Wiskunde D

4 VWO

Deel 1, Antwoordenboek

Inhoud

1

Kansen en tellen

1.1 Experimenteren

V1 a Een worp met twee dobbelstenen geeft minstens twee ogen en maximaal twaalf ogen. Echter, er is maar één manier om daadwerkelijk ook twee ($1+1$) of twaalf ($6+6$) te gooien. Dit, terwijl er meerdere manieren zijn om bijvoorbeeld vier te gooien ($1+3$, $2+2$ en $3+1$).

Op deze manier kan je uiteindelijk beredeneren dat de kans op twee (of twaalf) gooien $\frac{1}{36}$ is, en de kans dat je vier gooit is $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, enzovoorts.

b Om het technisch uit te drukken: er zijn teveel willekeurige factoren in het spel. Een kansmodel is uiteindelijk meestal gebouwd op een handjevol simpele zekerheden, en daarvan is in dit geval geen sprake: veel dingen zijn onzeker.

c Naast technologische foefjes zoals weerballonnen, waarmee weerdata verzameld wordt om een wiskundig model mee op te kunnen stellen, heb je natuurlijk ook gewoon gezond verstand. Als het vandaag stralend warm weer is, gaat het morgen waarschijnlijk niet sneeuwen, terwijl die mogelijkheid over twee weken al wat minder onrealistisch kan zijn.

d Als iemand niet alle nummers goed opmerkt (en dan dus niet goed afstreept), kan het zijn dat die de hoofdprijs misloopt. Dit zijn factoren die je kan meenemen in je kansmodel, maar dat maakt de boel wel een stuk complexer dan simpelweg nummertjes trekken.

1 a 10 ogen kun je op drie manieren krijgen: $6+4$, $5+5$ en $4+6$.
7 ogen kun je op wel zes manieren krijgen: $6+1$, $5+2$, $4+3$, $3+4$, $2+5$ en $1+6$.

b Dat kan alleen als je beschikt over een statistiek met zijn ziekteverleden. Als daaruit blijkt dat hij gemiddeld bijvoorbeeld één week per jaar ziek is, kun je een kans op ziekte per dag beredeneren.

c Als de dobbelsteen het hele potje door al gebruikt is en er aan het einde toevallig drie zessen achter elkaar bovenkwamen, is het veel waarschijnlijker dat Sjon gewoon geluk heeft en Meindert niet zo goed tegen z'n verlies kan.

d Het is zeker waar dat er een luchtje aan de zaak lijkt te zitten. Dat gezegd hebbende is het niet zeker dat hier sprake is van doorgestoken kaart: dat Meindert direct precies datgene werpt wat hij nodig heeft om te winnen. Bovendien dat hij met een dobbelsteen werpt die hij net tevoorschijn tovert, drie keer zes werpt, lijkt onwaarschijnlijk (en bovendien verdacht), maar kanstechnisch verre van onmogelijk. Sterker nog, het is net zo waarschijnlijk als de manier waarop Sjon het vorige potje won. Kortom, Meindert kan net zo goed ook geluk hebben gehad.

e Bingo zit zo in elkaar dat de nummers op elk velletje (en ook de nummers die getrokken worden) volkomen willekeurig zijn. Onder aanname dat iedereen even goed speelt, is de winkans verwant aan de hoeveelheid spelers. Als iedereen 2% kans heeft om te winnen (ofwel 1:50), zijn er vijftig deelnemers.

2 a Uit de tabel kun je aflezen dat uitkomst 4 na 600 worpen 98 keer bovenkwam. De (experimentele) kans is dus $\frac{98}{600}$.

b Uit de tabel kun je aflezen dat uitkomst 4 na 6000 worpen 997 keer boven kwam. De (experimentele) kans is dus $\frac{997}{6000}$.

c $\frac{997}{6000} \approx 0{,}166$ en $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$. Als je ook naar de andere uitkomsten kijkt, zie je dat de (experimentele) kans in alle gevallen dichtbij $\frac{1}{6}$ komt. Het is dus wel aannemelijk dat de dobbelsteen zuiver is.

3 a $\frac{6}{10}$

b $\frac{18}{50}$

c Het kan zinnig zijn om een gemiddelde te nemen van twee verschillende experimenten (in dit geval één op een hard en één op een zacht oppervlak). In dit geval is de betrouwbaarheid laag door het kleine aantal keren dat het eerste experiment is uitgevoerd. Het grotere aantal bij het tweede experiment verandert daar niet veel aan.

4 a Zelf uitvoeren en het resultaat telkens in een turflijst vastleggen. Daarna de zevens en de tienen tellen.

b Als het goed is wel. Door toeval kan het natuurlijk ook anders uitpakken. Maar er zijn meer mogelijkheden om 7 te gooien dan dat er zijn om 10 te gooien. Ga dat na door een rooster te maken.

c Er zijn in totaal $6 \cdot 6 = 36$ mogelijke uitkomsten van een worp met twee dobbelstenen. De uitkomst 7 kun je op zes manieren werpen, en 10 kun je op drie manieren werpen.

De wet van de grote aantallen zegt hiermee dat je, na heel vaak twee dobbelstenen te werpen, $\frac{6}{36}$ deel van de uitkomsten 7 moet zijn, en $\frac{3}{36}$ deel is 10.

d In het geval van de twee dobbelstenen zoek je naar de kans dat je een 4 gooit op één dobbelsteen, omdat je met de ander al een 2 hebt. De theoretische kans om een 4 te gooien op één dobbelsteen is hetzelfde als de kans op het gooien van een 6 (namelijk $\frac{1}{6}$).

5 a In het **Practicum** vind je hoe je simulaties uitvoert, bijvoorbeeld met de grafische rekenmachine.

Je kunt niet zomaar een getal tussen 2 en 12 genereren. Wat je doet is twee losse getallen tussen 1 en 6 genereren en die bij elkaar optellen.

Om gehele getallen te krijgen, kun je de integerfunctie gebruiken bij de randomgetallen en deze met 6 vermenigvuldigen. Je krijgt de getallen: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Om ook 6 te krijgen en geen 0 moet je er dus 1 bij optellen: ‘int(6*rand)+1’.

Een worp met twee dobbelstenen is dus te simuleren met ‘int(6*rand)+int(6*rand)+2’.

Een (iets vlotter) alternatief is ‘randint(1,6,1)+randint(1,6,1)’.

b Simuleer zeshonderd (enkele) dobbelsteenworpen met ‘randint(1,6,600)’, en sla die op onder L1. Simuleer dan nog eens zeshonderd worpen onder L2, en tel L1 en L2 bij elkaar op onder L3. De worpen met twee dobbelstenen zijn gesimuleerd in L3.

Wat je nu doet, is L3 als staafdiagram plotten onder ‘STAT PLOT’.

c Gebruik TRACE om in het diagram af te lezen hoeveel keer de uitkomst 5 gesimuleerd is. Wat je linksonder zou moeten zien, is ‘min=5 max<6’, dan zie je rechtsonder de gezochte waarde n. Je experimentele kans is dan $\frac{n}{600}$.

d Er zijn drie manieren om 4 ogen te gooien: (1,3); (2,2) en (3,1). Er zijn $6 \cdot 6 = 36$ mogelijke worpen. De theoretische kans is dus $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

6 a Je telt de relatieve frequenties bij elkaar op die corresponderen met lengtes tussen 1,75 m en 1,90 m.

De gevraagde kans is $23{,}8 + 28{,}9 + 20{,}4 = 73{,}1\%$, ofwel 0,731.

b Je kunt de relatieve frequenties bij elkaar optellen die corresponderen met lengtes hoger dan 1,90 m en lager dan 1,75 m.

Wat sneller is, is om je te realiseren dat je vraagt naar de hoeveelheid die geen M draagt: dat is $100 - 73{,}1 = 26{,}9\%$; ofwel kans 0,269.

c Dit is de relatieve frequentie van lengtes vanaf 2,00 m. Dat is 0,5%.

7 a Omdat je weet dat je het over een man hebt, kijk je alleen in het kolommetje voor de mannen.

Hierin is het aantal herhalingen 5705, het aantal keren dat de gebeurtenis voorkomt is 479.

b De gevraagde kans is $\frac{479}{5705} \approx 0{,}08$, ofwel 8%.

c Omdat je hier niet weet of de persoon een man of een vrouw is, kijk je naar de ‘totaal’-kolom.

Hierin is het aantal herhalingen 10000, het aantal keren dat de gebeurtenis voorkomt is 479. De gevraagde kans is $\frac{479}{10000} \approx 0{,}05$, ofwel 5%.

d In b werd gespecificeerd dat de persoon die je tegenkomt een man is, dus het totaal aantal herhalingen wordt het totaal aantal mannen. Bij c kan de persoon zowel een man als een vrouw zijn, dus dan kijk je naar de totale hoeveelheid mensen.

8 Omdat je met twee stenen te maken hebt, is het handig een tabel te maken om de kans te berekenen. Er zijn zestien mogelijke uitkomsten. Daarvan zijn er twee om de uitkomst 3 te gooien. De kans op 3 is $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

som	**1**	**2**	**3**	**4**
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

9 a De kans op kop is gelijk aan de kans op munt. Je moet zorgen dat je de juiste verhouding van getallen aanhoudt.

Gegenereerd getal	*kop of munt*
0,1,2,3,4	kop
5,6,7,8,9	munt

Dit vind je met ‘int(10*rand)’ op de GR.

b Je kunt op de grafische rekenmachine een dobbelsteen simuleren door ‘int(rand*6) +1’. Twee dobbelstenen kun je dan simuleren door: ‘2*int(rand*6)+2’. Echter, nu denkt je rekenmachine dat je altijd twee dezelfde uitkomsten hebt op je dobbelsteen. Dit kun je oplossen door: ‘int(rand*6)+1+int(rand*6)+1=int(rand*6)+int(rand*6)+2’.

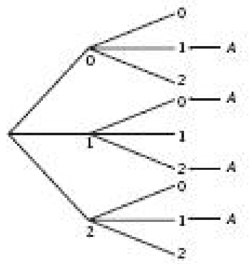
c Ook hier geldt: je kan niet zomaar deze getallen genereren: niet elk getal komt even vaak voor. Bekijk de kans die een getal heeft om voor te komen en zorg dat je de juiste verhouding aanhoudt voor de getallen die je genereert. Je kunt bijvoorbeeld zorgen dat je de getallen 0 tot en met 5 genereert met als betekenissen:

gegenereerd getal	*aantal ogen*
0	1
1	1
2	3
3	4
4	4
5	6

Gebruik hiervoor op de GR ‘int(6*rand)’.

10 a Er zijn negen mogelijke paren, die allemaal even waarschijnlijk zijn (als ze tenminste niet volgens een bepaalde strategie spelen: hun keuzes moeten willekeurig zijn). Zo krijg je mogelijkheden (0,0) (speler A heeft 0 lucifers, en speler B ook), (0,1) (speler A pakt er 0, speler B 1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1) en (2,2). Elk van die mogelijkheden geef je een nummer, respectievelijk 1 t/m 9. De nummers 2, 4, 6, 8 zijn winst voor A, de nummers 1, 3, 5, 7 en 9 voor B. Nummer 0 doet niet mee.

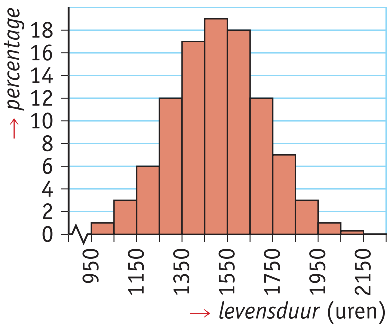
b De figuur heet een boomdiagram en geeft een weergave van alle mogelijke uitkomsten. De eerste vertakking moet je zien als het mogelijke aantal lucifers dat speler A pakt, en de vertakkingen daaruit zijn keer op keer het mogelijke aantal lucifers dat speler B pakt.



c Van de negen mogelijke uitkomsten zijn er maar vier waarbij speler A wint. Omdat de uitkomsten willekeurig zijn, heeft volgens de experimentele wet van de grote aantallen speler A een kleinere kans om te winnen.

11 a De aantallen van alle klassen van levensduur bij elkaar opgeteld is 297.

b Voor de klasse 950 -< 1050 is de relatieve frequentie $\frac{4}{297} \cdot 100 \approx 1{,}3\%$. Ga zo door voor alle klassen om het staafdiagram met relatieve frequenties te kunnen tekenen.



c Dit is de kans dat de lamp korter dan 1250 uur brandt, ofwel $\frac{4+9+16}{297} \cdot 100 \approx 10\%$

d Dit is de kans dat de lamp langer dan 1650 uur brandt, ofwel $\frac{37+20+9+3+1}{297} \cdot 100 \approx 24\%$.

e De gemiddelde levensduur zit in de klasse 1450− < 1550 uur. Je kijkt naar een levensduur van minder dan 1350 en meer dan 1650 uur. Dus $\frac{65}{297} \cdot 100 + \frac{70}{297} \cdot 100 = 45\%$.

12 a Je bekijkt de kolom die correspondeert met een S.E.-score van 5. De kans die je zoekt, is de kans op een 6 of hoger op het C.E., binnen die kolom. Dat is dus $\frac{5+2}{11+5+2} = \frac{7}{18}$.

b Je bekijkt hier de scoretabel als geheel, dus de noemer wordt 100. Voor de relevante percentages in de teller moet je even systematisch denken:

- Als de S.E.-score 4 is, moet de C.E.-score 5, 6 of 7 zijn. Dat is dus 10 + 5.
- Als de S.E.-score 5 is, moet de C.E.-score 6 of 7 zijn. Dat is dus 5 + 2.
- Als de S.E.-score 6 is, moet de C.E.-score 7 zijn. Dat is dus 7.
- Als de S.E.-score 7 of 8 is, kan de C.E.-score sowieso niet beter zijn.

De kans die je zoekt, is dus $\frac{15+7+7}{100} = \frac{29}{100}$.

13 Tel de keren dat spelers van een verschillende rang bij elkaar geplaatst worden op en bereken de kans. Dat is een heel proces, waarbij je gemakkelijk een rekenfoutje maakt . Handiger is het volgende:

Bedenk dat de kans dat twee spelers dezelfde rang hebben opgeteld met de kans dat twee spelers een verschillende rang hebben, precies 100% is. De gevraagde kans is dan gelijk aan $100 - \frac{458+521+409+388+535+463}{5000} \cdot 100 = 44{,}52\%$.

De kans dat je gepit wordt tegen een speler van een andere rang is best hoog. Misschien valt er nog wat te sleutelen aan het algoritme, zodat die kans lager wordt.

14 a Warren wint als hij een 4 gooit en Bill een 3. Bij elke 4 van Warren zijn 5 keer een 3 van Bill mogelijk. Dat geeft 25 paren met winst voor Warren van de 36 paren. De kans op winst voor Warren is dan $\frac{25}{36}$.

b Tabel bij de twee rode dobbelstenen van Warren:

som ogen	2	5	8
aantal keer	1	10	25

Tabel bij de twee groene dobbelstenen van Bill:

som ogen	4	7	10
aantal keer	9	180	9

Bill wint met 9 tegen 1. Dat kan op $9 \cdot 1 = 9$ manieren. Met 7 wint hij op $18 \cdot 11 = 198$ manieren en met 10 wint hij op $9 \cdot 36 = 324$ manieren. Totaal wint Bill op 531 manieren. Er zijn $36 \cdot 36 = 1296$ paren uitkomsten van rood met groen. De kans dat Bill wint, is $\frac{531}{1296} \approx 0{,}4097$. Een kans van 41%.

15 a Heel vaak met één van die dobbelstenen gooien en bijhouden hoe vaak elk vlakje boven komt. Als de experimentele kans per vlak uitkomt op ongeveer $\frac{1}{4}$ zou je wel kunnen zeggen dat de dobbelsteen zuiver is. (Daarna zou je dit ook nog met de andere dobbelsteen moeten doen.)

b Omdat bij zo'n simulatie wordt uitgegaan van gelijke kansen voor elk vlakje.

c Eigen antwoord. Raadpleeg zo nodig het **Practicum**.

d Er zijn totaal 16 verschillende worpen (dat is, $4 \cdot 4$), en daarmee 3 manieren om totaal 4 ogen te gooien: $1 + 3$, $2 + 2$ en $3 + 1$. De kans op 4 is dan $\frac{3}{16} = 0{,}1875$.

16 a De relatieve frequenties van alle lengtes tot 180 cm bij elkaar opgeteld is $0{,}6 + 1{,}2 + 3{,}9 + 12{,}1 + 19{,}3 = 37{,}1\%$.

b De relatieve frequenties tussen 180 en 190 cm bij elkaar opgeteld is $29{,}4 + 20{,}9 = 50{,}3\%$, dat is dus de kans dat de maat van een willekeurige soldaat M is. Zo is de kans op L: $8{,}9 + 2{,}7 + 1{,}0 = 12{,}6\%$.

c Per maat is het deel van de bestelling de kans op die maat als getal tussen 0 en 1, maal de grootte van de bestelling. Dus:

S: $\frac{37{,}1}{100} \cdot 300 = 111{,}3$, dat zijn dus 111 stuks.

M: $\frac{50{,}3}{100} \cdot 300 = 150{,}9$, dus 151 stuks.

L: $\frac{12{,}6}{100} \cdot 300 = 37{,}8$, dus 38 stuks.

(Let op de afronding!)

17 a 11,8% van de mannen is linkshandig, dus een willekeurige man heeft een kans van $\frac{11{,}8}{100} = 0{,}118$ om linkshandig te zijn.

b Als je het totaal aantal personen in de tabel gaat lezen als procenten kom je op 200% van de mensen, en dat is natuurlijk raar. Je kan het beter lezen als 'van iedere 100 mannen zijn er 11,8 linkshandig'. In die hoedanigheid zijn er per 200 mensen in totaal $11{,}8 + 9{,}6 = 21{,}4$ mensen linkshandig. Dus de kans dat een willekeurige persoon linkshandig is is $\frac{21{,}4}{200} = 0{,}107$.

c Met het antwoord van vraag b kom je algauw op $0{,}107 \cdot 9000 = 963$.

1.2 Redeneren

V1 3 ogen kun je maar op 2 manieren krijgen: $1+2$ en $2+1$.
7 ogen kun je zo op wel 6 manieren krijgen.

Het totale aantal mogelijke uitkomsten is $6 \cdot 6 = 36$. De kans op 3 ogen is dus $\frac{2}{36}$ en de kans op 7 ogen is $\frac{6}{36}$.

Een rooster maken zorgt dat je geen fouten maakt in het aantal mogelijkheden.

1 a Er zijn 36 mogelijkheden. 1-1, 1-2, ..., 6-6. Er is één gewenste mogelijkheid.
De kans is dus $\frac{1}{36}$.

b Er zijn 36 mogelijkheden. 1-1, 1-2, ..., 6-6. Er zijn twee gewenste mogelijkheden, 5-6 en 6-5.
De kans is dus $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

2 Er zijn meer witte dan rode balletjes, dus de kans op een wit balletje is groter dan die op een rood balletje. Met Jan's redenering zou je ook kunnen zeggen dat de kans op de Lotto winnen $\frac{1}{2}$ is ('want het gebeurt wel of niet').
De kans op een wit balletje is 0,6, die op een rood balletje 0,4.

3 a $P(X \leq 4) = P(X = 1 \vee X = 2 \vee X = 3 \vee X = 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b $P(X < 4) = P(X = 1 \vee X = 2 \vee X = 3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c $P(X = \text{oneven}) = P(X = 2 \vee X = 4 \vee X = 6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

d De kans op minstens twee ogen is $P(X \geq 2)$, ofwel:
$P(X = 2 \vee X = 3 \vee X = 4 \vee X = 5 \vee X = 6) = \frac{5}{6}$.

Een andere (snellere) manier om erop te komen, is door te bedenken dat
$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

4 a Voor elke uitkomst van X zijn er nog zes uitkomsten voor Y, dat is dus totaal $6 \cdot 6 = 36$ mogelijkheden.

b Zie het rooster in het voorbeeld: hier zijn mogelijk de combinaties $4+1$, $3+2$, $2+3$ en $1+4$.

c Met vier relevante mogelijkheden op een totaal van 36 uitkomsten maakt dat $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

d Zie het rooster in het voorbeeld: de (zes) relevante mogelijkheden zijn $6+1$, $5+2$, $4+3$, $3+4$, $2+5$ en $1+6$. Dat geeft een kans $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

e $P(X + Y \geq 9) = P(X + Y = 9 \vee X + Y = 10 \vee X + Y = 11 \vee X + Y = 12)$. Dit geeft $\frac{4+3+2+1}{36} = \frac{10}{36}$.

5 a Er zit één schoppen tien in het spel, dus $P(\text{schoppen tien}) = \frac{1}{52}$.

b Per kleur zijn er vier plaatjes (boer, vrouw, heer en aas). Er zijn dus in totaal zestien plaatjes in het spel, dus $P(\text{plaatje}) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

c Er zijn dertien kaarten met kleur ruiten, dus $P(\text{ruiten}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. Je kunt ook direct beredeneren dat $\frac{1}{4}$ deel van het spel uit ruiten bestaat.

6 a Kun je niet door redeneren bepalen. Dit ligt aan de omstandigheden van dag tot dag, en die kun je niet van tevoren weten.

b Dit is vergelijkbaar met het werpen van een bepaald resultaat op een dobbelsteen met vier vlakken: elk van de vier keuzen is even waarschijnlijk.

c In principe zijn er wel wat factoren die bijdragen aan het geslacht van een geboren kind, maar grofweg (wereldwijd) genomen worden er ongeveer even veel jongentjes als meisjes geboren, dus de gevraagde kans is $\frac{1}{2}$.

d Zelfde redenering als bij deelvraag c. Het geslacht van de reeds geboren kinderen maakt niet uit voor het geslacht van het verwachte kind.

e Hoewel het gedrag van het weer wel in grote lijnen te voorspellen valt, is die voorspelling erg situatiegebonden, en bovendien niet zonder meer betrouwbaar. De gevraagde kans valt niet te beredeneren.

f Er zijn acht vlakken waarop deze dobbelsteen met even grote waarschijnlijkheid kan komen te liggen (als de dobbelsteen zuiver is). Vier daarvan zijn rood, dus de gevraagde kans is $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

7 a Een kwart van de kaarten (dertien kaarten) is harten, dus de kans op de eerste hartenkaart is $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

b De kans op een 10 is $\frac{4}{52}$, maar een van de vier kaarten is een harten tien. Dan blijven er 3 tienen over: P(een 10, die geen harten is) $= \frac{3}{52}$

c Er zitten nog 3 tienen in het kaartspel, en er zijn in totaal nog 51 kaarten over. De kans is dus $\frac{3}{51} = \frac{1}{17}$.

8 a Drie mogelijke gele balletjes uit een totaal van tien balletjes geeft een kans $\frac{3}{10}$.

b Er zijn twee balletjes met nummer 1 erop, dus de kans is $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

c Er is één balletje met nummer 4 erop, dus de kans is $\frac{1}{10}$.

d De gunstige trekkingen zijn groen4, groen5, groen6 en groen7. De kans is dan $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

9 De kans op kop bij elk geldstuk is $\text{P(kop)} = \frac{1}{2}$. Er zijn $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ mogelijkheden. Eén daarvan is KKK. De kans $\text{P}(KKK) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

10 a Er zijn totaal duizend mogelijke uitkomsten, en één ervan is de eerste prijs, dus de kans is $\frac{1}{1000}$.

b Het maakt niet uit wat je vriendin zegt, ze heeft gewoon een lot waar je nog niets van af weet en toevallig is het een even getal. Er zijn twee prijzen in totaal en de kans op een tweede prijs is $\frac{2}{1000}$.

c Van alle duizend loten die mogelijkerwijs getrokken worden, hebben er vijfhonderd een even getal, dus de kans is $\frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$.

d Bij b is alleen het nummer van je vriendin goed, bij c is elk even nummer goed.

e Er is nu nog één tweede prijs over van de 999 mogelijke loten, dus de kans is $\frac{1}{999}$.

f 771 is een oneven getal, dus er zijn nog steeds vijfhonderd even getallen over. De gevraagde kans is dus $\frac{500}{999}$.

11 a Maak een tabel.

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Er zijn zes mogelijke combinaties die uitkomen op 7 ogen, en totaal 36 resultaten. De kans is dus $\frac{6}{36}$.

b Noem X het aantal ogen dat je gooit met de ene dobbelsteen, en Y het aantal ogen op de ander. Dan is de gevraagde kans:

$P(X + Y \leq 7) = P(X + Y = 2 \vee X + Y = 3 \vee X + Y = 4 \vee X + Y = 5 \vee X + Y = 6 \vee X + Y = 7)$. Zie de tabel.

Hieruit komt $\frac{1+2+3+4+5+6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

c $P\,(X + Y > 11) = P(X + Y = 12) = \frac{1}{36}$

d Voor elke worp met de ene dobbelsteen X zijn er drie mogelijkheden voor Y, zodat $X + Y$ een even getal is. Dat geeft dus $3 \cdot 6$ mogelijke worpen. Zie ook de tabel.

Dus $P\,(X + Y = \text{even}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

12 a Dit is de kans dat kop (dan wel munt) boven komt bij een muntworp: P (Cambuur wint de toss) $= \frac{1}{2}$.

b Er zijn $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ mogelijkheden. Vier keer aftrappen betekent bijvoorbeeld dat de uitkomst van vier keer een muntstuk werpen $MMMM$ moet zijn. Het mag uiteraard ook $KKKK$ zijn, naar gelang de keuze van de kant van het muntstuk. Dat is één van de zestien mogelijkheden. De kans op vier keer aftrappen is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

Ook als Cambuur steeds een andere kant van de munt kiest, blijft de kans $\frac{1}{16}$. Elke volgorde bij het vier keer werpen met een muntstuk komt één keer in het totaal van zestien uitkomsten voor. Bijvoorbeeld $MKMK$ is één van de zestien mogelijkheden.

c Dit is de kans dat ze vier keer de toss winnen, plus de kans dat ze die drie keer winnen.

De toss drie keer winnen, kan op vier manieren: $NWWW$, $WNWW$, $WWNW$ en $WWWN$ (hierbij staat de N voor 'niet winnen' en de W voor 'winnen'). De kans op elk van deze gebeurtenissen is weer $\frac{1}{16}$.

De kans op vier keer winnen was $\frac{1}{16}$.

De gevraagde kans is dus $\frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.

13 a Per minuut zijn de ogen $10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$ seconden dicht en dus 57,5 seconden open.

De kans op open ogen is: $\frac{57{,}5}{60} \approx 0{,}9583$.

b Voor een geslaagde foto moeten alle 20 personen niet knipperen.
De kans daarop is $0{,}96^{20} \approx 0{,}44$.

c P (geslaagde foto) $= 0{,}96^{25} \approx 0{,}3604$
P (niet-geslaagde foto) $= 1 - 0{,}3603 \approx 0{,}6396$
P (5 niet-geslaagde foto's) $= 0{,}6396^5 \approx 0{,}107$
P (minstens 1 geslaagde foto) $= 1 -$ P (5 niet-geslaagde foto's) $= 1 - 0{,}107 \approx 0{,}893$

14 Er zijn drie mogelijke situaties te bedenken:

1. het oudste kind is een jongen en de ander een meisje;
2. het jongste kind is een jongen en de ander een meisje;
3. beide kinderen zijn jongens.

Deze drie situaties hebben allemaal dezelfde kans om voor te komen, dus de kans dat beide kinderen jongens zijn is $\frac{1}{3}$.

15 a Precies $\frac{1}{4}$ deel van de speelkaarten is harten, dus de gevraagde kans is $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

b Er zitten 4 boeren in een kaartspel, dat is een kans van $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

c Er zit precies één hartenboer in een kaartspel, dus de kans is $\frac{1}{52}$.

16 a Daarmee dekt de eigenaar van het casino zijn kosten en maakt hij winst.

b $\frac{1}{37}$

c Niet als je twee fiches op hetzelfde nummer zet. Wel als je twee fiches op verschillende nummers zet, dan verdubbelt de kans.

d Van de getallen 0 tot en met 36 zijn er 18 oneven, dus de kans is $\frac{18}{37}$.

e Er zijn 18 van de 37 vakjes rood gekleurd, dus de kans is $\frac{18}{37}$.

f De uitkomst van een rouletteworp is onafhankelijk van alle worpen die ervoor kwamen. De gevraagde kans verandert dus niet.

17 Er zijn natuurlijk net zoveel uitkomsten als wanneer je het aantal ogen dat boven komt bij elkaar optelt, dat is, 36. De uitkomsten met een product van minstens 20 zijn $4 \cdot 5$, $4 \cdot 6$, $5 \cdot 4$, $5 \cdot 5$, $5 \cdot 6$, $6 \cdot 4$, $6 \cdot 5$ en $6 \cdot 6$, dat zijn er dus 8. De gevraagde kans is dus $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

1.3 Systematisch tellen

V1 Per geldstuk zijn er twee mogelijke uitkomsten: K of M. Het totaal aantal uitkomsten is dus $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. De gewenste uitkomsten kun je als volgt tellen:

- drie keer kop en één keer munt kan als $KKKM$, $KKMK$, $KMKK$ en $MKKK$;
- drie keer munt en één keer kop kan als $MMMK$, $MMKM$, $MKMM$ en $KMMM$.

Dat zijn dus 8 relevante mogelijkheden. De gevraagde kans is $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

1 a In een wegendiagram wordt alleen aangegeven hoeveel wegen er tussen twee punten zijn.
In een boomdiagram zie je ook de afzonderlijke routes.

b Een boomdiagram is makkelijker wanneer het totaal aantal mogelijkheden beperkt is. Als een boomdiagram te groot wordt, is een wegendiagram makkelijker.

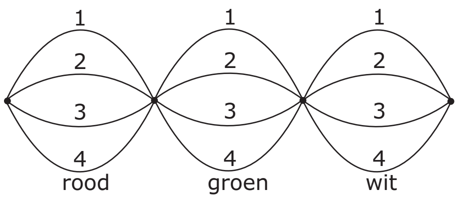
2 Er zijn $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ mogelijkheden. Eén daarvan is de juiste. De gevraagde kans is dus $\frac{1}{24}$.

3 a $6 + 3 + 3 + 8 = 20$

b 8

c $6 + 5 + 3 = 14$

4 a Zie de figuur.



$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ mogelijkheden in totaal.

b Bij de rode dobbelsteen is er maar één mogelijkheid (3), bij de andere twee dobbelstenen zijn er steeds drie mogelijkheden (1, 2 en 4). Totaal $1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$ mogelijkheden.

c Net als bij b, maar er zijn nu drie mogelijkheden voor de kleur waarbij de 3 onder komt. Dat geeft $3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ mogelijkheden.

d Bij a zie je dat het totale aantal uitkomsten 64 is, dus de gevraagde kans is $\frac{27}{64}$.

5 a Je kunt dan de mogelijke worpen met de derde dobbelsteen niet kwijt.

b Zie het rooster. Er zijn vier manieren om 9 ogen te krijgen, 3 manieren voor 10; 2 voor 11 en 1 voor 12. Bij elkaar geeft dat een kans $\frac{4+3+2+1}{36} = \frac{5}{18}$.

