Wiskunde C

4 VWO

Deel 1, Antwoordenboek

Inhoud

1

Werken met formules

1.1 Formules gebruiken

V1 a Lengte en breedte. De omtrek en de oppervlakte weet je al.

b Neem voor de grootheid lengte de variabele l en voor de grootheid breedte de variabele b.

$l \cdot b = 5000$ en $2l + 2b = 360$.

c Er zijn verschillende mogelijkheden om deze vraag op te lossen. Bijvoorbeeld:

Mogelijkheid I (proberen):

De lengte en breedte van de rechthoek zijn samen de helft van de omtrek, dus 180 meter. Probeer nu bijvoorbeeld 90 bij 90 meter. Dan is de oppervlakte 8100 m^2. Dat is te groot. Probeer nu 80 bij 100 meter. Ga door tot het ongeveer klopt en ga dan verder in stapjes van 2 meter. Uiteindelijk kom je op het antwoord.

Mogelijkheid II (tabellen):

Maak in beide formules l vrij. Dat geeft $l = \frac{5000}{b}$ en $l = 180 - b$. b en l kunnen niet groter worden dan 180 (waarom niet?). Maak nu bij elk verband een tabel en bekijk wat de oplossing is.

Mogelijkheid III (snijpunten van grafieken):

Doe hetzelfde als bij mogelijkheid II, maar teken twee grafieken in een assenstelsel en lees af waar het snijpunt ligt. Dat geeft het antwoord.

Mogelijkheid IV (nieuw: maak er een vergelijking van en los deze op):

Maak uit de formule $l \cdot b = 5000$ l vrij: $l = \frac{5000}{b}$. Vul deze formule in in de andere formule. Dat geeft $\frac{2 \cdot 5000}{b} + 2b = 360$. Vermenigvuldig de vergelijking aan beide zijden met b en los de vergelijking op met de abc-formule.

Het antwoord: Het kan bij een rechthoek van ongeveer 34 bij 146 meter.

1 a $A = 6 \cdot b$

b $l \cdot b = 12$ of $l = \frac{12}{b}$.

c $A = l \cdot l = l^2$.

d Neem als oorsprong van het assenstelsel het roosterpunt linksonder.

Bij grafiek I hoort de formule uit b: $l = \frac{12}{b}$.

Neem b op de horizontale as. Elk roostervierkantje is 1 m bij 1 m.

Bij grafiek II hoort de formule uit a: $A = 6 \cdot b$.
Neem b op de horizontale as. Op de horizontale as is elk roostervierkantje 1 m, op de verticale as is elk roostervierkantje 5 m^2.

Bij grafiek III hoort de formule uit c: $A = l^2$.
Neem l op de horizontale as. Op de horizontale as is elk roostervierkantje 1 m, op de verticale as is elk roostervierkantje 4 m^2.

2 a $A = (b + 2) \cdot b$ of korter $A = b(b + 2)$.

b Zie de tabel.

b	0	1	2	3	4	5	6
K	0	3	8	15	24	35	48

De grafiek wordt een kromme door deze punten, een stuk van een parabool.

c $15 = b(b + 2)$

d $b = 3$ m, zie tabel.

e Je kunt wel zeggen dat deze formule een vergelijking is, maar dan heeft hij oneindig veel oplossingen. Dit is namelijk waar voor elke waarde van b. Het is eigenlijk gewoon een rekenregel die zegt hoe je haakjes kunt wegwerken.

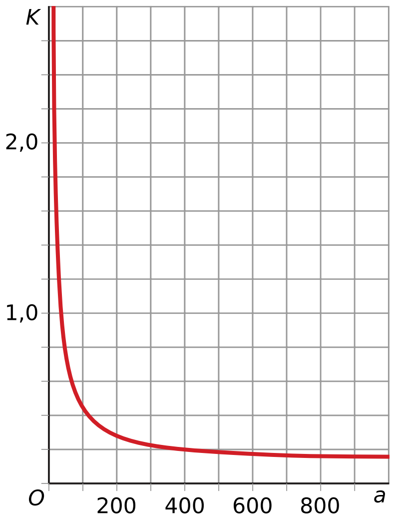
3 Oplossing:

$$\begin{aligned} 2400 - 370t &= 0 \\ -370t &= -2400 \\ t &= \frac{2400}{370} \\ t &\approx 6{,}49 \end{aligned}$$

4 a De totale kosten voor een jaar zijn de kosten per kWh K maal het verbruik a: $K \cdot a = 0{,}12a + 32$. Het vaste bedrag is dus € 32,00.

b Zie de tabel.

a	25	50	100	200	300	400	600	800	1000
K	1,40	0,76	0,44	0,28	0,23	0,20	0,17	0,16	0,15



c Oplossing:

$$\begin{aligned} 0{,}16 &= 0{,}12 + \frac{32}{a} \\ 0{,}04 &= \frac{32}{a} \\ a &= \frac{32}{0{,}04} \\ a &= 800 \end{aligned}$$

5 a De formule wordt: $K = 20 - 4b$.

