
- Je kiest de tweede deur waar geen prijs in zit. De spelleider opent de andere lege deur. Jij wisselt en wint.

Drie mogelijke situaties met een winkans van $\frac{2}{3}$.

16 Gebruikt pep is P en twee mogelijkheden $+$ en $-$.

De gevraagde kans is een voorwaardelijke kans: $P(P | P+)$.

Maak een kruistabel met de gegevens:

pep-test	gebruiker	geen gebruiker	
positief	9	9	18
negatief	1	81	82
	10	90	100

De kans dat een positief geteste deelnemer ook gebruiker is, is dus $\frac{9}{18} = 50\%$.

Je kunt de kans ook berekenen uit $P(P \text{ en } P+)$ en $P(P+)$. Het handigste is dan om een kansboom van twee lagen te maken. De bovenste laag bestaat uit twee takken: 'gebruiker' en 'geen gebruiker'. De onderste laag splitst ook uit in tweeën: 'test positief' en 'test negatief'.

$$P(P \text{ en } P+) = P(P) \cdot P(+) =$$

$$\left(\frac{10}{100}\right) \cdot \left(\frac{90}{100}\right) = \frac{9}{100}$$

$$P(P+) =$$

$$P(P \text{ en } P+) + P(\text{niet } P) \cdot P(P+) =$$

$$\frac{9}{100} + \left(\frac{90}{100} \cdot \frac{10}{100}\right) = \frac{18}{100}$$

$$\text{De gevraagde kans } P(P | P+) = \frac{P(P \text{ en } P+)}{P(P+)} =$$

$$\frac{\frac{9}{100}}{\frac{18}{100}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} = 50\%$$

17 a Ofwel slim indelen: 200 van de 400 witte balletjes zijn van plastic, dus de kans is $\frac{200}{400} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ofwel de productregel gebruiken: } P(B \text{ is wit en } B \text{ is van plastic}) = P(B \text{ is wit}) \cdot P(B \text{ is van plastic}) = \left(\frac{400}{1200}\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot 200}{1200}\right) = \frac{1}{6}.$$

b Schrijf de algemene productregel om en dan krijg je voor $P(B \text{ is rood} | B \text{ is van hout})$:

$$P(B \text{ is rood} | B \text{ is van hout}) = \frac{P(B \text{ is van hout EN } B \text{ is rood})}{P(B \text{ is van hout})} = \frac{\frac{200}{1200}}{\frac{3 \cdot 200}{1200}} = \frac{1}{3}$$

Zo ook met $P(B \text{ is van hout} | B \text{ is rood})$

$$P(B \text{ is van hout} \mid B \text{ is rood}) = \frac{P(B \text{ is rood EN } B \text{ is van hout})}{P(B \text{ is rood})} = \frac{\frac{200}{1200}}{\frac{500}{1200}} = \frac{2}{5}$$

- c** Gebruik hier de somregel voor afhankelijke kansen:

$$P(B \text{ is rood of } B \text{ is van hout}) = P(B \text{ is rood}) + P(B \text{ is van hout}) - P(B \text{ is rood EN } B \text{ is van hout}) = \frac{500}{1200} + \frac{3 \cdot 200}{1200} - \frac{200}{1200} = \frac{900}{1200} = \frac{3}{4}.$$

18 a $P(\text{leerling rookt}) = \frac{239}{1200} \approx 0,1992$

b $P(\text{meisje dat rookt}) = P(\text{leerling rookt} \mid \text{leerling is meisje}) = \frac{134}{620} \approx 0,2161$

(lees af uit de tabel)

c $P(\text{rokende leerling die een meisje is}) = P(\text{leerling is meisje} \mid \text{leerling rookt}) = \frac{134}{239} \approx 0,5607$

(lees af uit de tabel)

- 19 a** Maak evt. een kansboom met twee lagen: bovenste laag met de artikelsoorten (A en B), onderste laag per artikelsoort de takken goedgekeurd of afgekeurd.

$$P(A \text{ en afgekeurd}) = 0,60 \cdot 0,01 = 0,006$$

- b** Maak evt. een kansboom met twee lagen: bovenste laag met de artikelsoorten (A en B), onderste laag per artikelsoort de takken goedgekeurd of afgekeurd.

$$P(B \text{ en goedgekeurd}) = 0,40 \cdot 0,98 = 0,392$$

- c** Maak evt. een kansboom met twee lagen: bovenste laag met de artikelsoorten (A en B), onderste laag per artikelsoort de takken goedgekeurd of afgekeurd.

$$P(\text{afgekeurd}) = P(A \text{ en afgekeurd of } B \text{ en afgekeurd}) = 0,006 + (0,40 \cdot 0,02) = 0,014$$

- d** Gevraagd wordt de voorwaardelijke kans: $P(B \mid \text{afgekeurd})$

Algemene productregel in deze situatie:

$$P(\text{afgekeurd EN } B) = P(\text{afgekeurd}) \cdot (P(B \mid \text{afgekeurd})).$$

Invullen geeft:

$$0,4 \cdot 0,002 = 0,14 \cdot P(B \mid \text{afgekeurd})$$

$$\text{Hieruit volgt dat } P(B \mid \text{afgekeurd}) = \frac{0,40 \cdot 0,002}{0,14} = \frac{0,0008}{0,14} = \frac{4}{7}.$$

5.4 Toevalsvariabelen

V1 a 0, 1, 2, of 3.

b $P(X = 0) = 0,75^3 = 0,422;$
 $P(X = 1) = 0,75^2 \cdot 0,25 \cdot 3 = 0,422;$
 $P(X = 2) = 0,75 \cdot 0,25^2 \cdot 3 = 0,141;$
 $P(X = 3) = 0,25^3 = 0,016$

c 0 of 1

1 a Je kunt nu 0,1,2,3 of 4 scores hebben. Gebruik eventueel de kansboom:

$P(X = 0) = 0,75^4 \approx 0,3164$
 $P(X = 1) = 0,75^3 \cdot 0,25 \cdot 4 \approx 0,4219$
 $P(X = 2) = 0,75^2 \cdot 0,25^2 \cdot 6 \approx 0,2109$
 $P(X = 3) = 0,75 \cdot 0,25^3 \cdot 4 \approx 0,0469$
 $P(X = 4) = 0,25^4 \approx 0,0039$

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,3164	0,4219	0,2109	0,0469	0,0039

b Het verwachte aantal scores is: $0 \cdot 0,3164 + 1 \cdot 0,4219 + 2 \cdot 0,2109 + 3 \cdot 0,0469 + 4 \cdot 0,0039 = 1$

2 a $P(M = 1) = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{300}{729}$

$P(M = 2) = 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{5}{9} = \frac{240}{729}$

b $P(M \geq 2) = P(M = 2) + P(M = 3) = \frac{240}{729} + \frac{64}{729} = \frac{304}{729}$

c $P(M < 2) = P(M = 0) + P(M = 1) =$
 $1 - P(M \geq 2) = 1 - \frac{304}{729} = \frac{425}{729}$

3 a Je kunt 0,1,2 of 3 keer een 6 gooien met drie dobbelstenen.

$P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$

$P(X = 1) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$

$P(X = 2) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$

$P(X = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

b Verwachtingswaarde is $0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} = 0,5.$

c Als je heel vaak met drie dobbelstenen gooit, mag je per 2 keer gooien één zes verwachten.

4 a Zie de tabel.

v	0	1	2	3
$P(V = v)$	$\frac{24}{504}$	$\frac{180}{504}$	$\frac{240}{504}$	$\frac{60}{504}$

Naar verwachting worden er $0 \cdot \frac{24}{504} + 1 \cdot \frac{180}{504} + 2 \cdot \frac{240}{504} + 3 \cdot \frac{60}{504} = 1 \frac{2}{3}$ taken door een vrouw gedaan.

- b** Waarschijnlijk niet, want de verwachting van de mannen was $1\frac{1}{3}$ en er zijn 3 taken uit te voeren.
- 5 a** In totaal zijn er 178 zaaddozen onderzocht (tel alle frequenties bij elkaar op: $1 + 2 + 8 + \dots + 23 + 1$). De relatieve frequentie van het aantal onderzochte zaaddozen met 3 zaden is $\frac{1}{178} \approx 0,0056$. Zo werkt het ook bij alle andere relatieve frequenties in deze tabel.

aantal zaden	3	4	5	6	7	8	9	10	11
relatieve frequentie	0,0056	0,0112	0,0449	0,0730	0,1236	0,2528	0,3539	0,1292	0,0056

- b** $P(Z > 8) = P(Z = 9) + P(Z = 10) + P(Z = 11) = 0,3539 + 0,1292 + 0,0056 = 0,4887 \approx 49\%$
- c** $P(Z \leq 4) = P(Z = 3) + P(Z = 4) = 0,0056 + 0,0112 = 0,0168$
- d** Dit kun je het snelste via de GR doen: het gemiddelde van deze frequentietabel is tevens de verwachtingswaarde van het aantal zaden per zaaddoos. Je kunt natuurlijk ook de standaardberekening van de verwachtingswaarde maken:
 $3 \cdot 0,0056 + 4 \cdot 0,0112 + 5 \cdot 0,0449 + 6 \cdot 0,0730 + 7 \cdot 0,1236 + 8 \cdot 0,2528 + 9 \cdot 0,3539 + 10 \cdot 0,1292 + 11 \cdot 0,0056 \approx 8,15$
- 6 a** Zie de tabel.

	was	afwas	auto	
M	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{2}$
V	$\frac{4}{21}$	$\frac{11}{42}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

- b** Gebruik de kruistabel: $P(G = \text{man}) = \frac{1}{2}$
 Let op! We laten de algemene kans dat een persoon een man is in deze groep buiten beschouwing. $P(G = \text{man})$ is in deze steekproef de kans dat een taak door een man wordt uitgevoerd.
 $P(T = \text{afwas}) = \frac{1}{3}$ en dus is het product van deze kansen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
 Omdat $P(G = \text{man en } T = \text{afwas}) = \frac{1}{14}$ en dus ongelijk aan $\frac{1}{6}$ is, zijn deze twee gebeurtenissen afhankelijk van elkaar (in deze steekproef).
- c** Nee. De toevalsvariabelen zijn afhankelijk van elkaar (hangen met elkaar samen) en de taakverdeling is in die zin oneerlijk: het maakt bij de taakverdeling uit of je een vrouw of een man bent welke taak je krijgt. Dit kun je concluderen omdat er minstens één gecombineerde kans ongelijk is aan het product van de twee afzonderlijke kansen, zoals je bij b zag.
- 7 a** Maak eventueel een kansboom met vier lagen.

$$P(J = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(J = 1) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(J = 2) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16}$$

$$P(J = 3) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(J = 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

j	0	1	2	3	4
$P(J = j)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

- b** Gevraagde kans met de somregel: $P(J \geq 2) = P(J = 2) + P(J = 3) + P(J = 4) = \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$

Gevraagde kans met de complementregel:

$$P(J \geq 2) = 1 - P(J < 2) = 1 - P(J = 0) - P(J = 1) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{4}{16} = \frac{11}{16}$$

- c** Omdat de kansen symmetrisch verdeeld zijn over de mogelijkheden, zou je kunnen verwachten dat de middelste mogelijkheid 2 de verwachtingswaarde is; dat blijkt ook zo te zijn:

$$\frac{1}{16} \cdot 0 + \frac{4}{16} \cdot 1 + \frac{6}{16} \cdot 2 + \frac{4}{16} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 = 2$$

- d** $150 \cdot 2 = 300$

- 8 a** Maak eventueel een kansboom met vier lagen; bovenste laag start met tak 'groen' en tak 'rood'.

In totaal zijn er 33 balletjes.

$$P(X = 0) = \left(\frac{30}{33}\right)^4 \approx 0,6830$$

$$P(X = 1) = 4 \cdot \frac{3}{33} \cdot \left(\frac{30}{33}\right)^3 \approx 0,2732$$

$$P(X = 2) = 6 \cdot \left(\frac{3}{33}\right)^2 \cdot \left(\frac{30}{33}\right)^2 \approx 0,0410$$

$$P(X = 3) = 4 \cdot \left(\frac{3}{33}\right)^3 \cdot \left(\frac{30}{33}\right) \approx 0,0027$$

$$P(X = 4) = \left(\frac{3}{33}\right)^4 \approx 0,0001$$

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,6830	0,2732	0,0410	0,0027	0,0001

- b** Bedenk: er zijn maar 3 groene balletjes dus je kunt er maximaal 3 pakken bij 4 keer trekken... De bijbehorende kansboom mist daarom wat takken.

$$P(Y = 0) = \left(\frac{30}{33}\right) \cdot \left(\frac{29}{32}\right) \cdot \left(\frac{28}{31}\right) \cdot \left(\frac{27}{30}\right) \approx 0,6697$$

$$P(Y = 1) = 4 \cdot \left(\frac{30}{33}\right) \cdot \left(\frac{29}{32}\right) \cdot \left(\frac{28}{31}\right) \cdot \left(\frac{3}{30}\right) \approx 0,2977$$

$$P(Y = 2) = 6 \cdot \left(\frac{30}{33}\right) \cdot \left(\frac{29}{32}\right) \cdot \left(\frac{3}{31}\right) \cdot \left(\frac{2}{30}\right) \approx 0,0319$$

$$P(Y = 3) = 4 \cdot \left(\frac{30}{33}\right) \cdot \left(\frac{3}{32}\right) \cdot \left(\frac{2}{31}\right) \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \approx 0,007$$

Meer dan 3 kan niet, dus je bent nu klaar.

x	0	1	2	3
$P(Y = x)$	0,6697	0,2977	0,0319	0,007

- 9 a** De waarden 0 t/m 4.

- b** Maak eventueel een kansboom met vier lagen; de situatie is zonder terugleggen.

Totale aantal leerlingen is 28.

$$P(M = 0) = \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} \cdot \frac{10}{26} \cdot \frac{9}{25} \approx 0,0242$$

$$P(M = 1) = 4 \cdot \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} \cdot \frac{10}{26} \cdot \frac{16}{25} \approx 0,1719$$

$$P(M = 2) = 6 \cdot \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} \cdot \frac{16}{26} \cdot \frac{15}{25} \approx 0,3868$$

$$P(M = 3) = 4 \cdot \frac{12}{28} \cdot \frac{16}{27} \cdot \frac{15}{26} \cdot \frac{14}{25} \approx 0,3282$$

$$P(M = 4) = \frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} \cdot \frac{14}{26} \cdot \frac{13}{25} \approx 0,0889$$

m	0	1	2	3	4
$P(M = m)$	0,0242	0,1719	0,3868	0,3282	0,0889

c $0 \cdot 0,0242 + 1 \cdot 0,1719 + 2 \cdot 0,3868 + 3 \cdot 0,3282 + 4 \cdot 0,0889 = 2,286 \approx 2$

10 a Bekijk de tabel.

z	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$P(Z = z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b Verwachtingswaarde is $1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 30 \cdot \frac{2}{36} + 36 \cdot \frac{1}{36} = \frac{441}{36} = 12,25$.

$$P(\text{winst bij één spel}) = P(Z > 12) = P(Z \geq 15) =$$

$$\frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{13}{36}$$

De verwachtingswaarde is € 12,25, dus € 12,00 per spel inzetten levert gemiddeld winst op. De winkans bij één spel is $\frac{13}{36}$.

11 a Maak eventueel de bijbehorende kansboom.

Kansverdeling:

$$P(S = 3) = \frac{1}{4}$$

$$P(S = 4) = \frac{3}{8}$$

$$P(S = 5) = \frac{3}{8}$$

Verwachte aantal sets: $4\frac{1}{8}$

b $100 \cdot 4\frac{1}{8} = 412,5$ sets.

Dus 412 of 413 sets.

c Bekijk de tabel.

s	3	4	5
$P(S = s)$	$\frac{44}{90}$	$\frac{22}{90}$	$\frac{24}{90}$

Verwachtingswaarde is $3 \cdot \frac{44}{90} + 4 \cdot \frac{22}{90} + 5 \cdot \frac{24}{90} = \frac{340}{90} = 3\frac{7}{9}$ sets.

d Hier heb je de kansboom voor nodig, dus maak die eerst.

Er zijn 2 manieren om in drie sets klaar te zijn: $P(S = 3) = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,7^2 = 0,49$

Er zijn 6 manieren om in vier sets klaar te zijn:

$$P(S = 4) = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,7^2 = 0,273$$

Er zijn dan nog 12 manieren om in vijf sets klaar te zijn:

$$P(S = 5) = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,7^3 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,3^4 = 0,237$$

e Verwachtingswaarde: $3 \cdot 0,49 + 4 \cdot 0,273 + 5 \cdot 0,237 = 3,747$

12 Om deze vraag te kunnen beantwoorden moet je voor alle vier de mogelijkheden checken of geldt:

$$P(V = v \text{ en } K = k) = P(V = v) \cdot P(K = k)$$

Als dat voor alle vier zo is, dan zijn V en K onafhankelijk van elkaar; zo niet dan is de kwaliteit afhankelijk van de verfspuiters van dienst.

Het is handig als de kruistabel geen absolute frequenties bevat maar relatieve frequenties:

$K \setminus V$	A	B	
goed	0,0576	0,0368	0,944
niet goed	0,024	0,032	0,056
	0,6	0,4	1

$$P(V = A \text{ en } K = \text{goed}) = \frac{576}{1000} = 0,576$$

$$\text{en } P(V = A) \cdot P(K = \text{goed}) = 0,6 \cdot 0,944 = 0,5664$$

Omdat $0,576 \neq 0,5664$ dus we zijn al klaar met ons eerste bewijs: de gebeurtenissen 'verfspuiter is A' en 'kwaliteit is goed' zijn afhankelijk van elkaar en dus kunnen we ook meteen al concluderen dat de toevalsvariabele 'kwaliteit' afhankelijk is van de toevalsvariabele 'verfspuiter van dienst' (althans: in deze steekproef).

Je hebt in deze situatie helemaal niets aan verwachtingswaarden: zowel V als K zijn kwalitatieve variabelen dus we kunnen niet rekenen met hun waarden.

Om de vraag te kunnen beantwoorden welke verfspuiter de beste kwaliteit levert, vergelijk je de kansen $P(K = \text{goed} | V = A)$ en $P(K = \text{goed} | V = B)$ met elkaar.

$$P(K = \text{goed} | V = A) = \frac{0,576}{0,6} = 0,96$$

$$P(K = \text{goed} | V = B) = \frac{0,368}{0,4} = 0,92$$

Hieruit volgt dat A de beste kwaliteit levert (althans: in deze steekproef).

13 a Warren wint als Bill 3 gooit en Warren 4.

$$P(\text{Warren wint}) = P(\text{Bill een 3}) \cdot P(\text{Warren een 4}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

Je kunt ook een 6 bij 6 rooster maken en de mogelijkheden tellen: in 25 van de in totaal 36 mogelijkheden wint Warren.

b Met twee groene dobbelstenen kun je de ovensommen 4, 7 en 10 werpen.

Maak eventueel een rooster voor de twee groene dobbelstenen om de drie bijbehorende kansen te berekenen:

$$4 \text{ gooi je met kans } \frac{9}{36}$$

$$7 \text{ gooi je met kans } \frac{18}{36}$$

$$10 \text{ gooi je met kans } \frac{9}{36}$$

Maak nu eventueel gebruik van een kansboom: de eerste laag geeft de drie mogelijke ovensommen voor Warren en de tweede laag geeft telkens de drie mogelijke ovensommen voor Bill.

Routes in de kansboom waarmee Bill wint, zijn:

$$2 \text{ en } 4 \text{ met kans } \frac{1}{36} \cdot \frac{9}{36} = \frac{9}{1296}$$

$$2 \text{ en } 7 \text{ met kans } \frac{1}{36} \cdot \frac{18}{36} = \frac{18}{1296}$$

$$2 \text{ en } 10 \text{ met kans } \frac{1}{36} \cdot \frac{9}{36} = \frac{9}{1296}$$

$$5 \text{ en } 7 \text{ met kans } \frac{10}{36} \cdot \frac{18}{36} = \frac{180}{1296}$$

$$5 \text{ en } 10 \text{ met kans } \frac{10}{36} \cdot \frac{9}{36} = \frac{90}{1296}$$

$$8 \text{ en } 10 \text{ met kans } \frac{25}{36} \cdot \frac{9}{36} = \frac{225}{1296}$$

Al deze kansen bij elkaar opgeteld tot $\frac{59}{144}$ is de gevraagde kans.

- 14 a** Bedenk: je gooit telkens op totdat je kruis gooit en dan gooi je op tot je munt gooit. In totaal gooi je maximaal zes keer.

y	0	1	2	4	8	16	32
$P(Y = y)$	0,015625	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625

- b** Hiervoor kun je bij uitstek de verwachtingswaarde gebruiken.

De verwachtingswaarde van Y is:

$$0 \cdot 0,015625 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,125 + 8 \cdot 0,0625 + 16 \cdot 0,03125 + 32 \cdot 0,015625 = 3 \text{ euro}$$

Om quitte te spelen (op de lange duur) moet het casino € 3,00 vragen; om winst te krijgen (op de lange duur) moet het casino meer dan € 3,00 vragen.

- c** Dat krijg je als je bij de vijfde of de zesde keer kruis gooit.

$$P(Y = 5 \text{ of } Y = 6) = 0,03125 + 0,015625 = 0,046875$$

- 15 a** Gebruik eventueel een kansboom om deze kansen te berekenen: de boom bestaat uit drie lagen (voor ieder bestuurslid een laag). Vergeet niet dat dit een situatie zonder terugleggen is: de kansen veranderen per laag.

Of: gebruik combinaties om deze kansen te berekenen.

$$\text{Bijvoorbeeld: } P(Z = 1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{35}$$

$$P(Z = 0) = \frac{1}{35}; P(Z = 1) = \frac{12}{35}; P(Z = 2) = \frac{18}{35} \text{ en } P(Z = 3) = \frac{4}{35}.$$

- b** $P(\text{minstens 2 vrouwen}) = P(2 \text{ of } 3 \text{ vrouwen}) = P(Z = 2) + P(Z = 3) = \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}$

- c** Verwachte aantal vrouwen in bestuur is $E(Z) = 0 \cdot \frac{1}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + 2 \cdot \frac{18}{35} + 3 \cdot \frac{4}{35} = 1 \frac{5}{7}$

- 16 a** $0,4^3 = 0,064$ dus 6,4%.

- b** Je kunt hier eventueel een kansboom voor maken met voor iedere ronde een laag (situatie: met terugleggen).

categorie I: 6,4%

categorie II: $P(\text{één keer opgemerkt}) = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,288 = 28,8\%$

categorie III: $P(\text{twee keer opgemerkt}) = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,432 = 43,2\%$

categorie IV: $P(\text{drie keer opgemerkt}) = 0,6^3 = 0,216 = 21,6\%$

Categorie III komt het meeste voor.

- c** Per ronde wordt 60% opgemerkt: er zijn dus ongeveer $\frac{450}{0,6} = 750$ vogels in totaal.

Derde ronde voor het eerst opgemerkt en dus in de eerste en tweede ronde niet, dat overkomt dan ongeveer $0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 750 = 72$ vogels.

- 17** Onderaan komen de kansen dat een druktoets goed en foutief uit een machine komt:

$$P(\text{druktoets is fout}) = 0,0065 \text{ en } P(\text{druktoets is goed}) = 1 - P(\text{druktoets is fout}) = 0,9935.$$

Als de bewering waar is, zijn de toevalsvariabelen 'uitvoerende machine' en 'druktoetsconditie' onafhankelijk van elkaar.

In dat geval moeten de gecombineerde kansen in de kanstabel alle vier voldoen aan de algemene productregel:

$$P(\text{druktoets komt uit machine A en hij is goed}) =$$

$$P(\text{druktoets komt uit machine A}) \cdot P(\text{druktoets is goed}) = 0,6 \cdot 0,9935 = 0,5961$$

$P(\text{druktoets komt uit machine A en hij is fout}) =$

$P(\text{druktoets komt uit machine A}) \cdot P(\text{druktoets is fout}) = 0,6 \cdot 0,0065 = 0,0039$

$P(\text{druktoets komt uit machine B en hij is goed}) =$

$P(\text{druktoets komt uit machine B}) \cdot P(\text{druktoets is goed}) = 0,4 \cdot 0,9935 = 0,3974$

$P(\text{druktoets komt uit machine B en hij is fout}) =$

$P(\text{druktoets komt uit machine B}) \cdot P(\text{druktoets is fout}) = 0,4 \cdot 0,0065 = 0,0026$

	goed	fout	
machine A	0,5961	0,0039	0,6
machine B	0,3974	0,0026	0,4
	0,9935	0,0065	1

5.5 Totaalbeeld

- 1 a** Vaas met 100 balletjes: 40 rode (stemt Gore), 40 witte (stemt Bush) en 20 blauwe (stemt niet) balletjes, 4 keer trekken met terugleggen.

$$P(4 \text{ Gore stemmers}) = 0,0256$$

4 rode, 4 witte en 2 blauwe kan ook....

$$P(4 \text{ keer rode}) = \left(\frac{40}{100}\right)^4 = 0,0256$$

- b** Vaas met 25 balletjes: 10 rode (A) en 15 witte (B) balletjes, 3 keer trekken zonder terugleggen.

$$P(3 \text{ uit A}) = P(3 \text{ rode balletjes}) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} \cdot \frac{8}{23} \approx 0,0522$$

- c** Op de volgende manieren kun je 15 ogen krijgen:

6 - 6 - 3 (op 3 manieren)

6 - 5 - 4 (op 3! = 6 manieren)

5 - 5 - 5

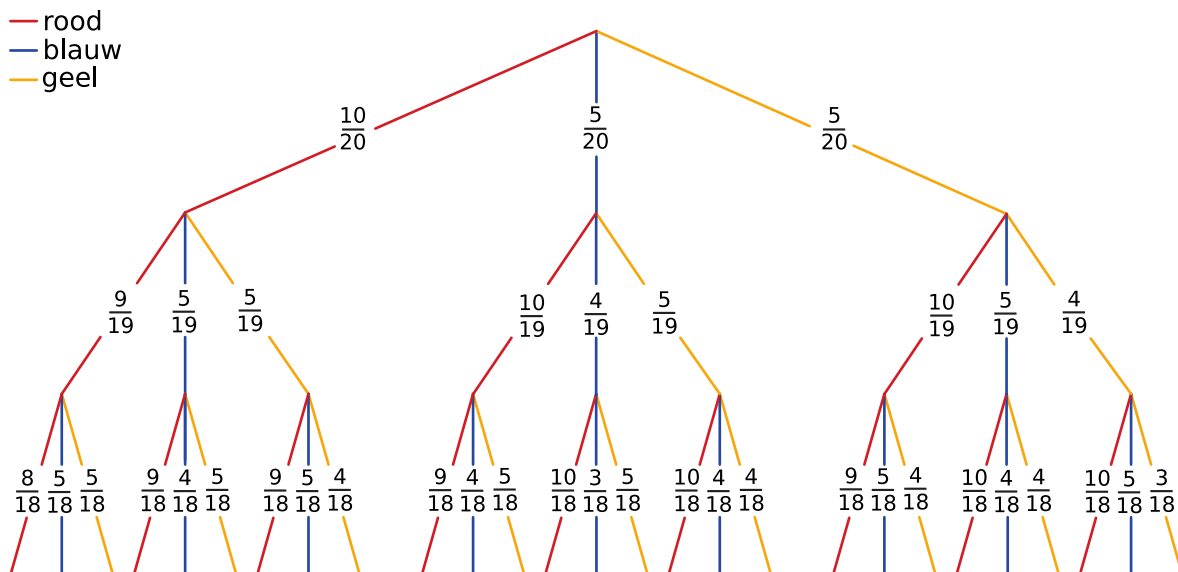
Dat zijn 10 mogelijkheden van de in totaal $6^3 = 216$ manieren.

$$P(15 \text{ ogen}) = \frac{10}{216}$$

- d** 10 balletje voor de cijfers 0 t/m 9.

$$P(\text{pincode goed}) = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = 0,0001$$

- 2 a** Dit is een kansboom van 3 lagen diep en de bovenste laag bestaat uit 3 takken (voor rood ($\frac{10}{20}$), blauw ($\frac{5}{20}$) en geel ($\frac{5}{20}$)). De kansen in de lagen eronder zijn anders.



- b** Drie routes in de kansboom bestaan uit 2 rode en 1 blauwe tak:

$$P(2 \text{ rode en } 1 \text{ blauwe}) = 3 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{5}{18} \approx 0,1974$$

- c** Er zijn $3! = 6$ routes in de kansboom met 1 rood, 1 geel en 1 blauw balletje:

$$P(\text{één balletje van elke kleur}) = 6 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{5}{18} \approx 0,2193$$

- d** Gevraagd: verwachtingswaarde van het aantal rode balletjes. Noem de bijbehorende toevalsvariabele R en maak eventueel een nieuwe kansboom met telkens takken voor rood en voor niet-rood.

$$P(R = 0) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} \approx 0,1053$$

$$P(R = 1) = 3 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} \cdot \frac{9}{18} \approx 0,3947$$

$$P(R = 2) = 3 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{10}{18} \approx 0,3947$$

$$P(R = 3) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} \approx 0,1053$$

$$\text{Verwachtingswaarde } R: 0 \cdot 0,1053 + 1 \cdot 0,3947 + 2 \cdot 0,3947 + 3 \cdot 0,1053 = 1,5$$

3 a P (eerste vier bezoeken krijg je telkens dezelfde kaart).

b Bijvoorbeeld met een dobbelsteen(simulator) heel vaak achter elkaar vier keer met 1 dobbelsteen werpen en bijhouden of je wel/niet vier keer hetzelfde aantal ogen gooit.