6 a Zie de tabel.

	Paul	Anja	Frits	Elly
Paul	X	PA	PF	PE
Anja	PA	X	AF	AE
Frits	PF	AF	X	FE
Elly	PE	AE	FE	X

b Het boomdiagram is als eerste stap in vier takken verdeeld en vanuit elke tak komen weer drie nieuwe takken. Totaal ook $4 \times 3 = 12$ mogelijkheden.

c Er zijn twee mogelijkheden om Paul en Anja te kiezen, uit een totaal aantal van twaalf uitkomsten.

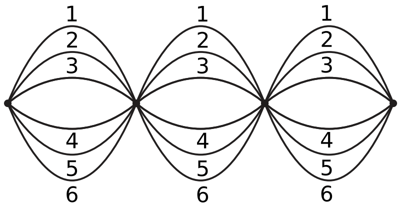
7 a Maak een venndiagram met alle gegevens en noem het aantal leerlingen dat drie vakkken kiest x. Dan geldt: $8 + 11 + 4 + x + 8 - x + 6 - x + 9 - x = 38$. Dit geeft $x = 4$. Er zijn dus vier leerlingen die alle drie de vakken volgen.

b 5 van de aardrijkskundeleerlingen hebben niets anders gekozen, dus de kans is $\frac{5}{38}$.

8 a Je moet 3 cijfers raden, ieder met 10 mogelijkheden, dus totaal $10^3 = 1000$ mogelijkheden. De kans dat je de juiste combinatie kiest, is $\frac{1}{1000}$.

b Er zijn $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschillende manieren om vier verschillende cijfers op een volgorde te zetten. Dat geeft een kans van $\frac{1}{24}$.

9 a Zie de figuur.



b Je wilt 6, niet 6 en niet 6 gooien. Dit kan op drie manieren. Er zijn dus $3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 = 75$ manieren om precies één zes te gooien Er zijn in totaal $6^3 = 216$ mogelijke uitkomsten bij drie dobbelstenen. Dit geeft een kans van $\frac{75}{216}$.

c Er is één manier om drie zessen te gooien. Dit geeft een kans $\frac{1}{216}$.

d Dit is de kans op twee of drie zessen. De kans op drie zessen is $\frac{1}{216}$.

Het aantal mogelijkheden met twee zessen is: $1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3 = 15$ (3 is het aantal mogelijke volgordes). De kans op minstens twee zessen wordt dus $\frac{15+1}{216} = \frac{2}{27}$.

e Dit is de kans op geen, één of twee zessen. De kans op geen zessen is $\frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{216}$, dus de gevraagde kans is $\frac{125+75+15}{216} = \frac{215}{216}$.

10 a Vul het venndiagram in, voor zover dat kan. Noem het aantal mensen dat zowel banaan- als citroensmaak lekker vond, X. Je kunt berekenen:

$20 + 7 + 5 + 10 + (24 - X) + (34 - X) + X + 8 = 100$, ofwel $X = 8$.

Het aantal mensen dat alleen banaan en citroen lekker vond, is dus 8.

b $\frac{49+5+8+10+41+7}{170} \cdot 100 = 70{,}6\%$.

c Dit zijn de mensen die alleen citroen en niets anders willen, plus de mensen die helemaal niets lusten. Dus $41 + 8 = 49$.

d $\frac{49+8+41+8}{170} \cdot 100 = 62{,}4\%$ van de ondervraagden houdt niet van aardbeienijs. Dit correspondeert met een kans van 0,62.

11 a Op elke vraag zijn 4 antwoorden mogelijk. Je moet 10 vragen beantwoorden. Dus dat betekent $4^{10} = 1048576$ mogelijke combinaties van antwoorden.

b Er zijn nog vier vragen die je niet weet. Dat betekent dat je nog $4^4 = 256$ mogelijke manieren hebt om te beantwoorden.

c Je hebt al 6 punten binnen. Om een voldoende te halen moet je nog minstens 2 punten hebben.

Voor 2 punten geldt goed-goed-fout-fout. Dit kan op 6 manieren. Totaal $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$ (de 6 voor het aantal volgordes).

Voor 3 punten geldt goed-goed-goed-fout. Dit kan op 4 manieren. Totaal 12.

Voor 4 punten geldt goed-goed-goed-goed, dat kan op 1 manier.

Je kunt de vier vragen op $4^4 = 256$ manieren invullen. Er is een kans op 8 of hoger van $\frac{54+12+1}{256} = \frac{67}{256}$.

d Als je alle onjuiste antwoorden onder de naam ‘fout’ neemt, zijn er per vraag maar twee mogelijkheden: dus totaal 2^{10}.

12 a $2 \cdot 8 \cdot 4 = 64$

b Band drie heeft 'twee kersen' er niet op staan, dus er zijn 0 van zulke mogelijkheden.

c Er zijn totaal $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$ mogelijkheden. Er zijn $1 \cdot 2 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot 7 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 2 \cdot 8 \cdot 4 = 164$ gunstige mogelijkheden.

Dus de kans is $\frac{164}{8000} = \frac{41}{2000}$.

d De mogelijkheden van volgordes noemen we BPP, PBP en PPB. Per gunstige uitkomst is het aantal volgordes:

BPP: $8 \cdot 7 \cdot 3 = 168$

PBP: $2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$

PPB: $2 \cdot 7 \cdot 7 = 98$

Dus het totaal aantal manieren is $168 + 6 + 98 = 272$.

e Citroen kan alleen op de derde band. De mogelijke volgordes zijn dus BSC en SBC:

BSC: $8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$

SBC: $2 \cdot 1 \cdot 5 = 10$

Dus het totaal aantal manieren is $320 + 10 = 330$.

f Wat je hier in wezen doet, is de banden afgaan en kijken hoeveel keuzes je per band over hebt. Omdat band 3 anders in elkaar zit dan band 1 en 2, is het het makkelijkst om daarmee te beginnen.

- Op band 3 zijn er $4 + 1$ mogelijkheden (alles behalve 'twee kersen'). We tellen de mogelijkheid 'citroen' hier even apart.
- Als je op band 3 'citroen' hebt, zijn er op band 1 nog vijf mogelijkheden en daarna op band 2 nog vier; dit correspondeert met $1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$.
- Als je op band 3 'niet citroen' hebt (dat zijn vier mogelijkheden), zijn er op band 1 nog vier mogelijkheden, en daarna op band 2 nog drie; dit correspondeert met $4 \cdot (4 \cdot 3) = 48$.

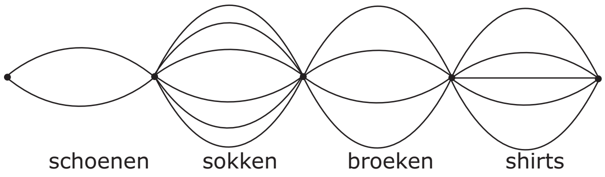
Er bestaan dus $20 + 48 = 68$ samenstellingen van verschillende plaatjes.

13 a Hierbij past een wegendiagram met elke stap 6 mogelijkheden.
Er zijn dus $6^5 = 7776$ mogelijke uitkomsten.

b Je moet dan 6 - 5 - 4 - 3 - 2 of 5 - 4 - 3 - 2 - 1 gooien, waarbij de volgorde niet uit maakt.
Bij elk van deze gevallen past een wegendiagram met bij de eerste stap 5, bij de tweede stap 4, bij de derde stap 3, bij de vierde stap 2 en bij de laatste stap 1 mogelijkheden.

In totaal $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 240$ mogelijkheden.

14 a Zie de figuur.

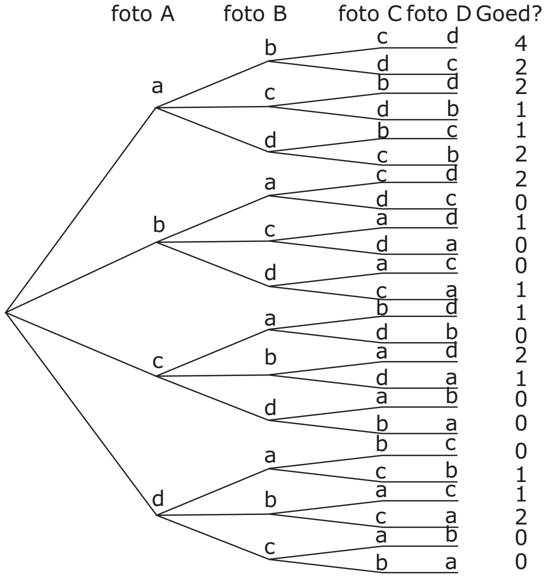


Je kunt je op $2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 = 240$ manieren kleden.

b $4 \cdot 5 = 20$ manieren.

15 Het aantal gunstige mogelijkheden is 1, het totaal aantal mogelijkheden is $3^6 = 729$. De kans is dus $\frac{1}{729}$.

16 a Maak een boomdiagram of een deel daarvan. Zie figuur.



Voor de eerste foto heb je 4 mogelijkheden, voor de tweede 3 enzovoort. Er zijn dus 4*3*2*1=24 mogelijkheden. In het boomdiagram kun je zien dat er 8 mogelijkheden zijn waarbij er 1 kaartje goed hangt. De kans is dus $\frac{8}{24}$.

b Er is maar 1 mogelijkheid van de 24 om alle kaarten goed te hangen, dus de kans is $\frac{1}{24}$.

1.4 Machten en faculteiten

V1 a Per 'positie' zijn er 10 mogelijke cijfers, dat is dus totaal $10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10 = 10^7$ bankrekeningnummers.

b Nu heb je op de eerste positie nog maar 9 mogelijkheden, en op de posities die erop volgen nog steeds 10. Dus totaal $9 \cdot 10^6$ bankrekeningnummers.

c Op de eerste positie heb je gewoon 10 cijfers om uit te kiezen, maar dat wordt per positie erna steeds 1 minder. Dat geeft $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604800$.

1 a Herhaling is toegestaan, dus $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^6 = 46656$ mogelijkheden.

b Er zijn dan $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ mogelijkheden.

2 a Op$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^6 = 308915776$ manieren.

b Op $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 165765600$ manieren.

3 a Je kunt kiezen uit 23 letters en 10 cijfers, en je mag ze herhalen. Dat geeft $23^4 \cdot 10^2 = 27984100$ mogelijke nummerborden.

b Zonder herhaling zijn er voor de letters $23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20$ en voor de cijfers $10 \cdot 9$ mogelijkheden, dus totaal $23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 9 = 19126800$.

c Mogen de tekens niet worden herhaald, zijn dat er $10 \cdot 9 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 32292000$. Dus er zijn 32292000 auto's mogelijk met een kenteken met verschillende tekens.

Er zijn $10^2 \cdot 26^4 = 45697600$ kentekenplaten mogelijk als de tekens mogen worden herhaald.

De gevraagde kans is $\frac{32292000}{45697600} \approx 0{,}7067$, dus ongeveer 71%.

d De eerste letter is een D of een F: hier zijn dus 2 mogelijkheden. Daarna heb je $26-5$(klinkers)-1 mogelijkheden voor de tweede letter. Voor de derde letter zijn er 19 mogelijkheden. Dan $10 \cdot 9$ getallen, en dan 18 mogelijkheden voor nog een letter. In totaal: $2 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 18 = 1231200$ mogelijkheden.

4 Er zijn $40 \cdot 39 \cdot 38 = \frac{(40!)}{(37!)} = 59280$ keuzes mogelijk.

5 a Dit is het aantal manieren waarop je tien verschillende elementen kunt rangschikken.

b $10! = 3628800$

c Dit is het aantal volgordes waarop je drie elementen uit tien verschillende elementen kunt uitkiezen, zonder deze te mogen herhalen.

d $10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!} = 720$

e $100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 = \frac{100!}{95!} = 9034502400$

6 a $5^5 = 3125$

b $5! = 120$

c $5^3 = 125$

d $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

e Voor de laatste drie cijfers kunt je kiezen wat je wilt, dus dat zijn alvast 5^3 mogelijkheden. Bij het kiezen van de eerste twee cijfers moet je even opletten:

- als het eerste cijfer een zes is, heb je voor het tweede cijfer nog 4 mogelijkheden, ofwel $1 \cdot 4$;
- als het eerste cijfer een zeven of een acht is, heb je voor het tweede cijfer alle mogelijkheden, ofwel $2 \cdot 5$.

Tel alles bij elkaar op en je krijgt $1 \cdot 4 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 = 1750$ mogelijke getallen.

f Bekijk het als bij deelvraag e, maar dan zonder herhalingen.

- als het eerste cijfer een zes is, zijn er nog 3 mogelijkheden voor het tweede cijfer, en dan nog 3! voor de laatste drie;
- als het eerste cijfer een zeven of acht is, zijn er nog 4! mogelijkheden voor de cijfers die erop volgen.

Dit geeft $1 \cdot 3 \cdot 3! + 2 \cdot 1 \cdot 4! = 66$ verschillende cijfers.

7 $26^2 \cdot 10^4 = 6760000$

8 a Er zijn $5 \cdot 7 = 35$ vakjes, ieder met twee mogelijkheden (aan of uit). Dat maakt totaal 2^{35} mogelijkheden.

b Er zijn $35 \cdot 34 \cdot \ldots . \cdot 26$ manieren waarbij 10 van de 35 puntjes 'aan' staan. Echter, er zit geen verschil in de puntjes 'aan' (er is geen onderlinge volgorde per gekozen tiental), wat betekent dat er te veel mogelijkheden zijn genoemd. Je moet dus delen door het aantal volgordes van die 10 puntjes die 'aan' staan (en toch voor één mogelijkheid gezien moeten worden), daarom delen door 10!. Het antwoord wordt dan: $\frac{35!}{10! \cdot 25!} = 183579396$

9 a $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$

b $\frac{1}{2730}$

10 a $8! = 40320$ volgordes.

b Zet eerst deze persoon neer, er zijn twee plaatsen voor (de uiteindes aan weerszijden). De overige zeven kunnen willekeurig worden neergezet: $1 \cdot 7! + 1 \cdot 7! = 2 \cdot 7! = 10080$ mogelijkheden.

c Noem het paar dat naast elkaar wil zitten (a, b). Je krijgt dan als het ware een opstelling van zeven elementen: (a, b) c d e f g h. Die paren kun je op 7! manieren rangschikken. Daarna doe je dit ook met (b, a) c d e f g h. Het totaal aantal volgordes is dan $2 \cdot 7! = 10080$.

11 Totaal zijn er $6^4 = 1296$ mogelijkheden.
Gunstig is vier zessen (1 mogelijkheid) of drie zessen en één vijf (4 mogelijkheden). De kans is dus: $\frac{5}{1296}$.

12 a Voor elke vraag zijn er vier mogelijkheden, in totaal 4^{30}.

b $4^6 = 4096$

c Er zijn 6 posities, en je kiest er willekeurig 3 uit om een joker in te zetten. Dat kan op $6 \cdot 5 \cdot 4$ manieren, maar dan tel je er eigenlijk te veel. De jokers zijn onderling niet verschillend: dus de 3! volgordes die je teveel hebt geteld moet je eruit wegdelen.

Er zijn dus $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ manieren om je jokers in te zetten.

d Met de jokers meegerekend zijn er 3 vragen die je op goed geluk invult. Dat kan op $4^3 = 64$ manieren. Er is maar 1 goede serie, dus de kans is $\frac{1}{64}$.

13 a Voor een kolom met 5 getallen zijn er $\frac{15!}{10!} = 360360$ mogelijkheden

Voor een kolom met 4 getallen zijn er $\frac{15!}{11!} = 32760$ mogelijkheden

In totaal zijn er $\frac{15!}{11!} \cdot \left(\frac{15!}{10!}\right)^4 \approx 5{,}5 \cdot 10^{26}$ mogelijkheden.

b Voor een kolom met 5 getallen zijn er 5!=120 mogelijke volgorden wezenlijk hetzelfde.

Voor een kolom met 4 getallen zijn er 4!=24 mogelijke volgorden wezenlijk hetzelfde.

In totaal zijn er $\frac{5{,}5 \cdot 10^{26}}{4! \cdot (5!)^4}$ mogelijkheden wezenlijk verschillend.

Dit is ongeveer $1{,}1 \cdot 10^{17}$.

14 a $10^5 = 100000$

b $9 \cdot 10^4 = 90000$

c $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$

d Getallen die beginnen met het cijfer 4. Dan kan op de tweede positie 3, 5, 6, 7, 8 of 9 staan. Totaal voor het gehele getal en op de tweede plaats 3: $1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.
Getallen die beginnen met een 4 (niet met een 3 op de tweede positie):

$1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1680$.
Getallen die beginnen met 5 of hoger: $5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 15120$.
Totaal: $336 + 1680 + 15120 = 17136$.

15 a $41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 = \frac{41!}{35!} = 3237399360$

b Als er eenmaal zes balletjes zijn getrokken, dan kun je die op 6! = 720 manieren verwisselen.

c $\frac{1}{41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36} = \frac{1}{3237399360}$

d Gebruik de antwoorden van a en b: $\frac{720}{323739936} = \frac{1}{4496388}$. Je hebt namelijk 720 manieren om deze nummers te trekken.

1.5 Permutaties en combinaties

V1 a $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

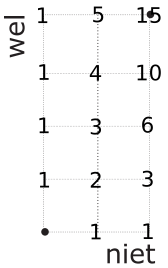
b Zie de Uitleg: 56.

1 a Maak een rooster zoals in de uitleg en vul dat in. Als je telt op dezelfde manier vind je 126.

De berekening: $\frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$.

b $\frac{100!}{3! \cdot 97!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!} = 161700$

2 a Zie de figuur.

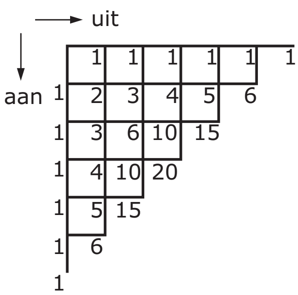


b Als het goed is, is het antwoord natuurlijk altijd hetzelfde. Met een facultateiten kom je op $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$.

3 Dit is een variatie van 5 uit 20 personen. Het geslacht van de personen maakt niet uit. De opdrachten verschillen. Dus het kan op $\frac{20!}{15!} = 1860480$ manieren.

4 Dit is een combinatie van 5 uit 20 personen, omdat de opdrachten pas na de loting onderling verdeeld worden. Het geslacht van de personen maakt niet uit. Dus het kan op $\binom{20}{5} = 15504$ manieren.

5 a Dit zijn de eerste 8 (reken de punt mee) rijen uit de driehoek van Pascal.



b Zie figuur bij a.

c In de driehoek van Pascal is dit af te lezen. Het idee erachter is dat je 0 dingen uitkiest uit 7 elementen: $\binom{7}{0} = 1$.

d In de driehoek van Pascal is dit af te lezen. Het idee erachter is dat je 1 element uitkiest uit 7 elementen: $\binom{7}{1} = 7$.

e In de driehoek van Pascal is dit af te lezen. Het idee erachter is dat je 2 elementen uitkiest uit 7 elementen: $\binom{7}{2} = 21$.

f Als je er 3 aanzet, blijven er 4 over die niet aan staan. Bij elke andere keuze van 3 aan, houd je automatisch een ander viertal schakelaars over die niet aan staan. Er zijn $\binom{7}{3} = 35$ verschillende keuzes om 3 schakelaars aan te zetten. Bij elk van deze 35 drietallen blijft een ander viertal over van schakelaars die niet aan staan. Er zijn $\binom{7}{4}$ verschillende viertallen. Dus moet $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$ gelden.

6 a Stuk voor stuk 4 elementen selecteren uit 30 kan op $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = \frac{30!}{26!} = 657720$ manieren.

b Vier verschillende elementen geeft $4! = 24$ verschillende volgordes.

c Bij a heb je berekend op hoeveel manieren je de vier schakelaars kunt kiezen. Bij b bereken je in wezen hoe vaak je iedere selectie van 4 schakelaars dubbel telt als de volgorde niet van belang is. Dus je deelt je antwoord bij a door je antwoord bij b.

Zo krijg je $\frac{30!}{26! \cdot 4!} = \binom{30}{4} = \frac{657720}{24} = 27405$.

d Op $\binom{30}{6} = \frac{30!}{24! \cdot 6!} = 593775$ manieren.

7 a Je kijkt hier naar het aantal manieren dat je willekeurig 3 uit 8 mannen kunt uitkiezen en 2 uit 12 vrouwen. Dat is respectievelijk $\binom{8}{3}$ en $\binom{12}{2}$. Het aantal manieren is dus $\binom{8}{3} \cdot \binom{12}{2} = 3696$.

b In totaal zijn er $\binom{20}{5}$ mogelijkheden. Het aantal gunstige mogelijkheden is $\binom{8}{3} \cdot \binom{12}{2}$. De kans is dus $\frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{20}{5}}$.

c Hoogstens 3 mannen betekent hier:

- 3 uit 8 mannen en 2 uit 12 vrouwen, of;
- 2 uit 8 mannen en 3 uit 12 vrouwen, of;
- 1 uit 8 mannen en 4 uit 12 vrouwen, of;
- 0 mannen en 5 uit 12 vrouwen.

Dat geeft totaal $\binom{8}{3} \cdot \binom{12}{2} + \binom{8}{2} \cdot \binom{12}{3} + \binom{8}{1} \cdot \binom{12}{4} + \binom{8}{0} \cdot \binom{12}{5} = 14608$ manieren.

8 a De weg van P naar M bestaat uit 7 stappen, waarvan je er 4 naar boven gaat. Dat kan op $\binom{7}{4} = 35$ manieren.

Je kunt ook zeggen dat de weg van P naar M bestaat uit 7 stappen, waarvan je er 3 opzij doet. Dat kan op $\binom{7}{3} = 35$ manieren.

b De weg van M naar S bestaat uit 5 stappen, waarvan je er 2 naar boven uitkiest. Dat kan op $\binom{5}{2} = 10$ manieren.

c $35 \cdot 10 = 350$

d In totaal zijn er $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 64$ routes. Dit is sneller te berekenen met 2^6. Omdat er steeds 2 keuzes zijn om de weg naar onder te vervolgen, is de som van de getallen op een rij de overeenkomstige macht van 2.

9 a Bij de zesde stap ga je omhoog, dus het antwoord is ‘nee’.

b Hier is sprake van een greep van 3 uit 10 elementen, dus er zijn $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$ lijsten mogelijk.

c Er zijn 10 vragen met 2 antwoorden per vraag, dat geeft $2^{10} = 1024$ mogelijke lijsten.

d Er is maar 1 lijst met allemaal goede antwoorden. Met 1024 mogelijke lijsten geeft dat een kans $\frac{1}{1024}$.

10 Elke wedstrijd is een greep van twee spelers uit de 24 waarbij de volgorde niet van belang is. Er zijn dus $\binom{24}{2} = \frac{24!}{2! \cdot 22!} = 276$ wedstrijden te spelen.

11 a De uitkomst is 0, 1, 2, 3, 4 of 5 keer kop. Er zijn dus 6 mogelijkheden.

b Je selecteert 2 elementen uit 5, en de volgorde maakt niet uit. Dat kan op $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ manieren.

c Met b weet je hoeveel gunstige uitkomsten er zijn: 10. Het totaal aantal uitkomsten is $2^5 = 32$. De gevraagde kans is dus $\frac{10}{32}$.

d Er zijn in totaal 2^{50} mogelijkheden. Het aantal gunstige mogelijkheden is $\binom{50}{20} = \frac{50!}{20! \cdot 30!}$. De gevraagde kans is dus $\frac{1}{2^{50}} \cdot \binom{50}{20} \approx 0{,}042$.

12
- Rooster I: $\binom{7}{5} \cdot \binom{6}{3} = 420$ routes.
- Rooster II: $\binom{7}{5} \cdot 1 \cdot \binom{4}{3} = 84$ routes.

13 a Dit is een selectie van 4 elementen uit 14 waarbij de volgorde niet uitmaakt. Dat kan op $\binom{14}{4} = 1001$ manieren.

b Dit is een selectie van 2 elementen uit 14, en 2 uit 12, waarbij de volgorde niet uitmaakt. Dat kan op $\binom{14}{2} \cdot \binom{12}{2} = 6006$ manieren.

14 a Kies willekeurig drie elementen uit 46, dat is $\binom{46}{3} = 15180$.

b Je kiest er willekeurig één uit elk genre, dus er zijn voor de genres respectievelijk 29, 5 en 12 mogelijkheden. Dat maakt totaal $29 \cdot 5 \cdot 12 = 1740$.

c Twee willekeurige Godzillafilms kunnen op $\binom{29}{2} = 406$ manieren gekozen worden. Voor de derde film zijn er 17 mogelijkheden. Deze drie films kunnen op 3! manieren gerangschikt worden. Dat geeft totaal $406 \cdot 17 \cdot 3! = 41412$ mogelijkheden.

d Het aantal mogelijke selecties van Godzillafilms is $\binom{29}{3} = 3654$. Er zijn $\binom{5}{3} = 10$ selecties van comedies, en $\binom{12}{3} = 220$ van tekenfilms.

Bij elke selectie is er maar één selectie chronologisch verantwoord, dus het totaal is $3654 + 10 + 220 = 3884$.

15 a $8! = 40320$

b De drie wiskundeboeken kunnen onderling op 3! manieren gesorteerd worden, maar tellen samen verder als één element. Je hebt dus zes verschillende elementen om te sorteren, dat kan op 6! manieren.

Dat geeft totaal $6! \cdot 3! = 4320$ manieren.

c De twee woordenboeken aan het rechtereind kunnen op twee manieren onderling gerangschikt worden. Dan zijn er nog zes boeken over die op willekeurige volgorde gezet kunnen worden. Totaal geeft dat $6! \cdot 2 = 1440$ manieren.

d Je kiest willekeurig drie boeken van de acht. Dat kan op $\binom{8}{3}$ manieren. Deze drie boeken zijn niet onderling verschillend, dus de volgorde maakt niet uit. Wat wel uitmaakt, is dat ze aan de linker- of rechterkant staan, dat zijn dus twee mogelijkheden. De rest van de boeken kan je dan nog op 5! manieren sorteren.

Bij elkaar geeft dat $\binom{8}{3} \cdot 5! \cdot 2 = 13440$ manieren.

16 a $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = \left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b) =$
$a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

b $(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

c Drie muntjes met twee uitkomsten per stuk geeft $2^3 = 8$ mogelijkheden.

d Driemaal a, tweemaal a (en dus eenmaal b), eenmaal a en nul keer a. Je kunt hetzelfde natuurlijk beweren van b.

e Eén keer b (en dus twee keer a) in een rijtje van 3 is een combinatie van 1 uit 3, dus die kan op $\binom{3}{1} = 3$ manieren.

Dat zie je ook als je het uitschrijft: aab, aba en baa.

Zo is er voor rijtjes met drie of nul keer a precies één mogelijkheid en voor één keer a zijn er ook drie mogelijkheden.

f Voor algemene n kun je $(a+b)^n$ zien als het werpen van n muntjes met a en b aan weerszijden. Dit kan op 2^n manieren. Je hebt dus 2^n rijen van a'tjes en b'tjes. De hoeveelheid a'tjes en b'tjes zijn er bij elkaar opgeteld n per rijtje.

Nou zijn er natuurlijk $\binom{n}{k}$ combinaties mogelijk van rijtjes van lengte n waarin k keer een b staat, en de rest a is. Omdat de volgorde van de a'tjes en b'tjes hier niet uitmaakt, kun je dus alle rijtjes met een bepaalde verhouding aan letters bij elkaar optellen.

Het aantal rijtjes met nul keer b erin zijn er dus $\binom{n}{0}$. Het aantal met één b erin is $\binom{n}{1}$, enzovoort.

Dus $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n}a^0b^n$.

17 a Je kiest willekeurig 6 spelers uit 12 zonder dat de volgorde uitmaakt. Dat kan op $\binom{12}{6} = 924$ manieren.

b Je wilt nu 6 individuele spelers sorteren, en dat kan op $6! = 720$ manieren.

18 a 26 afzonderlijke elementen sorteren kan op $26! \approx 4{,}0329\ldots \cdot 10^{26}$ manieren.

b $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7893600$

c $\binom{26}{5} = 65780$

d Twee meisjes kies je op $\binom{10}{2} = 45$ manieren.

Drie jongens kies je op $\binom{16}{3} = 560$ manieren.

Totaal $45 \cdot 560 = 25200$ manieren.

e Hoogstens vier wil zeggen 0,1,2,3 of 4 meisjes. Dat is veel rekenwerk. Handiger kun je dus de kans op vijf meisjes uitrekenen (bedenk dat een kans van 1 correspondeert met 100%). Deze kans trek je van 1 af (alle mogelijkheden van 5 uit 26).

Dat is $1 - \dfrac{\binom{10}{5}}{\binom{26}{5}} = 0{,}996$

19 a $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

b $P(4,4,4) = \frac{1}{216}$; $P(3,3,6) = \frac{3}{216}$; $P(3,4,5) = \frac{6}{216}$; $P(2,4,6) = \frac{6}{216}$; $P(2,5,5) = \frac{3}{216}$

1.6 Totaalbeeld

1 a Gebruik de GR (functies voor integers en random getallen; vermenigvuldig het toevalsgetal eerst met 4 alvorens je er een integer van maakten tel er 1 bij op) om de veertig toevalsgetallen te genereren.

De experimentele kans kan alles tussen 0 en 1 zijn, maar ligt meestal in de buurt van de theoretische kans die $\frac{3}{16} = 0{,}1875$ is (zie b).

b Er zijn $4 \cdot 4$ mogelijke uitkomsten. Drie hiervan zijn bij elkaar opgeteld vier, namelijk (1,3), (2,2) en (3,1).

$P(4) = \frac{3}{16}$

2 a Of je nou wel of geen verstand hebt van voetbal maakt niet uit. Je gokt op goed geluk op de uitslag. De kansen zijn dus gelijk.

b Er zijn dertien wedstrijden met drie mogelijke uitslagen per keer, dus totaal $3^{13} = 1594323$ uitslagen.

c $\frac{1}{3^{13}} \approx 0{,}000000627 = 6{,}27 \cdot 10^{-7}$

d Je kiest twee elementen uit dertien, waarbij de volgorde niet uitmaakt. Dit kan op $\binom{13}{2} = 78$ manieren.

e Dit is het aantal manieren dat er twee foute voorspellingen in zitten, plus het aantal manieren dat er één foute voorspelling in zit, plus het aantal manieren dat alles juist voorspeld is. Dat is dus $\binom{13}{2} + \binom{13}{1} + \binom{13}{0} = 92$.

f $\frac{92}{3^{13}} \approx 0{,}0000577 = 5{,}77 \cdot 10^{-5}$

3 Dat kan op 3096 manieren, zie figuur.

									B
1	8	36	120	260			566	1343	**3096**
1	7	28	84	140			316	777	1743
1	6	21	56	56			176	461	966
1	5	15	35				120	285	505
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	1	1	1	1	1	1	1	1

4 a Er zijn $4 \cdot 3 = 12$ combinaties voor tweetallen die de afwas moeten doen. Wim en Marietje kunnen op twee manieren uitgeloot worden (WM en MW). De kans is dus $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

b De berekening is exact hetzelfde als bij a. Of: je kunt op $\binom{4}{2} = 6$ manieren de twee afwassers kiezen.