De grafiek is een rechte lijn door (0,20) en (2,12).

b De formule wordt: $K = 2a + 1$.

De grafiek is een rechte lijn door (0,1) en (2,5).

c Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 20 - 4b &= 10 \\ 4b &= 10 \\ b &= \frac{10}{4} = 2{,}5 \end{aligned}$$

6 a Een verband tussen twee variabelen. Je kunt er een grafiek bij tekenen.

b Een verband tussen vier variabelen. Je kunt er geen grafiek bij tekenen.

c Een rekenregel; Als je de haakjes aan de linkerkant wegwerkt, staat er links en rechts hetzelfde en zie je dat de formule voor alle waarden van a en b klopt.

d Een verband tussen twee variabelen. Je kunt er een grafiek bij tekenen.

e Een vergelijking met één variabele. Je kunt deze vergelijking oplossen.

f Een verband tussen twee variabelen. Je kunt er een grafiek bij tekenen.

7 a Een rekenregel; als je de haakjes aan de linkerkant wegwerkt, staat er links en rechts hetzelfde en dus klopt de formule voor alle waarden van x en y.

b Een vergelijking die je kunt oplossen.

c Een verband tussen twee variabelen. Je kunt er een grafiek bij maken.

d Een verband tussen drie variabelen.

8 a De grafiek wordt een rechte lijn door (0,1500) en (2,700).

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 1500 - 400t &= 0 \\ 400t &= 1500 \\ t &= \tfrac{1500}{400} \\ t &= 3\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Na 3 minuten en $\frac{3}{4} \cdot 60 = 45$ seconden.

c $1500 - 400 \cdot 4{,}5 = -300$, dus 300 centimeter onder water.

9 a K is de totale kosten in euro per belminuut. Als je de totale kosten wilt weten moet je K vermenigvuldigen met het aantal belminuten.

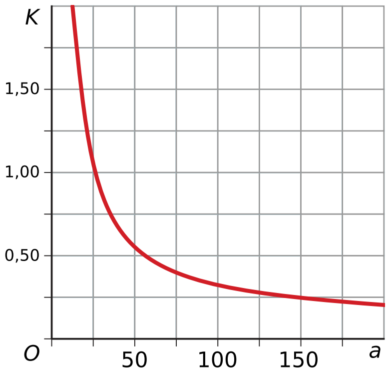
$K \cdot a = a\left(0{,}08 + \frac{24}{a}\right)$

$K \cdot a = 0{,}08a + 24$

Hier is $K \cdot a$ de totale kosten.
Je kunt nu aflezen dat je € 0,08 per belminuut betaalt en € 24,00 de vaste kosten zijn.

b Zie de tabel.

a	25	50	100	200
K	1,04	0,56	0,32	0,2

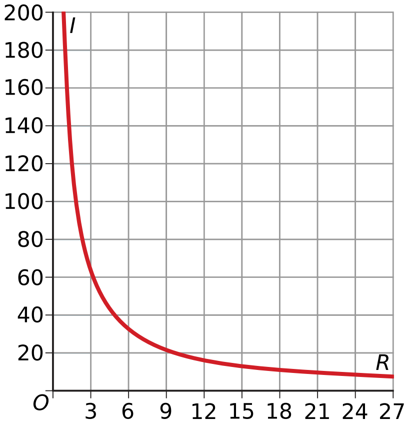


c Oplossing:

$$\begin{aligned} 0{,}08 + \tfrac{24}{a} &= 0{,}12 \\ \tfrac{24}{a} &= 0{,}04 \\ a &= \tfrac{24}{0{,}04} \\ a &= 600 \end{aligned}$$

10 a $I \cdot R = 200$ of $I = \frac{200}{R}$ of $R = \frac{200}{I}$, de eenheden zijn A (Ampère) en Ω (Ohm).

b Zie de figuur.



I	1	5	10	25
R	200	40	20	8

c Oplossing:

$$I \cdot 15 = 200$$
$$I = \frac{200}{15}$$
$$I \approx 13{,}3 \text{ A}$$

11 a In cm^3.