Je kunt dit ook met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine simuleren, telkens vier keer een getal tussen 1 en 6 (bij de waarden 0, 7, 8 of 9 simuleer je een nieuw getal).

c Maak eventueel een kansboom van 4 lagen diep; bovenste laag heeft 6 takken, elk met kans $\frac{1}{6}$; situatie is met terugleggen.

$$P(\text{eerste vier keer dezelfde kaart}) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \approx 0,0046 \approx 0,5\%.$$

d Een simulatie geeft een experimentele kans en ook al geldt de wet van de grote aantallen: door toeval kan het toch gebeuren dat de experimentele kans afwijkt van de theoretische kans.

4 a In principe gebruik je een kansboom met vijf lagen hiervoor (zonder terugleggen), maar dat is een flinke klus.

$P(M = 0)$ en $P(M = 5)$ zijn er nog wel makkelijk uit te berekenen omdat ze beide slechts 1 route in de kansboom representeren: $P(M = 0) = P(M = 5) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,0040$

$P(M = 1)$ en $P(M = 4)$ gaan ook nog: er zijn voor elk van deze kansen 5 routes in de boom:

$$P(M = 1) = P(M = 4) = 5 \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \approx 0,0992$$

De overgebleven kansen kun je eenvoudiger met de combinatiemethode berekenen:

$$P(M = 2) = P(M = 3) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{10}{5}} \approx 0,3968$$

De verwachtingswaarde van M is: $0 \cdot 0,0040 + 1 \cdot 0,0992 + 2 \cdot 0,3968 + 3 \cdot 0,3968 + 4 \cdot 0,0992 + 5 \cdot 0,0040 = 2,5$

m	0	1	2	3	4	5
$P(M = m)$	0,0040	0,0992	0,3968	0,3968	0,0992	0,0040

Het te verwachte aantal mannen in groep A is 2,5.

b $P(M \leq 3) = 1 - P(M = 4) - P(M = 5) = 1 - 0,0992 - 0,0040 = 0,8968 \approx 90\%$

5 a Uit het verhaal blijkt dat de gebeurtenissen 'beschikking over goed drinkwater' en 'het hebben van de darmparasiet' afhankelijk van elkaar kunnen zijn.

Je checkt de samenhang tussen twee toevalsvariabelen in deze opgave: D stelt de kwaliteit van het drinkwater voor en P stelt het wel of niet hebben van een darmparasiet voor.

Je kunt van deze situatie een venndiagram maken, maar eigenlijk is een kruistabel hier meer op z'n plaats. Met de gekregen gegevens kun je deze voor een deel direct invullen met percentages:

$D \setminus P$	parasiet	geen parasiet	
goed			60
slecht			
	8		100

Omdat 1 op de 4 mensen met een darmparasiet goed drinkwater heeft, weten we dat de kolom parasiet opgevuld wordt met een 2 ($\frac{1}{4} \cdot 8$) en een 6 ($8 - 2 = 6$).

De rest kun je afleiden doordat de som van de twee getallen in iedere rij en kolom gelijk moet zijn aan het totaal van die rij of kolom:

$D \setminus P$	parasiet	geen parasiet	
goed	2	58	60
slecht	6	34	40
	8	92	100

Je ziet nu meteen dat de gevraagde kans gelijk is aan 2%.

Ook zie je direct het antwoord op b en kun je de kansen uit d hier makkelijk mee bepalen...

- b** Bekijk weer de kruistabel uit de uitwerking bij a:

$D \setminus P$	parasiet	geen parasiet	
goed	2	58	60
slecht	6	34	40
	8	92	100

Je ziet dan direct dat de gevraagde kans 58% is.

- c** Gebeurtenissen 'goed drinkwater' en 'geen darmparasiet' sluiten elkaar niet wederzijds uit:

$$\begin{aligned}
 &P(\text{willekeurige bewoner heeft goed drinkwater of niet die darmparasiet}) = \\
 &P(\text{willekeurige bewoner heeft goed drinkwater}) + P(\text{niet die darmparasiet}) - \\
 &P(\text{willekeurige bewoner heeft goed drinkwater of niet die darmparasiet}) = \\
 &60 + 92 - 58 = 94\%
 \end{aligned}$$

Of, als je dat zo niet ziet, kan in dit geval een venndiagram verhelderend werken.

Ovaal voor 'goed drinkwater' en voor 'wel een darmparasiet' die elkaar snijden: het gemeenschappelijke gebied bevat 2% en dus bevat de rest van 'goed drinkwater' $60 - 2 = 58\%$ en de rest van 'wel een darmparasiet' $8 - 2 = 6\%$. Het buitengebied bevat dan $100 - 58 - 6 - 2 = 34\%$.

Je kunt dan bedenken dat de gevraagde kans gelijk is aan $58 + 2 + 34 = 94\%$ of je bedenkt dat de gevraagde kans complementair is aan de kans dat een willekeurige bewoner slecht drinkwater heeft en een parasiet:

$$\begin{aligned}
 &P(\text{willekeurige bewoner heeft goed drinkwater of niet die darmparasiet}) = \\
 &100 - P(\text{willekeurige bewoner heeft slecht drinkwater en een parasiet}) = 100 - 6 = 94\%
 \end{aligned}$$

- d** (Bekijk eventueel de kruistabel uit de uitwerking van a.)

Beide gevraagde kansen zijn voorwaardelijke kansen.

$P(\text{bewoner met goed drinkwater heeft die parasiet}) =$

$$P(\text{heeft parasiet} | \text{heeft goed drinkwater}) = \frac{P(\text{heeft parasiet en heeft goed drinkwater})}{P(\text{heeft goed drinkwater})} =$$

$$\frac{\frac{2}{100}}{\frac{60}{100}} \approx 0,033 = 3,3\%$$

$P(\text{bewoner zonder goed drinkwater heeft die parasiet}) =$

$$P(\text{heeft parasiet} | \text{heeft slecht drinkwater}) = \frac{P(\text{heeft parasiet en heeft slecht drinkwater})}{P(\text{heeft slecht drinkwater})} =$$

$$\frac{\frac{6}{100}}{\frac{40}{100}} = 0,15 = 15\%$$

- e** Als ze onafhankelijk van elkaar zijn, moet bijvoorbeeld gelden dat:

$$\begin{aligned}
 &P(\text{willekeurige bewoner heeft goed drinkwater en darmparasiet}) = \\
 &P(\text{heeft goed drinkwater}) \cdot P(\text{heeft parasiet})
 \end{aligned}$$

Bekijk eventueel weer de kruistabel uit de uitwerking van a:

$$P(\text{willekeurige bewoner heeft goed drinkwater en darmparasiet}) = 2\%$$

$$P(\text{heeft goed drinkwater}) \cdot P(\text{heeft parasiet}) = \frac{60}{100} \cdot \frac{8}{100} = 0,048 = 4,8\%$$

2 en 4,8 zijn niet gelijk en dus zijn K en P afhankelijk van elkaar.

6 a Betrouwbaarheid van ieder onderdeel is $\frac{90}{100}$.

Betrouwbaarheid van de hele keten is: $\left(\frac{90}{100}\right)^5 \approx 0,590 \approx 60\%$

b Dit systeem valt alleen uit als beide ketens uitvallen.

De kans dat een keten uitvalt is $(100 - 60) = 40\%$.

De kans dat beide ketens uitvallen is $\frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} = 0,16 = 16\%$.

De betrouwbaarheid van het systeem is daarom $(100 - 16) = 84\%$.

Of:

Het systeem is betrouwbaar kun je definiëren als:

$$P(\text{keten 1 werkt en keten 2 werkt}) + P(\text{keten 1 werkt en keten 2 niet}) +$$

$$P(\text{keten 1 werkt niet en keten 2 wel}) = \frac{60}{100} \cdot \frac{60}{100} + 2 \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{40}{100} = 0,84 = 84\%$$

c Betrouwbaarheid beide onderdelen A:

Dit deelsysteem valt alleen uit als ze het beide niet doen; de kans daarop is voor beide 10% en de kans dat het hele deelsysteem A uitvalt, is daarom $\left(\frac{10}{100}\right)^2$.

En daarmee geldt dat de betrouwbaarheid van deelsysteem A gelijk is aan:

$$1 - \left(\frac{10}{100}\right)^2 = \frac{99}{100}$$

Totale betrouwbaarheid is: $\left(\frac{99}{100}\right)^5 \approx 95\%$

7 Tip: maak de tabel af door de rijtotalen en de kolomtotalen te berekenen.

Gevraagde kans: $P(\text{ouders rechts} | \text{meisje links}) \cdot P(\text{ouders rechts} | \text{jongen links}) =$

$$\frac{\frac{72}{240} \cdot \frac{96}{240}}{\frac{104}{240} \cdot \frac{136}{240}} \approx 0,4887 \approx 49\%$$

8 a Deze situatie gaat over twee gebeurtenissen, 'oefenen' en 'voldoende' die, zo te zien, afhankelijk zijn van elkaar.

Daarom kan een venndiagram (of een kruistabel!) helpen. In het venndiagram zet je de twee overlappende ovalen 'oefenen' en 'voldoende'. In totaal bevat ovaal 'oefenen' 35% van de studenten, maar 80% daarvan bevindt zich in het overlapdeel van studenten die zowel geoefend hebben als een voldoende kregen: dat is $0,8 \cdot 0,35 = 0,28 = 28\%$.

De rest van ovaal 'voldoende' bevat op zijn beurt $55 - 28 = 27\%$ van de studenten.

Je moet nu niet de 27% 'ongeoefend en voldoende' en de 28% 'geoefend en voldoende' met elkaar vergelijken, maar je moet de voorwaardelijke kansen $P(\text{voldoende} | \text{ongeoefend})$ en $P(\text{voldoende} | \text{geoefend})$ met elkaar vergelijken.

$$P(\text{voldoende} | \text{ongeoefend}) = \frac{0,27}{1-0,35} = 0,415 = 41,5\%$$

$$P(\text{voldoende} | \text{geoefend}) = \frac{0,28}{0,35} = 0,8 = 80\%$$

Oefenen voor statistiek heeft dus zeker zin.

b Gevraagd wordt de voorwaardelijke kans $P(\text{geoefend} | \text{voldoende})$.

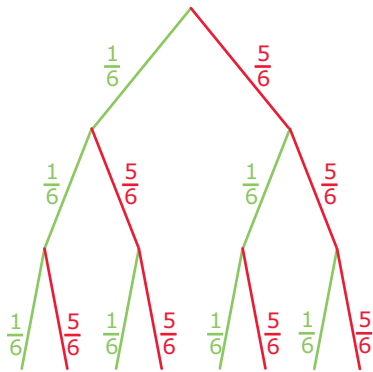
$$P(\text{geoefend} | \text{voldoende}) = \frac{P(\text{geoefend en voldoende})}{P(\text{voldoende})}$$

$$P(\text{geoefend en voldoende}) = 0,28 \text{ (zie uitwerking bij a)}$$

$$P(\text{voldoende}) = 0,55$$

Gevraagde kans is dus: $\frac{0,28}{0,55} \approx 0,509 = 50,9\%$

9 a Maak een kansboom.



w	-1	0	1	9
$P(W = w)$	$\frac{125}{316}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

b Ongeveer $-0,56$ per ingelegde euro.

c Meteen doen, het levert veel geld op!

10 a 0,30%

b 15,43%

c 0,7969

d 0,2031

e Bij elk levensjaar na zijn 50ste bereken je de kans dat hij dat jaar overleeft. Daarna elke kans met 1 jaar vermenigvuldigen en alles optellen geeft een verwachting dat die man nog ongeveer 32,4 jaar te leven heeft.

f De verzekeringsmaatschappij krijgt rente over je geld.

g Is afhankelijk van de rentestand, of je man of vrouw bent.

11 a $12 \neq 479001600$

b G is het aantal goed neergelegde kaartjes.

$$P(G = 2) = 0, P(G = 3) = \frac{1}{6}, P(G = 0) = \frac{1}{3} \text{ en } P(G = 1) = \frac{1}{2}.$$

c $\frac{21}{1296}$

12 a $-0,25$

b 0,86

c $p_A = 1$ en de rest 0; $p_B = 1$ en de rest 0; $p_D = 1$ en de rest 0.

d De verwachte score bij mogelijkheid II is 0 en die bij mogelijkheid III is $\frac{1}{6}$.

e $a < 0,61$

6

Statistiek

6.1	Onderzoek	36
6.2	Data ordenen	40
6.3	Diagrammen gebruiken	46
6.4	Gegevens samenvatten	54
6.5	Uitspraken doen	64
6.6	Totaalbeeld	69

6.1 Onderzoek

- V1 a** Bijvoorbeeld politici, transportbedrijven, planologen en OV-bedrijven.
- b** Omdat het gaat over onderzoek naar groepen mensen, waarbij maar een deel van de groep kan worden onderzocht.
- c** Bijvoorbeeld het Centraal Planbureau (CPB), universiteiten, hogescholen, adviesbureaus.
- V2** Denk na over
- het aantal ouders en leerlingen dat je in het onderzoek betreft (allemaal of een selecte groep);
 - de opzet van je steekproef. Wie ja je vragen stellen en waar baseer je de selectie op (loting, ouders en leerlingen die je al kent of die je toevallig op een dag tegenkomt enzovoort);
 - hoe je deze ouders en leerlingen gaat bevragen (via een enquête (op papier of online) of met persoonlijke of telefonische interviews enzovoort);
 - welke informatie je wilt hebben (bezit van hoeveelheid fietsen; hoe vaak op de fiets; recreatief of woon/werk of woon/school; de afstand woon/werk of woon/school; leeftijden; elektrische fiets of niet; wel/niet leuk om te fietsen enzovoort).
- 1 a** Twijfelachtig. Het is niet zeker of jouw klasgenoten en in het algemeen de groep van leerlingen op jouw school echt representatief is voor de hele groep van jongeren.
- b** Representatief, de steekproef is groot genoeg. Uit het bevolkingsregister van Nederland kies je in ieder geval aselekt. Het bevolkingsregister is een goede afspiegeling van de totale populatie.
- c** Waarschijnlijk representatief, maar het is ook belangrijk waar de diepvrieskippen gekocht zijn. Slechts tien kippen van negentien verschillende merken is in veel gevallen voldoende om een kwaliteitsonderzoek te kunnen doen, maar niet in alle gevallen.
- 2 a** Niet aselekt (kan zelfs familie van elkaar zijn).
- b** Alleen aselekt als je geen idee hebt welke provincies waar op de kaart van Nederland zitten.
- c** Aselekt (maar afhankelijk van wat je als populatie beschouwt).
- d** Aselekt (maar afhankelijk van wat je als populatie beschouwt).
- 3** Geslacht: kwalitatief, m/v (of j/m, of 0 = vrouw, 1 = man)
 Geboortjaar: kwantitatief, discreet, bijvoorbeeld 1990 t/m 1994 (of 90 t/m 94)
 Geboortemaand: kwalitatief, januari t/m december (of 1 t/m 12)
 Gewicht: kwantitatief, continu, (ongeveer) 60 t/m 100 kg
 Lengte: kwantitatief, continu, (ongeveer) 150 t/m 210 cm
 Cijfergemiddelde: kwantitatief, continu, 1 t/m 10
 Cijfer voor wiskunde (geheel cijfer): kwantitatief, discreet, 1 t/m 10
 Huiswerk (aantal uren per week): kwantitatief, continu, 0 t/m 25
 Wiskundegroep: kwalitatief, wisA-wisB (eventueel nog wiskunde D)
 Profiel: kwalitatief, CM-EM-NG-NT (en eventueel combinatieprofielen)
 Plezier: kwalitatief, 1 = nee, 2 = weinig, 3 = neutraal, 4 = behoorlijk, 5 = veel
- 4 a** B
- b** C
- c** A
- d** A
- Hoewel een telefoonnummer uit cijfers bestaat, is het geen kwantitatieve variabele. Eigenlijk is een telefoonnummer een soort naam.
- e** C
- f** C
- g** B
- 5** C D

Op de eerste manier bereik je alleen telefoonbezitters. Op de tweede manier bereik je waarschijnlijk alleen meisjes. Beide steekproeven zijn niet representatief.

Op de derde en de vierde manier bereik je jongeren het snelst, maar ook deze manieren zijn waarschijnlijk niet representatief voor de populatie jongeren.

6 C

Nee, je krijgt een te hoge schatting want gezinnen zonder kinderen zitten niet in je steekproef. En kinderen uit grote gezinnen zitten naar verhouding vaker in de steekproef. Je zou de steekproef per gezin moeten uitvoeren.

7 a Gebruik de grafische rekenmachine: randInt(1,1200,20)

b Er worden willekeurige groepen gemaakt van honderd Nederlanders (via selectie uit de verzameling van de burgerservicenummers) die ieder genummerd worden van 1 tot en met 100. Er wordt een toevalsgetal van 1 tot en met 100 gegenereerd. Dit toevalsgetal is het nummer van de persoon die in de steekproef valt. Dit herhaal je vijftien keer (vijftien groepen van honderd Nederlanders).

c Stel dat in die stad 25% van de mensen tussen 0-20 jaar is en 60% tussen 20-60 jaar en de overige 15% 60 jaar en ouder is. Dan zorg je er bij een steekproef van 100 mensen voor dat je achtereenvolgens van deze leeftijdscategorieën er 25, 60 en 15 ondervraagt.

8 a Bij een aselechte steekproef zou elke kilometer autoweg in Nederland evenveel kans moeten hebben om onderzocht te worden op files. In het beschreven onderzoek wordt vrijwel het hele verkeersnet uitgesloten van het onderzoek, omdat alleen op die ene weg op Texel onderzoek wordt gedaan.

b Een autoweg op het waddeneiland Texel is zeker niet representatief voor het hele verkeersnet in Nederland. Alleen in de nacht onderzoek doen naar files is zeker niet representatief voor alle tijdstippen door de week heen.

c Een automerk is een naam en geen getal.

d Een aantal is getalsmatig en dus kwantitatief. Het aantal auto's per uur is altijd een geheel getal: er rijden geen delen van auto's rond. Daarom is dit aantal een discrete kwantitatieve variabele.

e De snelheid is een getal (kwantitatief) en kan elke waarde (binnen realistische grenzen) aannemen, zoals 61,4 km/h. Daarom is dit een continue kwantitatieve variabele.

9 Gebruik de functie: RandInt(1,1250,15)

Juist vanwege het toeval zijn hier veel antwoorden mogelijk. Iedere set van vijftien unieke nummers uit bijvoorbeeld het domein [1,1250] die door het toeval zijn gekozen, is te gebruiken.

10 a Dat kun je niet weten, want er staat niet bij hoe de steekproef is getrokken. De uitkomst 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 en 91 is net zo waarschijnlijk als iedere andere uitkomst.

b Het zijn allemaal hoekwoningen en die verbruiken meestal meer energie.

c Neem vijf huizen aselekt met een tuin op het noorden, waarvan twee hoekwoningen. Neem ook vijf huizen aselekt met een tuin op het zuiden, waarvan twee hoekwoningen.

11 a Erg veel groepen met elk weinig deelnemers.

b Een erg kleine steekproef in vergelijking met het totale aantal Nederlanders.

c De gegevens uit het onderzoek zijn niet representatief voor de bevolking van de twee landen.

d Je mag dergelijke conclusies nooit bij zo'n kleine steekproef trekken: het toeval speelt dan een te grote rol.

12 a Dit is maar één beroepsgroep. Je moet ook zeker managers en leraren in de steekproef hebben. Een gelaagde steekproef met personen (mannen én vrouwen) uit verschillende beroepsgroepen is beter.

b Om te voorkomen dat het weten dat je wel of geen medicijn slikt, van invloed is op het onderzoek.

c $189 - 104 = 85$

$$\frac{85}{11000} \cdot 100 \approx 0,77\%$$

d $\frac{104}{11000} \approx 0,0095$ en $\frac{189}{11000} \approx 0,0172$

Je vergelijkt 0,95% met 1,72%.

De verlaging van het percentage is 0,77%. De procentuele verlaging van het percentage is afgerond 45%.

Het klopt dus.

13 a Te weinig mogelijkheden om uit te kiezen.

- b** Je wilt vragen naar een mening, maar je vraagt naar een feit waarvan allang wetenschappelijk bekend is wat gezonder is.
- c** Het is een open vraag. Je krijgt heel veel verschillende antwoorden en dat is weer moeilijker te verwerken en te vergelijken.
- d** Als er niet bij staat wat jij gegeten hebt, of als je niet ontbeten hebt, kun je de vraag niet beantwoorden.
- e** Eigen antwoord.

Bijvoorbeeld: Waarmee ontbijt je meestal?

- brood met hartig beleg (ham, kaas, enzovoort)
- brood met zoet beleg (jam, hagelslag, enzovoort)
- melk of yoghurt met iets van granen erin (muesli, havermout, cruesli, cornflakes, enzovoort)
- drinkontbijt
- fruit
- iets anders
- ik ontbijt niet

14 a Lichaamslengte, tijdsbesteding: continu kwantitatief. Leukste vak, ontbijtgewoonte, favoriete popster of popgroep: kwalitatief. Zakgeld, bijverdienste: discreet kwantitatief.

- b** Continu kwantitatief: hoelang... (met categorieën waaruit je kunt kiezen). Kwalitatief: welk(e)... (met categorieën waaruit je kunt kiezen, plus een open-antwoordmogelijkheid, anders namelijk...). Discreet kwantitatief: hoeveel... (met categorieën waaruit je kunt kiezen).
- c** Niet naar mening of naar toekomst vragen, maar naar feiten. Bijvoorbeeld: 'Hoeveel kilometer woon je van school?' Of 'Hoeveel broers en zusters heb je?' Of 'Heb je gescheiden ouders?'

15 a Bijvoorbeeld:

- Is de niet-elektrische fiets het meest gebruikte vervoersmiddel waarop leerlingen naar school komen?
- Hoeveel investeren ouders van onze leerlingen in de fiets waarop hun kinderen naar school komen?

b Bijvoorbeeld aan de leerlingen:

- Hoe vaak fiets jij gemiddeld per week naar school?
- Hoeveel fietsen heb je om mee naar school te kunnen fietsen?
- Fiets je met een elektrische fiets naar school?
- Hoeveel versnellingen heeft je (meest gebruikte) fiets?

Bijvoorbeeld aan de ouders:

- Op een schaal van 1 tot en met 10: hoe belangrijk vindt u het dat uw kind naar school fietst?
- Hoe lang moet uw kind doen met een fiets?
- Wat geeft u maximaal uit als uw kind een nieuwe fiets nodig heeft?
- Met welk vervoersmiddel gaat u het meeste zelf naar de school voor bijvoorbeeld tafeltjesavond?

c Bijvoorbeeld:

- gemiddeld aantal fietsschooldagen per week = kwantitatief (naar keuze discreet of continu want een gemiddelde kan altijd een decimaal getal zijn, ook al is dat soms vreemd binnen de context)
- aantal fietsen = discreet kwantitatief
- elektrische fiets = kwalitatief (elektrisch of mechanisch)

d Bijvoorbeeld:

- Koppel alle leerlingnummers elk aan een uniek toevalsgetal.
- Maak met behulp van de toevalsgetallen twee even grote lotingen uit de leerlingnummers: een set voor leerlingen en een set voor ouders van leerlingen.

e Bijvoorbeeld:

- Vraag de school of je, verspreid over een paar ochtenden, de leerlingen uit de steekproef om de beurt een kwartiertje uit hun les mag halen om ze in een aparte ruimte uit te leggen waar het onderzoek voor dient en er vervolgens de vragen te stellen.
- De ouders zou je 's avonds kunnen bellen, als je van school de bijbehorende telefoonnummers krijgt; bij geen gehoor probeer je het nog een paar keer op andere avonden of in het weekend.

16 a De populatie is niet aangegeven, dus een beoordeling van het aselekt en representatief zijn van de steekproef is onmogelijk.

Vrijwillige deelname aan een onderzoek is een risico voor aselekt zijn en representativiteit.

De steekproefomvang lijkt groot genoeg te zijn.

b De lezers van 'Men's Health' zijn niet representatief voor alle Nederlandse mannen. Dus de conclusie die blijkt uit de kop is niet gebaseerd op een goed onderzoek.

c Mensen vertellen vaak niet de waarheid en maken het mooier dan het is, of durven er niet goed over te praten en doen niet mee. De conclusies zijn niet betrouwbaar en mogen niet veralgemeniseerd worden.

17 a Variabele: **genre** van Nederlandse muziekfestival in het jaar 2013

Type: kwalitatief.

b Bijvoorbeeld:

- de onderzoeksvraag is: Daalt het percentage Dance-festivals in Nederland in de periode 1993 - 2013?
- de populatie bestaat uit muziekfestivals in Nederland in een periode van bijvoorbeeld 20 jaar, nl. van 1993 tot en met 2013
- als steekproef doet men om de vijf jaar (in 1993, 1998, 2003, 2008 en 2013) een telling van muziekfestivals per genre in dat jaar

c Bijvoorbeeld: 'Wat is het percentage Jazz/Blues-festivals van het totaal aantal muziekfestivals in Nederland in 2013?' of 'Welk genre muziekfestival kwam het minste voor in Nederland in 2013?'.

De populatie bestaat uit de muziekfestivals die plaatsvonden in Nederland in 2013.

d Het gaat dan om beschrijvende statistiek: je hebt alle gegevens verzameld die je nodig hebt om deze vraag te beantwoorden; je weet 100% zeker dat je antwoord op de onderzoeksvraag de werkelijkheid weergeeft.

18 a Bijvoorbeeld:

Geef de leerlingen b.v. ieder een uniek nummer uit het interval 1 t/m 32 en laat een random getal genereren. De leerling met het betreffende nummer is de assistent.

b Zelf doen.

Voorbeeld: iedere leerling schrijft op een eigen kaartje zijn naam; alle kaartjes gaan in een hoge hoed; de hoed wordt geschud en zonder te kijken pakt de mentor een kaartje uit de hoge hoed en leest de naam van de leerling die als assistent gaat helpen hardop voor.

c Eigen antwoord.

Voorbeeld: zonder dat de leerlingen van te voren weten dat de mentor dit bedacht heeft, kiest de mentor de leerling die als eerste in de les vraagt of hij/zij naar de WC moet. Of dit echt aselekt is, is zeer de vraag: heeft iedere leerling in de klas dezelfde kans om tijdens die les naar de WC te moeten? Waarschijnlijk niet!

De mentor kan ook de leerling kiezen die als laatste de klas binnenkomt bij aanvang van het lesuur; ook hier is het de vraag of dit echt een aselekte keuze is want misschien is er in deze klas/groep een leerling die werkelijk altijd als laatste binnenkomt of juist iemand die werkelijk nooit als laatste binnenkomt.

6.2 Data ordenen

V1 Hier volgt een mogelijke werkwijze.

Vingerafdrukken kun je verzamelen met een inktkussen en papier. Je kunt er dan meteen bij schrijven welk patroon je ziet en het leerlingnummer erbij zetten. Vervolgens maak je voor ieder patroon een aparte map waarin je de vingerafdrukken met dat patroon stopt.

Als je later een vingerafdruk vindt en je wilt weten van wie deze is, pak je de map met het juiste patroon erbij en vergelijk je de gevonden vingerafdruk met alle afdrukken uit die map. Als je de juiste vingerafdruk gevonden hebt, controleer je op leerlingnummer om welke leerling het gaat.

Je kunt natuurlijk ook zelf een database maken en daarin digitale foto's van de vingerafdrukken plaatsen; leerlingnummer en patroonkenmerken kun je er als zoek sleutels bij vastleggen.

1 a 0,32

b Bij een relatieve frequentie weet je hoe het aantal zich verhoudt ten opzichte van het totaal.

c Maak een tabel zoals die in de uitleg.

Turf eerst hoe vaak lus, boog, en kring voorkomen in je klas. Doe dat in de tabel onder het kopje aantal. Maak de tabel verder af.

2 a Zie de tabel.

klasse	abs. frequentie
150– < 155	1
155– < 160	1
160– < 165	1
165– < 170	3
170– < 175	6
175– < 180	2
180– < 185	3
185– < 190	1
190– < 195	1
195– < 200	1

b Het totale aantal waarnemingen is 20 (twintig meisjes).

In klasse 1,50– < 1,55 staat 1 waarneming van de 20 in totaal: dat geeft een proportie van $\frac{1}{20} = 0,05$.

Zo werkt het ook bij de andere klassen.