De twee mannen is één van de zes mogelijkheden. De kans is $\frac{1}{6}$.

5 a Neem bijvoorbeeld de stenen met 4 ogen aan de ene kant. Dan zijn er voor de andere kant de mogelijkheden voor 0, 1, 2, 3 of 4 ogen.

Op deze manier zijn er $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ stenen mogelijk.

b Er zijn zeven dubbele stenen (00 tot en met 66). De kans is $\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$.

c De mogelijke stenen hier zijn (5,5), (4,6), (5,6) en (6,6). Dat zijn er 4, dus de kans is $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

d Maak een overzichtje van alle stenen. Er zijn tien stenen met een verschil groter dan twee, dus je houdt achttien stenen over. De kans is $\frac{18}{28} = \frac{9}{14}$.

e De mogelijke stenen zijn hier (0,3), (1,3) en (2,3). Dat zijn er drie, dus de kans is $\frac{3}{28}$.

f Er zijn 21 stenen over met 4 stuks met een 5 erop (jij hebt er 2 met een 5 erop). Petra kan aanleggen als zij 7 stenen krijgt van de resterende 21 met minstens één steen met een 5 erop. Bereken dus de kans 1 − (P (geen steen met 5)) = 1 − (P (geen steen met 5)) = $1 - \dfrac{\binom{17}{7}}{\binom{21}{7}} = 0{,}832$

6 a Het totaal aantal mensen die de vorige keer op het CDA stemden, is $55 + 3 + 20 + 4 + 11 = 93$. De gevraagde kans is dus $\frac{93}{415} \approx 0{,}2241$.

b Het totaal aantal mensen die deze keer op de PvdA stemden, is $3 + 71 + 6 + 3 + 8 = 91$. De gevraagde kans is dus $\frac{91}{415} \approx 0{,}2193$.

c Het totaal aantal mensen dat deze keer weer op zijn eigen partij stemde, is $55+71+68+57+27 = 278$. De gevraagde kans is dus $\frac{278}{415} \approx 0{,}6699$.

d Er zijn $2 + 71 + 5 + 9 + 17 = 104$ mensen die de vorige keer op de PvdA stemden, en 2 daarvan nu op het CDA. De gevraagde kans is dus $\frac{2}{104} \approx 0{,}0192$.

e Er zijn $3 + 3 + 2 + 57 + 8 = 73$ mensen die de vorige keer op de PvdA stemden, en 16 daarvan nu op een andere partij. De gevraagde kans is dus $\frac{16}{73} \approx 0{,}2192$.

7 Noem de vier personen a, b, c en d. Schrijf de 24 volgordes op van deze vier letters. Tel in welk van deze 24 volgordes één of meer letters op hun ‘eigen’ plaats staan. In de volgorde b, a, c, d staat c op de ‘eigen’ plaats. Je vindt dan vijftien volgordes waarbij dit het getal is en waarbij dus opnieuw geloot moet worden.

P (opnieuw loten) = $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

8 a Dit is een combinatie van 5 uit 22 elementen. Dat kan op $\binom{22}{5} = 26334$ manieren.

b Dit is een variatie van 5 uit 22 elementen. Dat kan op $\frac{22!}{17!} = 3160080$ manieren.

c Dit is een combinatie van 3 uit 8 en van 2 uit 14: $\binom{8}{3} \cdot \binom{14}{2} = 5096$.

d Er moeten 1 of meer onderbouwleerlingen in.

1 onderbouwleerling: $\binom{14}{1} \cdot \binom{8}{4} = 980$ manieren.

2 onderbouwleerlingen: $\binom{14}{2} \cdot \binom{8}{3} = 5096$ manieren.

3 onderbouwleerlingen: $\binom{14}{3} \cdot \binom{8}{2} = 10192$ manieren.

4 onderbouwleerlingen: $\binom{14}{4} \cdot \binom{8}{1} = 8008$ manieren.

5 onderbouwleerlingen: $\binom{14}{5} \cdot \binom{8}{0} = 2002$ manieren.

Totaal: 26278 manieren.

e Voor de voorzitter zijn er 8 (ofwel $\binom{8}{1}$) mogelijkheden. Voor de rest van het bestuur maakt het niet uit welke leerlingen je kiest, dus dat is een combinatie van 4 uit de overgebleven 21 leerlingen: $8 \cdot \binom{21}{4} = 47880$.

9 a Zie de tabel.

Mantoux-test	tuberculose	geen tuberculose	
reactie	196	9998	10194
geen reactie	4	989802	989806
	200	999800	1000000

b $\frac{9998}{10194} = 0{,}9808$, dus ongeveer 98%.

10 a Doen.

b Ongeveer $\frac{1}{4}$ van de cavia's wordt BB (bruingeel), $\frac{1}{4}$ wordt bb (wit) en $\frac{1}{2}$ van de cavia's wordt bB (lichtgeel).

c 50% wordt bb (wit) en 50% wordt bB (lichtgeel).

11 $\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot 2 = 648$

2

Rijen

2.1 Rijen beschrijven

V1 a Maak een tabel op je GR (of in Excel).
Ongeveer € 1933,26.

b Maak een tabel op je GR (of in Excel).
Na 30 maanden heb je € 3054,14 en dat is voor het eerst meer dan € 3000,00.

1 a 2880, 2940, 3000, 3060, 3120, ...

b Recursie, gewoon telkens 60 bij het voorgaande bedrag optellen.

c Bij de recursie tel je steeds 60 euro bij het voorgaande bedrag op.
Met de directe formule reken je elk bedrag met behulp van zijn jaarnummer n uit door bij de 2880 euro $n \cdot 60$ op te tellen.

2 a 2880, 2937,60, 2996,35, 3056,28, 3117,40, ...

b Recursie, steeds het voorgaande bedrag met 1,02 vermenigvuldigen.

c $h_2(n) = h_2(n-1) \cdot 1{,}02$ met $h_2(0) = 2880$.

d $h_2(n) = 2880 \cdot 1{,}02^n$ met $n = 0,1,2,3,...$

3 a Je berekent telkens het huurbedrag direct vanuit het nummer van het jaar.

b Voer in: Y1=2880+60X en Y2=2880*1.02^X met venster bijvoorbeeld $0 \leq x \leq 20$ bij $0 \leq y \leq 4000$.

c Zie het.

d Zie het.

4 a Je berekent telkens het huurbedrag vanuit het voorgaande huurbedrag.

b Zie het.

c Doen, kies de juiste vensterinstellingen.

d Zie het.

5 a Je moet steeds je saldo met 1,005 vermenigvuldigen en er dan 50 bij op tellen.
Je moet in ieder geval één term weten, omdat je elke term berekent vanuit zijn voorganger.

b Doen.

6 a Directe formule: $u(n) = 2n$.
Recursieformule: $u(n+1) = u(n) + 2$ met $u(0) = 0$ (want je nummert vanaf 0).

b Directe formule: $u(n) = 2n + 1$.
Recursieformule: $u(n+1) = u(n) + 2$ met $u(0) = 1$.

c Directe formule: $u(n) = n^2$.
Recursieformule: $u(n+1) = u(n) + 2(n+1) + 1$.

d Directe formule: $u(n) = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n!$.
Recursieformule: $u(n+1) = u(n) \cdot (n+1)$ (want je nummert vanaf 0).

7 a 17, 20, 23, 26, 29

b $u(n) = 2 + 3n$ voor $n \geq 0$.

c $u(0) = 2$ en $u(n+1) = u(n) + 3$ voor $n \geq 0$.

8 a Zet de rij voort: 486, 1458, 4374, 13122, 39366. Dus 39366.

b $u(n) = 2 \cdot 3^n$ voor $n \geq 0$.

c $u(0) = 2$ en $u(n+1) = 3 \cdot u(n)$ voor $n \geq 0$.

9 a $a(n) = 20000 + 1000 \cdot n$, met $n \geq 0$.

b $b(n) = 20000 \cdot 1{,}04^n$, met $n \geq 0$.

c $a(11) < b(11)$ en $a(12) > b(12)$, dus na 12 jaar.

d $b(n) = 20000 \cdot 1{,}04^{n-1}$, met $n \geq 1$.

e $a(n) = 20000 + 1000(n - 2003)$ met $n \geq 2003$.

10 a $t(n) = \frac{1}{n+1}$

b $t(n) = 6 + 5n$

c $t(n) = (-2)^n$

d $t(n) = \frac{1}{4} \cdot 2^n$ of $t(n) = 2^{n-2}$

e $t(n) = 1024 \cdot 0{,}5^n$

f $t(n) = \frac{n+2}{n+1}$

g $t(n) = 13 - 5n$

h $t(n) = \frac{1}{(n+1)^2}$

11 Je vindt:

- Geen recursieformule.
- $t(0) = 6$ en $t(n+1) = t(n) + 5$ voor $n \geq 0$.
- $t(0) = 1$ en $t(n+1) = -2t(n)$ voor $n \geq 0$.
- $t(0) = \frac{1}{4}$ en $t(n+1) = 2t(n)$ voor $n \geq 0$.
- $t(0) = 1024$ en $t(n+1) = \frac{1}{2}t(n)$ voor $n \geq 0$.
- Geen recursieformule.
- $t(0) = 13$ en $t(n+1) = t(n) - 5$ voor $n \geq 0$.
- Geen recursieformule.

12 a Gebruik eventueel je grafische rekenmachine.
Je vindt: 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90.

b $t_{31} = 992$ en $t_{32} = 1056$, dus $n = 32$.

13 a Oppervlakte wordt gehalveerd, zijde wordt gedeeld door $\sqrt{2}$. $Z(5) = 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 \approx 0{,}1768$ m is ongeveer 17,7 cm en $O(5) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}03125$ m^2 is 312,5 cm^2.

b $Z(n) = 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ en $O(n) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ met $n \geq 0$.

c $Z(0) = 1$ en $Z(n+1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot Z(n)$ en $O(0) = 1$ en $O(n+1) = \frac{1}{2} \cdot O(n)$.

d 1 mm^2 = 0,000001 m^2. Los op: $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0{,}000001$.

Dat geeft $n = \frac{\log(0{,}000001)}{\log(0{,}5)} \approx 19{,}93$, dus kleiner dan 1 mm als $n \geq 20$.

14 a 8

b Zie de tabel.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	1	2	3	5	8	13

c Tel steeds de vorige twee termen bij elkaar op.

d De achtste term is $u_7 = 8 + 13 = 21$.

De negende term is $u_8 = 13 + 21 = 34$.

e De twaalfde term is $u_{12} = 144$.

15 a $a(n) = 20000 + 1000 \cdot n$, met $n \geq 0$.

b $b(n) = 20000 \cdot 1{,}04^n$, met $n \geq 0$.

c Zie de tabel.

n	11	12
$a(n)$	31000	32000
$b(n)$	30789	3202

Na 12 jaar.

d $b(n) = 20000 \cdot 1{,}04^{n-1}$, met $n \geq 1$.

e $a(n) = 20000 + 1000(n - 2012)$ met $n \geq 2012$.

16 a 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23.

b $t_{99} = 199$

c $t(n+1) = t_n + 2$ met $t_0 = 1$.

d Bijvoorbeeld $-4, -2, 0, 2, 4, 6$.

17 a 10, 11, 13, 16, 20, 25, 31, 38, 46, 55.

b $u(1413) = 999001$ en $u(1414) = 1000415$, dus $n = 1414$.

18 a $a(n) = 4 + 4n$ en $a(n+1) = a(n) + 4$ met $a(0) = 4$.

b $a(n) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ en $a(n+1) = \frac{1}{3} \cdot a(n)$ met $a(0) = 3$.

c $a(n) = (-2)^n$ en $a(n+1) = -2 \cdot a(n)$ met $a(0) = 1$.

d $a(n) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}n$ en $a(n+1) = a(n) - \frac{1}{2}$ met $a(0) = \frac{3}{2}$.

2.2 Verschilrijen en somrijen

V1 a Je jaarlijkse huurverhoging wordt dan steeds groter.

b Maak een tabel op je GR (of in Excel) en tel de bedragen op.

1 a Voer in: Y1=2880+60X en Y2=Y1(X)-Y1(X-1) en bekijk de tabel van Y1.
$V_1(n) = 60$ er komt altijd 60 uit het verschil.

b Voer in: Y1=2880*1.02^X en Y2=Y1(X)-Y1(X-1) en bekijk de tabel van Y1.

c $\approx 62{,}35$

d Voor beide rijen met huurprijzen is $V(0) = h(0) - h(-1)$ en bestaat $h(-1)$ niet.

2 a $S_1(5) = \sum_{n=0}^{5} h_1(n)$.

b $S_1(5) = 18180$. Dit is de totale huurprijs over de eerste 6 jaar.

c $S_2(5) = \sum_{n=0}^{5} h_2(n) \approx 181167{,}39$.

d Ja, de procentuele huurverhoging is nog steeds gunstiger, maar het scheelt niet veel meer.

3 a Bij de verschilrij heeft $V(0)$ geen betekenis, bij de somrij is $S(0) = h(0)$.

b Voer in: Y1=2880*1.02^X en Y2=Y1(X)-Y1(X-1) en bekijk de tabel van Y1.

c Zie het.

d Omdat $h(9)$ het huurbedrag van het tiende jaar is.

e $S(5) = \sum_{n=0}^{8} h(n) \approx 28093{,}33$. Dit is de totale huurprijs over de eerste 9 jaar.

4 a $n^2 - (n-1)^2 = n^2 - \left(n^2 - 2n + 1\right) = n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1$.

b $V_{100} = 100^2 - 99^2 = 2 \cdot 100 - 1 = 199$.

c $n^3 - (n-1)^3 = n^3 - \left(n^3 - 3n^2 + 3n - 1\right) = n^3 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1 = 3n^2 - 3n + 1$.

d $d_n = d_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$.

5 a Zie het.

b Nu moet je rekenmachine in de rij-mode en vul je de recursieformule in. Kijk goed naar de plaatjes in voorbeeld 3 hoe dit moet. Je vindt 17710.

6 a $V(i) = t(i) - t(i-1) = 5i + 2 - (5(i-1) + 2) = 5$ met $i \geq 1$.

b $\sum_{i=0}^{5} t(i) = 87$. Dit is de zesde term van de somrij en dus $S(5)$.

c $t(2) + t(3) + t(4) + t(5) = S(5) - (t(0) + t(1)) = S(5) - S(1)$.

7 a Verschilrij: 2, 2, 2, 2, 2, 2, ...

b Somrij: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

c $S(19) = 400$.

d $S(19) - S(9) = 300$.

8 a $V(n) = 3{,}5{,}7{,}9{,}11{,}13{,}15{,}...$

b $V(n) = 1 + 2n$ voor $n \geq 1$.

c $u(n) = u(n-1) + 1 + 2n$ voor $n \geq 1$ en $u(0) = 2$.

d $S(20) = 2912$.

e $S(20) - S(14) = 1867$.

9 a Ongeveer 210,210,175,155,145,75 (×1000).

b Eind 1997: 3.210.000 | Eind 1998: 3.420.000 | Eind 1999: 3.595.000

c Een toenamediagram met stapgrootte 1 is een grafische weergave van een verschilrij.

d De eerste en de derde uitspraak zijn juist.

10 a 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55.

b 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

c 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

d Rij: 0, 6, 14, 24, 36, 50, ...
Verschilrij: 6, 8, 10, 12, 14, ...
Verschilrij van verschilrij: 2, 2, 2, 2, ...
De verschilrij van de verschilrij bij beide rijen levert constante rij op. Beide rijen hebben een kwadratische directe formule.

11 Het aantal stoelen A op rij n is te berekenen met de formule $A = 40 + 2(n-1)$ met $n \geq 1$.

Het totaal aantal stoelen is $\sum_{n=1}^{30} 40 + 2(n-1) = 2070$.

12 a Het jaarsalaris B van deze persoon is uit te rekenen met de formule $B = 31500 \cdot 1{,}015^t$ met $t = 0$ op het moment dat zij met de baan begint.

$\sum_{n=0}^{9} 31500 \cdot 1{,}015^t \approx 337135{,}73$

Ze verdient in die periode ongeveer € 337100,00.

b Voer in: $y_1 = 31500 \cdot 1{,}015^x$ en $y_2 = y_1(x+1) - y_1(x)$.

Hieruit volgen de bedragen: $472{,}5; 479{,}59; 486{,}78; 494{,}08; 501{,}49; 509{,}02$.

13 a $u_2 = \frac{5}{21}, u_3 = 3$ en $u_4 = 7$.

Omdat een term uit de rij steeds berekend wordt uit de voorgaande twee termen en $u_3 = u_0$ en $u_4 = u_1$ is de rij periodiek.

b $u_0 = u_3$, dit betekent dat de periode 3 is.

$u_{2005} = u_1 = 7$

c Omdat de periode 1 moet zijn, geldt $a = b$.

$u_0 = u_1 = u_2 = a$

$u_2 = \frac{5}{u_0 \cdot u_1}$

$a = \frac{5}{a \cdot a}$

$a^3 = 5$, dus $a = \sqrt[3]{5}$ en $b = \sqrt[3]{5}$.

14 d Rij: 0, 0, 2, 6, 12, 20, 30.
Verschilrij: 0, 2, 4, 6, 8, 10.

b Haakjes uitwerken geeft $V_n = u_n - u_n - 1 = 2n - 2$.
De recursieformule wordt: $u_n = u_n - 1 + 2n - 2$

c Somrij: 0, 0, 2, 8, 20, 40, 70.

d 128

2.3 Rekenkundige rijen

V1 a Als je er niet uitkomt, bekijk dan de.

b Dat zie je in de.

1 a Elke term is dan evenveel meer (of minder) dan de voorgaande term.

b $u(n) = u(n-1) + v$ en $u(0) = a$ waarin v en a constanten zijn.

2 a Je telt $100 + 150 + 200 + 250 + ... + 900$ en $900 + 850 + 800 + 750 + ... + 100$ bij elkaar door het onder elkaar te zetten. Je krijgt $17 \cdot 900$.

Dus $100 + 150 + 200 + 250 + ... + 900 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 900 = 7650$.

b $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (1 + 100) = 5050$

3 a $u(n) = a + n \cdot v$ met $n \geq 0$.

b $u(n) = u(n-1) + v$ en $u(0) = a$ waarin v en a constanten zijn.

c $a + (a + v) + (a + 2v) + ... + (a + 9v) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (a + a + 9v) = 10a + 45v$.

d $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (a + a + (n-1)v) = na + \frac{1}{2}n(n-1)v$.

4 a rekenkundige rij: directe formule $u(n) = 5 + 9n$; recursieformule $u(n) = u(n-1) + 9$ met $u(0) = 5$.

b geen rekenkundige rij.

c rekenkundige rij: directe formule $u(n) = 10 - 8n$; recursieformule $u(n) = u(n-1) - 8$ met $u(0) = 10$.

d geen rekenkundige rij.

e geen rekenkundige rij.

f geen rekenkundige rij.

g geen rekenkundige rij.

5 a GR: sum(seq(2400+50X,X,0,9). Dit geeft een totaal van € 26250.

b $S(9) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (2400 + 2400 + 9 \cdot 50) = 26250$ euro.

c $S(9) - S(4) = 26250 - 12500 = 13750$ euro.

6 a € 125

b € 124; € 123.

c De te betalen bedragen vormen een rekenkundige rij en kunnen dus door een lineaire directe formule worden beschreven.

d $B(t) = 125 - (t - 1)$ met $t = 1{,}2{,}...{,}25$.

e $S(30) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (125 + 101) = 3390$ euro. Ze betaalt dus in totaal 890 euro aan rente!

7 a $S(20) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (u(0) + u(20)) = 10(a + a + 20v) = 20a + 200v$.

b $\frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (u(10) + u(20)) = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot (a + 10v + a + 20v) = 11a + 165v$.

8 a $t_n - t_n - 1 = 5$

b $S(6) = \sum n = 065n + 2 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (2 + 32) = 119$.

c $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (t_7 + t_{13}) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (37 + 67) = 399$.

9 a 5,7,9,11,13,15,17 en $r_n = 5 + 2n$.

b 5,2, -1, -4, -7, -10, -13 en $r_n = 5 - 3n$.

c 1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4 en $r_n = 1 - 0{,}1n$.

d 5,5,5,5,5,5,5 en $r_n = 5$.

e 192; -138; 5,4; 60

f 120; -105; 1,5; 30;

10 a $\sum_{n=0}^{20} (50 + 2{,}5n) = 1575$

b $\sum_{n=10}^{20} (50 + 2{,}5n) = 962{,}5$

11 Begin met nummeren bij nul. Dan $t(2) = a + 2v = 10$ en $t(6) = a + 6v = 22$. Dat geeft $4v = 12$ en dus $v = 3$ en $a = 4$.
De directe formule voor de rij is daarom $t(n) = 4 + 3n$ met $n \geq 0$.
De recursieformule voor de rij is $t(n + 1) = t(n) + 3$ met $t(0) = 4$.

12 a $8000 + 0{,}04 \cdot 240000 = 17600$ euro.

b Respectievelijk 17280 euro en 16960 euro.

c De te betalen bedragen vormen een rekenkundige rij en hebben dus een lineaire directe formule. Deze hypotheekvorm is de eerste jaren nogal duur.

d $B(t) = 17600 - 320(t - 1)$ met $t = 1,2,3,...,30$.

e $S(30) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (17600 + 8320) = 388800$ euro.

13 s is het startnummer en n het totaal aantal deelnemers.

De som van de nummers die kleiner zijn dan s, is $0{,}5 \cdot (s - 1) \cdot (s - 1 + 1) = 0{,}5\left(s^2 - s\right)$.

De som van de nummers die groter zijn dan s, is $0{,}5 \cdot (n - s)(n + s + 1) = 0{,}5\left(n^2 + n - s^2 - s\right)$.

Er moet gelden dat $0{,}5\left(s^2 - s\right) = 0{,}5\left(n^2 + n - s^2 - s\right)$. Dit kun je herleiden naar $n(n + 1) = 2s^2$.

n en $n + 1$ hebben geen delers groter dan 1 gemeen. Dit betekent dat n of $n + 1$ een kwadraat moet zijn en de ander twee keer een kwadraat.

Omdat $10 \leq n \leq 100$ is het aantal mogelijkheden snel na te gaan. Je vindt dan dat $n = 49$.

Nu kun je s ook uitrekenen: $49 \cdot 50 = 2s^2$, hieruit volgt dat $s^2 = 25 \cdot 49 = 5^2 \cdot 7^2$ en dus $s = 5 \cdot 7 = 35$.

14 $\frac{1}{2} \cdot 512 \cdot (2 + 1024) = 262656$

15 a $\sum_{i=0}^{20} \left(8 + \frac{1}{3}i\right) = 238$

b $\sum_{k=1}^{100} (5 + 2k) = 10600$

16 a € 57,50

b $B(t) = 58 - (t - 1) \cdot 0{,}50$ met $t = 1,2,3,...16$.

c Totaalbedrag € 868.

2.4 Meetkundige rijen

V1 a 2^{63}

b In totaal zijn dat $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63}$ graankorrels. Dat is $2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$ graankorrels. Zie ook.

1 a Elke term wordt verkregen door de voorgaande term met een vast getal te vermenigvuldigen.

b $u(n) = u(n-1) \cdot r$ en $u(0) = a$ waarin r en a constanten zijn.

2 a $100 + 200 + 400 + 800 + ... + 12800 = 100 + 100 \cdot 2^1 + 100 \cdot 2^2 + 100 \cdot 2^3 + ... + 100 \cdot 2^7 = S(7)$
$S(7) - 2 \cdot S(7) = 100 - 100 \cdot 2^8$, dus $S(7) = 100 \cdot 2^8 - 100 = 25500$.

b $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{10} = S(10)$, dus $S(10) - 2 \cdot S(10) = 1 - 2^{11}$, zodat $S(10) = 2^{11} - 1 = 2047$.

3 a $u(n) = a \cdot r^n$ met $n \geq 0$.

b $u(n) = u(n-1) \cdot r$ en $u(0) = a$ waarin r en a constanten zijn.

c $a + a \cdot r + a \cdot r^2 + ... + a \cdot r^9 = S(9)$.

$S(9) - r \cdot S(9) = a - a \cdot r^{10}$, dus $S(9) = \frac{a - a \cdot r^{10}}{1-r}$.

d $S(n-1) = \frac{a - a \cdot r^n}{1-r}$

4 a geen meetkundige rij.

b meetkundige rij: directe formule $u(n) = 320 \cdot 0{,}5^n$ met $n \geq 0$; recursieformule $u(n) = u(n-1) \cdot 0{,}5$ met $u(0) = 320$.

c geen meetkundige rij.

d geen meetkundige rij.

e meetkundige rij: directe formule $u(n) = 1 \cdot 3^n$ met $n \geq 0$; recursieformule $u(n) = u(n-1) \cdot 3$ met $u(0) = 1$.

f meetkundige rij: directe formule $u(n) = 2 \cdot 3^n$ met $n \geq 0$; recursieformule $u(n) = u(n-1) \cdot 3$ met $u(0) = 2$.

g meetkundige rij: directe formule $u(n) = 5 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^n$ met $n \geq 0$; recursieformule $u(n) = u(n-1) \cdot \sqrt{3}$ met $u(0) = 5$.

5 a Je ziet dat er van een meetkundige rij sprake is: $a_n = 2^n$ met $n = 0,1,2,3,4,...$ (Het eerste veld krijgt nummer 0.)

Je doet: sum(seq(2^X,X,0,19). Dit geeft een totaal van 1.048.575.

b $S(9) = \frac{(1-2^{20})}{1-2} = 1048575$.

c $S(9) - S(4) = 1048575 - 31 = 1048544$.

d Het totaal aantal graankorrels is:

$S(63) = \sum_{k=0}^{63} 1 \cdot 2^k = \frac{1(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64} - 1$.

6 a $50 + 50 \cdot 1{,}005 = 100{,}25$, dus € 100,25.
En drie maanden na je verjaardag: $50 + 50 \cdot 1{,}005 + 50 \cdot 1{,}005^2 = 150{,}75$, dus € 150,75.

b Wat er maandelijks bij komt is steeds 1,005 keer zo groot dat wat er de maand ervoor bij kwam.

c $B(t) = 50 \cdot 1{,}005^t$ met $t = 0,1,2,...$

d $S(23) = 50 \cdot \frac{(1-1{,}005^{24})}{(1-1{,}005)} \approx 1271{,}60$ euro.

7 a Over 2011: $6600 \cdot 1{,}05 = 6930$ euro. Over 2012: $6930 \cdot 1{,}05 = 7276{,}50$ euro.

b $h_n = 6600 \cdot 1{,}05^n$.

c $S(9) = 6600 \cdot \frac{(1-1{,}05^{10})}{(1-1{,}05)} \approx 83014{,}09$ euro.

8 a $\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(\text{-}2)^k} = 2 \cdot \frac{(1-r)^{n+1}}{1-r}$

$\sum_{k=0}^{n} 2 \cdot (\text{-}?)^k = 2 \cdot \frac{1-(\text{-}?)^{n+1}}{1-r}$

$\Rightarrow$ -$?^{n+1}$ gaat naar 0 voor n naar ∞.

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot (\text{-}?)^k = \frac{2}{1?} = \frac{4}{3}$

b $\sum_{k=0}^{n} 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k = 10 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{10}{\frac{4}{5}} = \frac{50}{4} = 12{,}5$ als n naar ∞ gaat.

9 $\sum_{k=0}^{n} a \cdot r^k = a \cdot \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

Als $\text{-}1 < r < 1$, dan gaat r^{n+1} naar 0 als n steeds groter wordt. Als $r \leq \text{-}1$ of $r \geq 1$ dan wordt r^{n+1} steeds kleiner of groter als n groter wordt, of blijft -1 of 1.

Als $r = 1$, dan deel je door 0 in de somformule en dat kan niet. Je krijgt dan ook de rij $a,a,a,...$ en de som van al deze termen is onbegrensd.

10 a $\frac{t_n}{t_n - 1} = 2$

b $S(6) = \sum n = 063 \cdot 2^{n+1} = \sum n = 066 \cdot 2^n = 6 \cdot \frac{1-2^7}{1-2} = 762$.

c $S(13) - S(6) = 98298 - 762 = 97536$.

11 a 3,6,12,24,48,96,192 en $m_n = 3 \cdot 2^n$.

b 1, -2,4, -8,16, -32,64 en $m_n = (\text{-}2)^n$.

c 100; 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 en $m_n = 100 \cdot (0{,}1)^n$.

d 5,5,5,5,5,5,5 en $m_n = 5$.

e 12285; -1365; 111,111...; 60

f 2976; -352; 0,00111...; 25

12 Begin met nummeren bij nul. Dan $t(2) = ar^2 = 10$ en $t(6) = ar^6 = 40$. Dat geeft $40 = 10r^4$, dus $r = \pm\sqrt{2}$. Dus $ar^2 = a \cdot 2 = 10$ en dat levert $a = 5$.

De directe formule voor de rij is $t(n) = 5 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^n$ met $n \geq 0$.

De recursieformule voor de rij is $t(n+1) = t(n) \cdot \sqrt{2}$ met $t(0) = 5$.

13 a $h_A(n) = 3000 + 140n$ en $h_B(n) = 3000 \cdot 1{,}04^n$ met $n \geq 0$.

b $h_A(8) = 4120$ en $h_B(8) = 4105{,}71$. Maar $h_A(9) = 4260$ en $h_B(9) = 4269{,}94$. Dus in het negende jaar.

c $S_A(9) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (3000 + 4260) = 36300$ euro.

d $S_B(9) = 3000 \cdot \frac{1-1{,}04^{10}}{1-1{,}04} \approx 36018{,}32$ euro.

14 De jaarrente is dan $1 + 1{,}013 + 1{,}013^2 + ... + 1{,}013^{11} = 1{,}013^{12} - 1 \approx 0{,}168$

15 a $15 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}} \approx 22{,}5$

b $\sum_{k=4}^{12} u_k = \sum_{k=0}^{12} u_k - \sum_{k=0}^{3} u_k \approx 0{,}28$

c $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 15 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 22{,}5$

Dus $c = 22{,}5$.

16 a Bij een lineair afbetalingssysteem betaal je 30 keer 8000 euro aflossing en $9600 + 9280 + 8960 + ... + 320 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (9600 + 320) = 148800$ euro rente. In totaal kost deze hypotheek dus € 388800,00.

b Bij een annuïteiten afbetalingssysteem betaal je 30 keer hetzelfde bedrag A (de annuïteit).
A bereken je uit $240000 \cdot 1{,}04^{(30)} - A \cdot \left(1{,}04^{29} + 1{,}04^{28} + ... + 1{,}04 + 1\right) = 0$, dus uit $240000 \cdot 1{,}04^{(30)} = A \cdot \frac{1-1{,}04^{30}}{1-1{,}04}$.
Dit geeft $A \approx 13879{,}22$ en je betaalt dus in totaal € 416376,60.