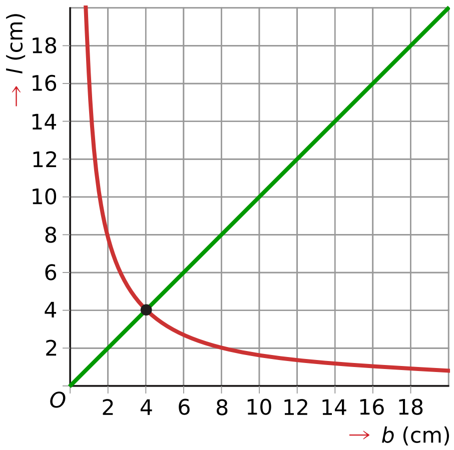
b Lengte l, breedte b en inhoud I.
(Ook de hoogte is een grootheid, maar die is hier niet variabel.)

c $l \cdot b = 16$ ofwel $l = \frac{16}{b}$ als je l op de verticale as wilt hebben.

l	1	2	4	8	16
b	16	8	4	2	1

Zie de figuur bij d.

d Zie de figuur.



Bij dit snijpunt is de breedte en de lengte 4 cm. Omdat de hoogte ook 4 cm is heb je een kubus.

12 a In cm^3.

b Een diameter van 80 mm is het zelfde als een straal van 4 cm.
$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 16 \approx 804$ cm^3.

c $V = 16\pi r^2$

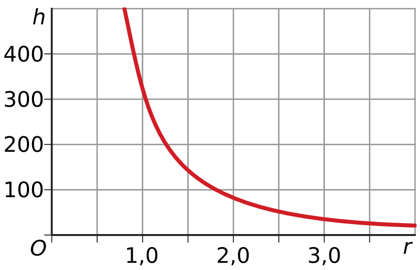
d Een (deel van een) parabool.

e 1 liter = 1000 cm^3

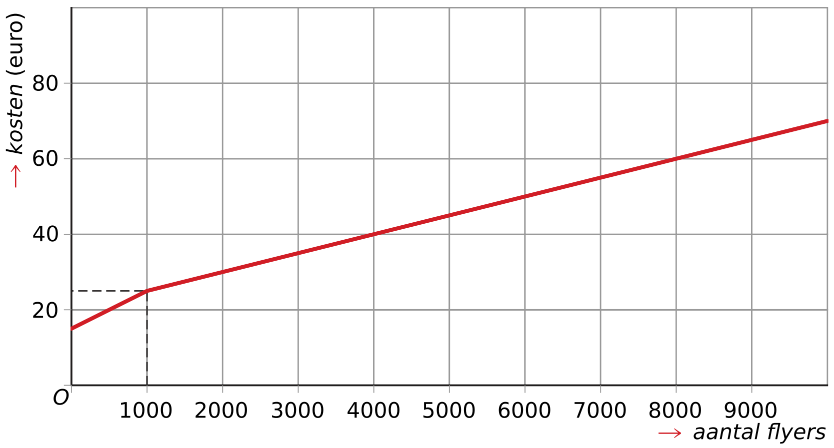
Vul de waarde 1000 in voor V in de formule $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Je vindt $1000 = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Dit kun je schrijven als $h = \frac{1000}{\pi \cdot r^2}$.

r	0	1	2	3
h	-	318,31	79,58	35,37



13 a De grafiek bestaat uit twee rechte lijnstukken, met een ‘knik’ wanneer de horizontale as op 1000 komt.



b Noem de kosten van de bestelling K en de hoeveelheid bestelde flyers f.

Je bestelt natuurlijk een positieve hoeveelheid flyers, vandaar dat $f > 0$.

Voor $f \leq 1000$ betaal je € 15,00 en daarbij € 0,01 per flyer. Dat komt neer op $K = 0{,}01f + 15$.

Voor $f > 1000$ krijg je dan $K = 0{,}005f + 20$.

c Noem de prijs per flyer F. Met totaalkosten K en hoeveelheid flyers f weet je dat $F = \frac{K}{f}$.