De cumulatieve frequentie krijg je door bij elke frequentie de voorafgaande frequenties op te tellen.

klasse	abs. freq.	rel. freq.	cum. freq.
150– < 155	1	0,05	0,05
155– < 160	1	0,05	0,10
160– < 165	1	0,05	0,15
165– < 170	3	0,15	0,30
170– < 175	6	0,30	0,60
175– < 180	2	0,10	0,70
180– < 185	3	0,15	0,85
185– < 190	1	0,05	0,90
190– < 195	1	0,05	0,95
195– < 200	1	0,05	1

- c** Met de cumulatieve frequenties kun je bepalen wat bijvoorbeeld de frequentie van alle waarden kleiner dan een bepaalde waarneming is. Cumuleren betekent opstapelen.
- d** Bijvoorbeeld:
150– < 155 als eerste klasse, of 150– < 160.
- 3 a** De klassen zijn niet allemaal even breed. Bovendien zijn de lengtes 1,85– < 1,90 niet opgenomen in de tabel.
- b** De lengtes van deze meisjes zijn heel gelijkmatig verdeeld; de gelijkmatigheid zit vooral bij de kortere meisjes.
- c** Met een wisselende klassenbreedte kun je al snel een verkeerde indruk van de gegevens krijgen.
- 4 a** Twee getallen veranderen, namelijk de absolute frequentie van schoenmaat 36 en het totaal.
- b** Negen getallen veranderen (alle somfrequenties).
- c** Niet alle percentages veranderen door de toevoeging (in elk geval zeker niet de laatste somfrequentie van 100%). Zeven getallen veranderen.
- 5 a** Twee getallen veranderen, namelijk de absolute frequentie van schoenmaat 44 en het totaal.
- b** Eén getal verandert, namelijk de somfrequentie bij schoenmaat 44.
- c** Acht getallen veranderen; allemaal behalve de laatste 100%.
- 6 a** De hoogste frequentie treedt op in de klasse 166– < 174 en is 33.
- b** De hoogste frequentie treedt op in het interval 168– < 170 en is 11.
- c** Hoe kleiner de klassenbreedte, hoe nauwkeuriger de tabel. Maar kies je de klassenbreedte te klein, dan wordt je tabel te groot en onoverzichtelijk.
- 7 a** 0 en 10
- b** De nieuwe klassenindeling wordt: 0 – 29 en 30 – 59 en 60 – 80+.
De nieuwe klasse 30 – 59 bestaat uit de oude drie klassen 30 – 39 en 40 – 49 en 50 – 59.
Je kunt zien dat die drie staven bij zowel mannen als vrouwen de langste drie zijn. Bij de mannen zijn ze zelfs nog wat langer. Tel de aantallen van deze drie mannenstaven bij elkaar op en dan kom je op een geschat aantal van 7000(·1000).
- c** Bekijk bijvoorbeeld klasse 0 – 9 bij de mannen: je kunt aflezen hoeveel mannen een leeftijd van 0 t/m 9 hebben. Je weet echter niet hoeveel daarvan er bijvoorbeeld jonger dan 5 jaar zijn of hoeveel er ouder dan 7 zijn.
Daarom kun je deze klasse niet meer opdelen in kleinere klassen: je weet niet hoeveel personen in elk van de deelklassen horen.
- 8** B E
Bewering A is onjuist, een relatieve frequentie kan ook genoteerd zijn als proportie of als breuk.
Bewering B is juist, soms kan het door afronden iets minder of iets meer dan 100 zijn.
Bewering C is onjuist, zie bewering 2.
Bewering D is onjuist, het gaat om een deel van het geheel bij een relatieve frequentie.
Bewering E is juist. Het gaat altijd om een deel van het geheel bij een relatieve frequentie. Alleen de laatste waarde bij een somfrequentie is 100% want alleen die laatste waarde vertegenwoordigt alle waarnemingen.
- 9 a** € 1000,00
- b** € 900,00, maar € 900,00 zelf zit in de volgende klasse.
- c** $\frac{700+800}{2} = 750$ euro
- d** De ondergrens is € 900,00; de bovengrens is € 1000,00, maar € 1000,00 zelf zit in de volgende klasse.
- e** klassenbreedte 100
- f** absolute frequenties

10 a Zie de tabel.

<i>score</i>	<i>frequentie</i>
25– < 35	2
35– < 45	1
45– < 55	5
55– < 65	20
65– < 75	6
75– < 85	4
85– < 95	2

Let op dat de waarde 55 bij klasse 55– < 65 hoort en dat de waarde 65 bij klasse 65– < 75 hoort.

b Deel alle absolute frequenties door 40.

<i>score</i>	<i>frequentie</i>	<i>relatieve frequentie (%)</i>
25– < 35	2	5
35– < 45	1	2,5
45– < 55	5	12,5
55– < 65	20	50
65– < 75	6	15
75– < 85	4	10
85– < 95	2	5

11 a Eigen antwoord. Achter elk van de getallen 1 tot en met 20 heb je het aantal geturfd dat in jouw lijst met honderd toevalsgetallen voorkwam.

b Eigen antwoord. Achter elk van de getallen 1 tot en met 20 staat het aantal turven.

c Eigen antwoord. Iedere relatieve frequentie is gelijk aan de overeenkomende absolute frequentie gedeeld door 100.

d Alle 20 frequenties in de buurt van $\frac{1}{20} \cdot 100 = 5\%$

12 a De klassen zijn niet allemaal even breed.

b De lengtes van deze jongens zijn heel gelijkmatig verdeeld; de gelijkmatigheid zit vooral bij de kortere jongens.

c Met een wisselende klassenbreedte krijg je een verkeerde indruk van de gegevens.

d Omdat je niet over de ruwe data beschikt, gebruik je de gegevens uit de frequentietabel.

De breedste klasse is 150– < 165. Het beste kun je de andere klassen even breed maken. Zie tabel.

<i>lengte (cm)</i>	<i>frequentie</i>	<i>rel. frequentie</i>	<i>cum. rel. frequentie (%)</i>
150– < 165	15	0,25	25
165– < 180	30	0,50	75
180– < 195	15	0,25	100
totaal	60	1	100

e Nee, je kunt niet zien of de lengtes van de kleinere jongens gelijkmatig verdeeld zijn, daar is de eerste klasse veel te breed voor. Je zou kunnen zeggen dat er ongeveer evenveel kleine jongens als lange jongens zijn en dat de middenmoot weer evenveel jongens telt als de kleine en lange jongens samen.

13 a De tabellen hebben verschillende klassenindelingen en er staan absolute aantallen, terwijl ze een verschillend aantal werknemers hebben.

- b** Neem voor beide bedrijven een klassenindeling van € 100 breed, startend met klasse 400– < 500 en eindigend met klasse 1100– < 1200. Bereken voor iedere klasse de relatieve frequentie.

Bedrijf 1:

<i>weekloon (euro)</i>	<i>aantal werknemers</i>	<i>relatieve frequentie (%)</i>
400– < 500	0	0
500– < 600	8	12,3
600– < 700	10	15,4
700– < 800	16	24,6
800– < 900	14	21,5
900– < 1000	10	15,4
1000– < 1100	5	7,7
1100– < 1200	2	3,1
totaal	65	100

Bedrijf 2:

<i>weekloon (euro)</i>	<i>aantal werknemers</i>	<i>relatieve frequentie (%)</i>
400– < 500	5	20
500– < 600	12	48
600– < 700	5	20
700– < 800	3	12
800– < 900	0	0
900– < 1000	0	0
1000– < 1100	0	0
1100– < 1200	0	0
totaal	25	100

- c** Uit een relatieve cumulatieve frequentietabel. Maar omdat het hier maar om één salarisgrens gaat, kun je het sneller even berekenen. In bedrijf 2: $20 + 48 = 68\%$ van de werknemers verdient minder dan € 600,00. In bedrijf 1: 12,3%. Dus in bedrijf 2 zijn er relatief meer mensen die minder dan € 600,00 per week verdienen.

Bedrijf 1:

<i>weekloon (euro)</i>	<i>relatieve frequentie (%)</i>	<i>cum. rel. frequentie (%)</i>
400– < 500	0	0
500– < 600	12,3	$0 + 12,3 = 12,3$
600– < 700	15,4	$12,3 + 15,4 = 27,7$
700– < 800	24,6	$27,7 + 24,6 = 52,3$
800– < 900	21,5	$52,3 + 21,5 = 73,8$
900– < 1000	15,4	$73,8 + 15,4 = 89,2$
1000– < 1100	7,7	$89,2 + 7,7 = 96,9$
1100– < 1200	3,1	$96,9 + 3,1 = 100,0$

Bedrijf 2:

weekloon (euro)	relatieve frequentie (%)	cum. rel. frequentie (%)
400– < 500	20	20
500– < 600	48	68
600– < 700	20	88
700– < 800	12	100
800– < 900	0	100
900– < 1000	0	100
1000– < 1100	0	100
1100– < 1200	0	100

- d** Van het ene bedrijf heb je een klassenindeling van 100,00 breed. Per klasse weet je niet hoe de frequentie verdeeld is over die breedte van 100,00. Je weet dus wel dat er tien mensen zijn die tussen de € 600,00 en € 700,00 verdienen, maar je weet niet of al deze mensen bijvoorbeeld € 675,00 verdienen of dat ze geheel verspreid over die € 600,00 en € 700,00 verdienen of misschien wel alle tien precies € 600,00.

Je zou een schatting kunnen maken door te verwachten dat ze gelijkmatig verspreid over de € 600,00 en € 700,00 verdienen. Vijf van deze tien mensen zullen dan naar schatting minder dan € 650,00 verdienen en deze vijf tel je mee in de totale somfrequentie die je nodig hebt.

- 14 a** De eerste negen rijen bevatten data, hoewel je zou kunnen zeggen dat 'Mannen en vrouwen' en "Totaal bevolking" uit andere tijden worden afgeleid.

De rijen 'Groene druk' en 'Grijze druk' zijn echt uit het voorgaande afgeleide waarden met een bepaald doel.

- b** De bevolkingsgegevens zijn discrete kwantitatieve variabelen.

De variabelen 'OGroene druk' en 'Grijze druk' bevatten continue kwantitatieve variabelen.

Kwantitatieve variabelen hebben het grote voordeel dat je ermee kunt rekenen.

- c** Dit percentage heeft de verhouding weer tussen het aantal oudere (meestal niet-werkende) mensen die AOW en pensioen krijgen en het aantal werkenden. Het CBS is in die verhouding geïnteresseerd omdat de werkenden voor een groot deel van de overheidsinkomsten zorgen en daarom de AOW betalen.

- d** Bijvoorbeeld in 1900: $\frac{272+35}{1732+802} \cdot 100 = 12,1\%$.

En zo gaan de andere percentages ook.

Het oplopen van dit getal betekent dat er steeds meer (deels van de overheid afhankelijke) ouderen zijn in verhouding tot het aantal werkenden (die een groot deel van de overheidsinkomsten voor hun rekening nemen).

- e** De 'Groene druk' is een maat voor de verhouding tussen de huidige en de toekomstige aantallen werkenden.

- f** Het aantal vrouwen is steeds groter dan het aantal mannen, tenminste gedurende de jaren die in de tabel zichtbaar zijn.

In 2019 is de proportie mannen: $\frac{8475}{17082} \approx 49,6\%$.

- 15 a** De populatie = de slakken op een stuk grond;

De variabele = aantal slakken per m²;

De soort variabele = discreet kwantitatief.

- b** De som van alle frequenties is 48. Dus 48 m².

- c** Per leerling 4 m² en in totaal 48 m² $\Rightarrow \frac{48}{4} = 12$ leerlingen.

- d** $(2 \cdot 16) + (3 \cdot 14) + \dots + (9 \cdot 1) = 172$ slakken.

- e Van de totaal 48 m² zijn er 3 met 7 slakken erop $\Rightarrow$ de proportie is $\frac{3}{48} = \frac{1}{16} = 0,0625$.
- f In totaal 172 slakken, verdeeld over in totaal 48 m² $\Rightarrow \frac{172}{48} = 3,6$ slakken.

16 a Zie de tabel.

Schoenmaat brugklassers			
maat	freq	rel.freq	cum.rel.freq
34	1	0,033	0,033
35	1	0,033	0,067
36	1	0,033	0,100
37	3	0,100	0,200
38	5	0,167	0,367
39	5	0,167	0,533
40	7	0,233	0,767
41	4	0,133	0,900
42	2	0,067	0,967
43	0	0,000	0,967
44	0	0,000	0,967
45	1	0,033	1,000
	30	1,000	

- b Zie het antwoord bij a.
- c 67,7% heeft een schoenmaat van 40 of minder (zie de cumulatieve tabel). Dus $100 - 67,7 = 32,3\%$ heeft een schoenmaat boven de 40.
- d Maak gebruik van de gegevens uit de frequentietabel bij deelvraag a.

maat	rel. freq. (in %)	cum. rel. freq. (in %)
34-37	20	20
38-41	70	90
42-45	10	100

- e Een vierde deel van klasse 38 – 41 bestaat uit maten die groter zijn dan maat 40. Daarom neem je een vierde deel van het percentage leerlingen dat een schoenmaat uit deze klasse heeft $\Rightarrow 0,25 \cdot 70 = 17,5\%$.

Het percentage leerlingen dat een schoenmaat in de klasse 42 – 45 heeft $\Rightarrow 10\%$.

Samen 27,5%.

Als je alleen de gegevens uit de klassenindeling hebt, weet je niet precies hoeveel leerlingen maat 40 hebben. Je doet een schatting door de leerlingen uit klasse 38 – 41 evenredig over de 4 maten in deze klasse te verdelen. In dit geval kom je zo lager uit dan de werkelijkheid uit.

6.3 Diagrammen gebruiken

V1 Eigen antwoord.

1 a Zie de tabel.

	<i>freq</i>
lopen	8
fietsen	11
auto	2
scooter	4
OV	5
	30

b Zie de tabel.

	<i>freq</i>	<i>rel. freq (%)</i>
lopen	8	26,7
fietsen	11	36,7
auto	2	6,7
scooter	4	13,3
OV	5	16,7
	30	100,0

c Voor beide diagrammen geldt dat ze dezelfde horizontale as hebben als de overeenkomende diagrammen in de uitleg. De verticale as bestaat echter uit percentages; de staven/punten krijgen de hoogte van de bijbehorende percentages.

d Sectorhoek is proportie maal 360, dus $\frac{26,7}{100} \cdot 360 = 96^\circ$, enzovoort.

	<i>freq</i>	<i>rel. freq (%)</i>	<i>sectorhoek (°)</i>
lopen	8	26,7	96
fietsen	11	36,7	132
auto	2	6,7	24
scooter	4	13,3	48
OV	5	16,7	60
	30	100,0	360

e Je kunt met relatieve frequenties beter groepen vergelijken (zonder rekening te hoeven houden met de verschillende groeps groottes).

f Vraag aan al je klasgenoten hoe ze naar school gaan. Maak hier een turftabel van met een kolom met absolute frequenties. Teken er een staafdiagram bij.

2 a Klassenindeling: 1,50– < 1,55, 1,55– < 1,60, etc.
Klassenbreedte: 5 cm.

b Markeringspunten zijn de middens van de staven. Dus onder deze punten een staaf tekenen, zodat het punt op het midden van de bovenkant van de staaf ligt.

c Voorgaande staven plus de staaf van de huidige klasse opstapelen; de punt komt nu niet boven het midden van de klasse (staaf) te staan, maar boven de rechtergrens van de klasse.

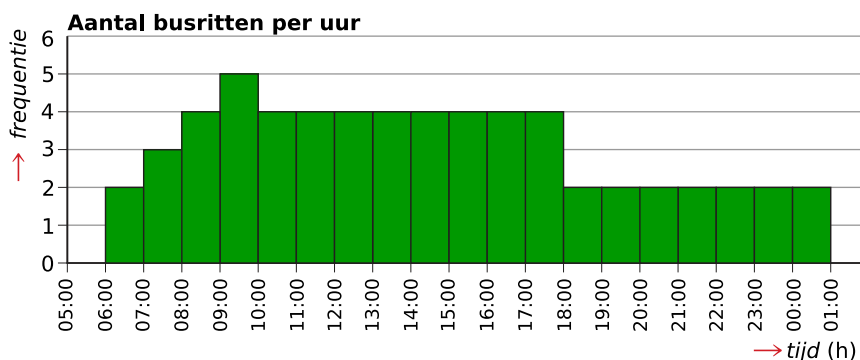
d Vergelijk jouw frequentiepolygoon met dat in de uitleg.

e Zie de figuur in de uitleg.

- 3 a** De variabele bij een histogram is altijd een kwantitatieve variabele. De variabele bij een staafdiagram mag ook kwalitatief zijn (en staven van een staafdiagram worden niet gekoppeld getekend).
- b** Je kunt zien hoe de (relatieve) frequentie verandert als je de waarde van de variabele verandert.
- c** De waarde van alle waarnemingen.
- 4 a** Zie de tabel.

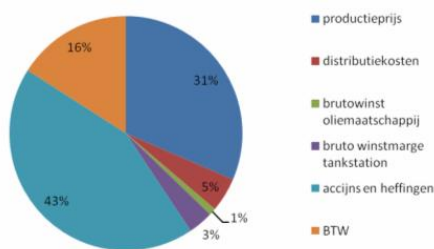
<i>tijd (h)</i>	<i>freq.</i>
05 : 00– < 06 : 00	0
06 : 00– < 07 : 00	2
07 : 00– < 08 : 00	3
08 : 00– < 09 : 00	4
09 : 00– < 10 : 00	5
10 : 00– < 11 : 00	4
11 : 00– < 12 : 00	4
12 : 00– < 13 : 00	4
13 : 00– < 14 : 00	4
14 : 00– < 15 : 00	4
15 : 00– < 16 : 00	4
16 : 00– < 17 : 00	4
17 : 00– < 18 : 00	4
18 : 00– < 19 : 00	2
19 : 00– < 20 : 00	2
20 : 00– < 21 : 00	2
21 : 00– < 22 : 00	2
22 : 00– < 23 : 00	2
23 : 00– < 00 : 00	2
00 : 00– < 01 : 00	2
01 : 00– < 02 : 00	0
totaal	60

- b** Zie de figuur.



- c** de vertrektijden
- d** het aantal ritten per heel uur
- e** Dat hangt van de hoeveelheid gegevens af en van wat je wilt laten zien.
- 5 a** Je krijgt vijf staven van elk 25%, twee staven van elk 40% en vijf staven van elk 35%. Dat geeft een totaal van 380% in plaats van 100%.

- b** De klasse $150- < 175$ met 25% van de mannen wordt onderverdeeld in vijf klassen van elk 5 cm breed. Elk van deze klassen bevat $\frac{25}{5} = 5\%$ van de mannen. De klasse $175- < 185$ met 40% van de mannen wordt onderverdeeld in twee klassen van elk 5 cm breed. Beide klassen bevatten $\frac{40}{2} = 20\%$ van de mannen. De klasse $185- < 210$ met 35% van de mannen wordt onderverdeeld in vijf klassen van elk 5 cm breed. Elk van deze klassen bevat $\frac{35}{5} = 7\%$ van de mannen.
- 6** Laat bij twijfel je antwoord controleren. Zie het antwoord in het voorbeeld.
- 7** Laat bij twijfel je antwoord controleren. Zie het antwoord in het voorbeeld.
- 8 a** Het percentage aardgas is al gegeven; voor aardolie is het $\frac{939}{2633} \cdot 100 \approx 35,7$, enzovoort. Je vindt de volgende percentages: aardgas 48,8%, aardolie 35,7%, steenkool 13,2% en overige 2,4%.
- b** Bereken eerst de sectorhoeken. Aardgas krijgt een sectorhoek van $0,488 \cdot 360 \approx 176^\circ$, aardolie 118° , steenkool 47° en overige 9° . Bij elkaar zijn de sectorhoeken 360° . Teken vervolgens het cirkeldiagram.
- c** De sectorhoek voor aardgas is in dit geval $\frac{1481}{1481+1194+370+112} \cdot 360 \approx 169^\circ$. De overige sectorhoeken zijn aardolie 136° , steenkool 44° en overige 13° .
- d** Er is een relatieve afname van steenkool- en aardgaswinning. De rest neemt relatief toe.
- 9 a** $\frac{5}{144} \cdot 100 \approx 3,5\%$
- b** Bruto winstmarge: 3,5% van 360 is ongeveer 13 graden, dus teken een sectorhoek van 13 graden. Zo ook voor de andere onderdelen.



- c** Bijna 60% van de prijs is accijns (belasting) en btw. Dat bedrag gaat naar de overheid.
- 10 a** Nederland haalt voor $2363 \cdot 10^{15}$ joule aan energie uit aardgas.
- b** $308 \cdot 10^{15}$ joule
- c** Het lijntje 'overige energie' en het lijntje 'elektriciteit' naar het blokje 'centrales'. Het betreft bij alternatieve energie bijvoorbeeld windenergie en zonne-energie.
- d** $3260 \cdot 10^{15}$ joule
- e** $9033 \cdot 10^{15}$ joule
- f** Uit het schema: invoer 9033 waarvan $3451 + 4239 + 770 = 8460$ bekend is. Rest is elektriciteit. Dus $9033 - 8460 = 573 \cdot 10^{15}$ joule.
- g** Aardgas is de hoofdader van de Nederlandse energiebalans. Het realiseert een groot deel van het verbruik aan energie en is ook een belangrijk uitvoerproduct.
- h** Linksboven het blokje onttrekking uit voorraden en linksonder opslag in bunkers.

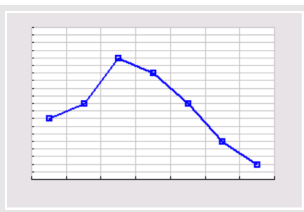
11 a Zie de tabel.

loon (€)	rel. freq. (%)
500– < 600	12
600– < 700	15
700– < 800	25
800– < 900	22
900– < 1000	15
1000– < 1100	8
1100– < 1200	3

b Gebruik de grafische rekenmachine of Excel. De figuren laten een staafdiagram zien gemaakt met de GR.



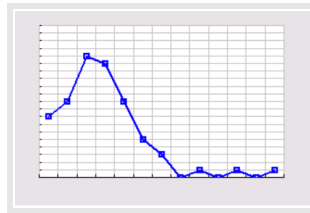
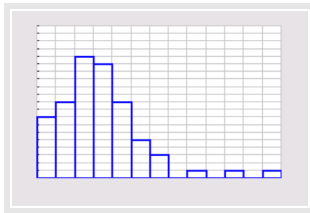
c Gebruik de grafische rekenmachine of Excel. Zie de figuur.



d Zie de tabel.

netto weekloon (€)	freq.	rel. freq. (%)
500– < 600	8	11,4
600– < 700	10	14,3
700– < 800	16	22,9
800– < 900	15	21,4
900– < 1000	10	14,3
1000– < 1100	5	7,1
1100– < 1200	3	4,3
1200– < 1300	0	0,0
1300– < 1400	1	1,4
1400– < 1500	0	0,0
1500– < 1600	1	1,4
1600– < 1700	0	0,0
1700– < 1800	1	1,4
	70	100,0

e Gebruik de grafische rekenmachine. Zie de figuur.

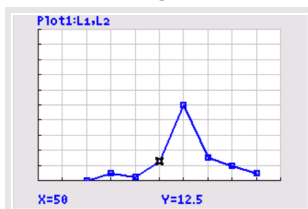


12 a Zie de tabel.

score	freq.	rel. freq. (%)
25– < 35	2	5
35– < 45	1	2,5
45– < 55	5	12,5
55– < 65	20	50
65– < 75	6	15
75– < 85	4	10
85– < 95	2	5

b Gebruik de grafische rekenmachine of Excel.

c Gebruik de grafische rekenmachine of Excel. Zie de figuur.



d Lees de verticale as af voor de horizontale waarde 55, dus 20%. Dat betekent dat 20% minder dan 55 punten heeft gescoord, dus 80% heeft 55 punten of meer gescoord.

13 a Het aantal behaalde medailles van elk metaal.

b Omdat er drie gegevens (variabelen) tegelijk worden weergegeven. De assen geven land, medaillekleur en aantal.

c VS (46)

d De VS (29)

e De VS (104)

f Zelf doen. Voordeel is dat je de totalen gemakkelijker kunt vergelijken. Nadeel is dat je het aantal medailles per kleur moeilijker kunt vergelijken.

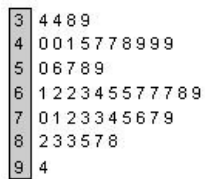
g Bijvoorbeeld een staafdiagram met per land drie staafjes naast elkaar op één as.

14 a Zie de tabel.

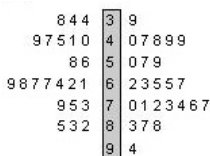
<i>cijfer</i>	<i>klas A</i>	<i>klas B</i>
2,5– < 3	0	0
3– < 3,5	2	0
3,5– < 4	1	1
4– < 4,5	2	1
4,5– < 5	3	4
5– < 5,5	0	1
5,5– < 6	2	2
6– < 6,5	3	2
6,5– < 7	4	3
7– < 7,5	1	5
7,5– < 8	2	2
8– < 8,5	2	1
8,5– < 9	1	2
9– < 9,5	0	1
9,5– < 10	0	0

Het staafdiagram krijgt per klasse twee afzonderlijke staven.

b Zie de figuur.



c Zie de figuur.



d In een steelbladdiagram kun je alle oorspronkelijke gegevens weer terugvinden, maar ook snel zien hoeveel cijfers er tussen bijvoorbeeld de 5 en de 6 zitten en nauwkeurig het gemiddelde berekenen. Maar heb je veel gegevens, dan wordt ook zo'n steelbladdiagram onoverzichtelijk.

15 a lijndiagram en gestapeld staafdiagram

b Geboorteoverschot = geboorten minus sterfgevallen; buitenlands migratiesaldo = aantal immigranten minus emigranten (dus vertrekken naar een ander land of komen van een ander land naar Amsterdam); binnenlands migratiesaldo = mensen die binnen Nederland verhuizen (dus aantal gekomen naar Amsterdam minus aantal vertrokken uit Amsterdam).

c Ongeveer $4650 + 850 - 1600 = 3900$

d Met een positief migratiesaldo komen er meer mensen naar Amsterdam dan er vertrekken. Met een negatief saldo is dat andersom.

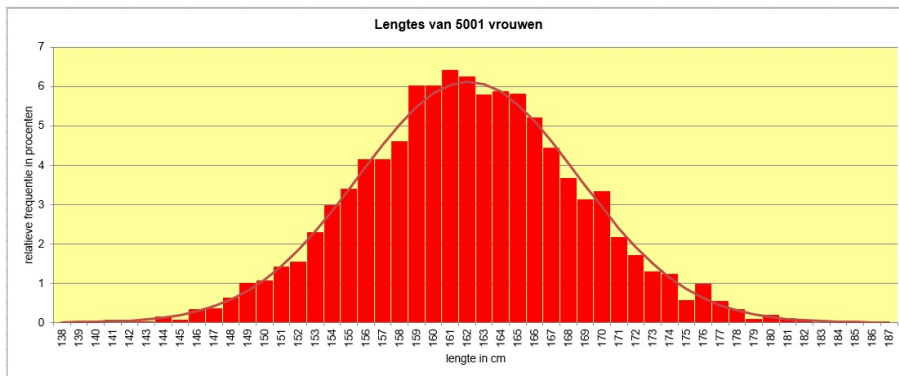
e Geboorteoverschot ≈ 4750 ; binnenlands saldo ≈ 1850 ; buitenlands migratiesaldo ≈ -800 . De toename is $4750 + 1850 - 800 \approx 5800$ personen.

16 a Om continue kwantitatieve variabelen.

b *lengte*: $137,5- < 138,5$ cm, etc.

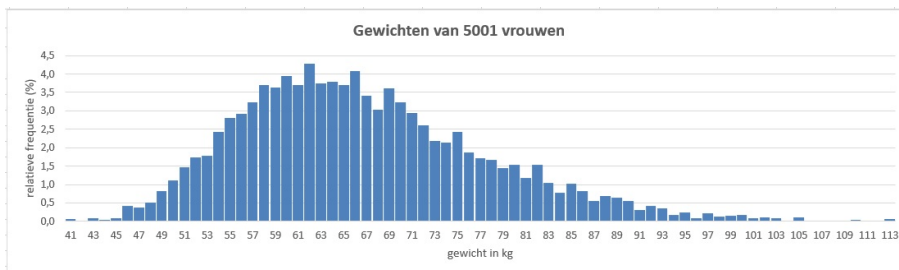
gewicht: 40,5– < 41,5 kg, etc.

c Zie de figuur.

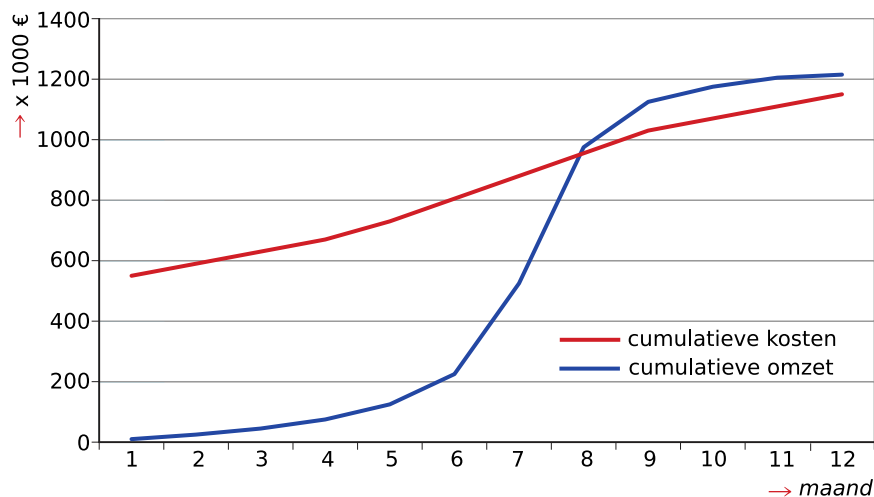


d Omdat de lengtes op hele cm zijn afgerond mag je de hele klasse 156 en de hele klasse 168 en alle klassen daar tussenin mee rekenen. Dat zijn in totaal 3426 vrouwen en dat is ongeveer 68,5%. Je kunt natuurlijk ook Excel eerst alle frequenties laten omrekenen naar procenten (dat heb je voor het histogram ook moeten doen) en dan de percentages optellen.

e Zie de figuur.



17 a Bereken eerst de cumulatieve frequentie per maand van de omzet en van de kosten en zet deze cumulatieve frequenties uit boven het einde van de maand.



b In de maanden 1 tot en met 8, dus van januari tot en met augustus.

c Er wordt dan verlies gedraaid.

d € 65000 winst.

18 a Kwalitatieve variabelen op de horizontale as.

b In het staafdiagram worden twee dingen tegelijk vergeleken. Per regio de verdeling over de drie soorten brandstof en de regio's onderling. Dat lukt niet in één cirkeldiagram.

- c** De percentages zijn: Noord-Amerika 4,2; Zuid-Amerika 4,1; Europa 3,2; Rusland 32,2; Midden-Oosten 40,8; Afrika 7,8; Azië en Australië 7,6. De bijbehorende sectorhoeken vind je door deze getallen met 3,6 te vermenigvuldigen.
- d** Een staafdiagram.

6.4 Gegevens samenvatten

V1 Eigen antwoord.