17 $1024 + 512 + 256 + ... + 4 + 2 + 1 = 2^{10} + 2^9 + ... + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2047$.

18 a $\sum_{i=0}^{10} 100 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i \approx 149{,}999$

b $\sum_{k=5}^{10} 4 \cdot (-2)^k = 15325$

19 a Na 3 stappen is nog $\frac{1}{8}$ deel wit en dus $\frac{7}{8}$ deel rood.

b Na n stappen is nog $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ deel wit. Rood is dan $R(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ m^2.

c Na 14 stappen.

d Eerste rij: Als er wordt gekleurd zoals in de figuur, dan zijn die lengtes $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, ...$ Dit is geen rekenkundige en geen meetkundige rij.
Tweede rij: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$ is een meetkundige rij.
Derde rij: $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, ...$ is geen meetkundige en geen rekenkundige rij.

2.5 Discrete dynamische modellen

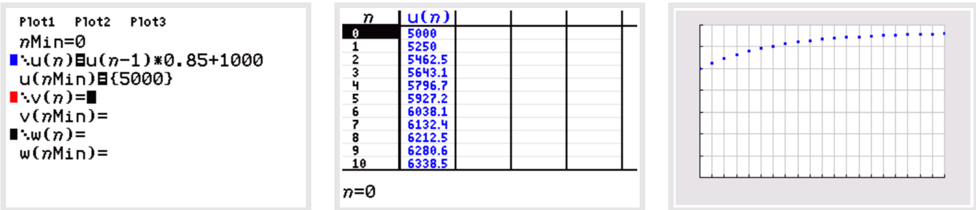
V1 a Maak een tabel op je GR (of in Excel).
Ongeveer € 1933,26.

b Maak een tabel op je GR (of in Excel).
Na 30 maanden heb je € 3054,14 en dat is voor het eerst meer dan € 3000,00.

1 a Discreet omdat het over vaste tijdstappen gaat en dynamisch omdat er sprake is van een verandering in de tijd.

b $K(t) = 1240 \cdot 1{,}005^t + 50 \cdot \frac{1-1{,}005^t}{1-1{,}005} = 1240 \cdot 1{,}005^t - 10000\left(1 - 1{,}005^t\right) = 11240 \cdot 1{,}005^t - 10000$

2 a $B(t)$ is het aantal bomen op dit perceel afhankelijk van de tijd t in jaren.
$B(t) = B(t-1) \cdot 0{,}85 + 1000$, met $t = 1,2,3,4,...$



b Zie de tabel bij a. Als je deze tabel en de grafiek bekijkt, lijkt de 7000 bomen niet gehaald te worden.

3 a $K(t) = 1{,}12 \cdot K(t-1) + 1500$ met $K(0) = 1500$.

b Gebruik de GR voor het maken van de tijdgrafiek.

Het saldo gaat snel omhoog.

c Na 10 jaar staat er € 18743,98. Na 11 jaar staat er € 21430,93. Dus na 11 jaar is het kapitaal meer dan € 20000,00.

4 a Eigen antwoord.

b Doen.

c $B(t) = 5000 \cdot 0{,}82^t + 1000 \cdot 0{,}82^{t-1} + 1000 \cdot 0{,}82^{t-2} + ... + 1000 = 5000 \cdot 0{,}82^t + 1000 \cdot \frac{1-0{,}82^1}{1-0{,}82}$

Dit geeft $B(t) = 5000 \cdot 0{,}82^t + 5555\frac{5}{9}\left(1 - 0{,}82^t\right) = 5555\frac{5}{9} - 555\frac{5}{9} \cdot 0{,}82^t$.

d Als t oneindig groot wordt, dan wordt $0{,}82^t \approx 0$.

5 a $50 + 50 \cdot 1{,}05 = 102{,}50$, dus € 102,50.
En drie maanden na je verjaardag: $50 + 50 \cdot 1{,}05 + 50 \cdot 1{,}05^2 = 155{,}10$, dus € 155,10.

b Wat er maandelijks bij komt is steeds 1,05 keer zo groot dat wat er de maand ervoor bij kwam.

c $B(t) = 50 \cdot 1{,}05^t$ met $t = 0,1,2,...$

d $S(23) = 50 \cdot \frac{1-1{,}05^{24}}{1-1{,}05} \approx 2225{,}10$ euro.

6 a Je krijgt:

- $D(t) = 0{,}75 \cdot D(t-1) + 0{,}32 \cdot L(t-1)$
- $L(t) = 0{,}25 \cdot D(t-1) + 0{,}68 \cdot L(t-1)$

b Doen.

c Gebruik je GR. Ongeveer 56%.

7 a Voer de formule in je GR in met venster bijvoorbeeld $0 \leq x \leq 40$ bij $0 \leq x \leq 100$.

b $u(n) = 100 \cdot 0{,}6^t + 20 \cdot \frac{1-0{,}6^t}{1-0{,}6} = 50 + 50 \cdot 0{,}6^t$.

c Als t heel groot wordt, wordt $0{,}6^t \approx 0$. Dus $u(t)$ wordt uiteindelijk ongeveer 50.

8 a Neem n in maanden. De rente is 5% per jaar, dat is 0,41% per maand. Dus $S_n = 1{,}0041 \cdot S_{n-1} - 2500$ met $S_0 = 500000$.

b Gebruik je GR. Het saldo neemt langzaam af.

c Na 419 maanden heb je nog € 250,27 over en kun je dus geen 2500 euro meer opnemen. Dat is meer dan 34 jaar.

d $S_n = 500000 \cdot 1{,}0041^n - \left(2500 \cdot 1{,}0041^{n-1} + 2500 \cdot 1{,}0041^{n-2} + ... + 2500\right) =$
$= 500000 \cdot 1{,}0041^n - 2500 \cdot \frac{1-1{,}0041^n}{1-1{,}0041} \approx 609756 - 109756 \cdot 1{,}0041^n$.

9 a $K(t) = 1{,}05 \cdot K(t-1)$ met $K(0) = 2000$.

b $K(t) = 2000 \cdot 1{,}05^t$.

c Na 15 jaar.

10 a De toename is recht evenredig met het temperatuurverschil. Dus: $T(t+1) - T(t) = c \cdot (20 - T(t))$.

b Na 26 minuten is het verschil minder dan 1 °C.

c De grenswaarde vind je als $T(t+1) \approx T(t)$, dus als (zie a): $20 - T(t) \approx 0$. Dit betekent $T(t) = 20$ als grenswaarde.

11 a Een stijging van 90% betekent een groeifactor van 1,90. Dus $A(t) = 1{,}90 \cdot A(t-1)$ met $A(0) = 3000$.

b De groeifactor is groter dan 1. De groei blijft steeds toenemen.

c Gebruik je GR.

d Uiteindelijk zal men op 47500 abonnees uitkomen.

12 a Neem n in maanden. 6% per jaar betekent een groeifactor van ongeveer 1,0049 per maand. Dus $S_t = 1{,}0049 \cdot S_t - 1 - 1500$ met $S_0 = 1000000$.

b Nee, de rij blijft groeien.

c $S_t \approx 1308163{,}21 \cdot 1{,}0049^t - 308163{,}21$. (Afhankelijk van afronding.)

13 a Ja, de toenames worden kleiner naarmate N_t groter wordt.

b $\Delta N_t = N_{t+1} - N_t = c \cdot (5000 - N_t)$, geeft $N_{t+1} = 5000c + (1-c) \cdot N_t$.

c Gegeven is nu: $N_0 = 1000$ en $N_1 = 1600$. Invullen in de recursieformule geeft: $1600 = 5000c + (1-c) \cdot 1000$, dus $4000c = 600$. Dan is $c = 0{,}15$.

d Maak een tabel bij de differentievergelijking en bekijk de groei per jaar. Je ziet dat er vanaf het begin ieder jaar er minder meervallen bijkomen.

2.6 Totaalbeeld

1 a Directe formule: $u(n) = 7 \cdot 2^n$ met $n = 0,1,2,3,...$
Recursieformule: $u(n) = u(n-1) \cdot 2$ met $u(0) = 7$.

b Directe formule: $u(n) = 3n + 5$ met $n = 0,1,2,3,...$
Recursieformule: $u(n) = u(n-1) + 3$ met $u(0) = 5$.

2 a De rij bij b, want daarvan is elke term (behalve de eerste) steeds 3 groter dan zijn voorganger.

b Gebruik de somformule voor een rekenkundige rij: $\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (5 + 152) = 3925$.

c Dit is een meetkundige rij omdat elke term (behalve de eerste) steeds 2 keer zo groot is dan zijn voorganger.

d Gebruik de somformule voor een meetkundige rij: $S(49) = 7 \cdot \frac{1-2^{50}}{1-2} = 7 \cdot \left(2^{50} - 1\right)$.

3 De maatschappij heeft aan Kees verdient:
$100 \cdot 1{,}09^{(16)} + 100 \cdot 1{,}09^{(15)} + ... + 100 \cdot 1{,}09 + 100 = 100 \cdot \frac{\left(1-1{,}09^{(17)}\right)}{(1-1{,}09)} \approx 3697{,}37$.
Omdat ze daarvan 3500 euro kwijt zijn, hebben ze winst gemaakt op deze verzekering.

4 a Eigen antwoord waarin in ieder geval moet voorkomen $1{,}072^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}0058$.

b $n = 12$ geeft: $S_{(12)} = 1{,}0058^{12} \cdot 100000 - \frac{1-1{,}0058^{12}}{1-1{,}0058} \cdot 2000 \approx 82405{,}78$ euro.

c Het kapitaal is op als: $1{,}0058^n \cdot 100000 = \left(1{,}0058^{n-1} + 1{,}0058^{n-2} + ... + 1{,}0058 + 1\right) \cdot 2000$.
Dat is het geval als: $1{,}0058^n \cdot 100000 = \frac{1-1{,}0058^n}{1-1{,}0058} \cdot 2000$.
Deze vergelijking kun je algebraïsch of met de GR oplossen.
Algebraïsch: $1{,}0058^n \cdot 50 \cdot -0{,}0058 = 1 - 1{,}0058^n$, dus $0{,}29 \cdot 1{,}0058^n = 1$ en $1{,}0058^n \approx 3{,}4483$.
Met behulp van logaritmen vind je: $n \approx 214{,}04$.
Na 214 maanden is het kapitaal ontoereikend om nog een keer een opname te doen. Er is dan echter nog wel een klein restsaldo over, dus helemaal op is het niet, vandaar de aanhalingstekens.

5 a $\sqrt{2} \cdot 210 = 296{,}9849 \approx 297$.

b A3: 420 mm bij 297 mm en $\sqrt{2} \cdot 297 = 420{,}0214 \approx 420$.

c De lengte is dan b, de breedte is $\frac{1}{2}b\sqrt{2}$. En $b : \frac{1}{2}b\sqrt{2} = 1 : \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$.

d $1{,}189 \times 0{,}841 = 0{,}999949 \approx 1\ \text{m}^2$.

e Recursieformule $l_{(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot l_n$ met $l_0 = 1{,}189$ en directe formule $l_n = 1.189 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ met $n = 0,1,2,3,4,...$

f Laat O_n de oppervlakte in m^2 zijn van An. $O_0 = 1$, $O_1 = \frac{1}{2}$, dat geeft de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$
De recursieformule voor de oppervlakte is dus $O_{(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot O_n$ met $O_0 = 1$. De directe formule is $O_{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ voor $n \geq 0$.

g Lengte is $a \cdot \sqrt{2}$ en breedte is a, dus de oppervlakte is $a^2 \cdot \sqrt{2} = 1$, oftwel $a^2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ en $a \approx 0{,}84089$.
Dat geeft een breedte van 841 mm en een lengte van 1189 mm.

6 a De beginhoeveelheid is 100. Als er 4% ontsnapt is er nog 96% aanwezig, dus de directe formule is $H(n) = 100 \cdot 0{,}96^n$.

b Na $n-1$ uur is er nog $100 \cdot 0{,}96^{n-1}$ aanwezig en na n uur nog $100 \cdot 0{,}96^n$. Er is $100 \cdot 0{,}96^{n-1} - 100 \cdot 0{,}96^n = 4 \cdot 0{,}96^{n-1}$ ontsnapt in het n-de uur.

c Volgens de formule bij a is uitgestroomd: $100 - 100 \cdot 0{,}96^n$ m^3 gas.
Volgens de formule bij b is uitgestroomd $4 + 4 \cdot 0{,}96 + 4 \cdot 0{,}96^2 + ... + 4 \cdot 0{,}96^{(n-1)} = 4 \cdot \frac{(1-0{,}96^n)}{(1-0{,}96)} = 100 \cdot \left(1 - 0{,}96^n\right)$ m^3 gas.
Dat is evenveel.

7 a $50 + 100 + 150 + ... + 850 = 7650$ euro.

b $350 + 350 \cdot 1{,}03 + 350 \cdot 1{,}03^2 + ... + 350 \cdot 1{,}03^{(16)} \approx 7616{,}56$ euro.

c $50 \cdot 1{,}03^{16} + 100 \cdot 1{,}03^{15} + ... + 800 \cdot 1{,}03^1 + 850$. Dit is geen rekenkundige of meetkundige rij; gewoon rekenen dus: € 8174,06.

8 a Daling per minuut is $T_{t+1} - T_t = c \cdot (T_t - 20)$.

b $T_{t+1} = T_t - 0{,}05 \cdot (T_t - 20)$ invoeren in de GR. De rij nadert $T = 20$.

c Als er een grenswaarde T is, dan wordt op den duur $T_{t+1} = T_t = T$ en dus $T = T - 0{,}05 \cdot (T - 20)$. Dit levert op $T = 20$.

d Na 26 minuten is het verschil minder dan 1°C.

9 a $q_A = p(t–1)–15$: de aangeboden hoeveelheid hangt af van de prijs van de voorgaande periode van 0,5 jaar.
$q_V = 400–1{,}5p(t)$: de gevraagde hoeveelheid hangt af van de actuele prijs in de huidige periode.

b $t - 1$ gaat over de voorgaande periode van 0,5 jaar. De stappen in dit model zijn tijdstappen van 0,5 jaar.

c $p = 166$.

d $400 - 1{,}5p(t) = p(t-1) - 15$ geeft $p(t) = 276\frac{2}{3} - \frac{2}{3}p(t-1)$. En ook hieruit volgt de evenwichtsprijs van 166 euro.

10 Eigen antwoord.

11 a Dag 1: 500 g ureum in het water. 3% eraf geeft $500 - 15 = 485$ g.
Dag 2: $485 + 500 = 985$. 3% eraf geeft 955 g.
Dag 3: $955 + 500 = 1455{,}455$. 3% eraf geeft 1412 g.
Dag 4: $1412 + 500 = 1912$. 3% eraf geeft 1854 g.
Dag 5: $1854 + 500 = 2354$. 3% eraf, geeft ..., enzovoort.
Bij het begin van de derde dag is er 955 g.

b Gedurende de vijfde dag komt het ureumgehalte boven de wettelijke norm van 2 g per m^3.

c In de loop van de dag komt er 500 g bij en 's nachts verdwijnt 20% van de totale hoeveelheid.
Je houdt 80% over. Dus $U_n = 0{,}80 \cdot (U_{n-1} + 500) = 0{,}8U_{n-1} + 400$.

d Schrijf de recursieformule uit en gebruik de somformule voor een meetkundige rij.

e $2500 \cdot 0{,}8^n > 0$ voor elke $n \geq 0$. Dus U_n blijft altijd kleiner dan 2000.

f Bij het begin van de achtste dag is er 1580,5696 g ureum aanwezig. In de loop van die dag komt er 500 g bij. Een gedeelte van de achtste dag is het ureumgehalte boven de wettelijke norm van 2000 g.

12 a Met $s = 0{,}3$ en $k = 2$ vind je $S_t = 0{,}3Y_t$ en $K_t = 2Y_t$.
$K_{t+1} - K_t = I_t = S_t = 0{,}3Y_t = 0{,}3 \cdot 0{,}5K_t$ en hieruit volgt het gestelde.

b Omdat $Y_t > 1000$ moet $K_t > 2000$. Maak met de rekenmachine een tabel bij de differentievergelijking uit a. Je vindt bij $K_{16} \approx 1871{,}5$ en $K_{17} \approx 2152{,}2$. Dus voor $t = 17$.

c Als s kleiner wordt dan wordt $I_t = S_t$ ook kleiner. Als S_t kleiner wordt dan wordt ΔK_t ook kleiner. Als ΔK_t kleiner wordt dan neemt de groei van het nationaal inkomen af.
Je kunt ook zo redeneren:
Uit $\Delta K_t = \frac{s}{n}Y_t$ volgt dat bij het kleiner worden van s ook ΔK_t afneemt, etc.

3

Soorten getallen

3.1 Gehele getallen

V1 Eigen antwoord.

1 a 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47

b Je kunt proberen of je het getal kunt delen door een heel getal dat groter is dan 1 en kleiner dan het getal. Als er nooit een heel getal uitkomt, is het getal een priemgetal.

2 a Omdat $g = 2n$ altijd deelbaar is door 2, want $\frac{2n}{2} = n$ en $n = 0,1,2,3,...$.

b Elk drievoud is te schrijven als $3n$ met $n = 0,1,2,3,...$.

c Elk zesvoud is te schrijven als $6n = 2 \cdot 3n$ en dus in twee gelijke delen te verdelen. Met $n = 0,1,2,3,...$. Een zesvoud is dus ook een tweevoud, een even getal.

d Elk oneven getal is te schrijven als $2n + 1$ met $n = 0,1,2,3,...$.

3 a De stelling $7 \in \mathbb{Z}$ is waar, omdat $\mathbb{Z}$ staat voor gehele getallen, 7 hoort daarbij.

b De stelling $\frac{7}{2} \in \mathbb{Z}$ is niet waar, omdat $\mathbb{Z}$ staat voor gehele getallen en $\frac{7}{2}$ geen geheel getal is.

c De stelling $-7 \notin \mathbb{N}$ is waar, omdat $\mathbb{N}$ staat voor de natuurlijke getallen, dit zijn 0,1, enzovoort. -7 is een negatief getal en hoort daar niet bij.

d $2n \in \mathbb{N}$ als $n = 0,1,2,3,...$ is waar, omdat $2n \in \mathbb{N}$ de verzameling $\{0,2,4,6...\}$ oplevert en dat zijn de even natuurlijke getallen.

4 a Noem de twee even getallen $2n$ en $2m$, waarbij n en m verschillende gehele getallen zijn. Dan is $2n + 2m = 2(n + m)$, dus een even getal. Verder is $2n - 2m = 2(n - m)$ een even getal en $2n \cdot 2m = 2 \cdot (2mn)$ is ook een even getal.

Dit klopt ook voor $m = n$.

b Noem de twee drievouden $3n$ en $3m$, waarbij n en m verschillende gehele getallen zijn.
De som van beide is $3n + 3m = 3 \cdot (n + m)$, dus een drievoud.
Het verschil van beide is $3n - 3m = 3 \cdot (n - m)$, dus een drievoud.
Het product van beide is $3n \cdot 3m = 3 \cdot (3mn)$, dus een drievoud.

Het quotiënt van beide is $\frac{3n}{3m} = \frac{n}{m}$, dus niet altijd een drievoud.

5 a $(2n)^3 = 2^3 \cdot n^3 = 8 \cdot n^3 = 2 \cdot 4n^3$ dus een even getal.

b $(2n + 1)^3 = (2n + 1)^2 \cdot (2n + 1) = \left(4n^2 + 4n + 1\right)(2n + 1)$

Dit is $8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2 \cdot \left(4n^3 + 6n^2 + 3n\right) + 1$ en dus altijd een oneven getal.

c $g = 2n$, dus $a^g = a^{2n} = (a^n)^2$ en dat is een kwadraat.

6 a Als $n = 2p$, dan $n - 1 = 2p - 1$ en $n \cdot (n - 1) = 2p(2p - 1) = 2\left(2p^2 - p\right)$, deelbaar door 2 en dus een even getal.

Als $n - 1 = 2q$, dan $n = 2q + 1$ en $n \cdot (n - 1) = (2q + 1) \cdot 2q = 2\left(2q^2 + q\right)$, deelbaar door 2 en dus een even getal.

b $n^2 - (n - 1)^2 = n^2 - \left(n^2 - 2n + 1\right) = 2n - 1$ en dat is altijd een oneven getal.

7 a $a = 17^2 - 12^2 = 145$

$b = 2 \cdot 17 \cdot 12 = 408$

$c = 17^2 + 12^2 = 433$

Deze getallen invullen in de vergelijking $a^2 + b^2 = c^2$. Eerst: $a^2 + b^2 = 145^2 + 408^2 = 187489$. Controle: $c^2 = 433^2 = 187489$. De drie getallen voldoen aan $a^2 + b^2 = c^2$.

b Dit betekent dat $c = 5$. Je weet $c = m^2 + n^2$, dus $m^2 + n^2 = 5$ en $m^2 = 5 - n^2$.
Invullen in $m^2 - n^2$ geeft $5 - n^2 - n^2$. Stel dit gelijk aan 3 en herleid. Je vindt: $2n^2 = 2$. Dan is $n = 1$ en $m^2 = 5 - 1 = 4$. Dit geeft $m = 2$.

c Dit betekent dat $c = 13$. Je weet $c = m^2 + n^2$, dus $m^2 + n^2 = 13$ en $m^2 = 13 - n^2$.
Invullen in $m^2 - n^2$ geeft $13 - n^2 - n^2$. Stel dit gelijk aan 5 en herleid tot $2n^2 = 8$. Dan is $n = 2$ en $m^2 = 13 - 4 = 9$. Dit geeft $m = 3$.

d Dit betekent dat $c = 106$. Je weet $c = m^2 + n^2$, dus $m^2 + n^2 = 106$ en $m^2 = 106 - n^2$. Invullen in $m^2 - n^2$ geeft $106 - n^2 - n^2$. Stel dit gelijk aan 56 en herleid tot $2n^2 = 50$. Dan is $n = 5$ en $m^2 = 106 - 25 = 81$. Dit geeft $m = 9$.

8 a Begin met delen door het kleinste priemgetal getal. Ga door tot dat niet meer lukt, ga dan naar een volgend priemgetal, enzovoort.

2520/2	=	1260
1260/2	=	630
630/2	=	315
315/3	=	105
105/3	=	35
35/5	=	7
7/7	=	1

$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

b Begin met delen door het kleinste priemgetal. Ga door tot dat niet meer lukt, ga dan naar een volgend priemgetal, enzovoort.
$2984800 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 41$

c 1,2,4,5,7,8,10,14,20,28,35,40,56,70,140 en 280

d Ze hebben beide $1, 2^3, 5$ en 7 gemeen. Vermenigvuldig je deze getallen, dan krijg je 280.

De grootste gemeenschappelijke deler van beide getallen is dus $2^3 \cdot 5 \cdot 7 = 280$.

9 a 2010 eerst delen door 2. Je houdt 1005 over. Dit door 3 delen, geeft 335, vervolgens door 5 delen en er blijft 67 over, dat een priemgetal is.

b $2009 = 7^2 \cdot 41$

c $15360 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 5$

d Kun je een willekeurig natuurlijk getal n niet delen door een kleiner natuurlijk getal groter dan 1, dan is n een priemgetal. Kun je het wel delen, bijvoorbeeld door p, dan is $n = p \cdot q$. Voor die getallen p en q geldt afzonderlijk het voorgaande weer. En dus kun je doorgaan tot n alleen bestaat uit een vermenigvuldiging van priemgetallen.

Merk op dat je voor het bewijs van de hoofdstelling van de rekenkunde nog moet aantonen dat dit op een unieke manier kan.

10 a Neem de vijfvouden $5n$ en $5m$. Dan is $5n + 5m = 5 \cdot (n + m)$ een vijfvoud.

b Neem de vijfvouden $5n$ en $5m$. Dan is $5n \cdot 5m = 5 \cdot 5nm$ een vijfvoud.

c Neem het vijfvoud $5n$. Dan is $(5n)^2 = 5 \cdot 5n^2$ een vijfvoud.

d Neem de vijfvouden $5n$ en $5m$. Dan is $\frac{5n}{5m} = \frac{n}{m}$ niet altijd een vijfvoud.

11 Neem $g = 2n$ met $n \in \mathbb{Z}$, dan is $g^4 + g^3 + 2g^2 = 16n^4 + 8n^3 + 8n^2$.
Nu is $16n^4$ een 16-voud.
En $8n^3 + 8n^2 = 8n^2(n + 1)$ waarin ofwel n (dus ook n^2) ofwel $n + 1$ even is. Daarom is ook $8n^3 + 8n^2$ deelbaar door 16. Als bijvoorbeeld $n + 1$ even is, dan geldt $n + 1 = 2p$ met $p \in \mathbb{Z}$. Je herleidt dan tot $16p \cdot n^2$.
En dus is $g^4 + g^3 + 2g^2 = 16n^4 + 8n^3 + 8n^2$ deelbaar door 16.

Voor het geval $n = 2p$ met $p \in \mathbb{Z}$ geldt eenzelfde herleiding.

12 a De delers van 6 zijn: 1,2 en 3 (en 6 zelf, maar die telt niet). En $1 + 2 + 3 = 6$.

b De delers van 28 zijn: 1,2,4,7 en 14 (en 28 zelf, maar die telt niet). En $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

c $n = 3$ geeft 28.

$n = 4$ geeft $2^4 - 1 = 15$.
15 is geen priemgetal, dus $n = 4$ geeft geen perfect getal.

$n = 5$ geeft $2^5 - 1 = 31$.
31 is een priemgetal.

$2^4\left(2^5 - 1\right) = 496$ is dus een perfect getal.

$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$

13 1. Maak een gesorteerde lijst van alle getallen van 2 tot 15.
2. Begin met 2, het kleinste getal.
3. Streep alle veelvouden van 2 door (maar niet het getal zelf). Je streept dan 4,6,8,10,12,14 weg.
4. Kies dan het volgende getal uit de lijst en volg stap drie weer. Dit is 3. Nu worden 9 en 15 weggestreept. Zo ga je door. Over blijven: 2,3,5,7,11,13.

14 Als je het eerste mogelijke getal 1234567 en het laatste mogelijke getal 7654321 optelt, dan krijg je 8888888. Als je het tweede 1234576 en het een na laatste getal 7654312 optelt, dan krijg je weer 8888888. Zo kunnen we doorgaan, het laatste getal van de eerste helft is dan het grootste getal kleiner dan 4444444, dus 4376521.

15 a Neem de zesvouden $6n$ en $6m$. Dan is $6n + 6m = 2 \cdot (3n + 3m)$ een even getal.

b Neem de zesvouden $6n$ en $6m$. Dan is $6n + 6m = 6 \cdot (n + m)$ een zesvoud.

c Neem de zesvouden $6n$ en $6m$. Dan is $6n \cdot 6m = 36nm = 9 \cdot 4nm$ een negenvoud.

d Neem de zesvouden $6n$ en $6m$. Dan is $\frac{6n}{6m} = \frac{n}{m}$ niet altijd een zesvoud, zelfs niet altijd een geheel getal.

16 $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ en $n - 1$, n en $n + 1$ zijn opeenvolgende gehele getallen, dus één van hen is een drievoud.

17 $11025 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ en $19305 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$.
Hun gemeenschappelijke delers zijn daarom 1,3,5,9,15 en 45.

3.2 Rationale getallen

V1 a In $\frac{279}{13}$ zit 21 keer 13, er is een rest van 6. Het wordt dus $21\frac{6}{13}$.

In $\frac{98}{17}$ zit 5 keer 17, er is een rest van 13. Het wordt dus $5\frac{13}{17}$.

b $\frac{279}{13} = 21{,}46153846...$

1 a $\frac{51}{7} = 7\frac{2}{7}$

b 51/7 = 7,2857.....
49
2,0
1,4
0,60
0,56
0,040
0,035
0,005
...

c 285714 herhaalt zich steeds achter de komma.

d π, er treedt bij π geen periodieke herhaling van de decimalen op. π is niet als deling van twee gehele getallen te schrijven.

2 a Dit kun je met een staartdeling doen, maar je kunt ook de rekenmachine gebruiken.
$0{,}\overline{56164383}56...$

b Kijk naar wanneer de herhaling gaat optreden. Bij deze breuk zie je dat na 83 weer 56 komt, er wordt dus na 8 decimalen herhaald. Bij 20 decimalen heb je dus twee herhalingen (16 getallen) en dan nog vier. Dus de 20^e is gelijk aan de 4^e decimaal. Dat is een 6.

c Kijk naar wanneer de herhaling gaat optreden. Bij deze breuk zie je dat na 83 weer 56 komt, er wordt dus na 8 decimalen herhaald. Bij 200 decimalen heb je dus vijfentwintig herhalingen (van 8 getallen) . Dus de 200^e is gelijk aan de 8^e decimaal. Dat is een 3.

3 a De drievouden plus 1, waarbij n een geheel getal is.

b De omgekeerden van alle rationale getallen. Bijvoorbeeld $x = \frac{2}{3}$ geeft $\frac{1}{2}/3 = \frac{3}{2}$, waarbij x een rationaal getal is ongelijk aan 0.

c Een tweevoud plus 1, waarbij n een natuurlijk getal is. Dit zal altijd op een oneven positief getal uitkomen.

d De kwadraten van alle gehele getallen, waarbij $-31 \leq x \leq 31$.

$31^2 = 961$ en $32^2 = 1024$, dus 31 is het hoogste getal waarvan je het kwadraat kunt nemen. Vanzelfsprekend is -31 het laagste getal.

4 a De uitspraak $7 \in \mathbb{Q}$ is waar, omdat 7 een element is van de natuurlijke getallen, die een deelverzameling zijn van de gehele getallen, die weer een deelverzameling zijn van de rationale getallen.

Of: 7 heeft dezelfde waarde als $\frac{7}{1}$, een rationaal getal, en is dus zelf ook rationaal.

b De uitspraak $3{,}5 \in \mathbb{Q}$ is waar, omdat 3,5 dezelfde waarde heeft als $\frac{7}{2}$, een deling van twee gehele getallen.

c De uitspraak $-7 \in \mathbb{Q}$ is waar, omdat -7 gelijk is aan een deling van twee gehele getallen: $\frac{-7}{1}$.

d De uitspraak $2^n \in \mathbb{Q}$ als $n \in \mathbb{Z}$ is waar, omdat:

- voor negatieve waarden van n de waarde van 2^n gelijk is aan $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (een deling van twee gehele getallen)
- voor natuurlijke waarden van n de waarde van 2^n een natuurlijk getal is.

Het is dus altijd een rationaal getal.

e De uitspraak $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$ is niet waar, omdat $\sqrt{7}$ een irrationaal getal is en die getallen zijn geen element van $\mathbb{Q}$.

f De uitspraak $\sqrt{1\frac{9}{16}} \in \mathbb{Q}$ is waar, omdat deze wortel te schrijven is als $\sqrt{\frac{25}{16}}$ en dit weer te vereenvoudigen is tot $\frac{5}{4}$ en dit is een getal in $\mathbb{Q}$.