Bij b heb je twee voorwaardelijke uitdrukkingen gevonden voor K. Invullen levert:

$F = \frac{0{,}01f+15}{f}$ voor $0 < f \leq 1000$

$F = \frac{0{,}005f+20}{f}$ voor $f > 1000$

Als je deze breuken uitwerkt krijg je:

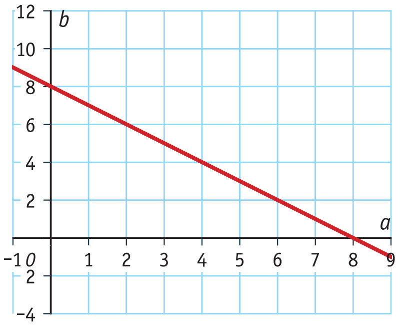
$F = 0{,}01 + \frac{15}{f}$ voor $0 < f \leq 1000$

$F = 0{,}005 + \frac{20}{f}$ voor $f > 1000$

14 a Herleid de uitdrukking bijvoorbeeld naar de vorm $b = 8 - a$.

Voorbeeld tabel:

a	0	8
b	8	0

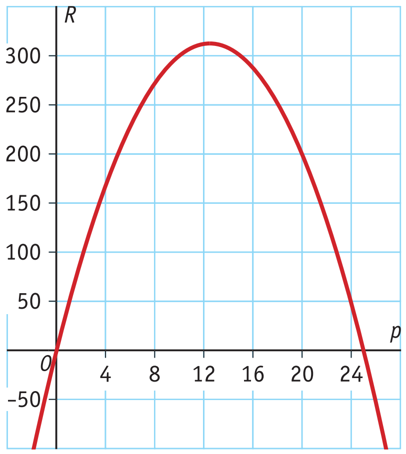


b Een rekenregel.

c Een vergelijking. Je kunt x oplossen: $x = \pm\sqrt{40}$.

d Zie de tabel.

p	-4	0	4	8	12	16	20	24	28
R	-232	0	168	272	312	288	200	48	-168



15 a $QI = \frac{78}{1{,}8^2} \approx 24{,}1$

b $20 = \frac{G}{l^2}$, dus $G = 20 \cdot l^2$

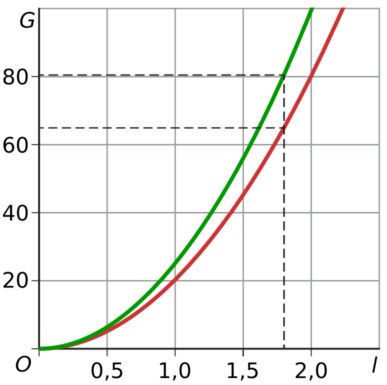
Bedenk dat de grafiek pas ongeveer vanaf lengte 1,5 meter betekenis heeft. De formule geldt niet voor kinderen.

Zie voor de grafiek de figuur bij d. Het is de rode grafiek.

c Zie voor de grafiek de figuur bij d. Het is de groene grafiek.

d Teken een verticale lijn bij $l = 1{,}8$.

Teken vanuit de snijpunten met de grafieken een horizontale lijn.



Je kunt nu aflezen dat het gezonde gewicht bij deze persoon tussen ongeveer 64 en 81 kilogram ligt.

1.2 Formules herschrijven

V1 a $2l + 2b = 360$ en $l \cdot b = 4500$.

b $l = 180 - b$ en $l = \frac{4500}{b}$.

c Bijvoorbeeld door twee grafieken van l afhankelijk van b te maken. Dat gaat nu gemakkelijk omdat je de formules al de juiste vorm hebt gegeven. Vervolgens kun je bij het snijpunt van de grafieken de oplossing voor l en b aflezen.

Maar je kunt dit ook algebraïsch oplossen...

1 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot x - 6 \cdot y &= 12 \\ 6x - 3y &= 12 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x \cdot y + x \cdot y &= 18 \\ 3xy &= 18 \\ xy &= 6 \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= 4x^2 + x + 3y - 7x + 2x^2 \\ -2y &= 6x^2 - 6x \\ y &= -3x^2 + 3x \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} 2xy + xy - 3x &= 18 \\ 3xy - 3x &= 18 \\ xy - x &= 6 \end{aligned}$$

2 a Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 10 \\ -4y &= 10 - 2x \\ y &= 0{,}5x - 2{,}5 \end{aligned}$$

b Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} -3x + 5 &= 10 - 2y \\ 2y &= 3x + 5 \\ y &= 1\tfrac{1}{2}x + 2\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

c Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 5x + 10y &= 20 \\ 10xy &= 20 - 5x \\ xy &= 2 - 0{,}5x \\ y &= \frac{2-0{,}5x}{x} \end{aligned}$$

d Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} x \cdot (y + 2) &= 6 \\ y + 2 &= \frac{6}{x} \\ y &= \frac{6}{x} - 2 \end{aligned}$$

3 a $a^2 = c^2 - b^2$ en $b^2 = c^2 - a^2$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned}(3x)^2 + (4x)^2 &= c^2\\ 9x^2 + 16x^2 &= c^2\\ 25x^2 &= c^2\\ c &= \pm\sqrt{25x^2}\\ c &= \pm 5x\\ c &= \text{-}5 \vee c = 5\end{aligned}$$

Omdat a,b en c lengtes van een driehoek zijn moet gelden dat $x > 0$. Daarom geldt alleen $c = 5x$.