Denk bijvoorbeeld aan een staafdiagram waarin per vak de staaflengte aangeeft hoeveel leerlingen er gemiddeld per les aanwezig zijn.

Ook is het handig om een lijst toe te voegen van leerlingen die vaak afwezig zijn. Daarbij in een overzicht aangeven om hoeveel uur het gaat en bij welke vakken.

Maar er zijn natuurlijk veel meer mogelijkheden.

- 1 a** Het modale cijfer is het cijfer dat het vaakst voorkomt. Hier zegt het niet veel, want misschien komt alleen 6,7 twee keer voor en zijn alle andere cijfers veel hoger of lager, maar wel onderling verschillend.

- b** Klas A. Zet alle 23 cijfers van klein naar groot achter elkaar, dus 3,4; 3,4; 3,8 ... 8,2; 8,3; 8,5. Het is een oneven nummer, dus de mediaan is het middelste getal in de rij. In dit geval het twaalfde getal en dat is 6,2.

Zo werkt het ook voor klas B. Klas B heeft 25 cijfers, dus het dertiende getal is de mediaan. Dat is 6,5.

- c** De mediaan (middelste cijfer) zegt niet veel. Maar je weet dat de helft van de cijfers hoger dan of gelijk is aan de mediaan 6,2 (klas A) of 6,5 (klas B). En de andere helft is lager.

- d** Klas A: tel alle 23 getallen bij elkaar op en deel de som door 23; gemiddeld een 6,0.

Klas B: tel alle 25 getallen bij elkaar op en deel de som door 25; gemiddeld een 6,5.

- e** Klas B heeft het hoogste gemiddelde.

Omdat je nog niet naar de spreiding hebt gekeken, kun je nog geen volledige uitspraak doen. Misschien heeft klas B wel een paar hele hoge uitschieters en verder juist niet zoveel hoge cijfers. Welke klas heeft dan hoger gescoord?

- 2 a** De cijfers van A liggen meer gespreid dan die van B.

- b** Het gemiddelde van leerling C is behoorlijk hoger; de cijfers van C liggen meer naar rechts op de getallenlijn.

- c** Nee, eigenlijk niet. De cijfers van D liggen dicht bij het gemiddelde cijfer.

- d** Het gemiddelde van de verschillen is gelijk aan $\frac{1,1+0,2+0,9-3,8+0,1+2,0-0,7}{7} \approx -0,03$.

Als je de afwijkingen van alle cijfers ten opzichte van het gemiddelde optelt, moet je op 0 uitkomen.

- e** Het gemiddelde van de kwadraten is 3,0. Om een goede spreidingsmaat te zijn, zouden de cijfers van A tussen $6,1 - 3,0 = 3,1$ en $6,1 + 3,0 = 9,1$ moeten liggen. Aan de linkerzijde klopt dat wel ongeveer, maar aan de rechterzijde is de 9,1 te hoog. Dat komt door het kwadrateren.

- f** $\sqrt{3,00} \approx 1,73$, dus klopt.

- g** Het gemiddelde van B is 6,1. Verschillen met het gemiddelde zijn -0,2, 1,3, -0,5, 0,6, 0, 0,2 en -1,4 en hun kwadraten respectievelijk 0,04, 1,69, 0,25, 0,36, 0, 0,04 en 1,96. De som van deze kwadraten is 4,34 en het gemiddelde van de kwadraten van de verschillen is 0,62.

De standaardafwijking is $\sqrt{0,62} \approx 0,79$.

- 3** Zie de figuur.

8 4 4	3	9
9 7 5 1 0	4	0 7 8 9 9
8 6	5	0 7 9
9 8 7 7 4 2 1	6	2 3 5 5 7
9 5 3	7	0 1 2 3 4 6 7
5 3 2	8	3 7 8
	9	4

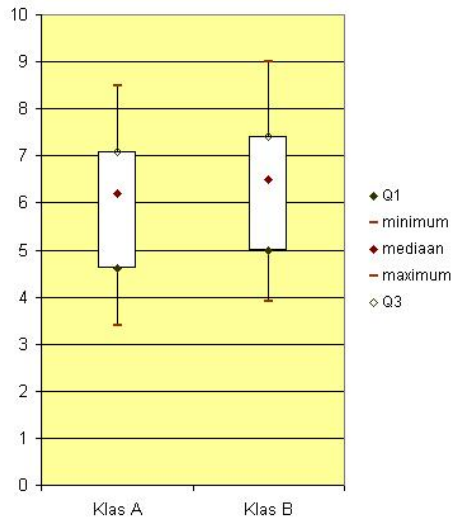
Klas A heeft mediaan = 6,2 en kwartielafstand = 2,8;

Klas B heeft mediaan = 6,5 en kwartielafstand = 2,55.

Voor de boxplots geldt:

Klas A heeft laagste = 3,4 en hoogste = 8,5;

Klas B heeft laagste = 3,9 en hoogste = 9,4.



4 D

Totaal aantal waarnemingsgetallen: 25

Het gemiddelde is: 66,2

De mediaan is: 68

De modus is: 65

5 B C

Totaal aantal waarnemingsgetallen: 30

Het gemiddelde is: 65,7

De mediaan is: 65

De modus is: 63

6 a De som van de waarnemingsgetallen delen door het aantal metingen.

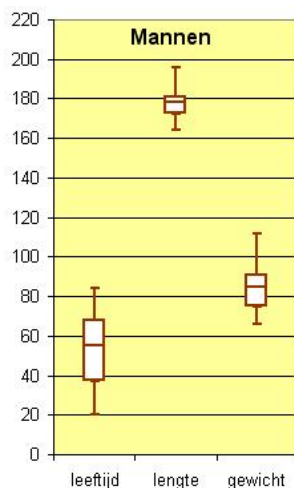
b hoogste – laagste waarneming

c derde kwartiel – eerste kwartiel

d Ze zijn correct. Gebruik eventueel de sorteerfunctie in Excel.

e Zie de tabel.

	leeftijd mannen	lengte mannen	gewicht mannen
mediaan	55	178	84,5
Q1	37	172,25	75
Q3	68	181,25	91



- f Van elk waarnemingsgetal het verschil van het gemiddelde berekenen en dit kwadrateren. De som van al die kwadraten delen door het aantal waarnemingsgetallen. Je krijgt de variantie. Door de wortel te trekken uit de variantie krijg je de standaardafwijking.

7 a Zie de tabel.

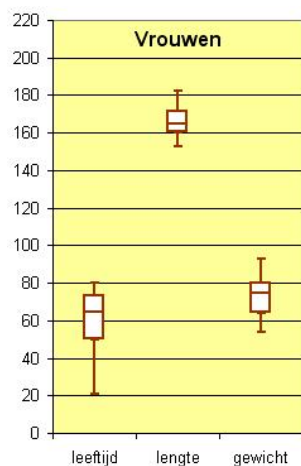
	<i>leeftijd vrouwen</i>	<i>lengte vrouwen</i>	<i>gewicht vrouwen</i>
gemiddelde	59,1	166,0	73,2
modus	bestaat niet	160	80
mediaan	64,5	165	74,5
Q1	50	160	64
Q3	73	171,5	80

b Spreidingsmaten

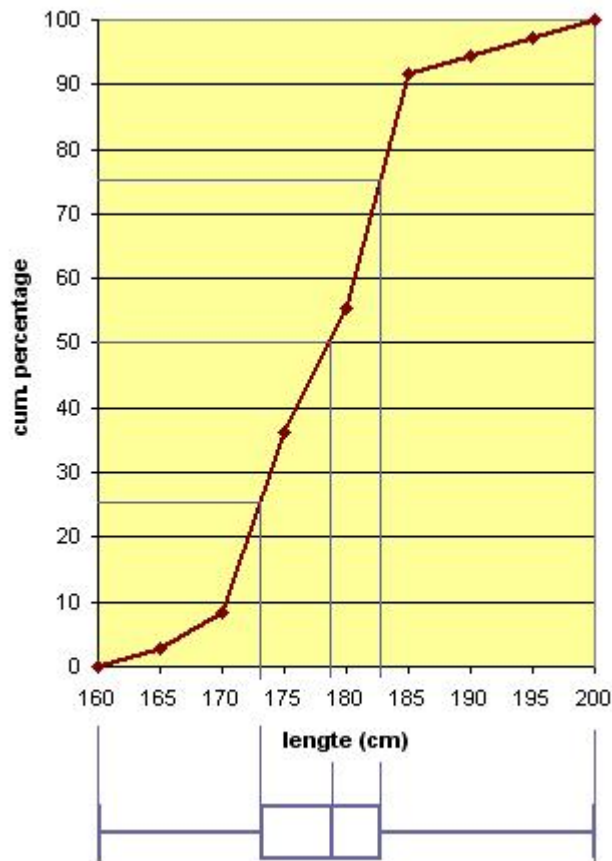
Leeftijd: $80 - 21 = 59$ jaar

Lengte: $182 - 153 = 29$ cm

Gewicht: $93 - 54 = 39$ kg



- 8 a Verzorgingstehuis Alfa heeft gemiddelde = 41,8 cm en mediaan = 41 cm.
Verzorgingstehuis Omega heeft gemiddelde = 41,8 cm en mediaan = 41 cm.
- b Nee, bij verzorgingstehuis Omega liggen de getallen verder uit elkaar (grotere spreidingsbreedte).
- 9 Start de cumulatieve frequentiepolygoon bij 0% op de linkergrens van de klasse met de kleinste lengtes; zet de rest van de cumulatieve percentages boven de rechtergrenzen van de klassen.



10 a Zie het antwoord bij e.

16,18,22,24,26,26,28,30,36: $Q_1 = 20$, mediaan $Q_2 = 26$ en $Q_3 = 29$.

b De getallen worden 20,22,26,28,30,30,32,34 en 40. Zie de boxplot bij e.

$Q_1 = 24$, mediaan $Q_2 = 30$ en $Q_3 = 33$.

c De getallen worden -24, -22, -18, -16, -14, -14, -12, -10 en -4. Zie de boxplot bij e.

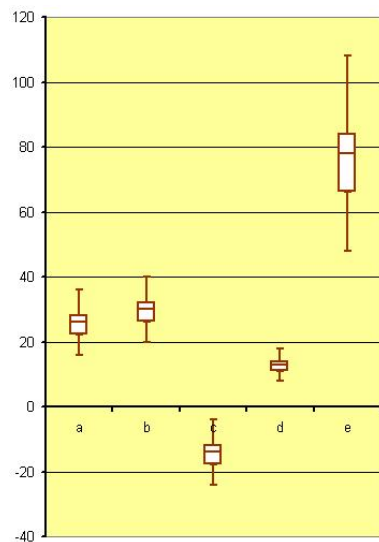
$Q_1 = 20$, mediaan $Q_2 = -14$ en $Q_3 = -11$.

d De getallen worden 8,9,11,12,13,13,14,15 en 18. Zie de boxplot bij e.

$Q_1 = 10$, mediaan $Q_2 = 13$ en $Q_3 = 14,5$.

e De getallen worden 48,54,66,72,78,78,84,90 en 108.

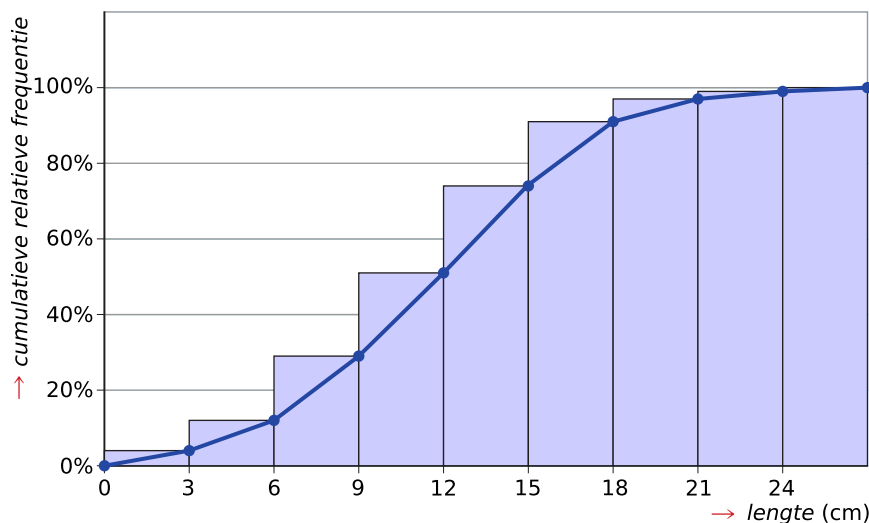
$Q_1 = 60$, mediaan $Q_2 = 78$ en $Q_3 = 87$.



- f** De boxplot (a, b en c) blijft dezelfde vorm houden en de afstanden tussen de kengetallen (maximum, minimum, eerste en derde kwartiel, mediaan) blijven gelijk. De boxplot verschuift in zijn geheel langs de as.
- g** De afstanden tussen de kengetallen vergroten of verkleinen met het vermenigvuldigingsgetal. Dit betekent dat de boxplot (d, e) groter of kleiner wordt.
- 11 a** Tot op de millimeter nauwkeurig. De lengte 3,0 hoort bij de tweede klasse.
- b** De klasse 12,0– < 15,0 bevat het grootste aantal wormen.
- c** Voeg eerst de relatieve frequenties en de cumulatieve relatieve frequenties aan de tabel toe.

<i>lengte (cm)</i>	<i>aantal wormen</i>	<i>rel. freq. (%)</i>	<i>rel. cum. freq. (%)</i>
0,0– < 3,0	4	4	4
3,0– < 6,0	8	8	12
6,0– < 9,0	17	17	29
9,0– < 12,0	22	22	51
12,0– < 15,0	23	23	74
15,0– < 18,0	17	17	91
18,0– < 21,0	6	6	97
21,0– < 24,0	2	2	99
24,0– < 27,0	1	1	100

Zie de figuur.



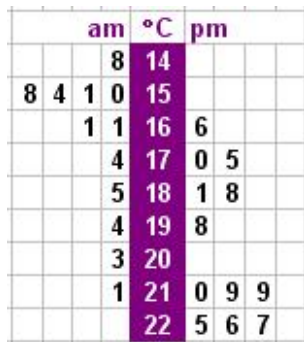
- d** In de klasse 9,0– < 12,0. Je kunt de mediaan niet bepalen, want de losse waarnemingen zijn niet bekend. Met behulp van de cumulatieve frequentiepolygoon kun je de mediaan schatten: ongeveer 11,8.
- e** Dit kun je met de grafische rekenmachine berekenen. Gebruik het STAT-menu.
Het gemiddelde $\approx 11,79$; de standaardafwijking $\approx 4,92$
- 12 a** Bij de tabel met bestedingen in euro's is de gemiddelde besteding per klant ongeveer € 112,50. De modale klasse is 100– < 150 euro. De mediaan is ongeveer 125 en $Q_1 \approx 75$ en $Q_3 \approx 125$.
Bij de tabel met de tijd in minuten is de gemiddelde tijd per klant ongeveer 2,25 minuten. De modale klasse is 1– < 2. De mediaan is ongeveer 2,5 en $Q_1 \approx 1,5$ en $Q_3 \approx 2,5$.
Bereken het gemiddelde met behulp van de klassenmiddens. Voor de tabel met euro's zijn dat 25,75,...275 en 325. Voor de tabel met minuten zijn dat 0,5; 1,5; ...; 4,5 en 5,5.
- b**
- Gebruik de klassenmiddens (van 25 tot en met 325 euro en van 0,5 tot en met 5,5 minuten).
 - Bereken de standaardafwijking handmatig of met de grafische rekenmachine.

- Handmatig de standaardafwijking berekenen, bijvoorbeeld van bestedingen met een gemiddelde van circa € 112,50 (zie a). Tel 24 keer het kwadraat van $25 - 112,50$ bij elkaar op, tel daarbij op 61 keer het kwadraat van $75 - 112,50$ enzovoort; deel deze som door het totale aantal klanten en neem er de wortel uit.
- Met de grafische rekenmachine de standaardafwijking berekenen. Zet de klassemiddens in lijst 1 en zet de bijbehorende lijst aantallen in lijst 2; de grafische rekenmachine berekent de standaardafwijking.

Bij de tabel met de bestedingen in euro's is de standaardafwijking ongeveer 56,1 en bij de tabel met de tijd in minuten is de standaardafwijking ongeveer 1,17.

- c** Gebruik Q_1 , de mediaan en Q_3 zoals berekend bij a; gebruik ook de kleinste (0 euro en 0 minuten) en de grootste waarden (350 euro en 6 minuten).
- d** Er zijn gemiddeld $\frac{150000}{112,50} \approx 1333$ klanten per week. (De omzet delen door de gemiddelde besteding per klant.) Elke klant heeft een gemiddelde van 2,25 minuten tijd. Er is totaal 2,25 maal 1333 minuten aan kassawerk. Dit zijn 3000 minuten. Met een overcapaciteit van 25% vermenigvuldig je dit getal met 1,25 om te weten hoeveel tijd de supermarkt aan caissières nodig heeft. Dit is $\frac{1,25 \cdot 3000}{60} = 62,5$ uur kassawerk. Er zijn dus 1,64 caissières nodig. Dat moet je afronden naar 2.

13 a Zie de figuur.

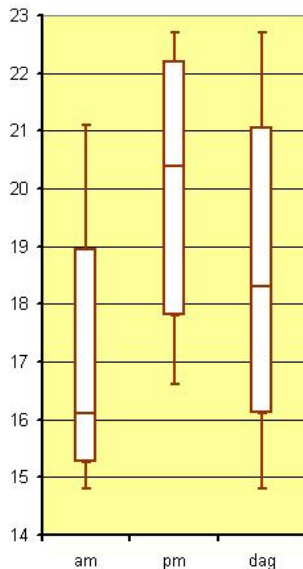


b Zie de tabel.

	<i>am</i>	<i>pm</i>	<i>dag</i>
min	14,8	16,6	14,8
Q1	15,25	17,8	16,1
med	16,1	20,4	18,3
Q3	18,95	22,2	21,05
max	21,1	22,7	22,7

Zie de figuur.

	am	pm	dag
Q1	15,25	17,8	16,1
min	14,8	16,6	14,8
med	16,1	20,4	18,3
max	21,1	22,7	22,7
Q3	18,95	22,2	21,05



- c** am: gemiddelde $\approx 17,0$ °C en de standaarddeviatie $\approx 2,1$ °C
 pm: gemiddelde $\approx 20,0$ °C en de standaarddeviatie $\approx 2,2$ °C
 Gebruik hier het STAT-menu van grafische rekenmachine voor.

- d** dag: gemiddelde $\approx 18,6$ °C en de standaarddeviatie $\approx 2,6$ °C
 Gebruik hier het STAT-menu van de grafische rekenmachine voor.

- e** 's Morgens is het gemiddeld kouder dan 's middags en 's avonds. Het gemiddelde over de hele dag is het gemiddelde van beide gemiddelden per dagdeel (evenveel metingen per dagdeel). De temperaturen van pm liggen kennelijk wat meer gespreid dan die van am.

- 14 a** Gemiddelde lengte ongeveer 171 cm. Mannen zijn gemiddeld 176 cm en vrouwen gemiddeld 164 cm.
b 198 cm, bezwaar: onnodig hoge kosten aan materiaal en er kan toch wel een langere man ooit moeten worden opgenomen.
c Bepaal met behulp van Excel de mediaan van de lengtes: die blijkt 171 te zijn.
d 145 mannen: voor de helft bedden van 176 cm en voor de 50% grootste mannen bedden van bijvoorbeeld 200 cm. 133 vrouwen: voor de helft bedden van 165 cm en voor de 50% grootste vrouwen bedden van bijvoorbeeld 185 cm.

15 $\frac{82+c}{6} = 16$ geeft $c = 14$

16 $\frac{\text{besteding studenten} + \text{besteding toeristen}}{\text{aantal studenten} + \text{aantal toeristen}} = 22$ euro/persoon

$$\frac{15 \cdot x + 25 \cdot (80 - x)}{80} = 22$$

$$x = 24$$

Er waren 24 studenten.

- 17 a** Gebruik Excel om de gemiddelde lengte te berekenen; de modale lengte kun je uit de tabel lezen (de lengte die het meest (321 keer) geteld is, is een lengte van 161 cm).
 De modale lengte is 161 cm, de gemiddelde lengte is ongeveer 162,1 cm.

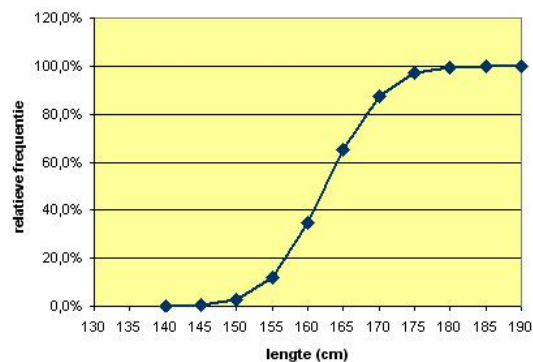
- b** Je weet dat er 5001 tellingen zijn en de lengtes staan al op volgorde van klein naar groot.
 De mediaan is te vinden bij de 2501-ste telling (en is dus eigenlijk 162 cm);
 Q_1 is het gemiddelde van de 1250-ste en de 1251-ste telling (en is dus eigenlijk 158 cm);
 Q_3 is het gemiddelde van de 3750-ste en de 3751-ste telling (en is inderdaad 166 cm).

Het minimum is 139 cm en het maximum is 186 cm.

d Zie de tabel.

lengte	frequentie	rel. freq. (%)	cum. rel. freq. (%)
135– < 140	1	0,0	0,0
140– < 145	18	0,4	0,4
145– < 150	122	2,4	2,8
150– < 155	467	9,3	12,1
155– < 160	1118	22,4	34,5
160– < 165	1520	30,4	64,9
165– < 170	1115	22,3	87,2
170– < 175	489	9,8	97
175– < 180	128	2,6	99,6
180– < 185	22	0,4	100
185– < 190	1	0,0	100
totaal	5001	100	

De cumulatieve relatieve frequentiepolygoon heeft een soort S-vorm.



e Lees de mediaan af bij 50%: 162 cm. Lees het eerste kwartiel af bij 25%: 158 cm. Lees het derde kwartiel af bij 75%: 166 cm. Nee, dat wijkt nauwelijks af.

18 a Modus: 58 cm.

Omdat er 5001 vrouwen zijn opgemeten is de mediaan het 2501-ste getal: 59 cm.

Gemiddelde: $\bar{m} \approx 59,1$ cm.

b Je hebt hier te maken met een frequentietabel waarbij de waarden van de statistische variabele mouwlengte de klassenmiddens zijn. Hiervan kun je gemakkelijk de spreidingsbreedte aflezen: $71 - 49 = 22$ cm.

Omdat er 5001 vrouwen zijn opgemeten is het eerste kwartiel het 1251-ste getal en het derde kwartiel het 3751-ste getal. De kwartielfstand is daarom $61 - 57 = 4$ cm.

Het berekenen van de standaardafwijking is nu meer werk, want je moet met de frequenties rekening houden. Met Excel vind je dat $\sigma_m \approx 3,1$ cm.

c De afwijkende mouwlengte is 71 cm.

Het derde kwartiel is 61 cm en de kwartielfstand is 4 cm. Nu is er sprake van een uitschieter bij een mouwlengte van $61 + 1,5 \cdot 4 = 67$ cm. Dus is er inderdaad sprake van meerdere uitschieters.

19 a Leeftijd is een discrete kwantitatieve variabele en heeft een fikse uitschieter (57 jaar), de mediaan typeert hier de leeftijd het beste.

Gewicht is ook een discrete kwantitatieve variabele, maar heeft geen fikse uitschieters. Het gemiddelde geeft dan een goede typering (maar de mediaan ook).

Lengte is een (vrijwel) continue kwantitatieve variabele. Het gemiddelde ligt voor de hand.

Zakgeld kun je zowel discreet als continu opvatten; er is bovendien een uitschieter (€ 50,00). De mediaan ligt hier voor de hand (maar gemiddelde mag ook).

Favoriete drankje en vervoermiddel zijn kwalitatieve variabelen en daarvoor kun je alleen de modus als centrummaat gebruiken.

- b** Voor leeftijd en zakgeld de kwartielfstand en spreidingsbreedte. Voor lengte en gewicht de standaarddeviatie. Voor favoriete drankje en vervoermiddel geen spreidingsmaat.

- c** De doorsneeestganger is 16-17 jaar, 181 cm lang, drinkt cola, weegt 71 kg, heeft € 22,13 zakgeld en komt met de fiets.

- 20 a** Gemiddelde: alle tijden optellen en delen door het totale aantal tijden van 29.

Mediaan: zet de 29 tijden op een rij van klein naar groot en kies dan de middelste (de 15de) tijd.

Modus: 17 seconden zonder ademenhalen is het vaakst voorgekomen (5 keer)

- b** De spreidingsbreedte is de grootste waarde MIN de kleinste waarde en dat is $43 - 15 = 28$ en de standaardafwijking is ongeveer 7,9.

Gebruik voor het berekenen van de standaardafwijking het STAT-menu van de grafische rekenmachine.

- c** Het minimum is 15, het maximum is 43. De kwartielen zijn $Q_1 = 17,5$ en $Q_3 = 32$.

- d** Zie de tabel.

<i>tijd</i>	<i>frequentie</i>
15– < 20	8
20 – < 25	7
25– < 30	5
30 – < 35	3
35– < 40	5
40 – < 45	1
totaal	29

- e** Voer de klassenmiddens 17,5 t/m 42,5 in de grafische rekenmachine in en gebruik het STAT-menu om gemiddelde en standaardafwijking te berekenen.

Het gemiddelde is ongeveer 26,3 seconden en de standaardafwijking is ongeveer 7,7 seconden.

- f** Zie de tabel.

<i>tijd (in sec)</i>	<i>freq</i>	<i>rel. freq.</i>	<i>cum. rel. freq.</i>
15 - <20	8	27,6%	27,6%
20 - <25	7	24,1%	51,7%
25 - <30	5	17,2%	69,0%
30 - <35	3	10,3%	79,3%
35 - <40	5	17,2%	96,6%
40 - <45	1	3,4%	100%
totaal	29	100%	100%

Zet de cumulatieve relatieve frequenties uit boven de rechter klassegrenzen.

Lees de mediaan af bij 50%: de mediaan is ongeveer 22,5 seconden.

- 21 a**
- Salaris is een kwalitatieve variabele. Je kunt het beste de mediaan of het gemiddelde kiezen;
 - Uit een frequentiepolygoon kun je zowel de modus als de mediaan (zie ook uitleg bij deelvraag b) redelijk nauwkeurig aflezen; het gemiddelde is veel moeilijker te bepalen;
 - In het dagelijkse leven spreekt men ook vooral over het modale salaris en niet over het gemiddelde salaris.

Het modale salaris is ruim € 30000,00 per jaar.

- b** De modus lees je af bij het hoogste punt, dus minder dan € 30000,00.

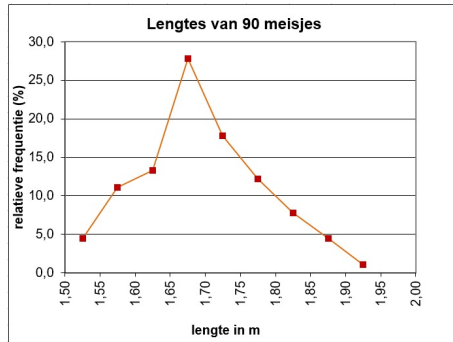
De mediaan zit waar links en rechts een even groot gebied (50% van de werknemers) onder de grafiek ligt, dat is bij ruim € 30000,00.

De mediaan is groter dan de modus.

6.5 Uitspraken doen

- V1** Iemand's lengte is een natuurlijke maat (in tegenstelling tot iemand's gewicht, want dat is beïnvloedbaar). De waarden van dergelijke maten liggen vaak symmetrisch verdeeld aan weerszijden van de centrummaten. Die centrummaten zijn ook ongeveer hetzelfde: modus, mediaan en gemiddelde verschillen hier weinig. Verder is het vrijwel altijd zo dat grote afwijkingen van het gemiddelde zeldzamer worden naarmate een waarde verder van dat gemiddelde af zit.

- 1 a** Zie de figuur.



- b** $\bar{L} \approx 169$ en $\sigma_L \approx 8,86$.
- c** Vuistregel 1: tussen $\bar{x} - \sigma_x$ en $\bar{x} + \sigma_x$ zit 68% van de waarnemingsgetallen.
 $169 - 8,86 = 160,14$ cm
 $169 + 8,86 = 177,86$ cm
 Je kijkt naar de meisjes van 161 cm tot en met 177 cm. Dat zijn er 59 van de 90.
 $\frac{59}{90} \cdot 100 \approx 65,6\%$
 Dat komt aardig dicht in de buurt van 68%.
- d** Vuistregel 2: tussen $\bar{x} - 2\sigma_x$ en $\bar{x} + 2\sigma_x$ zit 95% van de waarnemingsgetallen.
 $169 - 2 \cdot 8,86 = 151,28$ cm
 $169 + 2 \cdot 8,86 = 186,72$ cm
 Je kijkt naar de meisjes van 152 cm tot en met 186 cm. Dat zijn er 86 van de 90.
 $\frac{86}{90} \cdot 100 \approx 95,6\%$. Dat klopt heel goed met 95%.
- 2 a** $\frac{100-68}{2} = 16\%$ van de Nederlandse meisjes is langer dan 178 cm.
- b** $\frac{100-95}{2} = 2,5\%$ van de Nederlandse meisjes is korter dan 160 cm.
- 3 a** Relatief is het misschien wel lager, maar absoluut kan het evenveel of zelfs meer zijn.
- b** Het aantal automobilisten dat geen alcohol heeft gedronken, is veel en veel hoger. Dus je moet het in verhouding zien tot het aantal automobilisten dat wel of geen alcohol heeft gedronken.
- c** 20% witter dan wit. Waarmee wordt dat vergeleken?
- d** Het slagingspercentage is vooral afhankelijk van de capaciteiten van de leerlingen die aan het examen deelnemen. Zorg je er als school voor dat alleen heel goede leerlingen in de examenklas komen, dan slagen waarschijnlijk veel leerlingen. Mogelijk komen veel leerlingen helemaal niet in de examenklas, maar verlaten de school vroegtijdig.
- 4** $\bar{L} \approx 180,8$ en $\sigma_L \approx 7,74$. Je kunt de vuistregels het makkelijkst controleren door aflezen in een cumulatieve frequentiepolygoon. Daarin geef je $\bar{L} + \sigma_L$ en $\bar{L} - \sigma_L$ aan en kijk je of ongeveer 68% van de waarnemingen daarbinnen valt. Op dezelfde manier controleer je de andere vuistregel.
- 5** C
- Bewering A: $Q_3 = 2884 < 3000$ dus nog geen 25% van de batterijen gaat zo lang mee.
- Bewering B: de mediaan is $Q_2 \approx 1800$ en daar zit 50% onder.
- Bewering C: het minimum is 1236 uur, dus de bewering klopt.