5 a $\frac{a}{3} + \frac{5}{2b} = \frac{2ab}{6b} + \frac{15}{6b} = \frac{2ab+15}{6b}$

$\frac{a}{3} - \frac{5}{2b} = \frac{2ab}{6b} - \frac{15}{6b} = \frac{2ab-15}{6b}$

$\frac{a}{3} \cdot \frac{5}{2b} = \frac{5a}{6b}$

$\frac{a}{3} \Big/ \frac{5}{2b} = \frac{2ab}{6b} \Big/ \frac{15}{6b} = \frac{2ab}{15}$

b $\frac{3}{a} + \frac{5}{2b} = \frac{6b}{2ab} + \frac{5a}{2ab} = \frac{6b+5a}{2ab}$

$\frac{3}{a} - \frac{5}{2b} = \frac{6b}{2ab} - \frac{5a}{2ab} = \frac{6b-5a}{2ab}$

$\frac{3}{a} \cdot \frac{5}{2b} = \frac{15}{2ab}$

$\frac{3}{a} \Big/ \frac{5}{2b} = \frac{6b}{2ab} \Big/ \frac{5a}{2ab} = \frac{6b}{5a}$

6 a Voer de deling $3/5$ uit:

$3/5 = 0{,}60$

$\underline{0}$

3,0

$\underline{3}$

0

Je ziet dat er geen herhaling optreedt, de rest is 0.

b Voer de deling $1/11$ uit:

$1/11 = 0{,}09$

$\underline{0}$

1,0

$\underline{0}$

1,00

$\underline{0{,}99}$

0,01*

Je ziet dat er herhaling optreedt, want rest 1 is al eerder voorgekomen. Dus $\frac{1}{11} = 0{,}\overline{09}$.

c Voer de deling $12/23$ uit:

$12/23 = 0{,}52173....$

$\underline{0}$

12,0

$\underline{11{,}5}$

0,50

$\underline{0{,}46}$

0,040

$\underline{0{,}023}$

0,0170

$\underline{0{,}0161}$

0,00090

$\underline{0{,}00069}$

0,00021

...

Je ziet dat er voorlopig geen herhaling optreedt.

7 a $a = 0{,}123123123123...$ en $1000a = 123{,}123123123123...$ zodat $999a = 123$ en $a = \frac{123}{999}$

b $b = 2.17777777...$ betekent $10b = 21.7777777777...$ en $100b = 217.777777777...$ zodat $90b = 196$ en $b = \frac{196}{90}$

c $c = -0{,}1\overline{535353}...$ betekent $1000c = -153{,}5353...$ en $10c = -1{,}5353...$ zodat $990c = -152$ en $c = -\frac{152}{990}$

8 $a + \frac{2b}{3c} = \frac{3ac}{3c} + \frac{2b}{3c} = \frac{3ac+2b}{3c}$

$a - \frac{2b}{3c} = \frac{3ac}{3c} - \frac{2b}{3c} = \frac{3ac-2b}{3c}$

$a \cdot \frac{2b}{3c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{2b}{3c} = \frac{2ab}{3c}$

$a \Big/ \frac{2b}{3c} = \frac{3ac}{3c} \Big/ \frac{2b}{3c} = \frac{3ac}{2b}$

9 a Voer de deling $3/80$ uit:

$3/80 = 0{,}0375$

$\underline{0}$
3,0
$\underline{0}$
3,00
$\underline{2{,}40}$
0,60
$\underline{0{,}56}$
0,040
$\underline{0{,}040}$
0

b Voer de deling $2/3$ uit:

$2/3 = 0{,}\overline{6}$

$\underline{0}$
2,0
$\underline{1{,}8}$
0,20
$\underline{0{,}18}$
0,02
...

c Voer de deling $2/15$ uit:

$2/15 = 0{,}1\overline{3}$

$\underline{0}$
2,0
$\underline{1{,}5}$
0,50
$\underline{0{,}45}$
0,050
$\underline{0{,}045}$
0,0050
...

10 $0{,}\overline{255813953488372093023}$ Het zich herhalende deel bestaat dus uit 21 cijfers.

11 Dit zijn de gehele getallen kleiner dan $-\sqrt{800}$ of groter dan $\sqrt{800}$.

$\{x^2 | x \in \mathbb{Z} \wedge x \leq -29 \vee x \geq 29\}$

12 Noem het getal $2{,}91\overline{523} = a$. Vermenigvuldig met 100 en je krijgt: $100a = 291{,}\overline{523}$.

$100000a = 291523{,}\overline{523}$

$100000a - 100a = 291523{,}\overline{523} - 291{,}\overline{523}$.

Ofwel $99900a = 291232$

Het getal is dus te schrijven als $a = \frac{291232}{99900}$.

13 a Stel $2{,}\overline{16} = a$.

Dan $216{,}\overline{16} = 100a$ en $99a = 214$, zodat $a = \frac{214}{99}$.

Dit is een rationaal getal.

b $\sqrt{1{,}6} = \sqrt{\frac{16}{10}} = \sqrt{\frac{8}{5}}$

Het getal is niet als deling van twee gehele getallen te schrijven dus $\sqrt{1{,}6}$ is geen rationaal getal.

c $\sqrt{0{,}16} = \sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{4}{10}$ dus rationaal.

d Stel $0{,}\overline{1} = a$.

Dan $1{,}\overline{1} = 10a$ en $9a = 1$, zodat $a = \frac{1}{9}$.

$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$, dus rationaal.

14 Uit de gegevens kun je afleiden dat $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ deel van de karpers een geel vrouwtje is. Omdat de helft van de karpers vrouwtje is, is $\frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$ deel een rood vrouwtje.

$\frac{3}{5}$ deel van de karpers is rood. Dus is $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ deel is een rood mannetje.

15 $p + \frac{1}{q+\frac{1}{r}} = \frac{25}{19} = 1\frac{6}{19}$. Dan kan $p = 1$ zijn en $\frac{1}{q+\frac{1}{r}} = \frac{6}{19}$. Dan $\frac{r}{qr+1} = \frac{6}{19}$. Als $r = 6$, dan moet $q = 3$.

$p \cdot q \cdot r = 1 \cdot 3 \cdot 6 = 18$

16 $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2}$

$\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}$

$\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^3}$

$\frac{1}{x} \Big/ \frac{2}{x^2} = \frac{x}{x^2} \Big/ \frac{2}{x^2} = \frac{x}{2}$

17 a $0{,}0\overline{7}$

b $0{,}0\overline{714285}$

18 $a = \frac{31412}{9999}$

19 a $-2{,}312 = -\frac{2310}{999}$ dus rationaal.

b $\sqrt{20\frac{1}{4}} = \frac{9}{2}$ dus rationaal.

c $\sqrt{15}$ is niet rationaal.

d $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$ dus rationaal.

3.3 Bewijzen

V1 a $3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$. Deelbaar door 8.

$5^2 - 1 = 24$. Deelbaar door 8.

b Zie de uitleg.

1 Er zijn vier mogelijkheden:

- n en m zijn beide even, dan is $n \cdot m$ deelbaar door $2 \cdot 2$ en dus even;
- n is even en m niet, dan is $n \cdot m$ deelbaar door 2 en dus even;
- n is oneven en m is even, dan is $n \cdot m$ deelbaar door 2 en dus even;
- n en m zijn beide oneven, dan is $n \cdot m$ niet deelbaar door 2 en dus oneven.

Dus de enige mogelijkheid voor $n \cdot m$ om oneven te zijn, is als zowel n als m oneven zijn.

2 a Dit is een merkwaardig product.
$a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$

b $a - 1$ is de voorganger van a en $a + 1$ de opvolger. Omdat a oneven is, zijn die getallen even.

c Twee opeenvolgende even getallen zijn $2n$ en $2n + 2$. Stel n is oneven, dan is $n = p + 1$ met p even.
Dan is $2n + 2 = 2(p + 1) + 2 = 2(p + 1 + 1) = 2(p + 2)$.

$p + 2$ is weer even. $p + 2 = 2q$.

$2n + 2 = 4q$. Deelbaar door 4.

d $a - 1$ en $a + 1$ zijn opeenvolgende even getallen. Dat betekent dat één van de twee door 4 deelbaar is en de andere door 2. Dus is $(a-1)(a+1)$ deelbaar door 8 en $a^2 - 1$ dus ook.

3 Beide zijden delen door $1 - x$ mag niet, omdat je dan door 0 deelt. $x = 1$ was immers je uitgangspunt!

4 a $8 = 2^3$ en $46 = 2 \cdot 23$, zodat kgv $(8{,}46) = 2^3 \cdot 23 = 184$

b Van elkaar verschillende priemgetallen hebben geen gemeenschappelijke priemfactoren. Dus in dat geval geldt: kgv $(p{,}q) = p \cdot q$.

5 a 0 is deelbaar door elk getal, want er blijft altijd een rest 0 over. Dus ggd $(a{,}0) = a$.

b Twee verschillende priemgetallen hebben geen gemeenschappelijke (priem)factor. Dus de grootste deler van beide is 1.

6 Stel ggd $(a{,}b) = r$.

Dan kunnen a en b als volgt worden ontbonden: $a = r \cdot v$ en $b = r \cdot w$.
(r kan 1 zijn en v en w hebben geen gemeenschappelijke factoren).

Daaruit volgt: kgv $(a{,}b) = r \cdot v \cdot w$.

Vul dit in in de te bewijzen formule:

kgv $(a{,}b) = r \cdot v \cdot w = \frac{rv \cdot rw}{r} = \frac{a \cdot b}{\text{ggd}\,(a,b)}$

Dat klopt.

7 a a is even => a^2 is even en a^2 is even => a is even.

b Als a een oneven getal is, dan is a^2 ook oneven. Neem voor a het oneven getal $a = 2n + 1$ waarbij n een geheel getal is. Kwadrateren geeft: $a^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2\left(2n^2 + 2n\right) + 1$.

Dus is het kwadraat van een oneven getal inderdaad oneven.
Als a^2 een oneven getal is, dan is a ook oneven.
Het bewijs is eenvoudig: als a^2 is oneven, dan zijn er voor a twee mogelijkheden:

- a is even. In de uitwerking staat het bewijs dat het kwadraat van elk even getal ook even is, dus kan a niet even zijn.
- a is oneven. Als a oneven is, dan is zijn kwadraat ook oneven zoals we net bewezen hebben.

Q.e.d.

c a kan zijn: een drievoud $a = 3n$, één meer dan een drievoud $a = 3n+1$, of twee meer dan een drievoud $a = 3n + 2$.

Als $a = 3n$, dan is $a^3 = (3n)^3 = 27n^3 = 3 \cdot 9n^3$ ook een drievoud.

Als $a = 3n+1$, dan is $a^3 = (3n+1)^3 = 27n^3 + 27n^2 + 9n + 1 = 3 \cdot \left(9n^3 + 9n^2 + 3n\right) + 1$ geen drievoud.

Als $a = 3n+2$, dan is $a^3 = (3n+2)^3 = 27n^3 + 54n^2 + 36n + 8 = 3 \cdot \left(9n^3 + 18n^2 + 12n + 2\right) + 2$ geen drievoud.
Dus a^3 kan alleen een drievoud zijn als a dat is.
Q.e.d.

8 a n is deelbaar door 12, dan $n = 12 \cdot p = 3 \cdot 4 \cdot p$ en dus ook deelbaar door zowel 3 als 4.

b Als een getal deelbaar is door 3 en ook door 4, dan is het getal deelbaar door 12.

Bewijs: n is deelbaar door 3 en 4, dan $n = 4 \cdot 3 \cdot q = 12 \cdot q$ dus ook deelbaar door 12.

c n is deelbaar door 12 $\Leftrightarrow$ n is deelbaar door 3 en 4.

d n is deelbaar door 12, dan $n = 12 \cdot p = 2 \cdot 6 \cdot p$ en dus ook deelbaar door zowel 2 als 6.

e Algemener: n is deelbaar door 2, dan $n = 2p$.

n is deelbaar door 6, dan $n = 3 \cdot 2p$. Delen door 12 levert in veel gevallen een breuk op. Het is dus niet waar dat een getal dat deelbaar is door 2 en door 6 deelbaar is door 12.

f n is deelbaar door $a \cdot b \Leftrightarrow n$ is deelbaar door a en b en de ggd$(a,b) = 1$ (ofwel a en b hebben geen gemeenschappelijke delers behalve 1).

9 a Neem aan dat de bewering niet waar is. Dan zit er in elk hok maximaal 1 duif. In totaal zitten er dan maximaal $9 \cdot 1 = 9$ duiven in de hokken. Dat klopt niet met het gegeven dat er 10 duiven in de hokken zitten. Dus tegenspraak, dus de bewering is waar.

b Als er n duiven verdeeld moeten worden over m hokken, waarbij $n > m$, dan is er zeker één hok waarin minstens twee duiven zitten.

c Je kunt maximaal vier getallen kiezen onder de vijf. Je kiest er daarom altijd minstens twee uit 5,6,7,8,9,10. Welke twee je daarvan ook kiest, hun som is altijd minstens 11.

d Het aantal andere mensen dat een ieder kent, is een getal uit de serie 1,2,3,...,49. Omdat er maar 49 van die getallen zijn en 50 personen precies één zo'n getal krijgen, is er altijd minstens één getal bij dat bij twee personen terecht komt.

10 a Een 'bewijs uit het ongerijmde'houdt in dat je ervan uitgaat dat de stelling niet waar is en je vervolgens aantoont dat dit niet kan kloppen omdat er een tegenspraak ontstaat.

b Neem aan dat de stelling niet waar is. Er bestaat dan een getal p dat niet te schrijven is als het product van priemgetallen. Omdat p zelf niet priem is, heeft p delers, bijvoorbeeld $p = a \cdot b$. Voor die getallen a en b geldt nu dat minstens een van beide niet priem mag zijn, bijvoorbeeld b, dus $b = c \cdot d$. Voor die getallen c en d geldt nu dat minstens een van beide niet priem mag zijn, bijvoorbeeld d, dus $d = e \cdot f$, enzovoort.
Dit proces moet echter na een eindig aantal stappen eindigen, omdat p een eindig getal is. In dat geval bestaat p echter uit een product van alleen priemgetallen en dat is in strijd met de aanname dat de stelling niet waar is.

11 a $5 = 5 \cdot 1$ en $7 = 7 \cdot 1$. Het k.g.v. is dan $5 \cdot 1 \cdot 7 = 35$.

$10 = 2 \cdot 5$ en $15 = 3 \cdot 5$. Het k.g.v. is dan $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$.

b $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ en $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, dus is het kgv$(140{,}504) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

12 a $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ en $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ dus ggd$(140{,}504) = 2^2 \cdot 7 = 28$

b $143 = 11 \cdot 13$ en $2541 = 3 \cdot 7 \cdot 11^2$ dus de ggd$(143{,}2541) = 11$

13 a $39 = 3 \cdot 13$ en $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$.

Gemeenschappelijk: 3

b $39 = 3 \cdot 13$ en $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$

Je ziet dat er één overeenkomst is tussen beide reeksen: de factor 3. Voor het berekenen van het k.g.v. heb je die factor maar één keer nodig. De andere factoren heb je allemaal nodig. Dus $3 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 17 = 1326$.

14 $\left(n^3-n\right)^2 = n^6-2n^4+n^2 = n^2\left(n^4-2n^2+1\right) = n^2\left(n^2-1\right)^2 =$

$n^2(n+1)(n-1)(n+1)(n-1) = n^2(n-1)^2(n+1)^2$.

Omdat $n-1$, n en $n+1$ drie opeenvolgende getallen zijn, is één van deze drie een drievoud. Omdat je deze factor kwadrateert, is het geheel deelbaar door 9.

15 a Oneven en even wisselen elkaar af en de drievouden vind je bij elk derde getal, als je vanaf 1 begint.

b $n^5-n = n(n-1)(n+1)\left(n^2+1\right)$
Neem nu voor n de volgende vijf mogelijkheden: $n=5k$, $n=5k+1$, $n=5k+2$, $n=5k+3$ of $n=5k+4$.
Als $n=5k$, dan is $n^5-n = 5k(5k-1)(5k+1)\left(25k^2+1\right)$, dus n^5-n is deelbaar door 5 en ook door 2 en 3 (drie opeenvolgende getallen), dus deelbaar door $5\cdot 3\cdot 2 = 30$.

Als $n=5k+1$ dan is $n^5-n = (5k+1)\cdot 5k\cdot(5k+2)\left((5k+1)^2+1\right)$, dus n^5-n is deelbaar door 5 en ook door 2 en 3 (drie opeenvolgende getallen), dus deelbaar door $5\cdot 3\cdot 2 = 30$, enzovoort.

16 a Met een voorbeeld ter verduidelijking:

Neem bijvoorbeeld de getallen 35 en 25.
$35 = 5\cdot 7$ en $25 = 5\cdot 5$. De ggd (35,25) is dus 5.

Je kunt zeggen dat $35-25 = 7\cdot 5-5\cdot 5 = 2\cdot 5$.
r is hier $2\cdot 5$ en deze heeft ook 5 als grootste gemeenschappelijke deler net als 35 en 25. Dus ggd (35,25) = 5

b Je begint met het grootste getal. In plaats van $a-q\cdot b=r$ gebruik je $a=q\cdot b+r$.

Van 504 kun je $3\cdot 140$ aftrekken, rest 84. $504 = 3\cdot 140+84$, dus de ggd (140,504) = de ggd (140,84).
Van 140 kun je $1\cdot 84$ aftrekken, rest 56. $140 = 1\cdot 84+56$, dus de ggd (140,84) = de ggd (84,56).

Van 84 kun je $1\cdot 56$ aftrekken, rest 28. $84 = 1\cdot 56+28$ dus de ggd (84,56) = de ggd (56,28).

Van 56 kun je $2\cdot 28$ aftrekken, rest 0. $56 = 2\cdot 28+0$ dus de ggd (56,28) = de ggd (28,0) = 28.

c Van 2541 kun je $17\cdot 143$ aftrekken, rest 110. $2541 = 17\cdot 143+110$, dus de ggd (143,2541) = de ggd (143,110).

Van 143 kun je $1\cdot 110$ aftrekken, rest 33. $143 = 1\cdot 110+33$, dus de ggd (143,110) = de ggd (110,33).

Van 110 kun je $3\cdot 33$ aftrekken, rest 11. $110 = 3\cdot 33+11$, dus de ggd (110,33) = de ggd (33,11).

Van 11 kun je $1\cdot 11$ aftrekken, rest 0. $11 = 1\cdot 11+0$, dus de ggd (33,11) = de ggd (11,0).

17 Gebruik het algoritme van Euclides.

$102 = 2\cdot 39+24$, dus de ggd (102,39) = de ggd (39,24)
$39 = 1\cdot 24+15$, dus de ggd (39,24) = de ggd (24,15)
$24 = 1\cdot 15+9$, dus de ggd (24,15) = de ggd (15,9)

$15 = 1\cdot 9+6$, dus de ggd (15,9) = de ggd (9,6)

$9 = 1\cdot 6+3$, dus de ggd (9,6) = de ggd (6,3)

$6 = 2\cdot 3+0$, dus de ggd (6,3) = de ggd (3,0) = 3

Nu is $0 = 6-2\cdot 3 = 6-2(9-1\cdot 6) = 3\cdot 6-18 = 3\cdot(15-1\cdot 9)-18 =$

$3\cdot 15-5\cdot 9 = 3\cdot 15-5\cdot(24-1\cdot 15) = 8\cdot 15-5\cdot 24 = 8\cdot(39-1\cdot 24)-5\cdot 24 =$
$8\cdot 39-13\cdot 24 = 8\cdot 39-13\cdot(102-2\cdot 39) = 34\cdot 39-13\cdot 102$.

Je moet dus 34 sprongen van 39 maken en dan 13 sprongen van 102 terug.

18 Als $a=2n+1$ dan is $a^3 = 8n^3+12n^2+6n+1 = 2\left(4n^3+6n^2+3n\right)+1$ dus ook oneven.
Als a^3 is oneven dan zijn er twee mogelijkheden: a is even of a in oneven. En a is even klopt niet, want dan moet ook a^3 even zijn.

19 a De ggd (33,91) = 1

b Het kgv (33,91) = 3003

c Algoritme van Euklides: $1 = 4\cdot 91-11\cdot 33$, dus 4 sprongen van 91 naar rechts en 11 van 33 naar links.

20 Neem bijvoorbeeld $g = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$ dan is $a + b + c + d$ een drievoud.
En dan is $g = 999a + 99b + 9c + a + b + c + d$ ook een drievoud.
Dit kun je gemakkelijk uitbreiden naar grotere en kleinere getallen. Je gebruikt steeds het tientallig stelsel.

3.4 Reële getallen

V1 a $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}414213562$

b Als je 1,414213562 kwadrateert kom je niet op 2 uit. Want $1{,}414213562^2$ heeft 18 decimalen.

c Daar kom je op deze manier niet achter, want $\sqrt{2}$ heeft g een herhalend patroon in de decimalen...

1 a $\sqrt{3}$ is geen geheel getal, dus moet het decimalen hebben. Als je het kwadraat van een getal met een eindig aantal decimalen, waarvan de laatste niet 0 is, berekent, komt er altijd een getal met twee keer zoveel decimalen uit (waarvan de laatste niet 0 is). En dat kan nooit gelijk zijn aan 3. Dus $\sqrt{3}$ moet wel een oneindig aantal decimalen hebben.

Voer op de GR √3 in en je krijgt 1,732050808...
Let op: Als je dit probeert met je rekenmachine, zal deze vaak afronden naar 3. De rekenmachine is niet nauwkeurig!

$\frac{3}{1{,}5} = 2$

$\frac{2+1{,}5}{2} = 1{,}75$

$\frac{3}{1{,}75} \approx 1{,}714285714...$

enzovoort.

b Misschien gaat er periodieke herhaling optreden als je meer decimalen zou kunnen bepalen en dan zou $\sqrt{3}$ toch rationaal zijn.

c $\sqrt{5}$ geeft dezelfde problemen als $\sqrt{2}$, maar $\sqrt{4}$ is wel een rationaal getal (zelfs een geheel getal).

d Als het getal waaruit je de wortel trekt het kwadraat van een rationaal getal is.

2 Voer op de GR $\sqrt{2}$ in en je krijgt 1,414213562. Vervolgens trek je van het antwoord 1 af. Je krijgt dan achteraan de volgende decimaal in beeld (een 4). Vermenigvuldig dit antwoord met 10 en trek daar 4 van af (het voorste cijfer) en je krijgt weer een decimaal (... 4 op het eind wordt ... 37). Herhaal dit proces (vermenigvuldig met 10 en trek het voorste cijfer er van af, enzovoort.

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623731$.
Overigens houdt het hierna meestal wel op, en van de juistheid van de laatste decimalen kun je ook niet zeker zijn. De rekenmachine rond het getal namelijk ook af na een zeker aantal decimalen.

3 a In het bewijs in de uitleg zie je dat $p^2 = 2q^2$. De factor 2 in $2q^2$ waar p^2 aan gelijk moet zijn, geeft aan dat ook p^2 deelbaar moet zijn door 2.

b Dit is een indirect bewijs, een bewijs uit het ongerijmde.

c Neem aan $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ met p en q elk ondeelbaar. Dit geeft $\frac{p^2}{q^2} = 3$ en dus $p^2 = 3q^2$ dus moet p^2 een drievoud zijn. Dit kan alleen als p zelf dat is en dan moet $p = 3a$. En dus is dan $(3a)^2 = 3q^2$ en dus $q^2 = 3a^2$ zodat ook q^2 en dus q een drievoud is. De breuk kan worden vereenvoudigd en dat is in tegenspraak met de aanname.

d Nu moet p^2 een viervoud zijn. Maar dat kan ook het geval zijn als p geen viervoud is:
$p = 2a$ (geen viervoud, bijvoorbeeld $p = 6$), dan $p^2 = 4a^2$ (wel een viervoud).

4 a $2\sqrt{3} + \sqrt{2^4 \cdot 3} + 6\sqrt{3^3} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 6 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

Hier geldt $a = 0$.

b $\left(3 + \sqrt{3}\right)\left(3 + \sqrt{3}\right) = 9 + 3 + 6\sqrt{3} = 12 + 6\sqrt{3}$

c $\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3^3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{9}\sqrt{3} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$

Hier geldt $a = 0$.

d $(6-2\sqrt{3})(6+2\sqrt{3}) = 6^2 - (2\sqrt{3})^2 = 36 - 12 = 24$. Hier geldt $b = 0$.

e $\frac{12}{6-2\sqrt{3}} = \frac{12}{6-2\sqrt{3}} \cdot \frac{6+2\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} = \frac{12\cdot(6+2\sqrt{3})}{6^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{12\cdot(6+2\sqrt{3})}{24} = 3 + \sqrt{3}$

f $\sqrt{243} - 2\sqrt{27} + \sqrt{81} = \sqrt{3^5} - 2\sqrt{3^3} + \sqrt{3^4} = 9\sqrt{3} - 2\cdot 3\sqrt{3} + 9 = 9 + 3\sqrt{3}$

5 a Stel $x + y = a$, waarbij a is rationaal en x en y zijn irrationaal (bewijs uit het ongerijmde).

Als $x = -y$ geldt $a = 0$. Dat is een rationaal getal. De bewering klopt dus niet.

Met een voorbeeld kun je ook zien dat het niet klopt: $\sqrt{2} + -\sqrt{2} = 0$ en dus rationaal.

b Stel $a \cdot x = b$, waarbij a is rationaal en x is irrationaal. Stel dat het product rationaal is, dus b is rationaal (bewijs uit het ongerijmde). Stel $a = \frac{p}{q}$ en $b = \frac{u}{v}$.

Er ontstaat de volgende vermenigvuldiging: $\frac{p}{q} \cdot x = \frac{u}{v}$ dus $x = \frac{uq}{vp}$, maar dat is weer rationaal. Dat is in strijd met het gestelde dat x irrationaal is. Dus het product van een rationaal en een irrationaal getal is irrationaal.

6 a $\sqrt{961} = 10a + b$

Dan moet gelden:

$(10a + b)^2 = 961$
$100a^2 + 20ab + b^2 = 961$
$100a^2 = 900$ waardoor $a = 3$
$20ab + b^2 = 61$
a invullen:
$60b + b^2 = 61$ waardoor $b = 1$

$\sqrt{961} = 10a + b = 10 \cdot 3 + 1 = 31$

b $100a^2 = 3600$ en $(2 \cdot 10a + b)b = 369$

$a = 6$ en $12... \cdot ... = 369$

$a = 6$ en $b = 3$, dus $\sqrt{3969} = 63$

of

$3969/3 = 1323,\ 1323/3 = 441$ dus $\sqrt{3969} = 3\sqrt{441} = 3 \cdot 21 = 63$

c Je begint met het verdelen van het getal in eenheden, honderdtallen, tienduizendtallen, enzovoort, voor de komma en honderdsten, tienduizendsten, enzovoort, achter de decimale komma. Dan begin je met de voorste groep (1 of 2 cijfers) en je bepaalt het getal waarvan het kwadraat daar het dichtst onder zit. Je hebt dan het eerste cijfer van je wortel.

$\sqrt{133225} = \sqrt{13|32|25}$

Er zijn 13 tienduizendtallen, en $3^2 = 9$ is het grootste kwadraat onder de 13, dus je uitkomst begint met het cijfer 3, dat staat voor 300.

Omdat je 432 honderdtallen over hebt ($13 - 9 = 4$ is de rest), zoek je een getal b waarvoor $(300 + b)^2 - 300^2$ kleiner of gelijk 43200 blijft. En nu gebruik je dat het verschil van die twee kwadraten gelijk is aan $(2 \cdot 300 + b) \cdot b$. Dit lukt met 60: $600 \cdot 60 + 60^2 = 39600$
Er komt 60 bij de uitkomst. Je hebt nu 360.

Je hebt $432 - 396 = 36$ honderdtallen over. Dit is met de laatste 25 eenheden samen 3625.
Nu doe je hetzelfde nog eens: je zoekt een getal b waarvoor geldt:

$(360 + b)^2 - b^2 = (2 \cdot 10 \cdot 36 + b) \cdot b$ kleiner of gelijk 3625 blijft. Dit gaat precies goed met $b = 5$: $725 \cdot 5 = 3625$. De wortel komt uit: $\sqrt{133225} = 365$.

7 Neem aan $\sqrt{7} = \frac{p}{q}$, dus een rationaal getal, met p en q niet verder deelbaar. Dit geeft $\frac{p^2}{q^2} = 7$ en dus $p^2 = 7q^2$ dus moet p^2 een zevenvoud zijn. Dit kan alleen als p zelf dat is en dan moet $p = 7a$. En dus is dan $(7a)^2 = 7q^2$ en dus $q^2 = 7a^2$ zodat ook q^2 en dus q een zevenvoud is. De breuk kan worden vereenvoudigd en dat is in tegenspraak met de aanname.

8 a $2\sqrt{2^4 \cdot 7} - \sqrt{2^2 \cdot 7} + 6\sqrt{7 \cdot 7} = 2 \cdot 4\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 6 \cdot 7 = 6\sqrt{7} + 42$

b $\left(7 - 2\sqrt{7}\right) \cdot \left(7 - 2\sqrt{7}\right) = 49 - 28\sqrt{7} + 28 = 77 - 28\sqrt{7}$

c $\sqrt{28} - 8\sqrt{\frac{1}{7}} = 2\sqrt{7} - \frac{8}{7}\sqrt{7} = \frac{6}{7}\sqrt{7}$

d $\left(8 - 2\sqrt{7}\right)\left(8 + 2\sqrt{7}\right) = 64 - \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 64 - 28 = 36$

e $\frac{14}{7-\sqrt{7}} \cdot \frac{7+\sqrt{7}}{7+\sqrt{7}} = \frac{14\left(7+\sqrt{7}\right)}{49-7} = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$

f $\sqrt{252} - 2\sqrt{112} + \sqrt{2401} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} - 2\sqrt{2}^4 \cdot 7 + 49 = 6\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 49 = 49 - 2\sqrt{7}$

9 Neem aan $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$ met p en q ondeelbaar. Dit geeft $\frac{p^3}{q^3} = 2$ en dus $p^3 = 2q^3$ dus moet p^3 een even getal zijn. Dit kan alleen als p zelf dat is en dan moet $p = 2a$. En dus is dan $(2a)^3 = 2q^3$ en dus $q^3 = 4a^3$ zodat ook q^3 en dus q een even getal is. De breuk kan worden vereenvoudigd en dat is in tegenspraak met de aanname.

10 a Bijvoorbeeld $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ en dus rationaal. De bewering klopt niet.

b Stel dat het quotiënt rationaal is. Dan ontstaat de volgende deling met x als het irrationale getal, $\frac{p}{q}$ als het rationale getal en $\frac{u}{v}$ als het rationale antwoord (met p,q,u,v natuurlijke getallen): $\frac{p}{q}/x = \frac{u}{v}$ dus $x = \frac{vp}{uq}$, maar dat is weer rationaal. Dit is in strijd met het gestelde dat x irrationaal is. Dus het quotiënt van een rationaal en een irrationaal getal is irrationaal.