Bewering D: $Q_1 = 1236$ dus meer dan 25% heeft een levensduur van maximaal 1236 uur.

6 A C E

Uitspraak A: $\bar{G} - 2\sigma_G = 254 - (2 \cdot 4) = 246$ en $\bar{G} + 2\sigma_G = 254 + (2 \cdot 4) = 262$

Uitspraak B: $246 = \bar{G} - 2\sigma_G$, links ervan in de klokvorm zitten de $\frac{100-95}{2} = 2,5\%$ laagste gewichten.

Uitspraak C: $250 = \bar{G} - \sigma_G$, links ervan in de klokvorm zitten de $\frac{100-68}{2} = 16\%$ laagste gewichten.

Uitspraak D: zie de uitwerking van uitspraak C.

Uitspraak E: bij de derde uitspraak zag je dat 16% van de pakken een lager gewicht heeft dan 250 gram en dus heeft 84% van de pakken koffie een hoger gewicht.

7 Belgen spreken langzamer dan Nederlanders.

- Het is niet eerlijk om voor het onderzoek alleen maar leraren en leraressen toe te laten tot de steekproef, deze groep mensen kan over het algemeen snel praten en is dus niet representatief voor de hele populatie.
- Die "ene Antwerpse stotteraarster" is een uitschieter en kan wellicht beter buiten beschouwing worden gelaten. De steekproeven zijn veel te klein.

Vitalinea misleidt consument.

- Er wordt al aangegeven dat het vreemd is dat we niets horen over de andere 20% van de deelnemers aan het onderzoek.
- Bovendien wil het niet zeggen dat 80% van de deelnemers is afgefallen door Danone. Misschien zijn ze gezonder gaan leven?

8 a Duitsland, want er zijn veel meer Duitsers dan Nederlanders.

b Het aantal inwoners van elk land.

c 1019 km per persoon.

d België heeft met 327 km bijna het dubbele van Italië (168), maar de staaf is maar een klein beetje langer; de staaf van Groot-Brittannië moet meer dan drie keer zo lang zijn dan die van Spanje.

e De hoogte van de fiets is dan de hoogte van de staaf. Maar de fietsen worden niet alleen hoger, maar ook breder en daarmee worden verschillen overdreven.

9 a Volgens de eerste vuistregel zijn dit de grenzen.

- gemiddelde – s.d. = $177,6 - 6,6 = 171$ cm
- gemiddelde + s.d. = $177,6 + 6,6 = 184,2$ cm

Tussen 171 cm en 184,2 cm.

b 27 van de 36 lengtes liggen tussen 171 en 184,2 cm: $\frac{27}{36} \cdot 100\% = 75\%$. Dus geen 68%, zoals de eerste vuistregel zegt (gerekend met de niet afgeronde grenzen).

Reken je met de afgeronde grenzen (171 en 184,5), dan vind je dat er 24 lengtes tussen deze waarden liggen. $\frac{24}{36} \cdot 100\% = 66,7\%$. Dit percentage komt meer in de richting van 68%, de eerste vuistregel van de klokvormige frequentieverdeling.

c Volgens de tweede vuistregel zijn dit de grenzen.

- gemiddelde – 2 · s.d. = $177,6 - 2 \cdot 6,6 = 164,4$ cm
- gemiddelde + 2 · s.d. = $177,6 + 2 \cdot 6,6 = 190,8$ cm

Tussen 164,4 cm en 190,8 cm

d 34 van de 36 lengtes liggen tussen 164,4 en 190,8 cm = $\frac{34}{36} \cdot 100\% = 94,4\%$. Dat ligt dicht tegen de 95% aan, zoals de tweede vuistregel zegt. Voldoet dus!

10 a 95 cm. Het bezwaar is onnodig hoge kosten aan materiaal.

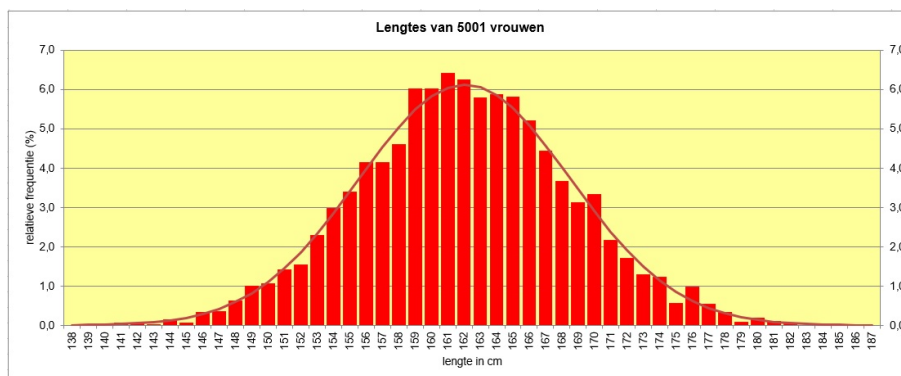
b Vuistregel 1: tussen $\bar{x} - \sigma_x$ en $\bar{x} + \sigma_x$ zit 68% van de waarnemingsgetallen.

Dat betekent dat 34% tussen $\bar{x}$ en $\bar{x} + \sigma_x$ zit. Je weet ook dat 50% van de mannen een lengte heeft van $\bar{x}$ of minder.

$34\% + 50\% = 84\%$

De langste persoon van deze 84% heeft een lengte $\bar{x} + \sigma_x = 80 + 5 = 85$ cm.

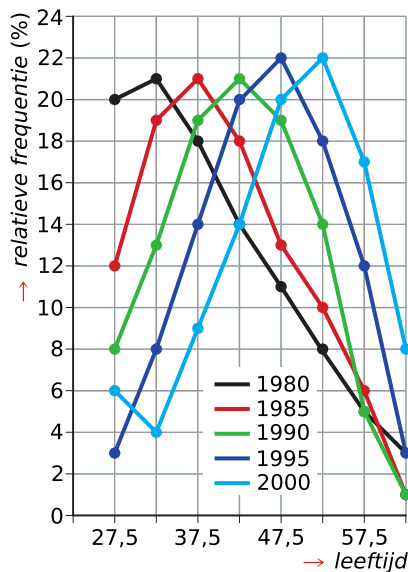
- c** $\bar{x} + \sigma_x = 74 + 4 = 78$ cm
- 11 a** Voor iedereen geldt dat er 3% loon bijkomt. Alle lonen veranderen daardoor op een verschillende manier. De kwartielen, maximum en minimum worden alle vijf vermenigvuldigd zijn met 1,03. De boxplot krijgt een andere vorm.
- b** Iedereen krijgt er precies € 200,00 bij: de boxplot behoudt daardoor zijn vorm, schuift alleen 200 naar rechts.
- c** De laagstbetaalde werknemers krijgen er niets bij.
Alleen de maximumwaarde komt 1800 naar rechts te liggen.
- 12** Geboortelengte: 68% van de pasgeborenen heeft een lengte tussen 48,0 en 53,2 cm en 95% heeft een lengte tussen 45,4 en 55,8 cm. De geboortelengte is gemiddeld ongeveer 50,6 cm met een standaardafwijking van 2,6 cm (gebruik hiervoor de klassenmiddens 44,5 cm; 46,5 cm; 48,5 cm; ...; 56,5 cm).
Geboortegewicht: 68% van de pasgeborenen heeft een gewicht tussen 2870 en 4084 gram en 95% heeft een gewicht tussen 2263 en 4691 gram. Het geboortegewicht is gemiddeld ongeveer 3477 gram met een standaardafwijking van ongeveer 607 gram (gebruik hiervoor de klassenmiddens 1250, 1750, 2250, ..., 4750).
- 13 a** De gemiddelde lengte is ongeveer 171 cm. Mannen zijn gemiddeld 176 cm met een standaardafwijking van 7 cm en vrouwen gemiddeld 164 cm met een standaardafwijking van 6 cm. Mannen zijn gemiddeld langer dan vrouwen.
- b** Dat klopt. De 50% langste mannen zijn minstens 176 cm, de 84% kortste vrouwen zijn hoogstens $164 + 6 = 170$ cm.
- 14 a** De hele grafiek is op 'dalend roosterpapier' getekend.
- b** Nee, dat is redelijk constant.
- c** De lijn vrouwen van 65 jaar en ouder, daalt nooit of nauwelijks als je de percentages bekijkt.
- d** Met die 1% wordt bedoeld 1% van het totale aandeel. In 1958 was het percentage rokers 60%. Als dat percentage met 1% afneemt wordt het nieuwe percentage dus $60 \cdot 99\% = 59,4\%$. In het volgende jaar zou het dan afnemen naar $59,4 \cdot 99\% \approx 58,8\%$, enzovoort.
Over 29 jaar betekent dit dat het percentage rokers afneemt naar $60 \cdot 0,99^{29} \approx 45\%$. Met het gegeven dat er in de eerste jaren meer afname was, zou het percentage van 37% rokers in 1987 wel kunnen kloppen.
- 15 a** Gebruik Excel. De gemiddelde lengte is ongeveer 162,1 cm met standaardafwijking 6,5 cm.
- b** Zie figuur, gemaakt met Excel.



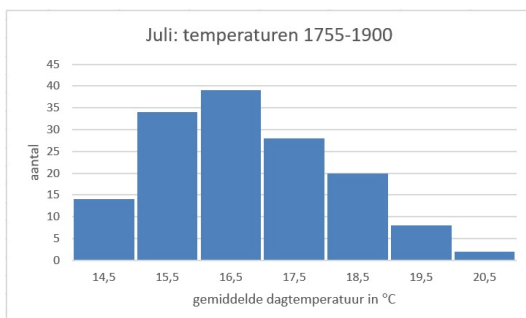
- c** Het gaat om de lengtes van minder dan $162,1 - 6,5 = 155,6$ en meer dan $162,1 + 6,5 = 168,6$ cm.
Dat betreft $\frac{1575}{5001} \cdot 100 \approx 31,5$ procent van de vrouwen.
- d** Het gaat nu om de lengtes van minder dan 149,1 en meer dan 175,1 cm. Dat gaat om $\frac{263}{5001} \approx 5\%$ van de vrouwen.
- e** Ze komen aardig overeen met de vuistregels.
- f** De gewichten vormen geen klokvormige frequentieverdeling.

- 16 a** De 25% kortste mannen hebben lengtes vanaf 150 tot 168,4 cm.
- b** De mediaan is 172,0 en Q_3 is 176,8 $\Rightarrow$ 25% van de 1064 mannen had een dergelijke lengte. 25% van 1064 mannen is 266 mannen.
- c** De verdeling is om twee redenen niet symmetrisch.
1. de afstand van Q_1 tot de mediaan is korter dan de afstand van de mediaan tot Q_3 ;
 2. de afstand van de linkergrens tot de mediaan is korter dan de afstand van mediaan tot de rechtergrens.
- 17 a** Gebruik als klassenmiddens voor de leeftijden 27,5; 32,5; 37,5 ... 62,5.
De gemiddelde leeftijden zijn achtereenvolgens 39,2; 40,5; 42,35; 45,85; 48,1.
De standaarddeviaties zijn achtereenvolgens 9,7; 8,8; 8,4; 8,3; 9,3.

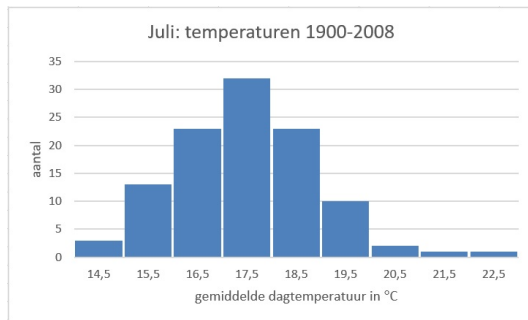
- b** Zie de figuur.



- c** De frequentiepolygonen verschuiven naar rechts naarmate de tijd verstrijkt; de vorm ervan blijft nagenoeg gelijk.
- d** Ze lijken goed te passen; de gemiddelde leeftijden nemen toe. Waarom die toename sterker is dan in de eerste drie jaren, zal men uit onderzoek hebben afgeleid.
- 18 a** Zie de figuur.



b Zie de figuur.



c In de jaren tot 1900 is de gemiddelde temperatuur in juli $16,8^{\circ}\text{C}$ met een standaarddeviatie van $1,4^{\circ}\text{C}$. In de jaren vanaf 1900 is de gemiddelde temperatuur in juli $17,0^{\circ}\text{C}$ met een standaarddeviatie van $1,4^{\circ}\text{C}$. De gemiddelde temperatuur in juli is bijna 1 standaarddeviatie hoger geworden.

6.6 Totaalbeeld

- 1 a** De populatie is Noord-Amerikaanse vrouwen. Hite maakte gebruik van de verklarende statistiek (met behulp van de steekproef wilde ze uitspraken doen over de populatie).
- b** Bijvoorbeeld leeftijd, wel/geen kinderen, religie, enzovoort.
- c** Iedere Noord-Amerikaanse vrouw had dan dezelfde kans moeten hebben om deel te nemen aan het onderzoek.
- d** Maar 4500 van de 100000 vrouwen die zijn benaderd stuurde gegevens terug. Dat zijn zeer waarschijnlijk vooral vrouwen die 'iets te melden' hebben. De steekproef is dus zwaar vertekend.
- Ze wist dat dus alleen zeker van de vrouwen in haar steekproef. De percentages voor de totale groep Noord-Amerikaanse vrouwen kunnen heel anders geweest zijn, ondanks haar representatieve steekproef. Toeval blijft een rol spelen.

2 a de kwalitatieve variabele *land*

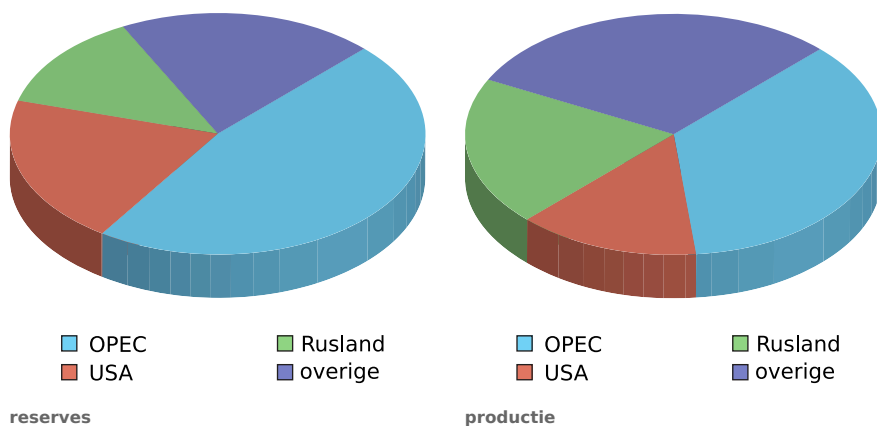
- b** Het uitlezen van waarden uit dergelijke diagrammen is altijd wat onnauwkeurig. Binnen bepaalde grenzen kunnen afwijkingen in bepaalde waarden goedgekeurd worden.

Totale aantal oliereserves in miljarden vaten $\approx 533,5$. Aantal oliereserves in miljarden vaten van OPEC-landen $\approx 250,5$: $\left(\frac{250,5}{533,5}\right) \cdot 100 \approx 47\%$.

- c** Het uitlezen van waarden uit dergelijke diagrammen is altijd wat onnauwkeurig. Binnen bepaalde grenzen kunnen afwijkingen in bepaalde waarden goedgekeurd worden.

11,45 op de 54,3 miljoen barrels geeft een proportie van $\approx 0,21$.

- d** Zie de figuur.



- e** De OPEC-landen en de VS hebben van de totale oliereserves een veel groter deel in handen dan van de totale olieproductie.

Andersom produceren Rusland en de overige landen veel meer olie dan zij naar verhouding aan oliereserves in handen hebben.

- 3 a** Het gemiddelde plus twee de standaardafwijking (95% van de pakken melk) geeft 1,01 liter. Dus tussen de grenzen $1,002 - 2 \cdot 0,004 = 0,994$ en $1,002 + 2 \cdot 0,004 = 1,010$ ligt 95% van de inhoud die je voor de pakken melk vindt.

Voor meer dan 1,010 liter blijft dus 2,5% over.

- de middelste 95% heeft een inhoud die in ieder geval kleiner is dan 1,010 L;
- $95 + \frac{5}{2} = 97,5\%$ van de melkpakken heeft een inhoud die kleiner is dan 1,010 L;
- $100 - 97,5 = 2,5\%$ heeft een inhoud van meer dan 1,010 L.

Het antwoord is niet waar.

- b** 0,998 is de waarde die één standaardafwijking kleiner is dan de gemiddelde inhoud. 16% van de pakken bevat minder dan 0,998 L.

1,006 is de waarde die één standaardafwijking groter is dan de gemiddelde inhoud. 16% van de pakken bevat meer dan 1,006 L.

Het antwoord is waar.

- c 50% van de pakken bevat minder dan 1,002 L en 50% bevat meer dan 1,002 L.

Het antwoord is niet waar.

- d Dit is waar. In een rechts scheve verdeling (de top ligt iets naar rechts ten opzichte van het midden) is het gemiddelde kleiner dan de mediaan en dus weet je zeker dat meer dan 50% groter is dan het gemiddelde.

4 a $\frac{147}{3000} \approx 4,9\%$

- b De klassenbreedtes zijn niet gelijk, dus je kunt zo geen conclusies trekken uit de verdeling.
c In een cumulatieve (relatieve) frequentiepolygoon zet je somwaarden bij de rechtergrenzen van de leeftijdsklassen. Deze punten geven 100% nauwkeurig het aantal personen weer dat een leeftijd heeft die kleiner is dan de bijbehorende somwaarde.

Bij een frequentiepolygoon en een histogram krijg je vervorming vanwege de verschillende klassenbreedtes.

Bij een cirkeldiagram kun je helemaal niet zien dat er verschil in klassenbreedte is.

- d De relatieve frequenties van bedrijf A zijn 8,9%, 13,3%, 41,4%, 24,9%, 6,8% en 4,7%.

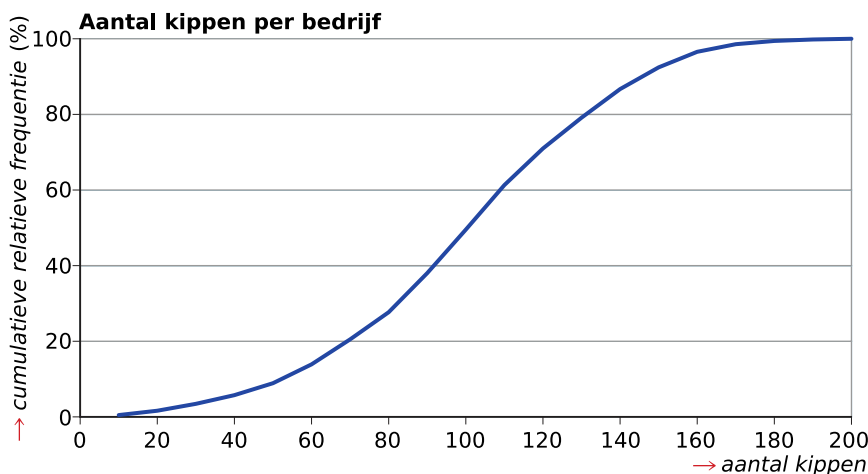
De relatieve frequenties van bedrijf B zijn 3,35%, 10,25%, 40,05%, 28,1% 13,25% en 5%.

Beide frequentietabellen hebben exact dezelfde klassenindeling en daarom kun je ze met elkaar vergelijken. De verdelingen lijken erg op elkaar, er zit alleen wat verschil in de opbouw van de allerjongste klassen en de alleroudste. Bedrijf A lijkt iets meer jongere werknemers te hebben en bedrijf B iets meer oudere werknemers.

Let op! Je kunt verder niets zeggen over de vorm van de verdeling vanwege de verkeerde indruk die de ongelijke klassenindeling geeft.

- 5 a een discrete kwantitatieve variabele

- b Houd rekening met de percentages op het totale aantal kippen van 1044 en werk met de rechterklassengrenzen.



- c De mediaan en beide kwartielen kun je op twee manieren schatten.
- Op basis van je cumulatieve relatieve frequentiepolygoon lees je af welke waarden de cumulatieve relatieve frequentiepolygoon van respectievelijk 25% (Q_1) en 50% (mediaan) en 75% (Q_3) heeft.
 - Op basis van de frequentietabel.

De mediaan is ongeveer 105,5. $Q_1 \approx 75,5$ en $Q_3 \approx 125,5$.

- d Het gemiddelde bepaal je met behulp van de klassenmiddens 5,5 tot en met 195,5.

Ook de standaardafwijking. Die kun je ook vanuit de cumulatieve relatieve frequentiepolygoon bepalen. Lees de mediaan (waarde bij 50%) af en lees af welke waarde bij 16% zit. Bereken het verschil tussen beide waarden.

- e De grens van de middelste 95% zit bij de gemiddelde waarde plus tweemaal de standaardafwijking,

dus bij 171. $\frac{5}{2} = 2,5\%$.

2,5% van de bedrijven heeft dus meer dan 171 kippen.

De 2,5% bedrijven met de grootste hoeveelheid kippen zijn $9 + 4 + 2 = 15$ bedrijven.

6 a Deze opgave zou je moeten doen met gegevens van de eigen school!

- b** Eigen antwoord.
- c** Eigen antwoord.
- d** Eigen antwoord.
- e** Eigen antwoord.
- f** Eigen antwoord.
- g** Eigen antwoord.
- h** Eigen antwoord.
- i** Eigen antwoord.
- j** Eigen antwoord.
- k** Eigen antwoord.

7 a Staafdiagrammen/histogrammen.

- b** 1900: ongeveer $350000 + 350000 = 700000$
1950: ongeveer $580000 + 580000 = 1160000$
- c** De staafjes bij 0–4 zijn in het diagram van 1950 veel langer dan in de andere drie.
- d** Het aantal ouderen neemt behoorlijk toe in verhouding tot het aantal jongeren. De staafjes van de hogere leeftijdscategorieën worden langer dan die van de jongere.
- e** De staafjes voor de vrouwen zijn bij hoge leeftijden langer dan die van de mannen.
- f** 1900: 0–4 2050: 50–54
- g** De meest voorkomende leeftijd wordt steeds hoger, er komen dus naar verhouding weinig jongeren/kinderen bij.
- h** Dat wordt schatten... De mediaan ligt in 1900 ergens bij de 20 jaar en in 2050 ergens bij de 40 jaar. Het eerste kwartiel ligt in 1900 onder de 10 jaar en in 2050 bij de 20 jaar. Het derde kwartiel ligt in 1900 bij de 40 jaar en in 2050 bij de 60 jaar.

8 a Voor de oversteeptijden geldt: maximum = $\frac{20}{0,30} \approx 67$ seconden $Q_3 = \frac{20}{0,75} \approx 27$ seconden mediaan = $\frac{20}{0,90} \approx 22$ seconden $Q_1 = \frac{20}{1,05} \approx 19$ seconden minimum = $\frac{20}{1,60} = 12,5$ seconden

- b** Lees de zes oversteeptijden bij een voertuigintensiteit van 800 per uur af. Teken een grafiek door de zes punten (5; 5,1), (10; 7,2), (15; 8,2), (20; 9,2), (25; 10,1) en (30; 10,9).
- c** De snelheden variëren van 2,0 tot 2,6 m/s. De oversteeptijden variëren van 10 tot 7,7 sec. De bijbehorende wachttijden zijn ongeveer 27 en 13 sec. De kortste somtijd is ongeveer 21 seconden en de langste is ongeveer 37 seconden.

9 a Als de zonen allemaal studenten van een Londense universiteit zijn, zijn ze niet aselekt uit de Engelse bevolking gekozen

- b** Teken een grenslijn, bijvoorbeeld de lijn door (62, 60) en (74, 72) en als andere grenslijn de lijn door (60, 62) en (72, 74). Arceer het gebied tussen deze lijnen.
- c** Er zijn veel zonen duidelijk langer dan hun vader en weinig duidelijk korter. Waar vaders en zonen ongeveer even lang zijn, zijn zonen net zo vaak groter als kleiner dan hun vader. Ja, zonen zijn gemiddeld langer.
- d** mediaan = 68,6 $Q_1 = 66,9$ $Q_3 = 70,5$ Kleinste en grootste waarneming zijn 59,7 en 78,6.
- e** Het gemiddelde was $68,6 \cdot 2,54 \approx 174$ cm en de standaarddeviatie was ongeveer $2,7 \cdot 2,54 \approx 7$ cm. Dus zat 100 jaar geleden 68% van de jonge mannen tussen 167 en 181 cm. Het aantal jonge mannen van 182 cm of meer was dus iets kleiner dan $\frac{100-68}{2} = 16\%$ van alle jonge mannen uit die tijd.

7

Lineair programmeren

7.1	Functies van meerdere variabelen	74
7.2	Beslissingsproblemen	81
7.3	De Oplosser in Excel	88
7.4	De simplexmethode	93
7.5	Totaalbeeld	103

7.1 Functies van meerdere variabelen

V1 a Eigen antwoord.

b $R = 3,50 \cdot k + 5,00 \cdot v$

c Zie de.

- 1 a** Het maximaal aantal plaatsen is 300: $k + v \leq 300$
 Per twee kinderen is er minimaal één volwassene: $k \leq 2v$
 Het aantal verkochte kaartjes is positief of 0: $k \geq 0$ en $v \geq 0$

b Het gaat om aantallen mensen.

c $R = 3,50 \cdot 200 + 5,00 \cdot 100 = 1200,00$ euro.

2 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 350 &= 3,50k + 5,00v \\ 5,00v &= -3,50k + 350 \\ v &= -0,7k + 70 \end{aligned}$$

b Oplossing:

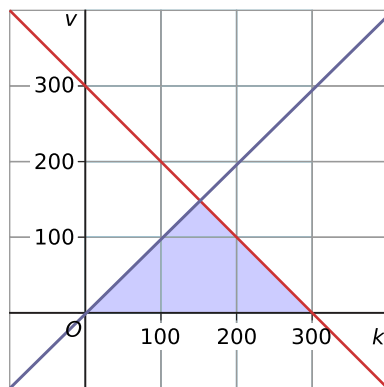
$$\begin{aligned} 210 &= 3,50k + 5,00v \\ 5,00v &= -3,50k + 210 \\ v &= -0,7k + 42 \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 1050 &= 3,50 \cdot 40 + 5,00v \\ 1050 &= 140 + 5,00v \\ 5,00v &= 910 \\ v &= 182 \end{aligned}$$

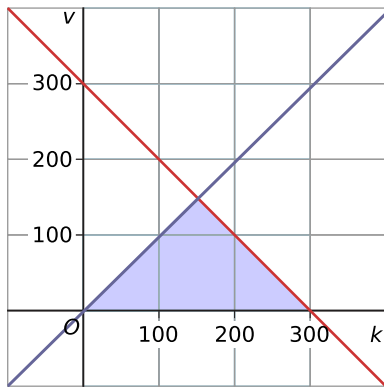
- 3 a** Het aantal volwassenen (v) moet kleiner zijn dan of gelijk zijn aan het aantal kinderen (k)
 Hieruit volgt: $v \leq k$

b Zie de figuur.



— $v = 300 - k$
 — $v = k$

- c** $R = 500$ geeft $3,50k + 5,00v = 500$ en hieruit volgt: $v = -0,7k + 100$.
 $R = 1000$ geeft $3,50k + 5,00v = 1000$ en hieruit volgt: $v = -0,7k + 200$.

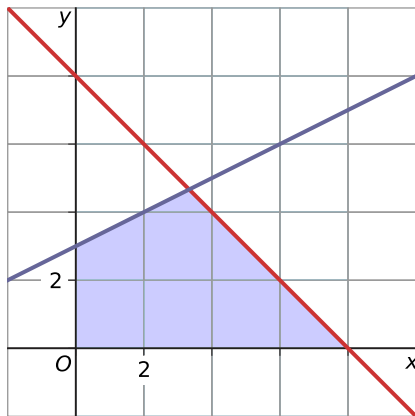


— $v = 300 - k$

— $v = k$

- 4 a**
- $x + y \leq 8$ geeft: $y \leq 8 - x$
 - $y - 0,5x \leq 3$ geeft: $y \leq 3 + 0,5x$

Teken deze lijnen en arceer het gebied eronder tot aan de x-as en y-as.



— $y = 8 - x$

— $y = 3 + 0,5x$

- b** De niveaulijnen bij $z = 0$, $z = 5$ en $z = 10$ zijn:
- $z = 0$ geeft $3x + y = 0$ en hieruit volgt: $y = -3x$.
 - $z = 5$ geeft $3x + y = 2$ en hieruit volgt: $y = 2 - 3x$.
 - $z = 10$ geeft $3x + y = 10$ en hieruit volgt: $y = 10 - 3x$.