11 a $\sqrt{13} \approx 3{,}605551(2)$

b $\sqrt{4281346624} = 65432$

12 a $\sqrt{178929} = \sqrt{17|89|29}$

Er zijn 17 tienduizendtallen, en $4^2 = 16$ is het grootste kwadraat onder de 17, dus je uitkomst begint met 400.

Over zijn 189 honderdtallen: zoek een getal b waarvoor $(400 + b)^2 - 400^2$ kleiner of gelijk 18900 blijft. Je gebruikt $(2 \cdot 400 + b) \cdot b$. Als $b = 20$ geldt $2 \cdot 400 \cdot 20 + 20^2 = 16400$

Er komt 20 bij de uitkomst. Je hebt nu 420.
Je hebt $189 - 164 = 25$ honderdtallen over. Dit is is met de laatste 29 eenheden samen 2529.

Voor $b = 3$ geldt: $(420 + b)^2 - b^2 = (2 \cdot 420 + b) \cdot b$ gelijk aan 2529.

De wortel is: $\sqrt{178929} = 423$.

b $\sqrt{152399025} = \sqrt{1|52|39|90|25}$

Er is $1 \cdot 100$ miljoen, en $10^2 = 100$ is het grootste kwadraat, dus je uitkomst begint met 10.000.

Er zijn 52 miljoenen, en $2 \cdot 10.000b + b^2$ moet kleiner of gelijk zijn aan 52 miljoen. Dit geldt voor $b = 2000$. De uitkomst is 44000000 en de rest is 8000000. Er komt 2000 bij de uitkomst. Die is nu 12000.

Er zijn 39 tienduizenden, en $2 \cdot 12.000b + b^2$ moet kleiner of gelijk zijn aan 8390000. Dit geldt voor $b = 300$. De uitkomst is 7290000 en de rest is 1100000. Er komt 300 bij de uitkomst. Die is nu 12300.

Er zijn 90 honderden, en $2 \cdot 12.300b + b^2$ moet kleiner of gelijk zijn aan 1109000. Dit geldt voor $b = 40$. De uitkomst is 985600 en de rest is 123400. Er komt 40 bij de uitkomst. Die is nu 12340.

Er zijn 25 eenheden, en $2 \cdot 12.340b + b^2$ moet kleiner of gelijk zijn aan 123425. Dit geldt voor $b = 5$. De uitkomst is 985600 en er is geen rest. Er komt 5 bij de uitkomst. Die is nu 12345.

c 11111,1110605556

13 Neem aan $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ met p en q zo klein mogelijk. Dit geeft $\frac{p^2}{q^2} = 5$ en dus $p^2 = 5q^2$ dus moet p^2 een vijfvoud zijn. Dit kan alleen als p zelf dat is en dan moet $p = 5a$. En dus is dan $(5a)^2 = 5q^2$ en dus $q^2 = 5a^2$ zodat ook q^2 en dus q een vijfvoud is. De breuk kan worden vereenvoudigd en dat is in tegenspraak met de aanname.

14 a $37\sqrt{5}$

b $105 - 40\sqrt{5}$

c $8\sqrt{5}$

d 80

e $\frac{50}{3} + \frac{10}{3}\sqrt{5}$

f $250 + 10\sqrt{5}$

15 a $1 < \sqrt{\frac{1^2+2^2}{2}} < 2$ en $\sqrt{\frac{1^2+2^2}{2}} = \sqrt{2,5}$ is irrationaal.

b $1,123 < \sqrt{\frac{1,123^2+1,124^2}{2}} < 1,124$.

c $v < \sqrt{\frac{v^2+w^2}{2}} < w$.

3.5 Dominoprincipe

V1 a Schrijf de getallen $1+2+3+.....100$ op. Schrijf daaronder weer de getallen op, maar dan omgekeerd: $100+99+98+........1$.

Je ziet dat er $100 \cdot 101 = 10100$ uitkomt, maar dan heb je wel twee keer de reeks opgeteld. Dus delen door 2 en je krijgt 5050.

b Schrijf de getallen $1+2+3+.....n$ op en daaronder weer de getallen maar dan omgekeerd: $n+(n-1)+(n-2)+........1$.
Je ziet dat er $n \cdot (n+1)$ uitkomt, maar dan heb je wel twee keer de reeks opgeteld. Dus delen door 2 en je krijgt $\frac{1}{2}n(n+1)$.

1 a Je bewijst het vermoeden voor een bepaalde waarde van n, meestal $n = 1$. Vervolgens toon je aan dat als het vermoeden voor een bepaalde n waar is, dat het dan ook voor de opvolger van n waar is. Daardoor ontstaat het effect van een rij omvallende dominostenen: de stelling is waar voor $n = 1$ en daarom ook voor $n = 2$ en daarom ook voor $n = 3$, enzovoort.

b Bij vermoedens waar opvolgende aantallen worden toegepast.

c Uit $1+2+3+...+n-1+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ volgt:

$1+2+3+...+n-1+n+n+1 = \frac{1}{2}n(n+1)+n+1 = (n+1)\left(\frac{1}{2}n+1\right) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

d $1+2+3+...+99+100 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 50 \cdot 101 = 5050$

2 Je krijgt dan n keer $n+1$ om op te tellen. Het totaal wordt dan $n(n+1)$, maar dan heb je het dubbele van de rij getallen. Daarom moet je nog met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen.

3 a $1+\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ en $2-\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$. Beide berekeningen zijn aan elkaar gelijk.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$ en $2-\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$. Beide berekeningen zijn aan elkaar gelijk.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}$ en $2-\frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}$. Beide berekeningen zijn aan elkaar gelijk.

b $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = 2-\frac{1}{16}$

c Stelling: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n}$

Bewijs:

De stelling geldt voor $n = 1$: $1+\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = 2-\frac{1}{2}$.

Neem aan dat de stelling voor n geldt.

Voor $n+1$ geldt dan $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} =$

$2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} = 2-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n} =$

$2-\frac{1}{2^{n+1}}$. Conclusie: de stelling geldt voor $n = 1$ en als hij voor n geldt, dan geldt hij ook voor $n+1$.

Q.e.d.

4 a Bij twee snijdende lijnen zijn er 4 vlakdelen.

b Bij drie lijnen die elkaar twee aan twee snijden, zijn er $4+3 = 7$ vlakdelen.

c Dan komen er, als je een lijn toevoegt, minder nieuwe vlakdelen bij.

d 4

e De lijn snijdt elke andere lijn en maakt daardoor $2n$ nieuwe vlakdelen waarvan er $n-1$ elkaar overlappen, die hebben we dus te veel geteld. $2n-(n-1) = 2n-n+1 = n+1$. Er komen dus inderdaad $n+1$ nieuwe vlakdelen bij.

f Inductiestap: $\frac{1}{2}\left(n^2+n+2\right)+n+1=\frac{1}{2}\left(n^2+3n+4\right)=$

$\frac{1}{2}\left(n^2+2n+1+n+1+2\right)=\frac{1}{2}\left((n+1)^2+(n+1)+2\right)$

5 a 0

b 2

c 5

d Vanuit elk punt een lijnstuk naar een ander punt: $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5$. De zijden eraf trekken: $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5-6$

e Voor $n=3$ klopt de stelling: het aantal diagonalen is $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2-3=0$.

Stel de stelling klopt voor n, dan geldt voor $n+1$ dat er $n-1$ diagonalen bijkomen. Neem bijvoorbeeld een regelmatige vierhoek $ABCD$ ($n=4$). Deze heeft twee diagonalen, AC en BD. Je kunt nu een vijfhoek $ABCDE$ tekenen, maar dan nog met de twee diagonalen AC en BD van de vierhoek. Je ziet dat er vanuit punt E twee nieuwe diagonalen bijkomen. Namelijk naar alle andere punten, behalve zijn buurpunten A en D. Dat zijn er dus $n-2$. Verder zie je ook dat er 1 diagonaal bij komt, tussen de twee buurpunten A en D. Bij elkaar dus $n-2+1=n-1$.

Dus wordt het aantal diagonalen dan:

$\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1)-n+n-1=\frac{1}{2}\cdot\left(n^2-n-2\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(n^2+n-2n-2\right)=$

$\frac{1}{2}\cdot\left(n^2+n\right)-n-1=\frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot n-(n+1)$.

Dit betekent dat de stelling klopt voor $n+1$ als hij voor n klopt.
Q.e.d.

6 a $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

b $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}$

c Stelling: $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$

Bewijs:
Klopt onder andere voor $n=2$, zie a.
Stel de bewering klopt voor n, dan geldt voor $n+1$:

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)}\right)=$

$\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1}$

Dit betekent dat de stelling klopt voor $n+1$ als deze voor n klopt.
Q.e.d.

7 De stelling klopt voor $n=1$: $1=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3$.

Neem aan dat de stelling voor n klopt, dan geldt voor $n+1$:

$1+2^2+3^2+4^2+...+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2=(n+1)\left(\frac{1}{6}n(2n+1)+(n+1)\right)$

$(n+1)\cdot\frac{1}{6}\cdot(n(2n+1)+6n+6)=\frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)=$

$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)$

Dit betekent dat de stelling klopt voor $n+1$ als deze voor n klopt.
Q.e.d.

8 a $100-90=10$
$100-3\cdot 30=10$

$3 \cdot 30$ is deelbaar door 3, dus als 100 deelbaar is door 3, dan is het verschil van die twee getallen ook deelbaar door 3, dus 10 is dan deelbaar door 3.

b Dan moet $23^{500} - 23^{100}$ deelbaar zijn door 2 en door 5.

23^{500} en 23^{100} zijn beide oneven, dus hun verschil is even en dus deelbaar door 2.

Nu de deelbaarheid door 5 nog. $23^{500} - 23^{100}$ zou een bijzonder geval kunnen zijn van $n^5 - n$, namelijk met $n = 23^{100}$

Bewijs:

Voor $n = 1000$ klopt het.

Als klopt dat $n^5 - n$ deelbaar is door 5, is $(n+1)^5 - (n+1)$ dat dan ook?

$(n+1)^5 - (n+1) =$
$n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 =$
$n^5 - n + 5\left(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n\right)$

En inderdaad: Als het eerste deel deelbaar is door 5, dan klopt het, want het tweede deel is ook deelbaar door 5.

Dus $23^{500} - 23^{100}$ is deelbaar door 10.

9 Stap 1: voor $n = 1$ geldt: $9^1 - 1 = 8$. Dit is deelbaar door 8 en dat klopt dus.

Stap 2: ervan uitgaande dat $9^n - 1$ deelbaar is door 8, moet bewezen worden dat dit ook geldt voor $9^{n+1} - 1$.

$9^{n+1} - 1 = 9^n \cdot 9 - 1$

$9^n \cdot 9 - 1 = 9^n - 1 + 8 \cdot 9^n$, en hiervoor geldt dat $9^n - 1$ deelbaar is door 8 en $8 \cdot 9^n$ deelbaar is door 8. Dus $9^n - 1 + 8 \cdot 9^n$ is deelbaar door 8 en dus is $9^n - 1$ deelbaar door 8.
Q.e.d.

10 Voor $n = 0$ geldt: $(1+r)^0 = 1$ en $1 + 0 \cdot r = 1$, zodat het gestelde klopt voor $n = 0$.

Ervan uitgaande dat het voor elke n klopt, gaan we onderzoeken of het ook voor $n+1$ klopt.

$(1+r)^{n+1} = (1+r)^n \cdot (1+r)$

Volgens eerder gestelde geldt: $(1+r)^n \cdot (1+r) \geq (1 + n \cdot r)(1+r)$
$(1+r)^n \cdot (1+r) = 1 + n \cdot r^2 + n \cdot r + r = 1 + (n+1)r + n \cdot r^2$

$1 + (n+1)r + n \cdot r^2 \geq 1 + (n+1)r$

Dus $(1+r)^{n+1} \geq 1 + (n+1)r$
Q.e.d.

11 Voor $n = 1$ geldt: $3^3 + 2^0 = 28$. Dat is een zevenvoud.
Stel voor n geldt het gestelde, dan moet het voor $n+1$ ook gelden.
Voor $n+1$ krijg je $3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1-1}$.
Dit is: $3^{2n+3} + 2^n =$
$3^{2n+1} \cdot 3^2 + 2^{n-1} \cdot 2 =$
$9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n-1} =$
$7 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n-1} =$
$7 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot \left(3^{2n+1} + 2^{n-1}\right)$
Het eerste deel $(7 \cdot 3^{2n+1})$ is een zevenvoud, het tweede deel is twee keer een zevenvoud en dus ook weer een zevenvoud.
Het gestelde is hiermee bewezen.

12 a $1 + 2 + 4 + 8 = 15$

$2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$

b $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$

$2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$

c $2^4 - 1 + 2^4 = 2 \cdot 2^4 - 1 = 2^1 \cdot 2^4 - 1 = 2^5 - 1$

d Je moet bewijzen: $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

De stelling geldt voor $n = 1$:
$2^0 + 2^1 = 2^{1+1} - 1$ klopt inderdaad.

Als de stelling geldt voor $n \Rightarrow$ de stelling geldt voor $n + 1$ schrijf je als volgt:
Als geldt
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ dan moet ook gelden
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$.
Je bewijst dit door in de eerste uitdrukking aan beide kanten 2^{n+1} op te tellen. Zo ontstaat een uitdrukking waarvan het linkerdeel gelijk is aan de tweede uitdrukking hierboven.
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$.
Daarna toon je aan dat het rechtse deel hiervan gelijk is aan het rechtse deel van de tweede uitdrukking hierboven.
$2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$

Q.e.d.

e Ja.

Een schaakbord heeft 64 vakjes. Voor het eerste vakje is $n = 0$, dus rekenen met $n = 63$. De meeste rekenmachines geven iets als $2^{(64)} - 1 \approx 1{,}844674407 \cdot 10^{19}$. Om zeker te zijn moet je dit getal met de hand berekenen. Dat kan redelijk snel: $2^{10} = 1024$, $2^{20} = 1048576$ en dan is $2^{40} = 1048576 \cdot 1048576$ (dit moet met de hand) en $2^{64} = 2^{40} \cdot 2^{20} \cdot 16$.

13 a Voor $n = 2$ construeer je een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 1 en 1. De hypotenusa is dan $\sqrt{2}$.

b Voor $n = 3$ construeer je een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van $\sqrt{2}$ en 1. De hypotenusa is dan $\sqrt{3}$.

c De stelling klopt voor $n = 1$ (zie de uitwerking bij a).
Neem aan dat de stelling klopt voor n. Dan heb je een lijnstuk met lengte $\sqrt{n}$ kunnen construeren. Daarop construeer je een rechthoekige driehoek met $\sqrt{n}$ en 1 als rechthoekszijden. De hypotenusa van die driehoek is $\sqrt{n+1}$ (Pythagoras).
Dit betekent dat de stelling klopt voor $n + 1$ als hij voor n klopt.
Q.e.d.

14 De stelling klopt voor $n = 1$: $1 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot 2^2$.

Neem aan dat de stelling voor n klopt, dan geldt voor $n + 1$:

$1+2^3+3^3+4^3+...+n^3+(n+1)^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2+(n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot \left(n^2+4(n+1)\right) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$.

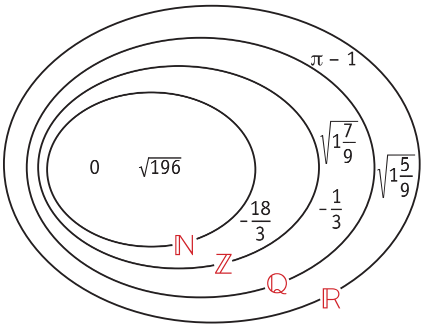
Dit betekent dat de stelling klopt voor $n + 1$ als hij voor n klopt.
Q.e.d.

15 De stelling geldt voor $n = 3$: de hoekensom van een driehoek is 180°.
Neem aan dat de stelling voor n klopt, dan geldt voor $n+1$ dat de hoekensom gelijk is aan $(n - 2) \cdot 180° + 180° = ((n + 1) - 2) \cdot 180°$.
Dit betekent dat de stelling klopt voor $n + 1$ als hij voor n klopt.
Q.e.d.
Dat de hoeken kleiner dan 180° moeten zijn wordt duidelijk uit het feit dat er bij de overgang van n naar $n + 1$ precies één driehoek bij moet komen. Dat gaat niet zonder meer op als je ‘inspringing’ toelaat.

3.6 Totaalbeeld

1 a Bedenk: $\sqrt{196} = 14$ en $-\frac{18}{3} = -6$.

$\sqrt{1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$



b Buiten het hele diagram. De uitkomst is geen reëel getal. Met dergelijke getallen leer je later nog werken, het zijn ‘complexe getallen’.

2 $13464 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17$ en $46035 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$.

ggd (13464,46035) $= 3^2 \cdot 11$
kgv (13464,46035) $= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31$

3 a $\left(1 + \sqrt{6}\right)^2 =$

$\left(1 + \sqrt{6}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{6}\right) =$

$1 + 2\sqrt{6} + 6 =$

$7 + 2\sqrt{6}$

b $\sqrt{54} = \sqrt{2 \cdot 3^3} = 3\sqrt{6}$

$\sqrt{24} = \sqrt{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt{6}$

$\sqrt{36} = 6$

Dus: $\sqrt{54} - \sqrt{24} + \sqrt{36} = 6 + \sqrt{6}$

c $\frac{3-2\sqrt{6}}{\sqrt{150}} = \frac{3-2\sqrt{6}}{5\sqrt{6}} = \frac{3}{5\sqrt{6}} - \frac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}$

$\frac{3}{5\sqrt{6}} = \frac{1}{10}\sqrt{6}$

$\frac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{6}} = \frac{2}{5}$

Dus: $\frac{3-2\sqrt{6}}{\sqrt{150}} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{6}$

4 a Voer de deling 5/41 uit:
$5/41 = 0{,}\overline{12195}$
0
5,0
4,1
0,90
0,82
0,080
0,041
0,0390
0,0369
0,00210

$\underline{0{,}00205}$
0,00005

Je ziet dat er nu weer 5 staat, net als aan het begin.

b Stel $a = 0{,}\overline{538461}$ en $1000000a = 538461{,}\overline{538461}$, dan $999999a = 538461$

$a = \frac{538461}{999999}$

5 a Nee, het product van twee irrationale getallen kan rationaal zijn: bijvoorbeeld $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$.

b Neem aan $\sqrt{10} = \frac{p}{q}$ met p en q zo klein mogelijk. Dit geeft $\frac{p^2}{q^2} = 10$ en dus $p^2 = 10q^2$ dus moet p^2 een tienvoud zijn. Dit kan alleen als p zelf dat is en dan moet $p = 10a$. En dus is dan $(10a)^2 = 10q^2$ en dus $q^2 = 10a^2$ zodat ook q^2 en dus q een tienvoud is. De breuk kan worden vereenvoudigd en dat is in tegenspraak met de aanname.

6 Neem aan ${}^{5}\log(7) = \frac{p}{q}$ met p en q zo klein mogelijke gehele getallen. Dit geeft $7 = 5^{\left(\frac{p}{q}\right)}$ en dus $7^q = 5^p$. Dit kan niet als p en q gehele getallen zijn en dat is in tegenspraak met de aanname.

7 De stelling klopt voor $n = 1$: $1 + 3 = \frac{1}{2}\left(3^2 - 1\right)$.

Neem aan dat de stelling klopt voor n, dan geldt voor $n + 1$:

$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n + 3^{(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(3^{(n+1)} - 1\right) + 3^{(n+1)} =$

$\frac{3}{2} \cdot 3^{(n+1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(3 \cdot 3^{(n+1)} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(3^{(n+2)} - 1\right)$

Dit betekent dat de stelling klopt voor $n + 1$ als hij voor n klopt.
Q.e.d.

8 a 24,36,48, etc., maar ook -12, -24, etc.

b Omdat je de veelvouden van 12 moet weglaten en daan steeds 3 overhoudt.

c $4 + k \cdot 12$

d $1314 \equiv 6 (\text{mod } 12)$ en $967 \equiv 7 (\text{mod } 12)$.
Ga nu op beide manieren na, dat $1314 + 967\ (\text{mod } 12) \equiv 1 (\text{mod } 12)$.
Ga ook op beide manieren na, dat $1314 \cdot 967\ (\text{mod } 12) \equiv 6 (\text{mod } 12)$.

e $a + k \cdot m \pm b + l \cdot m = a \pm b + (k + l) \cdot m$.
$(a + k \cdot m) \cdot (b + l \cdot m) = a \cdot b + (al + bk + klm) \cdot m$.

f $x \equiv 9 (\text{mod } 12)$

g $x \equiv 9 (\text{mod } 12)$

Je kunt dit met je rekenmachine vinden door de tabel van $\frac{3+k\cdot 12}{7}$ te bekijken en te zoeken naar een gehele uitkomst. Die vind je bij $k = 5$ en de uitkomst is daar 9.

h De tabel van $\frac{3+k\cdot 12}{2}$ heeft geen gehele uitkomsten, dus deze vergelijking is onoplosbaar.

i ASCII: 87 73 83 75 85 78 68 69 wordt 11 37 60 61 84 00 74 86

j Bij het terugrekenen moet je telkens $12x + 34 \equiv \text{code} (\text{mod } 97)$ oplossen door naar de tabel van $\frac{code - 34 + k\cdot 97}{12}$ te kijken en de eerste gehele uitkomst te zoeken.

9 a $48 = 43 + 5$ en $76 = 71 + 5$

b Er zijn oneindig veel getallen.

c Bijvoorbeeld het **abc-vermoeden** heeft een eigen Nederlandstalige website. Op de pagina **Wikipedia: Wiskundig vermoeden** van de Nederlandstalige Wikipedia vind je een lijstje met een aantal vermoedens.

4

Redeneren en bewijzen

4.1 Basisbegrippen

V1 Zie.
Probeer wel eerst om zelf het bewijs te formuleren.

1 a Gaat op dezelfde manier.

b Z-hoeken zijn hoeken die een lijn l maakt met twee evenwijdige lijnen m en n die niet samenvallen. Z-hoeken zitten tussen de twee evenwijdige lijnen aan weerskanten van l, de éne hoek bij het snijpunt met m, de andere bij het snijpunt met n. Alleen als de lijnen m en n evenwijdig zijn, zijn de Z-hoeken gelijk.

2 Eigen antwoord, zie bijvoorbeeld bij **Pythagoras**.

3 a Noem het lijnstuk AB. Teken een halve lijn l uit A (niet in het verlengde van het lijnstuk). Pas op lijn l vanuit A vier gelijke stukken af, je krijgt dan achtereenvolgens AP, PQ, QR en RS. Verbindt het eindpunt S met B. Construeer door de punten P, Q en R lijnen evenwijdig aan SB (Zie uitleg opgave 3b). De evenwijdige lijnen snijden AB. De snijpunten verdelen het lijnstuk AB in vier gelijke delen.

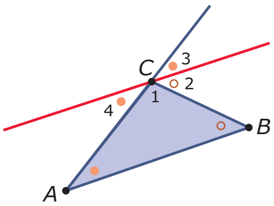
b Construeer een vierkant en teken een van de diagonalen.

c Construeer een gelijkzijdige driehoek en teken de loodlijn uit een van de punten op de overstaande zijde.

4 a Teken een lijn en pas hierop met de passer de zijde AB af. Teken een cirkel met middelpunt A en straal AC en een cirkel met middelpunt B en straal BC. Als beide cirkels elkaar snijden, is dat hoekpunt C van de driehoek, er zijn twee mogelijkheden. Beide cirkels snijden elkaar alleen als $AC + BC > AB$. Anders bestaat er geen driehoek ABC.

b Zet twee punten op lijn l. Noem de punten A en B. Teken vervolgens de cirkel met middelpunt P en straal AB en de cirkel met middelpunt B en straal AP. Noem het snijpunt waar de cirkels snijden Q. De lijn door de punten P en Q is de gevraagde evenwijdige lijn (vierhoek $ABQP$ is een parallellogram).

5 a Zie de figuur, de hoeken bij C zijn genummerd.



b Je ziet dat $\angle C_2 = \angle B$ (Z-hoeken) en $\angle C_3 = \angle A$ (F-hoeken).
En dus is $\angle C_{2,3} = \angle A + \angle B$.

Ga na dat ditzelfde geldt voor de andere buitenhoeken zoals de hoek tussen AC en het verlengde van BC.

Q.e.d.

6 a Als elk van de benen van een hoek loodrecht staat op de benen van een andere hoek, zijn de hoeken gelijk.

b Het gaat fout als hoekpunt B tussen de benen van $\angle A$ komt te liggen. Dan zijn beide hoeken samen 180°, want de hoeken van de vierhoek waarvan A en B hoekpunten zijn, zijn samen 360°. $\angle A$ is dan alleen gelijk aan $\angle B$ als $\angle A = 90°$.

c Als een uitspraak in één geval niet klopt, is hij onwaar.

d Als elk van de benen van een hoek loodrecht staat op de benen van een andere hoek, zijn de hoeken gelijk of ze zijn samen 180°.
Het bewijs van deze stelling kun je leveren als je wat meer weet over gelijkvormigheid van driehoeken, daarover gaan de volgende onderdelen.

7 a Zolang er geen bewijs voor een uitspraak is geleverd, heet die uitspraak een vermoeden. Een stelling is een vermoeden waarvan het bewijs is geleverd.

b Omdat hier geen sprake van een axioma is (geen uitgangspunt bij de theorieopbouw). En in elke goede theorie moet elk nieuw vermoeden worden bewezen, dus kunnen worden afgeleid uit de axioma's.

c Een voorbeeld waarmee je aantoont dat een bepaalde uitspraak onwaar is.

8 a De hoek tussen s en l is 90° en de hoek tussen m en l ook. Dit zijn twee F-hoeken. Dus de lijnen s en m zijn evenwijdig.

Zie ook het 5^{e} axioma.

b Als lijn s evenwijdig is met m, staat lijn s ook loodrecht op l. De hoek tussen s en l is gelijk aan de hoek tussen s en l, omdat s evenwijdig is met m (F-hoeken). Dus de omgekeerde stelling is ook juist.

9 a Als de punten A en D samenvallen is $\angle A$ recht en dat is in tegenspraak met het gegeven dat hij stomp is.

b Als punt D tussen A en B ligt of met B samenvalt of op het verlengde van AB ligt, heeft ΔCDA zowel een stompe als een rechte hoek en dat is in tegenspraak met de stelling dat de som van de hoeken in een driehoek 180° is.
Punt D ligt op het verlengde van BA is de enige mogelijkheid die overblijft en die moet dus waar zijn.

c Punt D ligt op het verlengde van BA is de enige mogelijkheid die overblijft en die moet dus waar zijn.

10 Uit de definitie van evenwijdige lijnen volgt dat als dit niet waar is, m en n elkaar snijden in een punt S. Dan zouden er twee lijnen door S gaan die elk evenwijdig zijn met l. En dat is volgens axioma 5 onmogelijk.

De uitspraak is daarom algemeen waar, het is een stelling.

11 a De uitspraak is waar. Hij volgt onmiddellijk uit de bekende stelling van Pythagoras. (Eigenlijk moet je die stelling nog vanuit de axioma's afleiden, het bewijs dat je in tegenkwam vergt meer voorkennis dan je in feite nu vanuit de axioma's hebt afgeleid. Wel hoort de stelling van Pythagoras bij de lijst van stellingen en basisbegrippen waar je in een bewijs op het vwo-examen van uit mag gaan.)

b Nee, die uitspraak is niet waar.

c Tegenover de langste zijde van een driehoek ligt de grootste hoek.

12 Omdat $\angle ADC = 90°$ geldt $\angle A + \angle C_1 = 180° - 90° = 90°$ (hoekensom driehoek). Omdat ook $\angle C_2 + \angle C_1 = 90°$, $\angle A + \angle C_1 = \angle C_2 + \angle C_1$, en dus $\angle A = \angle C_2$.
Op dezelfde manier bewijs je dat $\angle B = \angle C_1$.

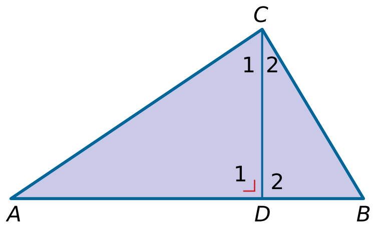
13 a Door twee punten gaat maar één lijn.

b Twee lijnstukken zijn evenwijdig als de lijnen waarop de lijnstukken liggen evenwijdig zijn.

14 a Het zijn Z-hoeken.

b Omdat $\angle BAC = \angle ACD$ en $\angle ACD + \angle ACB = 90°$ is $\angle BAC + \angle ACB = 90°$. Omdat ook $\angle B = 90°$ is de som van de hoeken van de rechthoekige ΔABC gelijk aan 180°.

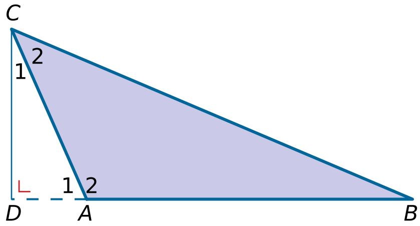
c In ΔADC is $\angle A + \angle D_1 + \angle C_1 = 180°$
In ΔBDC is $\angle B + \angle D_2 + \angle C_2 = 180°$
Dus is $\angle A + \angle D_1 + \angle C_1 + \angle B + \angle D_2 + \angle C_2 = 360°$. En omdat $\angle D_1 + \angle D_2 = 180°$ (gestrekte hoek) is ook $\angle A + \angle C_1 + \angle B + \angle C_2 = \angle A + \angle B + \angle C = 180°$



d Neem hoogtelijn CD met D op het verlengde van BA en bekijk de rechthoekige driehoeken ACD en BCD.
In ΔACD is: $\angle A_1 + \angle D + \angle C_1 = 180°$
In ΔBDC is: $\angle B + \angle D + \angle C_1 + \angle C_2 = 180°$
Dus is: $\angle A_1 + \angle D + \angle C_1 + \angle B + \angle D + \angle C_1 + \angle C_2 = 360°$

Nu is: $\angle A_1 = 180° - \angle A_2$ (gestrekte hoek) en $\angle C_1 = 90° - \angle A_1 = \angle A_2 - 90°$

Dit geeft: $\angle B + \angle A_2 + \angle C_2 = 180°$



15 a $\angle A + \angle B_1 + \angle C = 180°$ (hoekensom driehoek), dus: $\angle B_1 = 180° - \angle A - \angle C$

$\angle B_1 + \angle B_2 = 180°$ (gestrekte hoek) en dus: $\angle B_2 = 180° - \angle B_1 = 180° - (180° - \angle A - \angle C) = \angle A + \angle B$

b Stelling buitenhoek van een driehoek.

16 Noem het lijnstuk AB. Teken een halve lijn l uit A (niet in het verlengde van het lijnstuk). Pas op lijn l vanuit A vier gelijke stukken af, je krijgt dan achtereenvolgens AP, PQ, QR en RS. Verbind het eindpunt S met B. Construeer door de punten P, Q en R lijnen evenwijdig aan SB. De evenwijdige lijnen snijden AB. De snijpunten verdelen het lijnstuk AB in vier gelijke delen.

17 Neem op de aardbol punt N (de noordpool) en de punten A en B op de evenaar. De lijnen NA en NB over het aardoppervlak staan loodrecht op de evenaar. Dus is $\angle A = \angle B = 90°$. Dan moet $\angle A + \angle B + \angle N > 180°$ zijn.

De aarde is een grote bol en op kleine stukken merk je niet dat je te maken hebt met een bol. Dan lijkt hij gewoon plat. Daarom heeft het lang geduurd voordat men doorhad dat driehoeken op de aarde anders zijn dan op het platte vlak.

(Eigenlijk is de aarde niet helemaal een bol. Bij de polen is hij afgevlakt.)

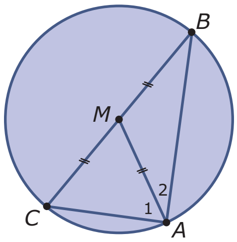
18 **Gegeven:**
$\angle A$ is een stompe hoek in ΔABC.

Te bewijzen:
$\angle B$ en $\angle C$ zijn scherp.

Bewijs:
Neem aan dat $\angle B$ niet scherp is, dan is de som $\angle A + \angle B + \angle C$ meer dan 180°. Neem aan dat $\angle C$ niet scherp is, dan is de som $\angle A + \angle B + \angle C$ meer dan 180°. Dit leidt in beide gevallen tot een tegenspraak, dus $\angle B$ en $\angle C$ zijn beide scherp.

19 a Een koorde (waar het middelpunt niet op ligt) is korter dan de middellijn van de cirkel.

b Zie de figuur.



Gegeven:
AB is koorde en BC is middellijn.

Te bewijzen:
$AB < BC$.

Bewijs:
$MA = MB = MC$ geeft $\angle C = \angle A_1$ en $\angle B = \angle A_2$. Omdat $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle B + \angle C = 180°$, is $\angle A_1 + \angle A_2 = 90°$. Dit betekent dat ΔABC rechthoekig is en van een rechthoekige driehoek zijn de rechthoekszijden korter dan de schuine zijde.

c Het speciale geval is de situatie dat M op de koorde ligt. In dat geval zijn koorde en middellijn even lang.

4.2 Congruentie

V1 a Gebruik geodriehoek en passer.

b Probeer met behulp van schetsen en aannames te ontdekken welke beperkingen er zijn.

c Nu heb je alleen je geodriehoek nodig.

d HHZ, HZH en ZZR.

Let op de volgorde waarin het opgeschreven is: HHZ betekent twee naast elkaar gelegen hoeken en de zijde na de tweede hoek; HZH betekent een hoek, een zijde vanaf die hoek en de hoek die daar weer tegenaanligt.

e Er zijn dan twee echt verschillende driehoeken mogelijk.

1 a Als twee hoeken gelijk zijn, dan is de derde hoek automatisch gelijk. Er zijn dan maar twee gegevens bekend van de driehoek, de lengtes van de zijden kunnen nog variëren.

b Bij ZZH heb je nog twee mogelijkheden: een scherphoekige driehoek of een stomphoekige. Teken $AB = 5$ en $\angle B = 45°$. Teken nu de cirkel met middelpunt A en straal $AC = 4$. Deze cirkel snijdt het tweede been van $\angle B$ twee keer. Er zijn dus twee punten C mogelijk.

2 Neem bijvoorbeeld $AB = 5$ cm en $\angle A = 40°$ en $\angle B = 60°$. Deze hoeken hebben behalve AB nog een ander been. Die andere benen snijden elkaar in C en zo krijg je ΔABC. Voorwaarde is wel dat $\angle A + \angle B < 180°$.

3 a Omdat de oppervlakte van het vierkant $(a+b)^2$ moet zijn, om aan te kunnen tonen dat ook geldt $a^2 + b^2 = c^2$.

b Uit $(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$ volgt door haakjes wegwerken: $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$ en dus $a^2 + b^2 = c^2$.

4 a ZZZ, je weet immers nog niet of $\angle ACB$ recht is, dus van gelijke hoeken mag je geen gebruikmaken.

b Ga na dat $16^2 + 30^2 = 34^2$, dus de driehoek is rechthoekig (omgekeerde stelling van Pythagoras).

c $10^2 + 24^2 = 676$

Als $|AC| = 26$, dan geldt $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ en is de driehoek dus rechthoekig.

d $24^2 - 10^2 = 476$

Als $|AC| = \sqrt{476}$, dan is $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ en is de driehoekig dus rechthoekig.

5 Bewijs: Uit $|AB| = |BA|$, $|AC| = |BC|$ en $|BC| = |AC|$ volgt dat ΔABC congruent is met ΔBAC (ZZZ). En dus is $\angle A = \angle B$.

6 **Gegeven**:
Een gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC met $\angle C = 90°$ en $AC = BC$.

Te bewijzen: $\angle A = 45°$ en $\angle B = 45°$

Bewijs:
Omdat ΔABC gelijkbenig is, zijn de hoeken tegenover de gelijke benen even groot, dus $\angle A = \angle B$ (gelijkbenige driehoek).
Omdat de hoeken van een driehoek samen 180° zijn (hoekensom driehoek) en $\angle C = 90°$ is $\angle A + \angle B = 90°$, zodat elke hoek 45° is.

(Opmerking: Dit bewijs is nogal overbodig omdat de stelling zelf al in de lijst van gegeven stellingen en definities voorkomt. Maar het is wel een goede oefening. Bovendien zie je zo dat veel van de stellingen die in die lijst voorkomen weer uit andere stellingen van diezelfde lijst zijn af te leiden. Het maakt duidelijk dat de lijst maar een vrij willekeurige greep is uit het geheel aan bewezen stellingen in de vlakke meetkunde.)

7 **Gegeven**:
ΔABC met $\angle A = \angle B$

Te bewijzen:
$|AC| = |BC|$

Bewijs:
Teken de loodlijn CD vanuit C op AB. Omdat $\angle A = \angle B$ en $\angle D_1 = \angle D_2 = 90°$ en $|CD| = |CD|$, zijn de driehoeken ADC en BDC congruent (ZHH). En daaruit volgt $|AC| = |BC|$.

8 **Gegeven**:
ΔABC met $|BC| > |AC|$

Te bewijzen:
$\angle A > \angle B$

Bewijs:
Neem aan dat $\angle A < \angle B$, dan kies je D op AC zodat $\angle DAB = \angle DBA$. Dan is $|CB| < |DC| + |DB| = |DC| + |DA| = |AC|$.

Tegenspraak. Het gestelde is niet waar en het bewijs is geleverd.

9 Stel dat dit niet zo zou zijn en dat PQ de kortste verbindingslijn van P met een punt Q op l is. Waarbij PQ niet loodrecht op l staat. Er is dan een driehoek $PP'Q$ te tekenen waarin $PP' \perp l$. In die driehoek is $|PQ|^2 = |PP'|^2 + |P'Q|^2$ (Pythagoras) en dus $|PQ| > |PP'|$. Dat is in tegenspraak met het feit dat $|PQ|$ de kortste verbindingslijn van P met een punt op l zou zijn.

10 a $|AB| = |BA|$, $|AD| = |BC|$ en $\angle A = \angle B = 90°$, dus de driehoeken ABD en ABC zijn congruent (ZHZ).

b $ABCD$ is een ruit die tevens rechthoek is (vierkant). In de ruit delen de diagonalen de hoeken middendoor.
Dus zijn van ΔABS de hoeken op AB beide 45°. Voor ΔCDS zijn op dezelfde manier de twee hoeken op CD beide 45°.
Omdat ook $|AB| = |CD|$ zijn ΔABS en ΔCDS congruent (HZH).

c Omdat ΔABS en ΔCDS congruent zijn, is $|AS| = |CS|$ en $|BS| = |DS|$.

11 a Nee, als de derde 13 cm zou zijn dan moeten de zijden op één lijn liggen en vormen ze geen driehoek. Om dezelfde reden kan de derde zijde geen lengte hebben van 3 cm.

De lengte van de derde zijde moet tussen 3 en 13 cm liggen.

b Stel twee zijden hebben als lengtes a en b. Dan moet de derde zijde met lengte c, om een driehoek te kunnen construeren, voldoen aan:
c is kleiner dan de som van a en b en c is groter dan het verschil van a en b (het verschil zo nemen dat het positief is).

12 **Gegeven**:
Een gelijkzijdige driehoek ABC.

Te bewijzen:
$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

Bewijs:

Omdat $|AB| = |AC|$ is $\angle ABC = \angle ACB$ (gelijkbenige driehoek).

Omdat $|AB| = |BC|$ is $\angle BAC = \angle ACB$ (gelijkbenige driehoek).
Dus zijn alle drie de hoeken van de driehoek gelijk.

En dus zijn ze elk $\frac{180}{3} = 60°$ (hoekensom van een driehoek is 180°).

13 **Gegeven**:
Vierhoek $ABCD$, het snijpunt van de diagonalen is S.

Te bewijzen:
$|AB| + |BC| + |CD| + |DA| > |AC| + |BD|$

Bewijs:
$|AB| + |BC| > |AC|$ en $|AD| + |DC| > |AC|$ (driehoeksongelijkheid).

Optellen geeft: $|AB| + |BC| + |AD| + |DC| > 2 \cdot |AC|$ (1)
$|AD| + |AB| > |BD|$ en $|BC| + |CD| > |BD|$.

Optellen geeft: $|AB| + |AD| + |BC| + |DC| > 2 \cdot |BD|$ (2)

(1) en (2) optellen geeft: $2 \cdot (|AB| + |BC| + |AD| + |DC|) > 2 \cdot (|AC| + |BD|)$

Dus is: $|AB| + |BC| + |CD| + |DA| > |AC| + |BD|$

14 a **Gegeven**:
P ligt op l. PQ is de loodlijn vanuit P op m.

Te bewijzen:
QP is de loodlijn vanuit Q op l.

Bewijs:
De lijnen l en m zijn evenwijdige lijnen gesneden door PQ. F-hoeken zijn gelijk, dus $\angle Q = 90°$ betekent dat ook $\angle P = 90°$.

b Bewijs: PQ en $P'Q'$ zijn beide loodrecht op m. Dus PQ evenwijdig met $P'Q'$. Omdat $\angle P = 90°$ is $\angle P' = 90°$ en dus is $PQQ'P'$ een rechthoek, zodat $|PQ| = |P'Q'|$.

c Geldt voor alle punten P en Q op twee evenwijdige lijnen.

d ja

Bewijs:

Neem punt R ongelijk aan Q op m. Neem aan dat $|PR| < |PQ|$. Dan is ΔPQR een rechthoekige driehoek. Hierin geldt: $(|PQ|)^2 + (|QR|)^2 = (|PR|)^2$ zodat $|PR| > |PQ|$

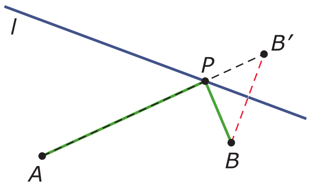
Dit is in tegenspraak met het gestelde.

15 $|MA| = |MP|$ (straal van de cirkel)

$|MB| = |MQ|$ (straal van de cirkel)

$\angle AMB = \angle PMQ$ (gelijkbenige driehoeken)
$\Delta BAM \cong \Delta PQM$ (HHZ).

16 a Zie de figuur.



Teken B' zo, dat BB' loodrecht l en $|BS| = |SB'|$ als S het snijpunt van BB' met l is.

b Vanwege de driehoeksongelijkheid is de rechte lijn AB' de korste verbinding tussen A en B'.
Vanwege de congruentie van de driehoeken BSP en $B'SP$ (ZHZ) is $|AP| + |PB| = |AP| + |PB'|$ dus ook de kortste verbinding van A naar B via l.

17 a Er moet gelden dat: $|AB|^2 + |BC|^2 = 50^2 = 2500$ (stelling van Pythagoras)

Voer in de GR: Y1=√(2500-X^2)

Maak de tabel en bekijk voor welke X waarden Y geheel is.

X	14	30	40	48
Y	48	40	30	14

De congruente driehoeken ABC en CBA met $|AB| = 14$ en $|BC| = 48$; $|AB| = 48$ en $|BC| = 14$.

Of de congruente driehoeken ABC en CBA met $|AB| = 30$ en $|BC| = 40$; $|AB| = 40$ en $|BC| = 30$.

b Er moet gelden: $3^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ (stelling van Pythagoras)

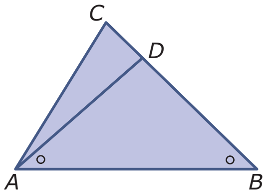
Dit betekent dat je op zoek moet naar twee kwadraten waarvan het verschil 9 is.

Stel dat $|AC| = 5$, dan is $|BC| = 4$, immers $3^2 + 4^2 = 5^2$. Het is snel na te gaan dat $|AC|$ niet kleiner kan zijn dan 5.

Stel dat $|AC| \geq 6$, en zeg $|AC| = x$. Dan $|AC|^2 - |BC|^2 \geq x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1 \geq 2 \cdot 6 - 1 = 11$. Maar het verschil moet 9 zijn, dus de 3,4,5 driehoek is de enige mogelijkheid.

18 Omdat de driehoek stomp is, moet gelden $a^2 + b^2 < 10000$.
$a^2 \leq 5000$, omdat a geheel moet zijn, is a maximaal 70.
Kies $a = 70$ en $b = 71$, dan $a^2 + b^2 < 10000$.

19 Zie de figuur.



Gegeven:
ΔABC met $|AC| = |BC|$ en D is het midden van AC, E is het midden van BC. DF en EG zijn loodlijnen op AB.

Te bewijzen:
$|DF| = |EG|$.

Bewijs:

Omdat $|AC| = |BC|$ is $\angle A = \angle B$ (gelijkbenige driehoek). Verder is $|AD| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot |BC| = |BE|$. En tenslotte is $\angle F = \angle G = 90°$. Dus is $\Delta AFD \cong \Delta GBE$ (het teken $\cong$ betekent congruent, je gebruikt ZHH). En daarom is $|DF| = |EG|$.

20 a Trek bijvoorbeeld diagonaal AC. Je hebt dan twee driehoeken waarvan de hoekensom $180°$ is: $\angle A_1 + \angle B + \angle C_1 = 180°$ en $\angle A_2 + \angle D + \angle C_2 = 180°$. En dus is $\angle A_1 + \angle B + \angle C_1 + \angle A_2 + \angle D + \angle C_2 = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

b Volgt uit de congruentie (ZZZ) van de driehoeken ABC en CDA.

c Uit de congruentie van de driehoeken ABC en CDA volgt dat AB evenwijdig is met CD (Z-hoeken).

d Volgt uit de congruentie (ZHZ) van de driehoeken ABC en DCB.

e Volgt uit de evenwijdigheid van AB en CD.

f Volgt uit de congruentie (HZH) van de driehoeken ABS en DCS.

21 a ΔABC is rechthoekig, dus $\angle ACB + \angle CBA = 90°$, of $\angle ACB = 90° - \angle CBA$.

b $\angle CAD = 90° - \angle BAD = 90° - \angle CBA = \angle ACB$.

c Uit de gelijkbenigheid van ΔABD volgt $|BD| = |AD|$.
Uit de gelijkbenigheid van ΔADC volgt $|CD| = |AD|$.
Dus is $|AD| = |BD| = |CD|$.

4.3 Bewijzen

V1 Probeer er zelf uit te komen. In en vind je twee uitgewerkte bewijzen voor deze stelling.

1 a De stelling zelf is meestal zeer algemeen geformuleerd. Bij 'Gegeven' vertaal je de stelling naar een concrete figuur en beschrijf je de zaken die je voor waar aanneemt in termen van die figuur. Bij 'Te bewijzen' beschrijf je wat je moet bewijzen in termen van je figuur.

b Het zelf formuleren van de stelling passend bij een eigen figuur helpt bij het bedenken van de manier van bewijzen. Je leert zo ook goed uit elkaar te houden wat is gegeven en wat je precies moet bewijzen.

2 a Omdat $AP = QD$ (gegeven: halve zijde van vierkant $ABCD$), $DR = RA$ (gegeven) en $\angle A = \angle D = 90°$ zijn de driehoeken APR en DQR congruent (ZHZ).

b Omdat $\Delta APR \cong DQR$ geldt dat $PR = QR$.
Omdat zowel ΔAPR als ΔDQR gelijkbenig en rechthoekig is, is $\angle ARP = \angle DRQ = 45°$ (hoekensom driehoek).
Dus is: $\angle PRQ = 180 - 45 - 45 = 90°$
Q.e.d.

3 a Er zitten verwijzingen in naar de lijst met definities en stellingen. Die verwijzingen bestaan uit trefwoorden of afkortingen tussen haakjes. Welke stelling bij zo'n trefwoord of afkorting hoort moet je goed uit het hoofd leren!

b Doen!

4 a Omdat ΔAPR gelijkbenig en rechthoekig is, geldt $PR^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}a^2$.

Op dezelfde wijze is $QR^2 = \frac{1}{2}a^2$. En dus is $PR = QR$.

b Omdat $PB = QC$ en $PB \,//\, QC$, is $PBCQ$ een parallellogram (stelling parallellogram). Bovendien heeft $PBCQ$ een rechte hoek en is dus een rechthoek (stelling rechthoek). Als a de lengte van de zijden van het vierkant $ABCD$ is, is dus ook $PQ = a$.

c $PR^2 + QR^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2 = PQ^2$.
En daarom is ΔPQR rechthoekig (omgekeerde stelling van Pythagoras).

5 a De middelloodlijnen van de zijden van een driehoek ABC snijden elkaar in één punt (stelling middelloodlijnen driehoek). Neem dit punt als middelpunt van de cirkel.

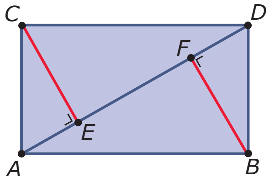
Er geldt immers dat $|AM| = |BM| = |CM| = r$, waarbij r de straal van de cirkel is.

b Doen.

c Bijvoorbeeld: 'Het middelpunt van de cirkel door de drie hoekpunten van een scherphoekige driehoek ligt binnen die driehoek.', of 'Het middelpunt van de cirkel door de drie hoekpunten van een rechthoekige driehoek ligt op de langste zijde van die driehoek.'
Lever zelf de bewijzen.

6 Maak de constructie met GeoGebra.

7 a Zie de figuur.



b DE en BF

c Bijvoorbeeld de driehoeken AED en CFB

d $ABCD$ is een rechthoek en dus $AD = BC$.
$\angle DAE = \angle FCB$ (stelling Z-hoeken)
$\angle AED = \angle BFC = 90°$
Dus is: $\Delta AED \cong \Delta CFB$ (ZHH).

En daaruit volgt: $DE = BF$

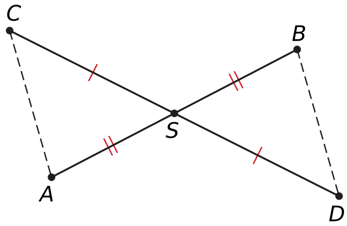
8 **Gegeven**:
Zie figuur bij de opgave. $CS = DS$ en $\angle C = \angle D$

Te bewijzen:
$AS = BS$

Bewijs:
$CS = DS$ en $\angle C = \angle D$ (gegeven) en $\angle ASC = \angle BSD$ (stelling overstaande hoeken). Dus is $\Delta ASC \cong \Delta BSD$ (HZH). En daarom is $AS = BS$.

Q.e.d.

9 Zie de figuur.



Gegeven:
Bekijk de figuur. $AS = BS$ en $CS = DS$.

Te bewijzen:
AC is evenwijdig met BD.

Bewijs:
$CS = SD$ en $AS = SB$ (gegeven) en $\angle ASC = \angle BSD$ (stelling overstaande hoeken). Dus is $\Delta ASC \cong \Delta BSD$ (ZHZ). En daarom is $\angle ACS = \angle SDB$ en zijn AC en BD evenwijdig (stelling Z-hoeken).
Q.e.d.

10 Gegeven:
Teken zelf een figuur.

Te bewijzen:
$BE = CD$.

Bewijs:

$EC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB = DB$ en $BC = CB$ en $\angle ACB = \angle ABC$ (stelling gelijkbenige driehoek). Dus is $\Delta BEC \cong \Delta CDB$ (ZHZ). En daarom is $BE = CD$. Q.e.d.

11 **Gegeven**:
Maak een tekening en noem $\angle APD = \angle P_1$, $\angle BPD = \angle P_2$ en $\angle BPC = \angle P_3$. Nu is $\angle P_1 = \angle P_2$.

Te bewijzen:

$\angle P_2 + \angle P_3 = \frac{1}{2} \cdot (\angle P_3 + \angle P_1 + \angle P_2 + \angle P_3)$

Bewijs:

$\frac{1}{2} \cdot (\angle P_3 + \angle P_1 + \angle P_2 + \angle P_3) = \angle P_3 + \frac{1}{2} \cdot (\angle P_1 + \angle P_2) = \angle P_3 + \angle P_2$ vanwege het gegeven dat: $\angle P_1 = \angle P_2$

Q.e.d.

12 Gegevens en te bewijzen staan in de opgave.

Bewijs:
Uit $\angle A = \angle A$, $AB = AD$ en $AC = AE$ volgt dat de driehoeken ABC en ADE congruent zijn (ZHZ). En daaruit volgt $\angle C = \angle E$. Q.e.d.

13 **Gegeven**:

ΔABC met $\angle ACB > 90°$ en D is het midden van AB.

Te bewijzen:

$CD < \frac{1}{2} \cdot AB$

Bewijs:

Stel dat $CD = \frac{1}{2} \cdot AB$.

Dan is $\angle A = \angle DCA$ en $\angle B = \angle BCD$ (stelling gelijkbenige driehoek).

$\angle BDC = 2 \cdot \angle DCA$ (stelling buitenhoek)

$2 \cdot \angle DCA + 2 \cdot \angle BCD = 180°$ (stelling hoekensom driehoek) en dus $\angle DCA + \angle BCD = \angle ACB = 90°$.

Dit is in tegenspraak met het gegeven.

Stel dat: $CD > \frac{1}{2} \cdot AB$.

$\angle A > \angle DCA$ en $\angle B > \angle BCD$. Dan volgt hieruit voor de hoeken: $\angle A + \angle B > \angle ACB > 90°$. Maar dan geldt dat $\angle A + \angle B + \angle ACB > 180°$.

Tegenspraak.

Er moet dus gelden dat: $CD < \frac{1}{2} \cdot AB$.

14 a Omdat de driehoeken BCS en WCT congruent zijn, is $CS = CT$ en $BS = WT$.

Dus ΔSTC is gelijkbenig en hieruit volgt dat $\angle CST = \angle STC$ (stelling gelijkbenige driehoek). En omdat $\angle TCS = 60°$, is ΔSTC gelijkzijdig (hoekensom van een driehoek is 180°).

Er geldt dat $AS + BS + CS = AS + ST + TW$.

Als je punt S nu zo kiest dat S en T op lijnstuk AW liggen, dan heb je de kortst mogelijk weg gevonden. Dat dit kan, kun je als volgt inzien:

Kies punt S zo dat $\angle ASC = 120°$, dan liggen de punten S en T op lijnstuk AW. Immers $\angle CST = 60°$ (ΔSTC is gelijkzijdig) en $60° + 120° = 180°$ (gestrekte hoek).

b Construeer de gelijkzijdige driehoek ACX (of ABY) zo dat er geen overlapping met driehoek ABC is.

Het snijpunt van de lijnstukken AW en BX is het gezochte punt S. Je kunt immers op analoge wijze aantonen dat S op lijnstuk BX moet liggen.

15 **Gegeven**:

$EA = AC$ en E ligt op het verlengde van BA. ΔCBD is gelijkzijdig en heeft dus hoeken van 60°.

Te bewijzen:

$AD = AB + AC$

Bewijs:

$\angle EAC = 180 - 2 \cdot 60° = 60°$ en omdat $EA = AC$ volgt hieruit dat ΔEAC gelijkzijdig is. Dus $\angle CEA = \angle ACE = 60°$ en de zijden zijn even groot.

ΔBDC is een gelijkzijdige driehoek, dus de hoeken zijn 60°.

$\angle BCE = 60° + \angle BCA = \angle DCA$

$\Delta EBC \cong \Delta ADC$ (ZHZ) en er geldt dus $EB = AD$. Hieruit volgt dat $AD = AB + AC$.

16 Gegevens en te bewijzen staan in de opgave. Maak zelf een figuur.

Bewijs:
Omdat $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ en $DS = SA$ is $\Delta DSB \cong \Delta ASC$ (ZHH). Dus is $AC = BD$.
Q.e.d.

17 Gegeven:
Gelijkbenige driehoek ABC met $AC = BC$ met daarin de lijnstukken $BD \perp AC$ en $AE \perp BC$.

Te bewijzen:
$BD = AE$.

Bewijs:
Omdat $\angle ADB = \angle BEA = 90°$, $\angle A = \angle B$ (stelling gelijkbenige driehoek) en $AB = BA$ is $\Delta ABE \cong \Delta BAD$ (ZHH). Dus is $BD = AE$.
Q.e.d.

4.4 Gelijkvormigheid

V1 Probeer zelf een overzicht te maken.

1 a Je hebt bij gelijkvormigheid van driehoeken genoeg om aan te tonen dat twee paar hoeken gelijk zijn, want dan is (stelling hoekensom driehoeken) ook het derde paar hoeken gelijk. Dat geldt bijvoorbeeld voor vierhoeken, vijfhoeken, e.d. niet. De gelijkvormigheid van veelhoeken met meer dan drie hoekpunten is ingewikkelder.

b Met de factor $\frac{|AB|}{|AD|} = k$.

c Dat komt omdat elke driehoek volledig wordt bepaald door één gegeven zijde en twee gegeven hoeken. Met behulp van goniometrie kun je dan alle andere hoeken en zijden berekenen. Wordt de gegeven zijde k keer zo groot gemaakt, dan worden de andere zijden ook k keer zo groot. (Als je de sinusregel al kent, is dit onmiddellijk duidelijk.)

d Dat komt omdat elke driehoek volledig wordt bepaald door één gegeven hoek en de lengtes van de zijden op de benen van die hoek. Met behulp van goniometrie kun je dan alle andere hoeken en zijden berekenen. Worden de gegeven zijden k keer zo groot gemaakt, dan wordt de andere zijde ook k keer zo groot. (Als je de sinusregel al kent, is dit onmiddellijk duidelijk.)

2 Congruente driehoeken zijn ook gelijkvormig, maar het omgekeerde is vrijwel nooit het geval.

3 a Gelijkvormigheidskenmerk hh.

b ΔBCS en ΔESD. (Gelijkvormigheidskenmerk hh, met Z-hoeken en/of overstaande hoeken.)

4 a Zie de tabel.

ΔDEC	DE	EC	DC
ΔABC	AB	BC	AC

b Vul de gegevens in de verhoudingstabel in:

ΔDEC	2,5	EC	DC
ΔABC	6	4	AC

Nu kun je de lengte van EC berekenen.

Je vindt: $\frac{|EC|}{4} = \frac{2{,}5}{6}$.

Dus: $|EC| = 1\frac{2}{3}$.

5 a zhz, want $\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|CE|}$ en $\angle ACB = \angle DCE$ (overstaande hoeken).

b $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{2}{5}$

c $|DE| = \frac{5}{2} \cdot 1{,}8 = 4{,}5$

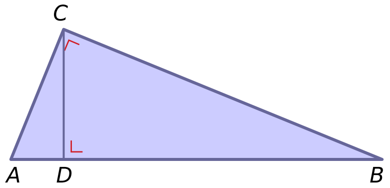
6 a $|AB| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (stelling van Pythagoras).
Ga nu verder vanuit de verhoudingstabel:

ΔABC	AB	BC	AC
ΔCBD	CB	BD	CD
ΔACD	AC	CD	AD

ΔABC	13	12	5
ΔCBD	12	BD	CD
ΔACD	5	CD	AD

$\frac{|CD|}{5} = \frac{12}{13}$, dus $|CD| = \frac{60}{13}$.

b Zie de figuur.



Gegeven:

$\angle ACB = 90°$. Je tekent hoogtelijn CD, dus ook $\angle ADC = \angle CDB = 90°$.

Te bewijzen:

$|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$.

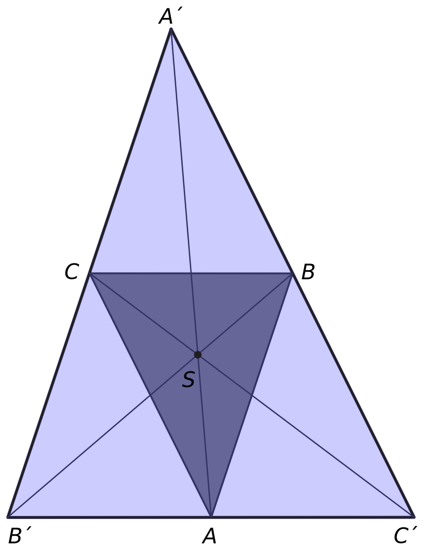
Bewijs:

De driehoeken ABC, CBD en ACD zijn gelijkvormig (hh). De verhoudingen van hun zijden zijn daarom gelijk, dus je kunt deze verhoudingstabel maken.

ΔABC	AB	BC	AC
ΔCBD	CB	BD	CD
ΔACD	AC	CD	AD

Uit de verhoudingstabel volgt: $|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$.
Q.e.d.

7 a Een van de mogelijkheden zie je hier.



b $|SA'| = 2|SA|$ en $|SB'| = 2|SB|$, dus $\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$

en $\angle ASB = \angle A'SB'$ (overstaande hoeken).

Gelijkvormigheidskenmerk zhz.

c $|A'B'| = 2|AB|$ en net zo: $|B'C'| = 2|BC|$ en $|A'C'| = 2|AC|$

d Gelijkvormigheidskenmerk zzz.

e De factor is onbelangrijk, mag ook kleiner dan 1 zijn.

f Als je een driehoek met een bepaalde factor vanuit een gegeven punt vergroot, krijg je een nieuwe driehoek die gelijkvormig is met de gegeven driehoek.

8 a Omdat $\angle C = \angle C$ en $\angle BAC = \angle DBC$ zijn de driehoeken ABC en BDC gelijkvormig (hh).

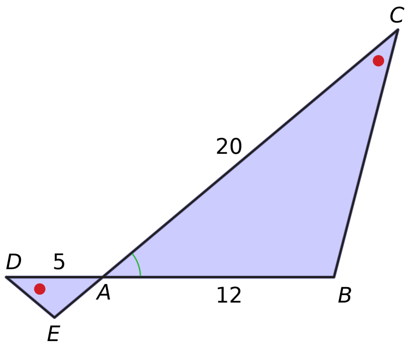
b Zie de tabel.