- 5 a** De kosten voor appelsap zijn € 1,80 per pak en voor sinaasappelsap € 2,10. De totale kosten zijn dan:
 $K = 1,80x + 2,10y$

- b** Je kunt geen negatief aantal pakken kopen, zodat:

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$

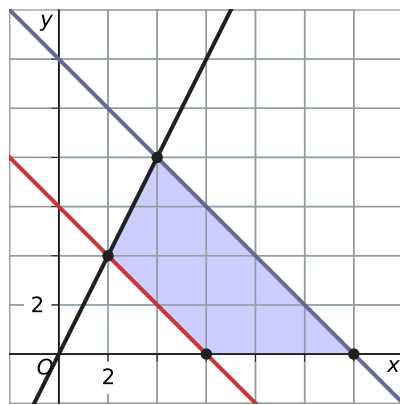
Je wilt minstens 6 en maximaal 12 pakken kopen. Hieruit volgt:

- $x + y \geq 6$
- $x + y \leq 12$

Er zijn hoogstens 2 keer zo veel pakken sinaasappelsap als appelsap. Dit geeft:

- $y \leq 2x$

- c**
- $x \geq 0$ geeft alle punten rechts van de y-as.
 - $y \geq 0$ geeft alle punten boven de x-as.
 - $x + y \geq 6$ geeft de lijn $y = 6 - x$ en het gebied daarboven.
 - $x + y \leq 12$ geeft de lijn $y = 12 - x$ en het gebied daarboven.
 - $y \leq 2x$ geeft de lijn $y = 2x$ en het gebied daarboven.



$$\begin{aligned} \text{— } y &= 6 - x \\ \text{— } y &= 12 - x \\ \text{— } y &= 2x \end{aligned}$$

6 a Er zijn verschillende manieren om dit op te lossen.

Manier 1:

Dit punt moet op de lijn $x + y = 12$ liggen en ook op kromme $y = \frac{p}{x}$. Verder moet in dit punt de grafiek van $\frac{p}{x}$ aan de lijn $y = -x + 12$ raken, dus moet gelden dat $\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{x^2} = -1$. Uit dit laatste volgt $x = \sqrt{p}$ en $y = \sqrt{p}$ (de negatieve waarden vervallen). Met $x + y = 12$ geeft dit $2\sqrt{p} = 12$, dus $p = 36$. Het raakpunt vind je nu door $y = \frac{36}{x}$ te substitueren in $x + y = 12$. Je krijgt dan: $x + \frac{36}{x} = 12$ en $x^2 - 12x + 36 = 0$, zodat $(x - 6)^2 = 0$ en $x = 6$.

Dan is $y = 6$. Het gevraagde (raak)punt heeft dus coördinaten (6,6).

Manier 2:

De vergelijking $\frac{p}{x} = -x + 12$ mag maar één oplossing hebben. Vermenigvuldigen met x en herleiden op 0 levert: $x^2 - 12x + p = 0$. De discriminant moet 0 zijn (omdat er maar één oplossing mag zijn). Dus $D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 144 - 4p = 0$. Dit geeft als oplossing $p = 36$.

Invullen in de vergelijking geeft $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2 = 0$, ofwel $x = 6$. Dan is $y = 6$.

Het gevraagde (raak)punt heeft dus coördinaten (6,6).

Manier 3:

Omdat $x + y = 12$ kun je de in de doelfunctie y vervangen door $12 - x$: $z = x \cdot (12 - x)$ geeft $z = -x^2 + 12x$.

Je weet dat, als de grafiek van $y = \frac{p}{x}$ de lijn $x + y = 12$ raakt, z maximaal is.

z is maximaal in de top van de parabool $z = -x^2 + 12x$.

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-2} = 6 \text{ en } y_{\text{top}} = 6.$$

Het gevraagde (raak)punt heeft dus coördinaten (6,6).

b $z = 6 \cdot 6 = 36$ (zie ook onderdeel a)

7 a De oppervlakte van het grasveld wordt berekend met lengte $\cdot$ breedte.

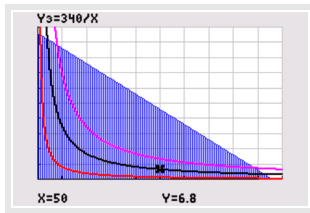
Dit geeft: $A = x \cdot y$

- b**
- $x \geq 0$
 - $y \geq 0$
 - $2(x + 8) + 2(y + 16) \leq 240$, ofwel $x + y \leq 96$

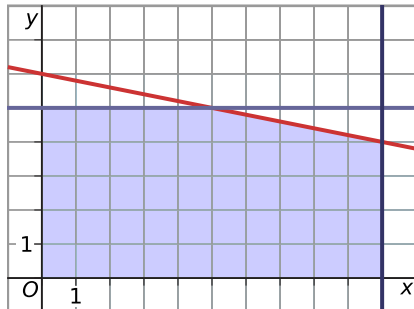
c Slechts de positieve getallen kunnen tot het toegestane gebied behoren door de eerste twee voorwaarden. Daarnaast moeten de punten zich onder de lijn $x + y = 96$ ofwel $y = 96 - x$ bevinden.

- d**
- $A = 83$ geeft $x \cdot y = 83$ en hieruit volgt: $y = \frac{83}{x}$
 - $A = 340$ geeft $x \cdot y = 340$ en hieruit volgt: $y = \frac{340}{x}$

- $A = 682$ geeft $x \cdot y = 682$ en hieruit volgt: $y = \frac{682}{x}$

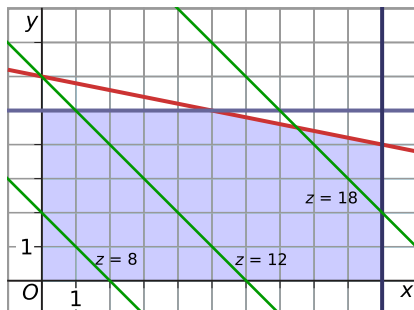


- 8 a** Je kunt ook de GR gebruiken. Venster bijvoorbeeld: $[0,10] \times [0,10]$.
Schrijf randvoorwaarde $x + 5y \leq 30$ om tot grenslijn $y = 6 - 0,2x$ en voer deze formule in op de grafische rekenmachine.
Voer ook de formule $y = 5$ in.



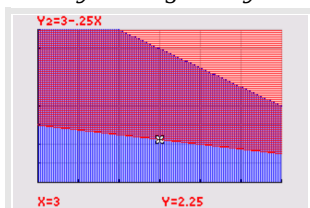
— $y = 6 - 0,2x$
— $x = 10$
— $y = 5$

- b** De niveaulijnen bij $z = 8$, $z = 12$ en $z = 18$ zijn:
- $z = 8$ geeft $x + y + 6 = 8$ en hieruit volgt: $y = 2 - x$
 - $z = 12$ geeft $x + y + 6 = 12$ en hieruit volgt: $y = 6 - x$
 - $z = 18$ geeft $x + y + 6 = 18$ en hieruit volgt: $y = 12 - x$

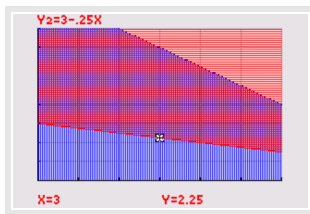


— $y = 6 - 0,2x$
— $x = 10$
— $y = 5$

- 9 a** Gebruik de GR met venster bijvoorbeeld: $[0,6] \times [0,8]$.
 $x + y \leq 10$ geeft: $y \leq 10 - x$.
 $x + 4y \geq 12$ geeft: $y \geq 3 - 0,25x$.



- b** De niveaulijnen bij $z = 5$, $z = 10$ en $z = 15$ zijn:
- $z = 5$ geeft $20 - 2x - y = 5$ en dus $y = 15 - 2x$;
 - $z = 10$ geeft $20 - 2x - y = 10$ en dus $y = 10 - 2x$;
 - $z = 15$ geeft $20 - 2x - y = 15$ en dus $y = 5 - 2x$.



- 10 a** De doelfunctie gaat over de winst, die is € 300 voor A en € 500 voor B.
 $W = 300a + 500b$ waarin a het aantal 1000 kg van variant A en b het aantal 1000 kg van variant B per week is.

- b** Er kan geen negatief aantal worden geproduceerd, zodat:

- $a \geq 0$
- $b \geq 0$

Er is in totaal 62 uur beschikbaar, voor A wordt 4 uur per 1000 kg gebruikt en voor B 5 uur per 1000 kg.

- $4a + 5b \leq 62$

Voor A is 3000 kg grondstof nodig en voor B 24000 kg. Er is niet meer dan 150000 in totaal.

- $3a + 24b \leq 150$

- c** GR met venster $[0,15] \times [0,15]$.

- $4a + 5b \leq 62$ geeft de grenslijn: $b = 12,4 - 0,8a$
- $3a + 24b \leq 150$ geeft de grenslijn: $b = 6,25 - 0,125a$

Het toegestane gebied bevindt zich onder deze lijnen. De randvoorwaarden $a \geq 0$ en $b \geq 0$ bepalen de andere grenzen.

- 11 a** De winst is € 300,00 voor aardappelen en € 270,00 voor bieten op 100 m². $W = 300a + 270b$ waarin a het aantal keer 100 m² aardappelen en b het aantal keer 100 m² bieten is.

- b** Er kan niet een negatief aantal m² worden verbouwd, zodat:

- $a \geq 0$
- $b \geq 0$

De boer heeft maximaal 1500 m² land beschikbaar, hieruit volgt:

- $a + b \leq 15$

Er zijn 55 werkdagen beschikbaar, voor 100 m² aardappelen zijn er 4 nodig en voor bieten 3.

- $4a + 3b \leq 55$

De kosten bedragen € 16,00 voor 100 m² aardappelen en € 40,00 voor bieten. Er is maximaal € 480,00 beschikbaar.

- $16a + 40b \leq 480$

- c** GR met venster $[0,15] \times [0,15]$.

- $a + b \leq 15$ geeft de grenslijn: $b = 15 - a$
- $4a + 3b \leq 55$ geeft de grenslijn: $b = 18\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3}a$
- $16a + 40b \leq 480$ geeft de grenslijn: $b = 12 - 0,4a$

Het toegestane gebied bevindt zich onder deze lijnen. De randvoorwaarden $a \geq 0$ en $b \geq 0$ bepalen de andere grenzen.

- 12 a** Het gebied wordt ingesloten door de grenslijnen:

- $y \leq 5$
- $y \geq -5$
- $y \geq -8 - x$
- $y \leq 8 - x$
- $y \leq x + 8$
- $y \geq x - 8$

Kies voor de niveaulijnen bijvoorbeeld $z = 25$ en $z = 50$ en $z = 100$. Dit geeft drie cirkels:

- $z = 25$ geeft $25 = x^2 + y^2$ en hieruit volgt: $y = \sqrt{25 - x^2}$ en $y = -\sqrt{25 - x^2}$.
- $z = 50$ geeft $50 = x^2 + y^2$ en hieruit volgt: $y = \sqrt{50 - x^2}$ en $y = -\sqrt{50 - x^2}$.
- $z = 100$ geeft $100 = x^2 + y^2$ en hieruit volgt: $y = \sqrt{100 - x^2}$ en $y = -\sqrt{100 - x^2}$.

b Uit de tekening met het toegestane gebied en niveaulijnen blijkt:

- hoe hoger of groter de niveaulijn (voor positieve wortel), hoe hoger de bijbehorende z -waarde;
- dat er een niveaulijn zal zijn voor een z -waarde tussen 25 en 50 die nog net een raakpunt met het toegestane gebied zal hebben.

Deze hoogste of grootste niveaulijn zal een raakpunt met grenslijn $y = 8 - x$ hebben, ergens tussen het snijpunt van $y = 8 - x$ met grenslijn $y = 5$ en grenslijn $x = 5$.

Als $y = 5$, dan geldt $5 = 8 - x$ en heeft dat snijpunt x -coördinaat 3.

De punten op lijn $y = 8 - x$ met gehele coördinaatwaarden zijn de punten (3,5), (4,4) en (5,3).

Deze puntenparen geven respectievelijk een z -waarde van $3^2 + 5^2 = 34$, $4^2 + 4^2 = 32$ en $5^2 + 3^2 = 34$. De maximale z -waarde is 34.

De minimale z -waarde moet wel 0 zijn, namelijk als $x = y = 0$.

Bedenk dat z nooit negatief kan zijn omdat het een som van twee kwadraten is.

13 a Een reep kost € 0,20 aan biscuit, € 0,10 aan karamel en € 0,30 aan chocolade, dat is € 0,60 aan grondstoffen. Daar komt nog € 0,75 aan verwerkingskosten bij. Een reep kost in totaal € 1,35 per stuk.

Ze worden voor € 1,50 per stuk verkocht. De winst is € 0,15 per stuk, dus de totale winst per week is naar verwachting $W = 60000 \cdot 0,15 = 9000,00$ euro.

b De totale winst is het aantal repen vermenigvuldigd met de winst per reep.

$x + y + z = 50$ en hieruit volgt: $z = 50 - x - y$

De winst per reep is:

$$p = 1,50 - (0,75 + 0,015x + 0,01y + 0,01(50 - x - y)) = 0,25 - 0,005x$$

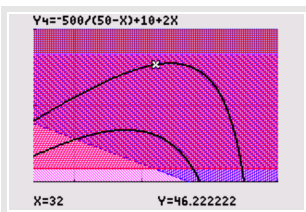
De totale winst is $W = q \cdot p$, zodat:

$$\begin{aligned} W &= (20000 + 4000x - 2000y)(0,25 - 0,005x) \\ &= 200(100 + 20x - 10y)(0,25 - 0,005x) \\ &= (100 + 20x - 10y)(50 - x) \end{aligned}$$

- c**
- $5 \leq y \leq 50$, want er is niet minder dan 5 gram biscuit, maar minder dan 50 gram.
 - $14 \leq x \leq 50$, want er is ten minste 14 gram chocolade, maar niet meer dan 50 gram.
 - $x + y \geq 37$, want er is niet meer dan 13 gram karamel.

d Venster: $[14,50] \times [0,60]$.

Teken hierin de ongelijkheden: $y \geq 37 - x$, $y \geq 5$ en $y \leq 50$.



De niveaulijnen van $W = (100 + 20x - 10y)(50 - x)$ zijn:

- $W = 5000 = (100 + 20x - 10y)(50 - x)$ geeft: $y = -\frac{500}{50-x} + 10 + 2x$
- $W = 10000 = (100 + 20x - 10y)(50 - x)$ geeft: $y = -\frac{1000}{50-x} + 10 + 2x$

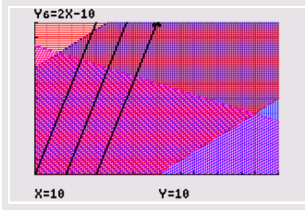
14 a Gebruik de GR met venster bijvoorbeeld: $[0,20] \times [0,10]$.

$x \geq 2y - 14$ geeft: $y \leq 0,5x + 7$.

$x \leq 2y + 10$ geeft: $y \geq 0,5x - 5$.

$x + 4y \leq 34$ geeft: $y \leq 8,5 - 0,25x$.

De niveaulijnen zijn $z = 0$, $z = 5$ en $z = 10$.



- b** z is maximaal in het snijpunt van de lijnen $y = 0,5x - 5$ en $y = 8,5 - 0,25x$.
 Dit snijpunt is $(18,4)$.
 Dus is de maximale waarde $z = 2 \cdot 18 - 4 = 32$.
 z is minimaal in het snijpunt van de lijnen $y = 0,5x + 7$ en $x = 0$.
 Dit snijpunt is $(0,7)$.
 Dus is de minimale waarde $z = 2 \cdot 0 - 7 = -7$.

7.2 Beslissingsproblemen

V1 Zie de uitleg.

- 1 a**
- $0 \leq x \leq 50$ (maximaal 50 fietsen)
 - $y \geq 0$ (geen beperkingen voor e-bikes)
 - $500x + 900y \leq 95000$ (er is maximaal € 95000,00 om fietsen en e-bikes in te kopen)
 - $0,5x + 0,5y \leq 60$ (er is maximaal 60 m² opslag)

Zie voor de figuur de uitleg. Gebruik je GR met venster $[0,50] \times [0,120]$.

Bij $W = 30000$ hoort $y_3 = (300 - 2x)/3$.

Bij $W = 20000$ hoort $y_3 = (200 - 2x)/3$.

- b** Je moet het snijpunt van de grenslijnen $500x + 900y = 95000$ en $0,5x + 0,5y = 60$ bepalen. Uit de tweede vergelijking volgt $x = 120 - y$. Vul dit in de eerste vergelijking in:

$$500(120 - y) + 900y = 950000$$

$$400y = 35000$$

$$y = 87,5$$

De bijbehorende x -waarde is $x = 32,5$.

De maximale winst vind je in het punt $(32,5; 87,5)$.

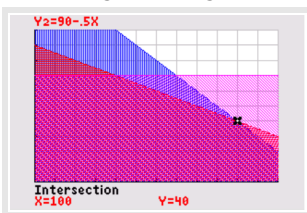
Maar omdat je geen halve fietsen en e-bikes kunt verkopen kijk je naar de vier punten met gehele x en y om dit punt heen. Alleen de twee punten $(32,87)$ en $(33,87)$ liggen binnen het toegestane gebied. Bereken voor de beide punten de winst. Het punt $(33,87)$ levert de meeste winst op, namelijk $W = 200 \cdot 33 + 300 \cdot 87 = 32700,00$ euro.

- c** In het snijpunt van $x = 0$ en $y = 0$ is W minimaal. Dit is in het punt $O(0,0)$.

2 a x is het aantal fietsen en y het aantal e-bikes per week.

- b**
- $0 \leq x \leq 120$ want er zijn maximaal 120 fietsen.
 - $0 \leq y \leq 70$ want er zijn maximaal 70 e-bikes.
 - $x + y \leq 140$ want er is opslagruimte voor maximaal 140 fietsen of e-bikes.
 - $x + 2y \leq 180$ want er zijn maximaal 180 remmen beschikbaar.
- c**
- $0 \leq x \leq 120$ en hieruit volgt venster: $x_{\min} = 0$ en $x_{\max} = 120$
 - $0 \leq y \leq 70$ geeft grenslijn: $y = 70$
 - $x + y \leq 140$ geeft grenslijn: $y = 140 - x$
 - $x + 2y \leq 180$ geeft grenslijn: $y = 90 - 0,5x$

Het toegestane gebied bevindt zich onder de grenslijnen en boven de x -as.



- d** De winst op een fiets bedraagt € 150,00 en op een e-bike € 450,00. Dit geeft $W = 150x + 450y$ als doelfunctie. De niveaulijnen zijn:

- $20000 = 150x + 450y$ en dit geeft: $y = 44\frac{4}{9} - \frac{1}{3}x$

- $30000 = 150x + 450y$ en dit geeft: $y = 66\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x$

- e** De winst is maximaal in het snijpunt van de lijnen $x + 2y = 180$ en $y = 70$. Dan is $x = 40$. Het snijpunt is $(40,70)$.

- f** $W = 150 \cdot 40 + 450 \cdot 70 = 37500,00$ euro.

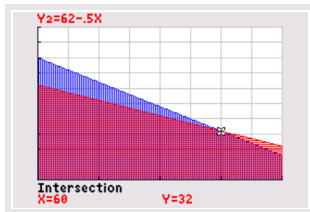
3 a De doelfunctie is $W = 0,5x + 0,8y$ en de randvoorwaarden zijn:

- $0 \leq x \leq 80$
- $y \geq 0$

- $1,20x + 1,50y \leq 120$
- $x + 2y \leq 124$

b Gebruik je GR met venster $[0,80] \times [0,100]$.

Neem $y_1 \leq 80 - 0,8x$ en $y_2 \leq 62 - 0,5x$.



c De hoekpunten van het toegestane gebied zijn:
 $O(0,0)$, $A(80,0)$, $B(80,16)$, $C(60,32)$ en $D(0,62)$

De winst W in deze punten is achtereenvolgens:

- in O : $W = 0$ euro;
- in A : $W = 0,5 \cdot 80 + 0,8 \cdot 0 = 40,00$ euro;
- in B : $W = 0,5 \cdot 80 + 0,8 \cdot 16 = 52,80$ euro;
- in C : $W = 0,5 \cdot 60 + 0,8 \cdot 32 = 55,60$ euro;
- in D : $W = 0,5 \cdot 0 + 0,8 \cdot 62 = 49,60$ euro.

De maximale winst W wordt in punt C behaald.

d De niveaulijn snijdt een grenslijn maar één keer tenzij de twee lijnen samenvallen, dit gebeurt als de grafiek van de winstfunctie (doelfunctie) evenwijdig loopt met één van de lijnstukken (grenzen) van het toegestane gebied

4 a Nu is de doelfunctie $W = 0,80x + 0,40y$, deze functie loopt evenwijdig met de lijn $0,4x + 0,2y = 6000$. Dat betekent dat de maximale winst in alle punten op het lijnstuk MN wordt behaald. Vul de coördinaten van punt M in. Deze maximale winst is nu $W = 0,80 \cdot 6000 + 0,40 \cdot 18000 = 12000,00$ euro.

b x en y hebben nu niet langer maximale waarden. Dit heeft geen invloed op de maximale winst.

5 a De doelfunctie wordt $W = 0,70x + 0,50y$ en de randvoorwaarden zijn:

- $0 \leq x \leq 12000$
- $0 \leq y \leq 20000$
- $0,3x + 0,2y \leq 6000$ in plaats van $0,4x + 0,2y \leq 6000$
- $0,2x + 0,3y \leq 6000$ in plaats van $0,1x + 0,3y \leq 6000$

b Gebruik de GR met venster $[0,12000] \times [0,30000]$.

Voer in: $y_1 \leq 30000 - 1,5x$, $y_2 \leq 20000 - \frac{2}{3}x$ en $y_3 \leq 20000$.

De niveaulijnen worden $y_4 = 10000 - 1,4x$ en $y_5 = 20000 - 1,4x$.

c W is maximaal op het toegestane gebied in $(12000,12000)$.

Van beide melanges zijn dat 12000 pakken.

$W = 0,70 \cdot 12000 + 0,50 \cdot 12000 = 144000,00$ euro.

6 a Gebruik de GR met venster $[5,32] \times [0,30000]$.

Voer in: $y_1 \leq 43 - 0,6x$ en $y_2 \leq 26 - 1,2x$.

Teken de niveaulijnen bij $W = 10$ en $W = 20$.

De niveaulijnen worden $y_3 = 10 - 2x$ en $y_4 = 20 - 2x$.

b Bereken eerst de coördinaten van alle hoekpunten die het toegestane gebied vormen.

- lijn $y = 0$ met lijn $12x + 10y = 260$, de coördinaat is: $A(21\frac{2}{3}; 0)$
- lijn $y = 0$ en $x = 32$, de coördinaat is: $B(32,0)$
- lijn $x = 32$ met lijn $3x + 5y = 215$, de coördinaat is: $C(32; 23,8)$
- lijn $x = 5$ met de lijn $3x + 5y = 215$, de coördinaat is: $D(5,40)$
- lijn $x = 5$ en $12x + 10y = 260$, de coördinaat is: $E(0,20)$

Bereken de waarde van de doelfunctie W in deze hoekpunten.

- In $A(21\frac{2}{3}; 0)$ is $W = 2 \cdot 21\frac{2}{3} + 0 = 43\frac{1}{3}$.
- In $B(32, 0)$ is $W = 2 \cdot 32 + 0 = 64$.
- In $C(32; 23,8)$ is $W = 2 \cdot 32 + 23,8 = 87,8$.
- In $D(5, 40)$ is $W = 2 \cdot 5 + 40 = 50$.
- In $E(0, 20)$ is $W = 2 \cdot 0 + 20 = 20$.

W is minimaal in $E(0, 20)$, namelijk $W = 20$.

W is maximaal in $C(32; 23,8)$, namelijk $W = 87,8$.

y is niet geheel, zoek de roosterpunten in het toegestane gebied die er het dichtstbij liggen en bereken in die punten hoeveel W is.

De roosterpunten die hieraan voldoen zijn $(32, 23)$ en $(31, 24)$.

In $(32, 23)$ is $W = 2 \cdot 32 + 23 = 87$ en in $(31, 24)$ is $W = 2 \cdot 31 + 24 = 86$.

W is maximaal 87.

7 a Omdat x en y beide groter dan 0 moeten zijn (zie de eerste twee voorwaarden), geldt automatisch dat: $20 + x + y \geq 0$

b Kijk naar de doelfunctie, K wordt kleiner wordt naarmate x groter wordt en y kleiner. Het vermoeden is dat K minimaal is in het punt $(50, 0)$. In dat punt is $K = 1060 - 2 \cdot 50 + 0 = 960$. De buurpunten van dat punt zijn $(0, 0)$ en $(50, 30)$. De waarden van K in deze twee punten zijn respectievelijk 1060 in $(0, 0)$ en 990 in $(50, 30)$. Dat betekent dat K inderdaad minimaal is in het punt $(50, 0)$.

8 a Zie de tabel.

	New York	Londen
Koeweit	140000	60000
Galveston	100000	50000
Caracas	60000	40000

De transportkosten zijn in dat geval:

$K = 0,38 \cdot 140000 + 0,35 \cdot 60000 + 0,10 \cdot 100000 + 0,22 \cdot 50000 + 0,18 \cdot 60000 + 0,25 \cdot 40000 = 116000$ dollar.

b Noem het aantal barrels dat van Koeweit naar New York gaat x en van Galveston naar New York y . In de tabel is weergegeven hoeveel barrels waarheen gaan. Het aantal barrels is in tienduizendtallen.

	New York	Londen	Totaal
Koeweit	x	$20 - x$	20
Galveston	y	$15 - y$	15
Caracas	$30 - x - y$	$15 - (20 - x) - (15 - y)$	10
Totaal	30	15	45

Dit levert de volgende randvoorwaarden op:

- $x \geq 0$ en $y \geq 0$
- $20 - x \geq 0$
- $15 - y \geq 0$
- $30 - x - y \geq 0$
- $15 - (20 - x) - (15 - y) = x + y - 20 \geq 0$.

De doelfunctie is de kostenfunctie K die minimaal moet worden gemaakt.

$K = 0,38 \cdot x + 0,35 \cdot (20 - x) + 0,10 \cdot y + 0,22 \cdot (15 - y) + 0,18 \cdot (30 - x - y) + 0,25 \cdot (x + y - 20)$

Herschrijf dit als $K = 0,1x - 0,05y + 10,7$ (in tienduizenden dollar).

Bekijk het toegestane gebied met twee niveaulijnen op je GR.

De kosten K zijn minimaal in het snijpunt M van de lijnen $y = 15$ en $x + y = 20$. Dat betekent dat het

snijpunt (5,15) is. De kosten zijn dan $K = 0,1 \cdot 5 - 0,05 \cdot 15 + 10,7 = 10,45$ maal tienduizend dollar, ofwel $K = 104500$ dollar.

9 a Gebruik de GR met venster $[0,50] \times [0,80]$.

Voer in: $y_1 \leq 80 - 0,5x$, $y_2 \leq 400 - 4x$ en $y_3 \leq 60$.

Teken de niveaulijnen bij $W = 10$ en $W = 20$.

De niveaulijnen worden $y_3 = 10 - 2x$ en $y_4 = 20 - 2x$.

b Omdat er vijf hoekpunten zijn, kost de randenwandelmethode veel tijd. Een mogelijkheid is om met enkele niveaulijnen te bekijken in welk hoekpunt het minimum en het maximum zullen liggen.

Het maximum zit bij het snijpunt M van de lijnen $x + 2y = 160$ en $4x + y = 400$. Uit de eerste vergelijking volgt $x = 160 - 2y$, dit invullen in de tweede vergelijking geeft:

$$4(160 - 2y) + y = 400$$

$$7y = 240$$

$$y = \frac{240}{7}$$

De bijbehorende x -waarde is $x = \frac{640}{7}$. Hieruit volgt $M\left(\frac{640}{7}, \frac{240}{7}\right)$.

Het maximum is $W\left(\frac{640}{7}, \frac{240}{7}\right) = \frac{880}{7} = 125\frac{5}{7}$.

Het minimum is $W(0,0) = 0$.

10 a Noem het aantal kinderfietsen x en het aantal e-bikes y .

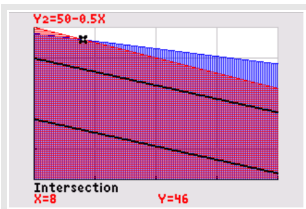
De randvoorwaarden, uitgedrukt als ongelijkheden zijn:

- $0 \leq x \leq 40$ en $y \geq 0$
- Kapitaal: $250x + 1000y \leq 48000$. Dit geeft niveaulijn $y = 48 - 0,25x$ met arcering eronder.
- Opslagruimte: $0,5x + y \leq 50$. Dit geeft niveaulijn $y = 50 - 0,5x$ met arcering eronder.

De handelaar wil een maximale winst W behalen, dit geeft als doelfunctie: $W = 200x + 450y$

$W = 9000$ geeft niveaulijn $y = 20 - \frac{4}{9}x$ en $W = 18000$ geeft niveaulijn $y = 40 - \frac{4}{9}x$.

Het toegestane gebied met niveaulijnen:



b De maximale winst wordt bereikt in het snijpunt van de lijnen $250x + 1000y = 48000$ en $0,5x + y = 50$. Uit de tweede vergelijking volgt $y = 50 - 0,5x$. Dit invullen in de eerste vergelijking geeft:

$$250x + 1000(50 - 0,5x) = 48000$$

$$-250x = -2000$$

$$x = 8$$

Het snijpunt is (8,46).

De maximale winst is $W(8,46) = 200 \cdot 8 + 450 \cdot 46 = 22300,00$ euro.

c Het snijpunt (8,46) verandert daardoor niet en daarom blijft de winst maximaal.

11 a Laat a het aantal kg aardappelen en b het aantal kg bonen zijn dat per pak nodig is.

De randvoorwaarden zijn dan:

- eiwit: $25a + 50b \geq 13$
- zetmeel: $400a + 200b \geq 100$
- vet: $40a + 40b \geq 18$
- $a \geq 0$ en $b \geq 0$

De kostenfunctie per pak is: $K = 0,15 \cdot a + 0,20 \cdot b$

Teken het toegestane gebied met twee niveaulijnen.

De kosten zijn minimaal in het snijpunt B van de lijnen $25a + 50b = 13$ en $40a + 40b = 18$.

De bijbehorende waarde voor a is $a = 0,38$.

De minimale kosten per pak liggen bij 0,38 kg aardappelen en 0,7 kg bonen per pak. De kosten bedragen dan $K = 0,15 \cdot 0,38 + 0,20 \cdot 0,07 = 0,071$ euro per pak, dat is € 7,10 per 100 pakken.

- b** 1 kg aardappelen levert $25 + 400 + 40 = 465$ gram aan voedingsstoffen en 1 kg bonen $50 + 200 + 40 = 290$ gram.

Het gaat nu om de doelfunctie $G = 0,465a + 0,29b$, deze moet minimaal zijn.

Het gewicht is minimaal in het snijpunt C van de lijnen $40a + 40b = 18$ en $400a + 200b = 100$.

De bijbehorende waarde van b is $b = 0,40$.

Per pak is het gewicht minimaal $G = 0,465 \cdot 0,05 + 0,29 \cdot 0,40 = 0,13925$ kg.

Per 100 pakken is dat 13,925 kg ofwel 13925 gram (bij 5 kg aardappelen en 40 kg bonen).

- 12 a** Als er x eenheden van Nederland naar A en y eenheden van Nederland naar B worden getransporteerd, dan ligt de rest vast:

	naar A	naar B	naar C
fabriek NL	x	y	$5000 - x - y$
fabriek CN	$3000 - x$	$4500 - y$	$7000 - (3000 - x) - (4500 - y)$
totaal	3000	4500	4500

De randvoorwaarden:

- $0 \leq x \leq 3000$
- $0 \leq y \leq 4500$
- $x + y \leq 5000$
- $x + y \geq 500$

De transportkosten zijn:

$$K = 4x + 2y + 5(5000 - x - y) + 5(3000 - x) + 2(4500 - y) + 3(x + y - 500) = 47500 - 3x - 2y.$$

- b** Gebruik de GR met venster $[0,50] \times [0,5000]$.

Voer in: $y_1 \leq 5000 - x$, $y_2 \leq 500 - x$ en $y_3 \leq 4500$.

Uit de figuur met het toegestane gebied en twee niveaulijnen blijkt dat de minimale kosten worden bereikt in punt $(3000, 2000)$. Dan gaan er 3000 eenheden vanuit Nederland naar A, 2000 naar B en 0 naar C. De kosten zijn dan $K = 47500 - 3 \cdot 3000 - 2 \cdot 2000 = 34500,00$ euro.

- 13 a** het aantal aluminium rackets x en het aantal kunststof rackets y .

- b** Randvoorwaarden:

- $x \geq 0$ en $y \geq 0$
- 25 machines: $\frac{25}{30}x + \frac{25}{150}y \leq 25$ ofwel $5x + y \leq 150$
- 20 mensen: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y \leq 20$ ofwel $5x + 2y \leq 200$

De fabriek wil maximale winst behalen. De winstfunctie is: $W = 55x + 20y$.

- c** Gebruik de GR met venster $[0,50] \times [0,80]$.

Voer in: $y_1 \leq 150 - 5x$ en $y_2 \leq 100 - 2,5x$.

Teken de niveaulijnen bij $W = 500$ en $W = 1500$.

De niveaulijnen worden $y_3 = 25 - 2,75x$ en $y_4 = 75 - 2,75x$.

- d** De maximale winst wordt bereikt in het snijpunt M van de lijnen $5x + y = 150$ en $5x + 2y = 200$. Herleid de eerste vergelijking tot $y = 150 - 5x$. Dit invullen in de tweede vergelijking geeft:

$$\begin{aligned} 5x + 2(150 - 5x) &= 200 \\ -5x &= -100 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

De bijbehorende y -waarde is $y = 50$.

Het snijpunt is $M(20,50)$.

De maximale winst is $W(20,50) = 55 \cdot 20 + 20 \cdot 50 = 2100,00$ euro per dag.

- e Voorwaarde $5x + y \leq 150$ verandert in $5x + y \leq 156$, want het aantal machines neemt met 4% ($\frac{1}{25}$ deel) toe. Dat betekent ook dat het aantal rackets met 4% toeneemt, van 150 naar 156. Het snijpunt M van lijn $5x + y = 156$ met lijn $5x + 2y = 200$. Uit de eerste vergelijking volgt $y = 156 - 5x$, dit invullen in de tweede vergelijking geeft:

$$\begin{aligned} 5x + 2(156 - 5x) &= 200 \\ -5x &= -112 \\ x &= 22,4 \end{aligned}$$

De bijbehorende y -waarde is 44.

Je kunt niet 22,4 aluminium rackets maken, zodat $x = 22$, maar dan kan y wel nog net 45 zijn.

De maximale winst is $W(22,45) = 55 \cdot 22 + 20 \cdot 45 = 2110,00$ euro per dag.

- f Voorwaarde $5x + 2y \leq 200$ verandert in $5x + 2y \leq 210$, want het aantal werknemers neemt met 5% ($\frac{1}{20}$ deel) toe. Dat betekent dat het aantal rackets met 5% toeneemt, van 200 naar 210. Het snijpunt M van lijn $5x + y = 150$ met lijn $5x + 2y = 210$ is nu $M(18,60)$. De maximale winst is $W(18,60) = 55 \cdot 18 + 20 \cdot 60 = 2190,00$ euro per dag.

14 a De verhoudingen sinaasappel en perzik:

	Sizik = x	Pernaas = y
sinaasappelsap	18	15
perziksap	4	1
	22	16

Voor sinaasappelsap geldt de randvoorwaarde:

$$\frac{4}{22}x + \frac{1}{16}y \leq 1000 \text{ ofwel } \frac{2}{11}x + \frac{1}{16}y \leq 1000 \text{ met grenslijn } y = 16000 - 2\frac{10}{11}x$$

Voor perziksap geldt randvoorwaarde: $\frac{18}{22}x + \frac{15}{16}y \leq 6600$ ofwel $\frac{9}{11}x + \frac{15}{16}y \leq 6600$ met grenslijn

$$y = 7040 - \frac{48}{55}x$$

Verdere randvoorwaarden zijn: $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

De doelfunctie is de winstfunctie $W = \frac{1000}{2200}x + \frac{500}{1600}y$ ofwel $W = \frac{5}{11}x + \frac{5}{16}y$.

Met niveaulijnen of de randenwandelmethode is zichtbaar dat het snijpunt tussen de twee eerder genoemde grenslijnen de maximale winst oplevert. Dan geldt:

$$16000 - 2\frac{10}{11}x = 7040 - \frac{48}{55}x$$

Hieruit volgt: $x = 4400$ L Sizik en $y = 3200$ L Pernaas en dat levert een maximale winst $W = \frac{5}{11} \cdot 4400 + \frac{5}{16} \cdot 3200 = 3000,00$ euro op.

- b 4400 liter Sizik bestaat voor $\frac{18}{22}$ deel uit sinaasappel ofwel uit 3600 liter sinaasappelsap.

3200 liter Pernaas bestaat uit $\frac{15}{16}$ deel uit sinaasappelsap ofwel uit 3000 liter sinaasappelsap.

Samen is dat 6600 liter sinaasappelsap en dat is precies wat de fabrikant had ingekocht.

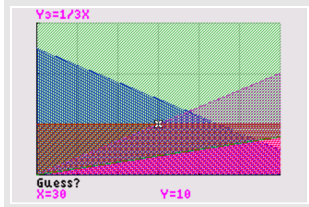
Zo blijkt ook dat er respectievelijk 800 en 200 liter perziksap is gebruikt en dat is samen precies de ingekochte 1000 liter perziksap.

- 15 a**
- $x \geq 0$ en $y \geq 0$
 - $x + 3y \leq 75$ (Eén autobus neemt drie plekken in en er zijn in totaal 75 plekken.)
 - $x \geq 3y$ en $x \leq 8y$ (Er zijn minstens drie keer zo veel en hoogstens acht keer zo veel auto's als bussen,)
 - $y \leq 10$ (Er zijn maximaal 10 autobussen.)

b Gebruik de randvoorwaarden om de grenslijnen te bepalen.

- $x \geq 0$ en $y \geq 0$
- $x + 3y \leq 75$ geeft: $y = 25 - \frac{1}{3}x$
- $x \geq 3y$ en $x \leq 8y$ geven: $y = \frac{1}{3}x$ en $y = \frac{1}{8}x$
- $y \leq 10$ geeft: $y = 10$

GR met venster $[0,60] \times [0,30]$.



c De opbrengstfunctie is: $O = 8x + 20y$.

Het maximum wordt bereikt in het snijpunt M van de lijnen $x = 8y$ en $x + 3y = 75$. Substitueren van de eerste vergelijking in de tweede geeft $11y = 75$, ofwel $y = \frac{75}{11}$ en dan is $x = \frac{600}{11}$. Maar omdat het om aantallen gaat, moeten x en y geheel zijn. Het roosterpunt dat het dichtst in de buurt van M ligt (en binnen het toegestane gebied) is $(54,7)$.

De opbrengst is maximaal bij 54 auto's en 7 autobussen: $O = 8 \cdot 54 + 20 \cdot 7 = 572,00$ euro.

16 Grenslijn voorwaarde B:

Er is ten minste $2,8x \text{ m}^3$ boven $1,80 \text{ m}$ nodig.

Er is 200 m^2 vloeroppervlak, zodat er ten minste $\frac{2,8x}{200} = 0,014x \text{ m}$ hoogte boven $1,80 \text{ m}$ nodig is.

Daar komt dan nog $1,80 \text{ m}$ bij, zodat $h \geq 0,014x + 1,8$ met een vergelijkbare grenslijn.

Voorwaarde B is het strengst op het gedeelte tussen de twee snijpunten.

Grenslijn voorwaarde A:

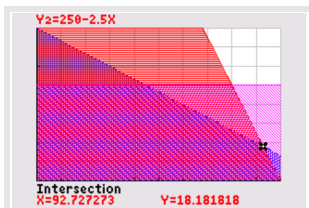
De inhoud per persoon is $\left(200 \frac{h}{x}\right) \text{ m}^3$ en daar geldt voor $\left(200 \frac{h}{x}\right) \geq 7$ ofwel $h \geq 0,035x$ met vergelijkbare grenslijn.

Voor het linker snijpunt geldt $0,014x + 1,8 = 2,70$ en dat geeft $x = 64,3$.

Voor het rechter snijpunt geldt $0,014x + 1,8 = 0,0375x$ en dat geeft $x = 76,6$.

Voorwaarde B is de strengste voorwaarde in het geval er 65 tot en met 76 personen in deze werkplaats werken.

17 a Zie figuur. GR met venster $[0,100] \times [0,80]$.



b Je ziet dat het minimum zit bij het snijpunt van de lijnen $2x + 3y = 240$ en $5x + 2y = 500$, dus in $\left(\frac{1020}{11}, \frac{200}{11}\right)$. Dit maximum is dus $W = 2000 - \frac{1220}{11}$. Het maximum is $W(0,0) = 2000$.

18 a Neem x het aantal type I en y het aantal type II. Dan geldt: $0 \leq x \leq 50$, $0 \leq y \leq 50$, $x + y \leq 70$ en $x + 1,5y \leq 110$.

b Opbrengst: $R = 2400x + 3000y$. De maximale opbrengst is € 198 000,-; er worden dan 20 type I en 50 type II computers gemaakt.

c Zeven mensen kunnen 70 computers verpakken. Bij de productie, beschreven in b zijn 95 werknemers bezig. De constructeurs hebben tijd over. Als er meer inpakkers zouden zijn, zou de constructieafdeling meer computers maken.

7.3 De Oplosser in Excel

V1 Probeer eerst zelf de randvoorwaarden en de doelfunctie op te stellen. Er zijn nu drie variabelen! Zie verder de.

1 a De randvoorwaarden zijn:

- niet meer dan 80 fietsen: $0 \leq x \leq 80$
- minstens 10 kinderfietsen: $y \geq 10$
- aantal bakfietsen: $z \geq 0$
- maximaal € 56000 ter beschikking voor dit aanbod: $450x + 300y + 950z \leq 56000$
- maximaal 60 m² opslagruimte: $0,5x + 0,5y + z \leq 60$

b Omdat er hier drie variabelen zijn, kun je geen xy -assenstelsel gebruiken, maar is een xyz -assenstelsel nodig. Dat is een driedimensionaal assenstelsel waar de z -as loodrecht op de x -as en y -as staat.

c Gebruik dezelfde tabel als in het voorbeeldbestand, maar vul nu bij de kolommen inkoop, ruimte en winst de getallen uit het voorbeeld in.

Vul in de Excel Oplosser als voorwaarden in:

cel C4 ≤ 80

cel C5 ≥ 10

cel D7 ≤ 56000

cel E7 ≤ 60

De Excel Oplosser komt met een maximale winst van € 22750 bij een aantal van 80 fietsen, 10 kinderfietsen en 15 bakfietsen.

2 a Zie de tabel.

	aardappelen	bieten	maïs	totaal
werk (dagen/are)	4,5	4,5	0,5	24
kosten (euro/are)	54	36	27	540
winst (euro/are)	100	90	60	maximaal

b Uit de tabel blijkt dat sommige waarden een maximum hebben, zoals het aantal werkdagen en de totale kosten. Ga ervan uit dat er geen negatief aantal ares verbouwd kan worden.

Dit geeft de randvoorwaarden:

- $x, y, z \geq 0$
- $54x + 36y + 27z \leq 540$
- $4,5x + 4,5y + 0,5z \leq 24$
- $x + y + z \leq 18$

De doelfunctie is: $W = 100x + 90y + 60z$.

c Neem de tabel en randvoorwaarden over in de Excel Oplosser zoals in de uitleg is beschreven. Je hebt nu een extra kolom nodig.

De maximale winst is € 1203,75 bij 1,125 are aardappelen, 2,625 are bieten en 14,25 are maïs.

d De doelfunctie wijzigt nu. De winstkolom in Excel wordt een randvoorwaarde, de totaalcel moet groter dan 1203,75 zijn. De totaalcel in de werkkolom is nu de doelfunctie. Gebruik de Excel Oplosser om het antwoord te vinden. Er blijkt dat de winst maximaal € 1350 wordt bij 67,5 dagen werk, maar er wordt dan alleen met bieten gewerkt op 15 are.

3 Deze uurtotalen staan in de rij met totalen, van kolom tot kolom.

Bereken de som ervan handmatig, of in een nieuwe cel met de somfunctie van Excel.

In hal I is men 10000 uur aan het werk.

In hal II is men 5000 uur aan het werk.

Het inbouwen kost 9800 uur, de superuitvoering 720 uur en het afwerken kost 1686 uur.

In totaal kost het maken van de set vliegtuigen 27206 uur.

4 a De randvoorwaarden wijzigen nu, er moet immers minimaal 1 vliegtuig van elke soort worden gemaakt.

Gebruik de Excel Oplosser met als extra randvoorwaarde: $s, e, m, z \geq 1$

Dan is de winst maximaal € 1837750 en deze wordt gehaald bij 52 Supers, 185 Economy's, 5 Motorzevers en 194 Zwevers.

- b** De maximale winst is € 250 meer en dat verschil moet terug worden verdiend. Wil je de winst verdelen over de winstbedragen, dan zal elk van de 436 vliegtuigen $\frac{250}{436} = 0,58$ euro duurder moeten worden.

- 5 a** Gebruik de Excel Oplosser. Geef elke randvoorwaarde een eigen kolom en gebruik voor elke variabele een aparte rij.

De oplossing is: $x = 80$, $y = 56$ en $z = 50$

- b** $x = 80$, $y = 56$ en $z = 50$ invullen in $W = 100x + 300y + 20z$ levert:
 $W = 100 \cdot 80 + 300 \cdot 56 + 20 \cdot 50 = 25800$

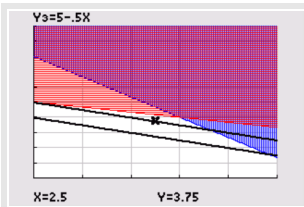
- 6** Stel preparaat P_1 op x gram en preparaat P_2 op y gram.

De gestelde voorwaarden zijn:

- $x \geq 0$ en $y \geq 0$
- $12x + 9y \geq 72$ (mengsel minstens 72 mg A)
- $x + 3y \geq 15$ (mengsel minstens 15 mg B)

De doelfunctie gaat over de kosten: $K = 0,5x + y$

Los op met toegestaan gebied en niveaulijnen:



De niveaulijn door het snijpunt van de twee grenslijnen geeft de minimale kosten:

$8 - \frac{4}{3}x = 5 - \frac{1}{3}x$ en dat heeft als oplossing $x = 3$ en $y = 4$ met $K = 0,5 \cdot 3 + 4 = 5,50$ euro.

Gebruik voor oplossen met de Excel Oplosser de tabel:

	aantal		kosten
x	12	1	0,5
y	9	3	1
totaal	≥ 72	≥ 15	

De Excel Oplosser geeft ook als minimale kosten € 5,50.

- 7 a** Maak een schema met x het aantal dat vanuit de fabriek in NL naar A gaat, y het aantal dat vanuit de fabriek in NL naar B gaat en z het aantal dat vanuit de fabriek in NL naar C gaat.

	naar A	naar B	naar C	naar D	totaal
fabriek NL	x	y	z	$5000 - x - y - z$	5000
fabriek CN	$2500 - x$	$4000 - y$	$3500 - z$	$x + y + z - 3000$	7000
totaal	2500	4000	3500	2000	12000

De randvoorwaarden zijn:

- $0 \leq x \leq 2500$
- $0 \leq y \leq 4000$
- $0 \leq z \leq 3500$
- $3000 \leq x + y + z \leq 5000$

De totale transportkosten zijn:

$$T = 3x + 2y + 5z + 2(5000 - x - y - z) + 5(2500 - x) + 3(4000 - y) + 7(3500 - z) + 4(x + y + z - 3000) = 47000 + y$$

- b** De doelfunctie is $T = 47000 + y$.

Gebruik voor elke voorwaarde een kolom in de Excel Oplosser en voor elke variabele een rij.

De minimale kosten T zijn € 47000.

Deze worden bereikt bij $x = 2500$, $y = 0$ en $z = 500$.

- c** De formule voor de totale kosten is $T = 47000 + y$.

Hoe kleiner de waarde van y , hoe lager de kosten. Omdat $y \geq 0$ kies je $y = 0$.

Welke waarden je voor x en z kiest maakt niet uit, mits ze maar aan de voorwaarden voldoen.

$x = 2500$ en $z = 500$ zou je kunnen kiezen, maar een andere combinatie is ook mogelijk.

- 8 a** De totale kosten zijn $120 \cdot (12 \cdot 20 + 0 \cdot 40 + 2 \cdot 45) + 70 \cdot (8 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 8 \cdot 45) + 50 \cdot (0 \cdot 20 + 15 \cdot 40 + 5 \cdot 45) = 122850$ euro.

- b** Voor de bestelling heeft hij nodig:

- $120 \cdot 12 + 70 \cdot 8 = 2000 \text{ m}^2$ hout;
- $70 \cdot 2 + 50 \cdot 15 = 890 \text{ m}^2$ glas;
- $120 \cdot 2 + 70 \cdot 8 + 50 \cdot 5 = 1050$ uur.

Alleen de hoeveelheid hout is voldoende.

- c**
- Er zijn 120 bouwpakketten voor schuurtjes: $0 \leq x \leq 120$.
 - Er zijn 70 bouwpakketten voortuinhuysjes: $0 \leq y \leq 70$.
 - Er zijn 50 bouwpakketten voor plantenkassen: $0 \leq z \leq 50$.
 - Voor een schuurtje is 12 m^2 hout nodig en voor een tuinhuisje 8 m^2 , er is in totaal 2200 m^2 hout: $12x + 8y \leq 2200$.
 - Voor een tuinhuisje is 2 m^2 glas nodig en voor een plantenkas 15 m^2 , er is in totaal 510 m^2 glas: $2y + 15z \leq 510$.
 - Een schuurtje kost 2 uur, een tuinhuisje 8 uur en een plantenkas 5 uur. Er is totaal 850 uur beschikbaar: $2x + 8y + 5z \leq 850$

- d** Geef elke randvoorwaarde een eigen kolom:

- Schuurtjes: $0 \leq x \leq 120$
- Tuinhuisjes: $0 \leq y \leq 70$
- Plantenkassen: $0 \leq z \leq 50$
- Hout: $12x + 8y \leq 2200$
- Glas: $2y + 15z \leq 510$
- Arbeid: $2x + 8y + 5z \leq 850$

De doelfunctie is $W = 65x + 130y + 140z$.

Gebruik de Excel Oplosser. De winst is maximaal € 19240 bij een productie van 120 schuurtjes, 60 tuinhuisjes en 26 plantenkassen.

- 9 a** Noem p het aantal uur dat J. Smit per dag proces P uitvoert, dan zijn q en r uren waarin hij Q en R uitvoert.

De doelfunctie is een winstfunctie.

Een uur proces P kost € 50,00, maar levert $30 + 2 \cdot 20 = 70$ euro op en geeft een winst van € 20,00.

Een uur proces Q kost € 60,00, maar levert $2 \cdot 30 + 3 \cdot 20 = 120$ euro op en geeft een winst van € 60,00.

Een uur proces R kost € 70,00, maar levert $30 + 20 + 2 \cdot 20 = 90$ euro op en geeft een winst van € 20,00.

Winst W is gelijk aan $20p + 60q + 20r$.

Het gaat hier om meer dan twee variabelen, daar is de Excel Oplosser handig voor.

Maak een tabel voor de Excel Oplosser:

	bergstok	boekenplank	kruk	uur	doel
p	1	2	0	1	20
q	2	0	3	1	60
r	1	1	2	1	20
	≤ 9	≤ 11	≤ 9	≤ 8	

De Excel Oplosser vindt dat de maximale winst € 240,00 is bij een productie van 3 uur aan proces P, 3 uur aan proces Q en 0 uur aan proces R. Smit moet daar 6 uur per dag voor werken.

- b** Plaats een extra kolom in de tabel voor de Excel Oplosser:

0
0
1
≥ 1

Laat de Excel Oplosser werken.

De uitkomst is een maximale winst van € 226,67. Het aantal uur dat Smit dan moet werken is 6,67: 3,33 uur proces P, 2,33 uur proces Q en 1 uur proces R.

Smit eindigt zijn werkdag met 9 bergstokken, 7,6 boekenplanken en 9 krukken.

Waarschijnlijk vindt Smit dit geen goede oplossing en wil hij alleen gehele uren draaien per proces en alleen gehele werkstukken af hebben.

- 10 a** Voor 'licht' zijn per rol 7 klossen nodig; voor 100 rollen zijn dat 700 klossen.
 Voor 'middel' zijn per rol 7 klossen nodig; voor 150 rollen zijn dat 1050 klossen.
 Voor 'zwaar' zijn per rol 14 klossen nodig; voor 50 rollen zijn dat 700 klossen.
 In totaal zijn er 2450 klossen nodig.
- b** De totale opbrengst is $100 \cdot 4000 + 150 \cdot 5000 + 50 \cdot 7000 = 1500000$ euro. De inkoop was € 850000.
 De winst voor KTF is € 65000.
- c** Er zijn $2 \cdot 100 + 3 \cdot 150 + 5 \cdot 50 = 900$ klossen Ray nodig.
 Er zijn $4 \cdot 100 + 3 \cdot 150 + 7 \cdot 50 = 1200$ klossen Pol nodig.
 Er zijn $1 \cdot 100 + 1 \cdot 150 + 2 \cdot 50 = 350$ klossen Vin nodig.
 Ray: $\frac{a}{3} \cdot 6 + \frac{b}{3} \cdot 12 + \frac{c}{3} \cdot 12 \geq 900$ geeft: $2a + 4b + 4c \geq 900$
 Pol: $\frac{a}{3} \cdot 12 + \frac{b}{3} \cdot 12 + \frac{c}{3} \cdot 6 \geq 1200$ geeft $4a + 4b + 2c \geq 1200$
 Vin: $\frac{a}{3} \cdot 2 + \frac{b}{3} \cdot 7 + \frac{c}{3} \cdot 4 \geq 350$ geeft: $2a + 7b + 4c \geq 1050$
- d** Minimaliseer $P = 1500a + 2100b$ op het gebied gegeven door de randvoorwaarden.
 De kosten zijn minimaal in het snijpunt M van de lijnen $a + b = 300$ en $a + 2b = 450$. Vul $a = 300 - b$ in de tweede vergelijking in, dit geeft $b = 150$ en dan is $a = 150$.
 De minimale kosten zijn dan $P = 1500 \cdot 150 + 2100 \cdot 150 = 540000$ euro.
- e** Er zijn 900 klossen van Ray, 1200 klossen van Pol en 350 klossen van Vin nodig.
 Met 3 ton van destillaat B kun je 12 klossen Ray, 12 klossen Pol en 7 klossen Vin maken.
 $\frac{900}{12} = 75$, $\frac{1200}{12} = 100$ en $\frac{350}{7} = 50$
 Als er uitsluitend destillaat B gebruikt wordt, dan heeft Artif 300 ton nodig.
 De minimale inkoopkosten zijn € 540000.
 Destillaat B kost dan $\frac{540000}{300} = 1800,00$ euro per ton.
- f** Voor € 540000 krijgt Artif bij Petrol: 150 ton A en 150 ton B.
 Hiervan is te maken: 900 klossen Ray, 1200 klossen Pol, 450 klossen Vin en er is een residu van 60000 kg.

Er is dan over: 100 klossen Vin en 60000 kg residu.

Bij Destil krijgt Artif 300 ton B.

Hiervan is te maken: 1200 klossen Ray, 1200 klossen Pol, 700 klossen Vin en er is een restant van 20000 kg.

Er is dan over: 300 klossen Ray, 350 klossen Vin en 20000 kg residu.

De bestelling gaat naar Destil.

11 € 38,40

7.4 De simplexmethode

V1 a Het zijn $z \leq 50$, $x \leq 100$, $10x + 20y + 2z \leq 2020$ en $25x + 100y + 3z \leq 7750$

b $z + s_4 = 50$, $x + s_3 = 100$, $10x + 20y + 2z + s_2 = 2020$

c Zie de uitleg.

1 a De eerste vergelijking wordt $y = 101 - 0,5x - 0,1z - 0,05s_1$
De tweede vergelijking wordt $y = 77,5 - 0,25x - 0,03z - 0,01s_2$

b Je krijgt:

$$\begin{aligned} 0,5x + 0,14z + 0,1s_1 - 0,02s_2 &= 47 \\ 0,25x + y + 0,03z + 0,01s_2 &= 77,5 \\ x + s_3 &= 100 \\ z + s_4 &= 50 \\ 23250 + 25x + 11z - 3s_2 &= W \end{aligned}$$

c De eerste heeft de kleinste positieve constante: $x = 94 - 0,28z - 0,2s_1 + 0,04s_2$.

d Je krijgt:

$$\begin{aligned} x + 0,28z + 0,2s_1 - 0,04s_2 &= 94 \\ y - 0,04z - 0,05s_1 + 0,02s_2 &= 54 \\ -0,28z - 0,2s_1 + 0,4s_2 + s_3 &= 6 \\ z + s_4 &= 50 \\ 25600 + 4z - 5s_1 - 2s_2 &= W \end{aligned}$$

e Je krijgt:

$$\begin{aligned} x + 0,2s_1 - 0,04s_2 - 0,28s_4 &= 80 \\ y - 0,05s_1 + 0,02s_2 + 0,04s_4 &= 56 \\ -0,2s_1 + 0,4s_2 + s_3 + 0,28s_4 &= 20 \\ z + s_4 &= 50 \\ 25800 - 5s_1 - 2s_2 - 4s_4 &= W \end{aligned}$$

f Je moet $s_1 = s_2 = s_4 = 0$ stellen. Dat geeft:

$$\begin{aligned} y &= 56 \\ x &= 80 \\ s_3 &= 20 \\ z &= 50 \\ 25800 &= W \end{aligned}$$

W is dus maximaal 25800 als $x = 80$, $y = 56$ en $z = 50$.

2 a Neem de rij waarbij je de kleinste (niet negatieve) verhouding hebt. Dit geeft $\frac{470}{5} = 94$, $\frac{77,50}{0,25} = 310$ en $\frac{100}{1} = 100$ (bij de andere deel je door 0). Bij de eerste rij krijg je de kleinste verhouding.

Deel nu deze hele rij door 5, dit geeft $x + 0,28z + 0,2s_1 - 0,04s_2 = 94$. Trek deze rij zo vaak als nodig is van de andere rijen af, zodat overal in de andere rijen nullen staan op de plaats waar in de tweede rij de 1 staat. Dit geeft:

x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	
1	0	0,28	0,2	-0,04	0	0	94
0	1	-0,04	-0,05	0,02	0	0	54
0	0	-0,28	-0,2	0,04	1	0	6
0	0	1	0	0	0	1	50
0	0	4	-5	-2	0	0	-25600

- b** Kijk welke verhouding voor z het kleinste is, dat is $\frac{50}{1} = 50$, want de eerste verhouding $\frac{94}{0,28} \approx 335,71$ is groter en de andere zijn negatief.