ΔABC	AB	BC	AC
ΔBDC	BD	DC	BC

Daaruit volgt:

$\frac{|DB|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|AC|}$ geeft $\frac{|DB|}{10} = \frac{5}{8}$ en dus $|DB| = 6{,}25$.

9 Maak eerst een schets van de situatie:



Omdat $\angle EAD = \angle BAC$ (overstaande hoeken) en $\angle EDA = \angle BCA$ zijn de driehoeken ABC en AED gelijkvormig (hh).

Daaruit volgt:

$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AB|}$ geeft $\frac{5}{20} = \frac{|AE|}{12}$ en dus $|AE| = 3$ cm.

10 Gegevens en te bewijzen staan in de opgave. Maak zelf een figuur.

Bewijs:

$\angle AES = 90° = \angle BDA$ en $\angle ASE = \angle BSD$ dus ΔASE ΔBSD (hh). Hieruit volgt: $\frac{|AS|}{|BS|} = \frac{|SE|}{|SD|}$ en dus $|AS| \cdot |SD| = |BS| \cdot |SE|$. Q.e.d.

11 **Gegeven:**

Ruit $ABCD$. P, Q, R en S zijn de middens van de zijden.

Te bewijzen:
$PQRS$ is een rechthoek.

Bewijs:

$\Delta APS \sim \Delta ABD$ ($\angle A = \angle A$, $\frac{|AS|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{1}{2}$, dus zhz) betekent dat $|PS| = \frac{1}{2}|BD|$ en dat PS en BD evenwijdig zijn.

Op dezelfde manier bewijs je dit voor QR en BD.

Zo bewijs je ook $|PQ| = |RS| = \frac{1}{2}|AC|$ en PQ en RS evenwijdig aan AC.

Vierhoek $PQRS$ heeft dus twee paren gelijke en evenwijdige overstaande zijden en is dus een parallellogram (stelling parallellogram).
Omdat $AC \perp BD$ (stelling ruit) zijn ook de hoeken van $PQRS$ recht en is $PQRS$ een rechthoek (stelling rechthoek).

Q.e.d.

12 **Gegeven:**
ΔABC met D als midden van BC, E als midden van AC en F als midden van AB.

En $ED//AB$, $EF//BC$, en $DF//AC$

Te bewijzen:
$\Delta AFE \cong \Delta FBD \cong \Delta EDC \cong \Delta DEF$

Bewijs:

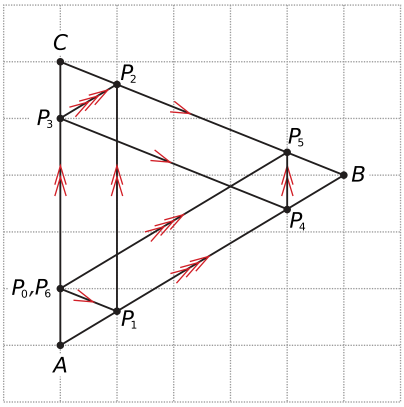
Omdat $\angle C = \angle C$ en $\frac{|CE|}{|CA|} = \frac{|CD|}{|CB|} = \frac{1}{2}$ is $\Delta EDC \sim \Delta ABC$ (zhz) met vergrotingsfactor 0,5.

Dit bewijs je op dezelfde manier voor ΔFBD en ΔAFE.

Omdat $AF//ED$, $\angle AFE = \angle FED$ (Z-hoeken) en $\angle AEF = \angle EFD$ (Z-hoeken) is $\Delta DEF \cong \Delta AFE$.

Alle vier de driehoeken zijn daarom verkleiningen van ΔABC met factor 0,5.
Q.e.d.

13 a Zie de figuur.



$P_6 = P_0$

b **Gegeven:**

In een driehoek ABC wordt op AC een punt P_0 gekozen zo, dat $|AP_0| : |AC| = 1 : 5$. Dan wordt vanuit P_0 een lijn evenwijdig aan BC getrokken naar P_1 op AB en vervolgens vanuit P_1 een lijn evenwijdig aan CA naar P_2 op BC en vanuit P_2 een lijn evenwijdig aan AB naar P_3 op CA. Met P_3 in plaats van P_0 worden net zo weer drie lijnen getrokken, naar P_4 op AB, P_5 op BC en naar P_6 op CA.

Te bewijzen:

$P_6 = P_0$

Bewijs:

$P_0P_1//BC$ en $|AP_0| = \frac{1}{5}|AC|$ betekent $|AP_1| = \frac{1}{5}|AB|$.

$P_1P_2//AC$ en $|AP_1| = \frac{1}{5}|AB|$ betekent $|CP_2| = \frac{1}{5}|BC|$.

Zo is ook: $|CP_3| = \frac{1}{5}|AC|$, $|BP_4| = \frac{1}{5}|AB|$, $|BP_5| = \frac{1}{5}|BC|$ en $|AP_6| = \frac{1}{5}|AC| = |AP_0|$.

Dus moet gelden $P_6 = P_0$.
Q.e.d.

14 a **Gegeven:**

ΔABC met D op het verlengde van AB, E op BC en F het snijpunt van lijn DE en zijde AC. (Lijn DE is lijn m.)

Te bewijzen:

$\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|BE|}{|CE|} \cdot \frac{|CF|}{|AF|} = 1$

Bewijs:

Teken lijn n door C en evenwijdig AB. G is het snijpunt van m en n.

Omdat $\angle FGC = \angle BDE$ en $\angle ECG = \angle EBD$ (Z-hoeken) is $\Delta GEC \sim \Delta DEB$ (hh).

Dus $\frac{|CG|}{|BD|} = \frac{|CE|}{|BE|}$

Daaruit volgt: $|CG| = \frac{|CE|}{|BE|} \cdot |BD|$

Omdat $\angle FGC = \angle BDE$ en $\angle FCG = \angle DAF$ (Z-hoeken) is $\Delta GFC \sim \Delta DFA$ (hh).

Dus $\frac{|CF|}{|AF|} = \frac{|CG|}{|AD|}$ en $|CG| = \frac{|CF|}{|AF|} \cdot |AD|$.

Hieruit volgt: $\frac{|CF|}{|AF|} \cdot |AD| = \frac{|CE|}{|BE|} \cdot |BD|$ zodat $\frac{\left(\frac{1}{|AF|}\right) \cdot |CF| \cdot |AD|}{\left(\frac{1}{|BE|}\right) \cdot |CE| \cdot |BD|} = 1$.

Dus $\frac{|BE| \cdot |CF| \cdot |AD|}{|AF| \cdot |CE| \cdot |BD|} = 1$ en daaruit volgt: $\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|BE|}{|CE|} \cdot \frac{|CF|}{|AF|} = 1$.

Q.e.d.

b **Gegeven:**

ΔABC met D op het verlengde van AB, E op het verlengde van BC en F het snijpunt van lijn DE en het verlengde van AC. (Lijn DE is lijn m.)

Te bewijzen:

$\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|BE|}{|CE|} \cdot \frac{|CF|}{|AF|} = 1$.

Bewijs:

Teken lijn n door C en evenwijdig AB. G is het snijpunt van m en n.

Omdat $\angle FGC = \angle BDE$ en $\angle ECG = \angle EBD$ (F-hoeken) is $\Delta GEC \sim \Delta DEB$ (hh).

Dus $\frac{|CG|}{|BD|} = \frac{|CE|}{|BE|}$.

Daaruit volgt: $|CG| = \frac{|CE|}{|BE|} \cdot |BD|$.

Omdat $\angle FGC = \angle BDE$ en $\angle FCG = \angle DAF$ (F-hoeken) is $\Delta GFC \sim \Delta DFA$ (hh).

Dus $\frac{|CF|}{|AF|} = \frac{|CG|}{|AD|}$ zodat: $|CG| = \frac{|CF|}{|AF|} \cdot |AD|$.

Hieruit volgt: $\frac{|CF|}{|AF|} \cdot |AD| = \frac{|CE|}{|BE|} \cdot |BD|$ en $\frac{\left(\frac{1}{|AF|}\right) \cdot |CF| \cdot |AD|}{\left(\frac{1}{|BE|}\right) \cdot |CE| \cdot |BD|} = 1$.

Dus $\frac{|BE| \cdot |CF| \cdot |AD|}{|AF| \cdot |CE| \cdot |BD|} = 1$ en daaruit volgt: $\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|BE|}{|CE|} \cdot \frac{|CF|}{|AF|} = 1$

Q.e.d.

15 $\frac{|AD|}{6} = \frac{|DE|}{3} = \frac{2}{4}$, dus $|AD| = 3$ en $|DE| = 1{,}5$.

16 Gegevens en te bewijzen staan in de opgave. Maak zelf een figuur.

Bewijs:

Omdat $\angle C = \angle C$ en $\frac{|CE|}{|CA|} = \frac{|CD|}{|CB|} = \frac{1}{2}$ is $\Delta ABC \sim \Delta EDC$ (zhz). Dus is ED evenwijdig aan AB en $\frac{|ED|}{|AB|} = \frac{1}{2}$. Omdat $\angle ASB = \angle DSE$, $\angle ABS = \angle DES$ (Z-hoeken) is $\Delta ABS \sim \Delta DES$ (hh). Dus is $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|ES|} = \frac{|ED|}{|AB|} = \frac{1}{2}$. Hieruit volgt: $|AS| : |SD| = |BS| : |SE| = 2 : 1$.

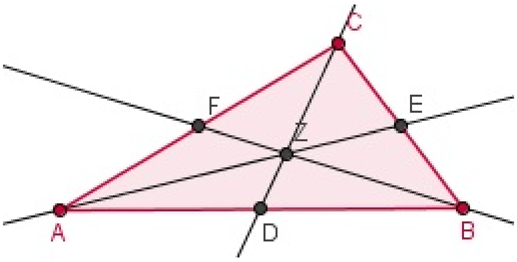
Q.e.d.

4.5 Bijzondere lijnen

V1 a Bij gelijkbenige driehoeken, als $AC = BC$.

b Nee.

1 a Zie figuur, gemaakt in GeoGebra.



b De drie zwaartelijnen moeten door één punt gaan. Dit wordt later bewezen.

(Deze stelling staat ook in de ‘Lijst van definities en stellingen in de vlakke meetkunde voor vlakke meetkunde’.)

2 **Gegeven:**
ΔABC en AD is hoogtelijn en zwaartelijn in deze driehoek.

Te bewijzen:
AD is bissectrice.

Bewijs:
$|AD| = |AD|$, $\angle BDA = \angle CDA = 90°$ en $|BD| = |DC|$ geeft $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ZHZ). En dus is $\angle BAD = \angle CAD$.
Q.e.d.

3 a **Gegeven**:
ΔABC met $AC = BC$ en AD en BE als hoogtelijnen.

Te bewijzen:
$|AD| = |BE|$

Bewijs:
$|AB| = |BA|$, $\angle D = \angle E = 90°$ en $\angle A = \angle B$ (stelling gelijkbenige driehoeken) geeft $\Delta ABD \cong \Delta BAE$ (ZHH). En dus is $|AD| = |BE|$.

Q.e.d.

b **Gegeven**:
ΔABC met $AC = BC$ en AD en BE als zwaartelijnen

Te bewijzen:
$|AD| = |BE|$

Bewijs:

$|AB| = |BA|$, $\angle A = \angle B$ (stelling gelijkbenige driehoeken) en $|AE| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}|BC| = |BD|$ geeft $\Delta ABD \cong \Delta BAE$ (ZHZ).

En dus is $|AD| = |BE|$

Q.e.d.

c **Gegeven**:
ΔABC met $AC = BC$ en AD en BE als deellijnen

Te bewijzen:
$|AD| = |BE|$

Bewijs:

$|AB| = |BA|$, $\angle A = \angle B$ (stelling gelijkbenige driehoeken) en $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle B = \angle ABE$ geeft $\Delta ABD \cong \Delta BAE$ (HZH). En dus is $|AD| = |BE|$.

Q.e.d.

4 a Congruentiekenmerken ZHH en ZZR.

b Omdat $MD = ME = MF$ gaat er een cirkel door de punten D, E en F. Omdat alle drie de lijnstukken loodrecht staan op een zijde van de driehoek, zijn deze zijden raaklijnen van de cirkel.

5 a Construeer dit zelf in GeoGebra. Door de driehoek te veranderen zie je dat dit altijd geldt.

Gegeven:
ΔABC met middelloodlijnen op AB en BC. Het snijpunt van deze middelloodlijnen is M, het midden van AB is D en het midden van BC is E. FM is de lijn door M en het midden F van AC.

Te bewijzen:
De drie middelloodlijnen van een driehoek ABC gaan door één punt M.

Bewijs:
Omdat MD de middelloodlijn van AB is, is $\Delta ADM \cong \Delta BDM$ (ZHZ) en dus is $|AM| = |BM|$.
Op dezelfde manier is $|BM| = |CM|$.
Daarom is $|AM| = |CM|$. En dus ligt M ook op de middelloodlijn van $|AC|$.

Dus de drie middelloodlijnen van een driehoek ABC gaan door één punt M.
Q.e.d.

b M ligt binnen de driehoek ABC als deze driehoek scherphoekig is, anders niet.

c Omdat $|MA| = |MB| = |MC|$.

d Omdat die drie punten de hoekpunten van een driehoek vormen en je met behulp van middelloodlijnen van de zijden van zo'n driehoek een cirkel door de hoekpunten kunt tekenen.

6 a Constueer dit in GeoGebra.

b **Gegeven**:

ΔABC met drie hoogtelijnen. Het snijpunt van deze hoogtelijnen is H.

Te bewijzen:

Alle drie de hoogtelijnen gaan door H.

Bewijs:

Teken ΔDEF door een lijn door A en evenwijdig met BC, een lijn door B en evenwijdig met AC en een lijn door C een lijn evenwijdig met AB te trekken. De hoogtelijnen van ΔABC zijn middelloodlijnen van ΔDEF en gaan dus door één punt.

Q.e.d.

7 a **Gegeven**:
ΔABC met D op AB en $\angle BCD = \angle ACD$

Te bewijzen:
$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$

Bewijs:

Trek een lijn door B en evenwijdig AC.
Punt E is het snijpunt van de bissectrice CD met deze lijn.
Nu is $\angle BED = \angle ACD$ (Z-hoeken) en dus is $BE = BC$ (gelijkbenige driehoek CEB).
Verder zijn de driehoeken ACD en BED gelijkvormig (hh).

Dus: $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{EB} = \frac{AC}{BC}$

Q.e.d.

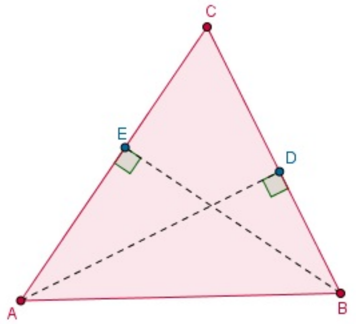
b $AD = \frac{8}{12} \cdot 6 = 4$ en $DC = \frac{4}{12} \cdot 6 = 2$

8 Gegeven:
Cirkel met middelpunt M. Punten A en B op de cirkel en lijn door M en het midden P van AB.

Te bewijzen:
$MP \perp AB$.

Bewijs: Uit $|MA| = |MB|$, $|MP| = |MP|$ en $|AP| = |PB|$ volgt $\Delta BPM \cong \Delta APM$ (ZZZ). En dus is $\angle BPM = \angle APM = 90°$.
Q.e.d.

9 a **Gegeven**:
ΔABC met de hoogtelijnen AD en BE en $|AD| = h_A$, $|BE| = h_B$, $|BC| = a$ en $|AC| = b$



Te bewijzen:
$h_A : h_B = b : a$

Bewijs:
Uit $\angle D = \angle E = 90°$ en $\angle C = \angle C$ volgt $\Delta ADC \sim \Delta BEC$ (hh).

Daaruit volgt: $\frac{h_A}{b} = \frac{h_B}{a}$

En dat levert op: $h_A : h_B = b : a$

Q.e.d.

b **Gegeven**:
ΔABC met de hoogtelijnen AD en BE en $|AD| = h_A$, $|BE| = h_B$, $|BC| = a$ en $|AC| = b$

Te bewijzen:
$h_A : h_B = b : a$

Bewijs:

De oppervlakte van ΔABC is te schrijven als $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_A$ en ook als $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h_B$.

Dus $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_B$

Hieruit volgt dat: $h_A : h_b = b : a$.

Q.e.d.

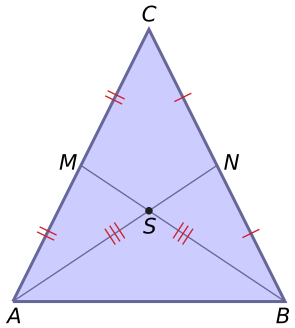
10 Teken drie punten op de cirkel. Deze punten vormen een driehoek. De middelloodlijn van de drie zijden gaat door één punt en dit punt is het middelpunt van de cirkel.

11 **Gegeven**:
ΔABC met M op AC zo, dat $AM = MC$ en N op BC zo, dat $BN = NC$. Verder is $AN = BM$.

Te bewijzen:
$AC = BC$.

Bewijs:
$\angle C = \angle C$ en $\angle CMN = \angle CAB$ dus $\Delta CMN \sim \Delta CAB$ (hh) daaruit volgt dat $\Delta SMN \sim \Delta SBA$ (middenparallel, stelling zwaartelijnen driehoek en zzz). Hierin is S het snijpunt van AN en BM.

Hieruit volgt: $AS = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3}BM = BS$ en ook $NS = \frac{1}{3}AN = \frac{1}{3}BM = MS$. En omdat $\angle ASM = \angle BSN$ zijn de driehoeken ASM en BSN congruent (ZHZ). Dus is $AM = BN$ en dus ook $AC = BC$.



Q.e.d.

12 a Gegeven:
ΔABC, de bissectrice van $\angle A$ en de buitenbissectrices van $\angle B$ en $\angle C$.

Te bewijzen:
De drie bissectrices gaan door punt S, het snijpunt van de bissectrice van $\angle A$ en de buitenbissectrice van $\angle B$.

Bewijs:
Punten op een bissectrice hebben gelijke afstanden tot de benen van de hoek. Dus:
S ligt op de bissectrice van $\angle A$: de afstand van S tot AB is gelijk aan de afstand tot AC.
S ligt op de buitenbissectrice van $\angle B$: de afstand van S tot AB is gelijk aan de afstand tot BC.
Dan is de afstand van S tot AC gelijk aan de afstand tot BC, dus S is een punt van de buitenbissectrice van $\angle C$. De drie bissectrices gaan door punt S. Q.e.d.

b Gegeven:
De bissectrice en de buitenbissectrice van $\angle A$. De binnenhoek wordt verdeeld in $\angle A_1$ en $\angle A_2$ en de buitenhoek in $\angle A_3$ en $\angle A_4$.

Te bewijzen:
De twee bissectrices staan loodrecht op elkaar.

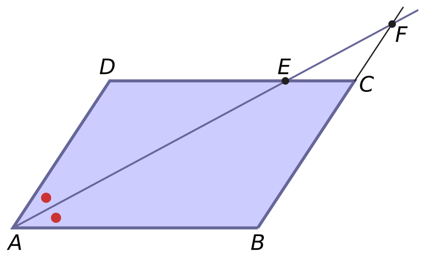
Bewijs:
AD is de bissectrice van $\angle A$, dus $\angle A_1 = \angle A_2$. De buitenbissectrice deelt de hoek middendoor, dus $\angle A_3 = \angle A_4$. Bekend is dat $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 = 180°$. Dan is $\angle A_2 + \angle A_3 = 90°$. Q.e.d.

c **Gegeven**:
ΔABC met zwaartelijn AD. De buitenbissectrice van $\angle A$ staat loodrecht op de zwaartelijn AD.

Te bewijzen:
ΔABC is gelijkbenig.

Bewijs:
Omdat $\angle BAD$ samen met de halve buitenhoek $90°$ is en dit ook geldt voor $\angle DAC$ en de andere halve buitenhoek, is $\angle BAD = \angle DAC$. En omdat ook $|AD| = |AD|$ en $|BD| = |DC|$ is $\Delta BAD \cong \Delta CAD$ (ZZH). Dus is $\angle B = \angle C$ en is ΔABC gelijkbenig (stelling gelijkbenige driehoek). Q.e.d.

13 **Gegeven**:
Zie de figuur. Vierhoek $ABCD$ is een parallellogram, F ligt op het verlengde van BC en E is het snijpunt van DC en AF. Verder is gegeven dat $\angle FAB = \angle DAE$.



Te bewijzen:
ΔECF is gelijkbenig.

Bewijs:

Omdat $ABCD$ een parallellogram is, geldt dat $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$ (stelling parallellogram). Ook geldt dat $AB \,//\, DC$ en $AD \,//\, BC$. Hieruit volgt dat $\angle D = 180° - \angle A$.

Omdat de hoekensom van een driehoek 180° is, geldt dat $\angle AED = 180° - (\angle 180° - \angle A) - 0{,}5 \cdot \angle A$.

$\angle FEC = \angle AED$ (overstaande hoeken)

$\angle ECF = \angle B$ (F-hoeken) en ook $\angle B = \angle D = 180° - \angle A$

$\angle CFE = 180° - 0{,}5 \cdot \angle A - (180 - \angle A) = 0{,}5 \cdot \angle A$, dus $\angle FEC = \angle CFE$. Hieruit volgt dat driehoek ECF gelijkbenig is (stelling gelijkbenige driehoek).

Q.e.d.

14 **Gegeven**:
ΔABC met de hoogtelijnen AD en BE en $\angle A > 90°$. (E ligt op het verlengde van CA.)

Te bewijzen:
$\angle ABC = \angle DEC$.

Bewijs:

Uit $\angle D = \angle E = 90°$ en $\angle C = \angle C$ volgt $\Delta ADC \sim \Delta BEC$ (HH). Daaruit volgt: $\frac{|DC|}{|EC|} = \frac{|AC|}{|BC|}$. En samen met $\angle C = \angle C$ levert dit op $\Delta ABC \sim \Delta DEC$. En dus is $\angle ABC = \angle DEC$.

Q.e.d.

15 **Gegeven**:
ΔABC waarin de middelloodlijn van AB door C en middelloodlijn AC door B gaat.

Te bewijzen:
ΔABC is gelijkzijdig.

Bewijs:
C ligt op de middelloodlijn van AB, dus $|AC| = |BC|$ (aantonen met congruentie van driehoeken). B ligt op de middelloodlijn van AC, dus $|AB| = |BC|$ (aantonen met congruentie van driehoeken).

Hieruit volgt: $|AB| = |BC| = |AC|$ dus ΔABC is gelijkzijdig.

Q.e.d.

4.6 Totaalbeeld

1 **Gegeven:**

Te bewijzen:

$\Delta PQR \sim \Delta ABC$

Bewijs:
Uit $\angle A + \angle PRA = 90°$ en $\angle QRP + \angle PRA = 90°$ volgt $\angle QRP = \angle A$. Uit $\angle B + \angle BPQ = 90°$ en $\angle QPR + \angle BPQ = 90°$ volgt $\angle QPR = \angle B$. En daaruit volgt $\Delta PQR \sim \Delta ABC$ (hh).

Q.e.d.

2 Gegeven: ΔABC en de gelijkzijdige driehoeken ACD en BCE (die niet overlappen met ΔABC).
Te bewijzen: $AE = BD$.
Bewijs: De hoeken van de gelijkzijdige driehoeken zijn allemaal 60° (stelling gelijkzijdige driehoek). $|CE| = |CB|$, $|CD| = |CA|$ en $\angle ACE = \angle ACB + 60° = \angle BCD$ geeft $\Delta AEC \cong \Delta DBC$ (ZHZ). En dus is $|AE| = |BD|$. Q.e.d.

3 a Zie de figuur bij c.

Gegeven:

l, m en n zijn drie evenwijdige lijnen, m tussen l en n. De lijn s staat loodrecht op l en snijdt l, m en n in respectievelijk A, B en C.

$|AB| : |BC| = 1 : 3$

Te bewijzen:

s snijdt m en n loodrecht.

Bewijs:

Gegeven is dat s de lijnen l, m en n snijdt in de punten A, B en C.
Omdat m en n evenwijdig zijn met l zijn de hoeken bij de snijpunten ook 90° (F-hoeken). Dus s snijdt m en n loodrecht.

Q.e.d.

b Zie de figuur bij c.

Gegeven:

l, m en n zijn drie evenwijdige lijnen, m tussen l en n. De lijn s staat loodrecht op l en snijdt l, m en n in respectievelijk A, B en C.

$|AB| : |BC| = 1 : 3$

Lijn t staat loodrecht op lijn l.

Te bewijzen:

Lijn t verdeelt het stuk tussen l en n door m in stukken die zich verhouden als 1 : 3.

Bewijs:

Lijn t staat loodrecht op lijn l en dus staat t loodrecht op m en n (F-hoeken).
De snijpunten van t met l, m en n zijn respectievelijk D, E en F. Dan zijn $ABED$ en $BCFE$ rechthoeken (definitie rechthoek).

Dus is $|AB| = |DE|$ en $|BC| = |EF|$ en is ook $|BC| : |EF| = 1 : 3$.

Q.e.d.

c **Gegeven**:

l, m en n zijn drie evenwijdige lijnen, met m tussen l en n. De lijn s staat loodrecht op l en snijdt l, m en n in respectievelijk A, B en C.

$|AB| : |BC| = 1 : 3$

Lijn u staat niet loodrecht op l en gaat door l, m, en n.

Te bewijzen:

Elke lijn die de lijnen l, m en n snijdt, verdeelt het stuk tussen de lijnen l en m en tussen l en n in stukken die zich verhouden als 1 : 3.

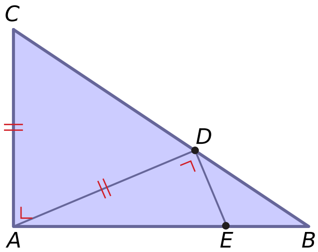
Bewijs:

Lijn u staat niet loodrecht op l en gaat door D. De snijpunten van u met m en n zijn respectievelijk G en H.
Met behulp van F-hoeken is $\Delta DEG \sim \Delta DFH$, zodat: $|DE| : |DF| = 1 : 4 = |DG| : |DH|$
Daaruit volgt: $|DG| : |GH| = 1 : 3$

Q.e.d.

4 **Gegeven**:

Ga uit van een rechthoekige driehoek ABC met $\angle A = 90°$. Op BC ligt punt D zo, dat $AD = AC$. Lijnstuk DE staat loodrecht op AD en punt E ligt op AB.



Te bewijzen:

Bewijs dat $ED = EB$.

Bewijs:
Omdat $\angle DAC = 90° - \angle B$ en $\angle ACD = 90° - \angle B$ is ΔADC gelijkzijdig en heeft dus hoeken van $60°$ (stelling gelijkzijdige driehoek). Hieruit volgt: $\angle B = 30°$ (hoekensom driehoek) en $\angle EDB = 180° - 90° - \angle ADC = 180° - 90° - 60° = 30°$ (gestrekte hoek). Omdat nu dus $\angle EDB = \angle B$ is driehoek EBD gelijkbenig (stelling gelijkbenige driehoek).

Q.e.d.

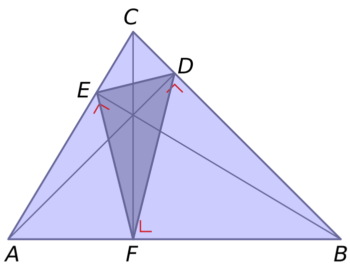
5 De ingeschreven cirkel heeft als middelpunt het snijpunt M van de bissectrices en als straal $MD = ME = MF = r$ met F op AB, D op BC en E op AC. Gebruik nu de gelijkvormige driehoeken ABD en AME (hh).

Pythagoras: $AD = \sqrt{8^2 - 2^2} = \sqrt{60}$.

$\frac{r}{2} = \frac{\sqrt{60}-r}{8}$ geeft $r = 0{,}2\sqrt{60}$.

6 **Gegeven**:

ΔABC met hoogtelijnen AD, BE en CF en ΔDEF



Te bewijzen:

AD, BE en CF zijn bissectrices van ΔDEF.

Bewijs:

Omdat $\angle C = \angle C$ en $\angle ADC = \angle BEC = 90°$ is $\Delta ADC \sim \Delta BEC$ (hh) en dus is $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{EC}$. Uit dit laatste volgt samen met $\angle C = \angle C$ dat $\Delta EDC \sim \Delta BAC$ (zhz) en dus dat $\angle EDC = \angle A$ en $\angle DEC = \angle B$.
Op dezelfde manier bewijs je dat $\angle FDB = \angle A$ en $\angle DFB = \angle C$. En ook dat $\angle AFE = \angle C$ en $\angle AEF = \angle B$.

En daaruit volgt: $\angle CFD = 90° - \angle B = \angle EFC$ en dus is CF bissectrice van $\angle EFD$.

Enzovoort

Q.e.d.

7 a Uit $PA = PB$, $AS = BS$ en $PS = PS$ volgt dat $\Delta PAS \cong \Delta PBS$, dus is ΔPAB gelijkbenig met PS als bissectrice van $\angle APB$. Als M het snijpunt van PS en AB is betekent dit dat ook $\Delta PAM \cong \Delta PBM$ (ZHZ). En dus is $\angle AMP = \angle BMP = 90°$.

b Nu is $AQBP$ een ruit en dus staan de diagonalen loodrecht op elkaar en delen ze elkaar middendoor (stelling ruit en stelling parallellogram).

c Nu is $ABDC$ een ruit en wordt $\angle A$ door diagonaal AD middendoor gedeeld (stelling ruit).

8 a Dit wordt een driehoek met de drie middelloodlijnen door één punt, tenzij de punten op een rechte lijn liggen. In dat laatste geval krijg je twee parallelle middelloodlijnen.

b Er zijn nu $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ middelloodlijnen in totaal.

c Eigen antwoord.

9 Globale opzet van het bewijs:
Noem D, E, F de middens van respectievelijk BC, AC en AB en toon aan dat $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ met een vergrotingsfactor van $-0{,}5$. De zwaartelijnen van ΔABC zijn dat ook in ΔDEF, dus het zwaartepunt is voor beide driehoeken Z. De middelloodlijnen van ΔABC worden de hoogtelijnen van ΔDEF, dus de vermenigvuldiging van ΔABC t.o.v. van punt Z met $-0{,}5$ laat H overgaan in M en omgekeerd. Niet alleen liggen dus de drie punten op één lijn, maar ook geldt: $MZ : HZ = 1 : 2$.

10 Zie figuur, teken lijnstuk ED.

Nu is $\angle ADB = \angle ABD = 90° - \frac{1}{2}\angle BAD$.

Evenzo: $\angle ADE = \angle AED = 90° - \frac{1}{2}\angle EAD$.

En dus is $\angle CDE = 180° - \left(90° - \frac{1}{2}\angle BAD\right) - \left(90° - \frac{1}{2}\angle EAD\right) = \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle EAD) = \frac{1}{2}\alpha$.