Omdat er al een 1 staat onder z , kun je deze direct van de andere rijen aftrekken. Dit geeft als derde simplextableau:

x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	
1	0	0	0,2	-0,04	0	-0,28	80
0	1	0	-0,05	0,02	0	0,04	56
0	0	0	-0,2	-0,04	1	0,28	20
0	0	1	0	0	0	1	50
0	0	0	-5	-2	0	-4	-25800

De kolommen x , y en z bestaan nu uit een enkele 1 en verder nullen. Neem $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ en $s_4 = 0$ en alle variabelen staan vast.

- 3 a** De rijen geven voornamelijk de randvoorwaarden aan, alleen de onderste rij bevat de doelfunctie. In plaats van 0 rechtsonderin, komt er nu -25000 te staan. Als je deze onderste rij wijzigt in $-x - y - z = W - 25000$ blijven de randvoorwaarden hetzelfde en kun je $W = 25000 - x - y - z$ minimaliseren.

- b** Het eerste simplextableau is:

x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	
10	20	2	1	0	0	0	2020
25	100	3	0	1	0	0	7750
1	0	0	0	0	1	0	100
0	0	1	0	0	0	1	50
-1	-1	-1	0	0	0	0	-25000

Kijk nu naar de grootste negatieve coëfficiënt in de onderste rij. Omdat er drie dezelfde staan, mag je er een kiezen. Kies de eerste kolom. Van de verhoudingen $\frac{2020}{10} = 202$, $\frac{7750}{25} = 310$ en $\frac{100}{1} = 100$ is de laatste het kleinste.

Het tweede simplextableau wordt:

x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	
0	20	2	1	0	-10	0	1020
0	100	3	0	1	-25	0	5250
1	0	0	0	0	1	0	100
0	0	1	0	0	0	1	50
0	-1	-1	0	0	1	0	-24900

Van de verhoudingen $\frac{1020}{2} = 510$, $\frac{5250}{3} = 1750$ en $\frac{50}{1} = 50$ is de laatste het kleinste.

Het derde simplextableau wordt:

x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	
0	20	0	1	0	-10	-2	920
0	100	0	0	1	-25	-3	5100
1	0	0	0	0	1	0	100
0	0	1	0	0	0	1	50
0	-1	0	0	0	1	1	-24850

Van de verhoudingen $\frac{920}{20} = 46$ en $\frac{5100}{100} = 51$ is de eerste het kleinst.

Het vierde en laatste simplextableau wordt:

x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	
0	1	0	0,05	0	-0,5	-0,1	46
0	0	0	-5	1	25	7	500
1	0	0	0	0	1	0	100
0	0	1	0	0	0	1	50
0	0	0	0	0,05	0,5	0,9	-24804

In de onderste rij staat nu $0,05s_2 + 0,5s_3 + 0,9s_4 - W = -24804$ en dus geldt $W = 24804 + 0,05s_2 + 0,5s_3 + 0,9s_4$ moet minimaal zijn. Kies $s_2 = s_3 = s_4 = 0$.

W is minimaal als $x = 100$, $y = 46$ en $z = 50$. De minimale waarde is 24804.

- 4 a** Uit de onderste rij kun je de vergelijking halen: $-1s_1 - 10s_2 - W = -880$

Je vindt een maximale waarde voor $W = 880 - 1s_1 - 10s_2$ door te kiezen $s_1 = s_2 = 0$.

Dit is ook snel te zien: als je de eerste twee spelingsvariabelen op nul zet, dan staat de rest van de variabelen vast. Omdat in de onderste rij geen positieve getallen staan, heb je de maximale waarde voor W gevonden.

- b** Lees af uit het simplextableau: $x_1 = 12$ en $x_2 = 28$

Kies voor $s_1 = s_2 = 0$ om W te maximaliseren.

Voor $s_3 = 210$ klopt ook de derde rij.

- 5** Het eerste simplextableau is:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
5	10	1	0	0	380
1	1	0	1	0	50
35	25	0	0	1	1050
15	20	0	0	0	0

De grootste coëfficiënt in de onderste rij is 20. Van de verhoudingen $\frac{380}{10} = 38$, $\frac{50}{1} = 50$ en $\frac{1050}{25} = 42$ is de eerste het kleinst.

Het tweede simplextableau wordt:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0,50	1	0,10	0	0	38
0,50	0	-0,10	1	0	12
22,50	0	-2,50	0	1	100
5	0	-2,00	0	0	-760

De grootste coëfficiënt in de onderste rij is 5. Van de verhoudingen $\frac{38}{0,5} = 76$, $\frac{12}{0,5} = 24$ en $\frac{100}{22,5} \approx 4,44$ is de laatste het kleinst.
Het derde en laatste simplextableau wordt:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	1	0,16	0	-0,02	35,78
0	0	-0,04	1	-0,02	9,78
1	0	-0,11	0	0,04	4,44
0	0	-1,44	0	-0,22	-782,22

De maximale waarde is ongeveer 782,22.

- 6 a** Als je de eerste twee spelingsvariabelen (s_1 en s_2) op 0 zet, dan krijg je wel een waarde voor W , maar nog geen waarden voor s , e , m en z . Want in de eerste rij staat bijvoorbeeld: $e + 0,03s_1 - 0,08s_2 = 62,50$, maar je weet niet wat s_4 is.
Bij het laatste tableau moeten de eerste drie spelingsvariabelen en de waarde voor m op 0 worden gezet, maar dan vind je naast $m = 0$ ook waarden voor s , e en z .

- b** Directeur A:

Omdat in de onderste rij het derde getal negatief is, is $m = 0$. De andere variabelen krijgen de waarde:

$s = 80$, $e = 150$ en $z = 200$.

Directeur B: $s = 150$, $e = 62,5$, $m = 52,5$ en $z = 137$.

Omdat je geen halve vliegtuigen bouwt, zal $e = 63$ en $m = 53$ zijn.

- 7 a** In het simplextableau staat s_1 , s_2 en s_3 . Er zijn drie spelingsvariabelen.

- b** De kolommen x_1 en x_2 bevatten alleen een enkele 1. Je kunt nu door $s_1 = s_2 = 0$ te kiezen een maximale waarde krijgen voor $-s_1 - 13s_2 - W = -925$. Nu is in te zien dat als je de eerste twee spelingsvariabelen op nul zet, de rest van de variabelen vaststaan. Omdat in de onderste rij geen positieve getallen staan, heb je de maximale waarde voor W gevonden.
- c** $x_1 = 18,75$ en $x_2 = 31,25$
De maximale waarde van W is 925.

- 8** Het eerste simplextableau:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
1	2	1	0	0	160
0	1	0	1	0	60
4	1	0	0	1	400
1	1	0	0	0	0

Omdat er twee dezelfde coëfficiënten in de onderste rij staan, mag je er willekeurig een kiezen. Kies bijvoorbeeld de eerste.

Van de verhoudingen $\frac{160}{1} = 160$ en $\frac{400}{4} = 100$ is de tweede het kleinst.

Het tweede simplextableau wordt:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	1,75	1	0	-0,25	60
0	1	0	1	0	60
1	0,25	0	0	0,25	100
0	0,75	0	0	-0,25	-100

Nu is 0,75 de grootste coëfficiënt en van de verhoudingen $\frac{60}{1,75} \approx 34, \frac{60}{1} = 60$ en $\frac{100}{0,25} = 400$ is de eerste het kleinst.

Het derde en laatste simplextableau wordt:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	1	0,57	0	-0,14	34,29
0	0	-0,57	1	-0,14	25,71
1	0	-0,14	0	0,29	91,43
0	0	-0,43	0	-0,14	-125,71

W is maximaal ongeveer 125,71.

9 a Het kost veel geld om de containers te vervoeren, er wordt dus niet zomaar gevlogen naar elke willekeurige luchthaven. Alleen van luchthavens met een overschot wordt gevlogen en alleen naar luchthavens met een tekort wordt gevlogen. Alleen voor deze combinaties zie je de onderlinge afstand in de tabel.

b Naar Amsterdam moeten in totaal 500 containers worden gevlogen. Stel het aantal containers vanuit Athene a , vanuit Berlijn b en vanuit Londen c . Vanuit Rome moeten er dan nog $500 - a - b - c$ komen. Naar Dublin moeten in totaal 300 containers. Stel het aantal containers vanuit Athene d , vanuit Berlijn e en vanuit Londen f . Dan komen er vanuit Rome nog $300 - d - e - f$ containers.

Voor Lissabon heeft Athene dan nog $400 - a - d$ containers beschikbaar. Berlijn heeft nog $300 - b - e$ containers en Londen heeft nog $680 - c - f$ containers beschikbaar. Vanuit Rome kunnen er nog $200 - (500 - a - b - c) - (300 - d - e - f) = a + b + c + d + e + f - 600$ containers komen.

Er zijn zes beslissingsvariabelen. Een mogelijk transportschema is:

	Amsterdam	Dublin	Lissabon
Athene	a	d	$400 - a - d$
Berlijn	b	e	$300 - b - e$
Londen	c	f	$680 - c - f$
Rome	$500 - a - b - c$	$300 - d - e - f$	$a + b + c + d + e + f - 600$

c De randvoorwaarden zijn:

- $a, b, c, d, e, f \geq 0$ (Er zijn geen negatieve aantallen.)
- $a + b + c \leq 500$ (Amsterdam heeft er 500 nodig.)
- $d + e + f \leq 300$ (Dublin heeft er 300 nodig.)
- $a + d \leq 400$ (Athene heeft er 400 over.)
- $b + e \leq 300$ (Berlijn heeft er 300 over.)
- $c + f \leq 680$ (Londen heeft er 680 over.)
- $a + b + c + d + e + f \geq 600$ (Rome mag geen containers ontvangen.)

De doelfunctie wordt verkregen door alle aantallen containers te vermenigvuldigen met de onderlinge afstand. Hieruit volgt:

$$T = 3800000 - 500a - 1400b - 1000c - 200d - 900e - 1100f$$

d De eerste randvoorwaarden zijn allemaal standaard, zodat $a \geq 0$, enzovoort.

Daarna volgen nog zes randvoorwaarden waarvoor in de simplexmethode een spelingsvariabele moet worden toegevoegd.

e Invullen in de Excel Oplosser geeft:

	aantal	vw1	vw2	vw3	vw4	vw5	vw6	doel
a	0	1	0	1	0	0	1	
b	300	1	0	0	1	0	1	
c	200	1	0	0	0	1	1	
d	0	0	1	1	0	0	1	
e	0	0	1	0	1	0	1	
f	300	0	1	0	0	1	1	
totaal		500	300	0	300	500	800	2850000

Het minimum is 2850000 km.

- 10 Uit één rol snijd je drie keer rollen van 60 cm breed. Je kunt ook uit één rol een rol van 60 cm en 120 cm snijden, enzovoort. In de tabel is weergegeven welke combinaties winst opleveren. x_1 is de variabele die staat voor het aantal rollen dat in driemaal 60 cm versneden worden, enzovoort.

	x_1	x_2	x_3	x_4
60	3	1	1	0
90	0	1	0	2
120	0	0	1	0
opbrengst	90	70	80	80
kosten	60	60	60	60
winst	30	10	20	20

Andere combinaties leveren geen winst op.

De doelfunctie is $W = 30x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 20x_4$ en deze moet worden gemaximaliseerd onder de voorwaarden:

- $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$
- $x_2 + 2x_4 \leq 10$
- $x_3 \leq 6$

Stel hierbij het eerste simplextableau op:

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
3	1	1	0	1	0	0	9
0	1	0	2	0	1	0	10
0	0	1	0	0	0	1	6
30	10	20	20	0	0	0	0

Het tweede simplextableau is:

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	3
0	1	0	2	0	1	0	10
0	0	1	0	0	0	1	6
0	0	10	20	-10	0	0	-90

Het derde simplextableau is:

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	3
0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	5
0	0	1	0	0	0	1	6
0	-10	10	0	-10	-10	0	-190

Het laatste simplextableau is:

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1
0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	5
0	0	1	0	0	0	1	6
0	-10	0	0	-10	-10	-10	-250

Kies: $x_2 = s_1 = s_2 = s_3 = 0, x_1 = 1, x_3 = 6$ en $x_4 = 5$

Snijd:

- 1 rol in driemaal 60 cm;
- 6 rollen in 60 cm en 120 cm;
- 5 rollen in tweemaal 90 cm.

Dit geeft een maximale winst van € 250,00.

11 a Bijvoorbeeld a ton A, b ton B en c ton C

b $W = \frac{57}{4}a + \frac{49}{6}b + \frac{33}{2}c - 400$

c Randvoorwaarden: $0 \leq a \leq 20, 0 \leq b \leq 40, 0 \leq c \leq 30$ en $\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}b + c \leq 40$.

d 4

e De maximale winst is € 596,67

12 a $3x + 4y + 4z \leq 360$

b $x \leq 100, y \leq 75$ en $z \leq 90$.

c $W = x + 2y + 1,5z$

d Laat s_1 t/m s_4 de spelingsvariabelen zijn, dan:

$$x + s_1 = 100$$

$$y + s_2 = 75$$

$$z + s_3 = 90$$

$$3x + 4y + 4z + s_4 = 360$$

$$x + 2y + 1,5z = W$$

Het eerste simplextableau ziet er als volgt uit:

1	0	0	1	0	0	0	100
0	1	0	0	1	0	0	75
0	0	1	0	0	1	0	90
3	4	4	0	0	0	1	360
1	2	1,50	0	0	0	0	0

De grootste coëfficiënt op de onderste rij is 2.

Van de verhoudingen $\frac{75}{1} = 75$ en $\frac{360}{4} = 90$ is de eerste het kleinst.

Het tweede simplextableau wordt:

1	0	0	1	0	0	0	100
0	1	0	0	1	0	0	75
0	0	1	0	0	1	0	90
3	0	4	0	-4	0	1	60
1	0	1,50	0	-2	0	0	-150

De grootste coëfficiënt op de onderste rij is 1,5.

Van de verhoudingen $\frac{90}{1} = 90$ en $\frac{60}{4} = 15$ is de laatste het kleinst.

Het derde en laatste simplextableau wordt:

1	0	0	1	0	0	0	100
0	1	0	0	1	0	0	75
-3/4	0	0	0	1	1	-1/4	75
3/4	0	1	0	-1	0	1/4	15
-1/8	0	0	0	-1/2	0	-3/8	-172,5

Nu ben je klaar!

In de onderste rij staat: $W_{\max} = 172,50 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}s_2 - \frac{3}{8}s_4$

Kies $x = s_2 = s_4 = 0$.

Dan zie je dat $y = 75$ (broodjes avocado) en $z = 15$ (broodjes zalm) en dat $W_{\max} = 172,50$ euro.

13 a De randvoorwaarden zijn:

- $x \geq 0$, $y \geq 0$ en $z \geq 0$
- $2x + 3z \leq 15$
- $2y + z \leq 10$
- $x + 2y \leq 14$
- $2,3x + 2,4y + 2,9z \leq 25$

De doelfunctie is: $R = 4x + 5y + 6z$

b Uit de Excel Oplosser blijkt:

$x = 3,86$, $y = 3,79$ en $z = 2,43$ geeft een maximale opbrengst van € 48,93.

Het eerste simplextableau is:

x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4	
2	0	3	1	0	0	0	15
0	2	1	0	1	0	0	10
1	2	0	0	0	1	0	14
2,3	2,4	2,9	0	0	0	1	25
4	5	6	0	0	0	0	0

Het laatste simplextableau is:

x	y	z	s ₁	s ₂	s ₃	s ₄	
0	0	1	$\frac{23}{35}$	$\frac{24}{35}$	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{17}{7}$
0	1	0	$-\frac{23}{70}$	$\frac{11}{70}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{53}{14}$
0	0	0	$\frac{8}{7}$	$\frac{5}{7}$	1	$-\frac{10}{7}$	$\frac{18}{7}$
1	0	0	$-\frac{17}{35}$	$-\frac{36}{35}$	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{27}{7}$
0	0	0	$-\frac{5}{14}$	$\frac{11}{14}$	0	$\frac{10}{7}$	$-\frac{685}{14}$

14 $W = 162,86$, $x = 68,57$ en $y = 25,71$.

15 a Laat x het aantal televisies T1 en y het aantal televisies T2 zijn.

De doelfunctie is: $W = 300x + 500y - 36000$

De randvoorwaarden zijn:

- $x \geq 0$ en $y \geq 0$
- machine A: $x + 2y \leq 170$
- machine B: $x + y \leq 150$
- machine C: $3y \leq 180$

b Het eerste simplextableau is:

x_1	x_2	s ₁	s ₂	s ₃	
1	2	1	0	0	170
1	1	0	1	0	150
0	3	0	0	1	180
300	500	0	0	0	36000

500 is de grootste coëfficiënt en van de verhoudingen $\frac{170}{2}$, $\frac{150}{1}$ en $\frac{180}{3}$ is de laatste het kleinst.

Het tweede simplextableau wordt:

x_1	x_2	s ₁	s ₂	s ₃	
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	90
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60
300	0	0	300	$-\frac{500}{3}$	-9000

Nu is 300 de grootste coëfficiënt en van de verhoudingen $\frac{50}{1}$ en $\frac{90}{1}$ is de eerste het kleinst.

Het derde simplextableau wordt:

x_1	x_2	s ₁	s ₂	s ₃	
1	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	50
0	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	40
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	60
0	0	-300	0	$\frac{100}{3}$	-9000

Nu zijn de eerste twee getallen in de onderste rij wel 0, maar er staat in de onderste rij nog een positief getal. Dat mag niet, werk dit positief getal weg.

De kleinste verhouding is $\frac{40}{\frac{1}{3}} = 120$, tel deze rij tweemaal op bij de bovenste rij (merk op dat dit x

en y niet beïnvloedt) en trek hem respectievelijk 1 en 100 keer af bij de onderste rijen.

Het vierde en laatste simplextableau wordt:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
1	0	-1	2	0	130
0	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	40
0	1	1	-1	0	20
0	0	-200	-100	0	-13000

De winst is maximaal als er 130 televisies T1 en 20 televisies T2 gemaakt worden.

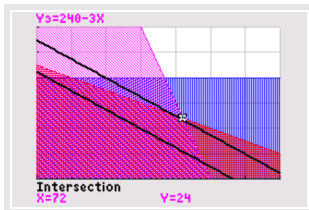
De maximale winst is € 13000.

7.5 Totaalbeeld

- 1 a**
- $x \geq 30$ en hieruit volgt venster: $x_{\min} = 30$
 - $0 \leq y \leq 40$ geeft grenslijnen: $y = 40$ en x -as
 - $x + 2y \leq 120$ geeft grenslijn: $y = 60 - 0,5x$
 - $3x + y \leq 240$ geeft grenslijn $y = 240 - 3x$

Het toegestane gebied bevindt zich rechts van de lijn $x = 30$ en tussen de lijnen $y = 40$ en $y = 0$. Het moet onder de lijn $y = 60 - 0,5x$ en $y = 240 - 3x$ liggen.

- b**
- $150 = 3x + 4y - 10$ geeft: $y = 60 - 0,75x$
 - $200 = 3x + 4y - 10$ geeft: $y = 77,5 - 0,75x$



- c** Het maximum zit in het snijpunt M van de lijnen $x + 2y = 120$ en $3x + y = 240$. Uit de eerste vergelijking volgt $x = 120 - 2y$. Vul dit in de tweede vergelijking in. Dit geeft:

$$\begin{aligned} 3(120 - 2y) + y &= 240 \\ 5y &= 120 \text{ ofwel } y = 24 \\ x &= 72 \end{aligned}$$

Dit geeft het snijpunt $M(72,24)$. Het maximum van W is $3 \cdot 72 + 4 \cdot 24 - 10 = 302$.

- 2 a** Kies als variabelen x voor het aantal dagen dat fabriek I moet werken aan deze auto's en y voor het aantal dagen dat fabriek II moet werken.

De randvoorwaarden zijn:

- $x \geq 0$
- $y \geq 0$
- $10x + 20y \geq 800$
- $30x + 20y \geq 1600$
- $50x + 20y \geq 2000$

De doelfunctie is: $K = 20000(x + y)$

- b**
- $x \geq 0$ en hieruit volgt venster: $x_{\min} = 0$
 - $y \geq 0$ en hieruit volgt venster: $y_{\min} = 0$
 - $10x + 20y \geq 800$ geeft grenslijn: $y = 40 - 0,5x$
 - $30x + 20y \geq 1600$ geeft grenslijn: $y = 80 - 1,5x$
 - $50x + 20y \geq 2000$ geeft grenslijn: $y = 100 - 2,5x$

Het toegestane gebied bevindt zich rechts van de y -as en boven de x -as en moet zich boven de andere grenslijnen bevinden.

- c** De minimale kosten zitten in het snijpunt M van de lijnen $10x + 20y = 800$ en $30x + 20y = 1600$. Uit de eerste vergelijking volgt $x = 80 - 2y$. Vul dit in de tweede vergelijking in. Dit geeft:

$$\begin{aligned} 30(80 - 2y) + 20y &= 1600 \\ 40y &= 800 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

De bijbehorende x -waarde is 40.

In het punt $M(40,20)$ zijn de kosten minimaal, namelijk $K = 20000(40 + 20) = 1200000,00$ euro. Daartoe moet fabriek I 40 dagen draaien en fabriek II 20 dagen.

- 3 a** De totale uitleen is $106436 + 115915 + 48479 = 270830$ euro.

Jeugdboeken: $\frac{106436}{270830} \cdot 105000 = 41265$ euro.

Romans: $\frac{115915}{270830} \cdot 105000 = 44940$ euro

Studieboeken: $\frac{48479}{270830} \cdot 105000 = 18795$ euro.

b Dit is een lineair programmeerprobleem.

Stel de bedragen voor de afdelingen jeugdboeken, romans en studieboeken achtereenvolgens j , r en $105000 - j - r$. Zo blijft het een probleem met twee variabelen. Hanteer de volgende voorwaarden:

- Minstens 1200 jeugdboeken geeft: $j \geq 18000$
- Minstens 1200 romans geeft: $r \geq 28800$
- Minstens 400 studieboeken geeft: $105000 - j - r \geq 12000$, of $j + r \leq 93000$

Voor jeugdboeken krijg je niet meer dan voor romans: $j \leq r$

Voor jeugdboeken krijg je niet meer dan drie keer het bedrag van de afdeling studieboeken: $j \leq 3(105000 - j - r)$, of $4j + 3r \leq 315000$

De doelfunctie is het aantal boeken $A = \frac{1}{15}j + \frac{1}{24}r + \frac{1}{30}(105000 - j - r)$ maximaliseren.

Het toegestane gebied bestaat uit vier hoekpunten met in een jr -stelsel twee hoekpunten op de grenslijn $r = 28800$ en twee op de grenslijn $j = 18000$ (en één ervan ligt op beide lijnen) en een hoekpunt dat rechtsboven deze twee grenslijnen ligt. In dat laatste punt zal het maximum zitten. Check niveaulijnen of check A in alle vier de punten.

Dit hoekpunt ligt op grenslijnen $r = 105000 - \frac{4}{3}j$ en op $r = j$ en dat is als geldt $j = r = 45000$.

Het maximum aantal boeken is dan $A = 5375$.

Jeugdboeken krijgt € 45000.

Romans krijgt € 45000.

Studieboeken krijgt $105000 - 90000 = 15000$ euro.

c De laatste voorwaarde wordt nu $3j + r \leq 210000$ met grenslijn $r = 210000 - 3j$ in een rj -assenstelsel. Het hoekpunt met het maximum verschuift iets naar linksonder en ligt bij $j = r = 42000$ en $s = 105000 - 2 \cdot 42000 = 21000$.

Jeugdboeken krijgt € 42000.

Romans krijgt € 42000.

Studieboeken krijgt € 21000.

De afdeling romans zal het minst blij zijn, want vergeleken met de twee vorige oplossingen met bedragen € 44940 en € 45000 krijgt deze afdeling het laagste bedrag.

4 a x meter Rosa en y meter Lelie betekent $4000 - x - y$ meter Narcis.

Van alle drie moet minstens 500 meter worden gemaakt, zodat:

(1) $x \geq 500$

(2) $y \geq 500$

$4000 - x - y \geq 500$ ofwel (3) $x + y \leq 3500$

Verder geldt $0,6x + 0,6y \leq 2160$, ofwel (4) $x + y \leq 3600$.

En $0,3y + 0,3(4000 - x - y) \leq 930$, ofwel (5) $x \geq 900$.

En $0,4x + 0,6(4000 - x - y) \leq 1800$, ofwel (6) $x + 3y \geq 3000$.

(1) valt weg vanwege (5) en (4) valt weg vanwege (3).

Dan houd je over:

- $x \geq 900$
- $y \geq 500$
- $x + y \leq 3500$
- $x + 3y \geq 3000$

b Vul in de Excel Oplosser het schema in:

	aantal	rood	geel	groen	doel
Rosa (x)	0	0,6	0	0,4	8
Lelie (y)	0	0,6	0,3	0	2
Narcis	0	0	0,3	0,6	9
totaal	0	0	0	0	0

De Excel Oplosser geeft $x = 3000m$, $y = 500m$ en er blijft 500 meter over voor Narcis.
De maximale winst is € 29500.

5 a Noem x het aantal type I en y het aantal type II.

Dan geldt:

- $0 \leq x \leq 60$, want er kunnen maximaal 60 stuks geproduceerd worden van type I.
- $0 \leq y \leq 50$, want er kunnen maximaal 50 stuks geproduceerd worden van type II.
- $x + y \leq 75$, want er worden niet meer dan 75 computers geproduceerd.
- $x + 2y \leq 110$, want er zijn per dag 110 werknemers (en dus werkdagen) beschikbaar.

b Er zijn vier randvoorwaarden, in het simplextableau komen vier spelingsvariabelen.

Het eerste simplextableau is:

1	0	1	0	0	0	60
0	1	0	1	0	0	50
1	1	0	0	1	0	75
1	2	0	0	0	1	110
2400	3000	0	0	0	0	0

De grootste coëfficiënt in de onderste rij is 3000.

Van de verhoudingen $\frac{50}{1} = 50$, $\frac{75}{1} = 75$ en $\frac{110}{2} = 55$ is de eerste het kleinst.

Het tweede simplextableau wordt:

1	0	1	0	0	0	60
0	1	0	1	0	0	50
1	0	0	-1	1	0	25
1	0	0	-2	0	1	10
2400	0	0	-3000	0	0	-150000

De grootste coëfficiënt in de onderste rij is 2400.

Van de verhoudingen $\frac{60}{1} = 60$, $\frac{25}{1} = 25$ en $\frac{10}{1} = 10$ is de laatste het kleinst.

Het derde simplextableau wordt:

0	0	1	2	0	-1	50
0	1	0	1	0	0	50
0	0	0	1	1	-1	15
1	0	0	-2	0	1	10
0	0	0	1800	0	-2400	-174000

De grootste coëfficiënt in de onderste rij is 1800.

Van de verhoudingen $\frac{50}{2} = 25$, $\frac{50}{1} = 50$ en $15 = 1$ is de laatste het kleinst.

Het vierde en laatste simplextableau wordt:

0	0	1	0	-2	1	20
0	1	0	0	-1	1	35
0	0	0	1	1	-1	15
1	0	0	0	2	-1	40
0	0	0	0	-1800	-600	-201000

De maximale opbrengst is $R = 2400 \cdot 40 + 3000 \cdot 35 = 201000$ euro.

Er worden dan 40 computers van type I en 35 computers van type II gemaakt.

- c Als z het aantal mensen is dat van de assemblageafdeling naar de verpakkingsafdeling gaan, dan geeft dit de volgende randvoorwaarden:

- $0 \leq x \leq 60$
- $0 \leq y \leq 50$

Bedenk dat een inpakker dagelijks $\frac{75}{15} = 5$ computers inpakt.

- $x + y \leq 75 + 5z$
- $x + 2y \leq 110 - z$

Je kunt nu met de nieuwe randvoorwaarden met behulp van simplextableau's een maximum uitrekenen.

- $z = 1$ geeft: € 209400.
- $z = 2$ geeft: € 216000.
- $z = 3$ geeft: € 214500.
- $z = 4$ geeft: € 213000.

Dit bedrag wordt alleen maar lager als z groter wordt.

Je kunt ook de voorwaarden in de Excel Oplosser invoeren, deze geeft dan de oplossing.

Conclusie: je kunt het beste twee personen verplaatsen naar de verpakkingsafdeling.

- 6 Dit is een transportprobleem. Het volgende schema geeft het aantal te verplaatsen stoelen weer.

	naar 1ste	naar 2de	naar 3de
aula	x	y	$140 - x - y$
bieb	$90 - x$	$60 - y$	$x + y - 80$

Omdat in elke cel van deze tabel een positief getal moet staan, zijn de voorwaarden:

$$0 \leq x \leq 90, 0 \leq y \leq 60, 140 - x - y \geq 0 \text{ en } x + y - 80 \geq 0.$$

De doelfunctie is de benodigde tijd in minuten:

$$T = 2x + 4y + 6(140 - x - y) + 2(90 - x) + 3(60 - y) + 5(x + y - 80) = 800 - x.$$

Gebruik de GR met venster $[0,90] \times [0,100]$.

Voer in $y_1 \leq 140 - x$, $y_2 \geq 80 - x$ en $y_3 \leq 60$. Niveaulijnen (verticaal) bijvoorbeeld $T = 850$ en $T = 860$.

De minimale tijd zit in het punt $(20,60)$ en is $T_{\min} = 270$ minuten.

Het transportschema wordt:

	naar 1ste	naar 2de	naar 3de
aula	20	60	60
bieb	70	0	0

7 Eigen antwoord.

Denk aan: beperkte totale hoeveelheid aantal eenheden A plus aantal eenheden B; beperkte hoeveelheid aantal eenheden A; geschatte tijd per eenheid dat een product A maximaal in het schap staat en verwachte tijd dat product B maximaal in een schap staat. En je kunt ook met prijzen werken...

En misschien kun je eens bij een supermarktketen navragen.