4 a $3x^2 - 6xy$

b Oplossing:

$$\begin{aligned}2a - (9a+6) &=\\ 2a - 1\cdot(9a+6) &=\\ 2a - 1\cdot 9a - 1\cdot 6 &=\\ 2a - 9a - 6 &=\\ \text{-}7a - 6 &\end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned}0{,}5p\cdot 100p - p\cdot(20p+100) &=\\ 50p^2 - 20p^2 - 100p &=\\ 30p^2 - 100p &\end{aligned}$$

d $\text{-}5p^3\left(p^2 - 3p^3\right) = \text{-}5p^5 + 15p^6$

e $0{,}5x\cdot(10x-3) - 5x^2 = 5x^2 - 1{,}5x - 5x^2 = \text{-}1{,}5x$

f $\frac{3(x+2)+6}{3} = \frac{3x+6+6}{3} = \frac{3x+12}{3} = x + 4$

5 a $(x+2)\cdot(x+4) = x\cdot x + 4\cdot x + 2\cdot x + 2\cdot 4 = x^2 + 6x + 8$

b Oplossing:

$$\begin{aligned}2(b+4)(b-2) &=\\ 2\left(b^2 - 2b + 4b - 8\right) &=\\ 2\left(b^2 + 2b - 8\right) &=\\ 2b^2 + 4b - 16 &\end{aligned}$$

Of zo:

$$\begin{aligned}2(b+4)(b-2) &= 2\left(b^2 - 2b + 4b - 8\right)\\ &= 2\left(b^2 + 2b - 8\right)\\ &= 2b^2 + 4b - 16\end{aligned}$$

c $(l+3)(l-3) = l\cdot l - 3l + 3l - 9 = l^2 - 9$

d $25c^2 - 40c + 16$

6 a $2x(x+5)$

b $3x(x-3)$

c $x^2 + 5x + 4 = x\cdot x + 1\cdot x + 4\cdot x + 1\cdot 4 = (x+1)(x+4)$

d $b^2 - 9b + 8 = b\cdot b - 8\cdot b - 1\cdot b - 1\cdot\text{-}8 = (b-8)(b-1)$

e Oplossing:

$$\begin{aligned}k^2 - 17k + 16 &=\\ k^2 - k - 16k - 1\cdot\text{-}16 &=\\ (k-1)(k-16) &\end{aligned}$$

7 a Oplossing:

$$\begin{aligned} c^3+2c^2+c &= \\ c\left(c^2+2c+1\right) &= \\ c(c+1)(c+1) &= \\ c(c+1)^2 & \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} p^3-p^5 &= \\ p^3\left(1-p^2\right) &= \\ p^3\left(1+p-p-p^2\right) &= \\ p^3(1-p)(1+p) & \end{aligned}$$

c $2x^4+8x^{10}=2x^4\left(1+4x^6\right)$

d $3y^4-6y^5=3y^4(1-2y)$

8 a $\frac{25}{63}$

b $\frac{2}{7}-\frac{1}{3}=\frac{6}{21}-\frac{7}{21}=\frac{-1}{21}=-\frac{1}{21}$

c $\frac{3}{a}$

d $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2\cdot b}{a\cdot b}+\frac{a\cdot 1}{a\cdot b}=\frac{2b}{ab}+\frac{a}{ab}=\frac{a+2b}{ab}$

9 a $\frac{2y+5x}{xy}$

b $\frac{-3}{a}-\frac{8}{a^2}=\frac{-3a}{a^2}-\frac{8}{a^2}=\frac{-3a-8}{a^2}$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1} &= \\ \frac{1\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}+\frac{1\cdot x}{(x+1)\cdot x} &= \\ \frac{x+1}{x(x+1)}+\frac{x}{x(x+1)} &= \\ \frac{2x+1}{x(x+1)} & \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a}-\frac{3}{2a+1} &= \\ \frac{2(2a+1)}{a(2a+1)}-\frac{3a}{a(2a+1)} &= \\ \frac{4a+2}{2a^2+a}-\frac{3a}{2a^2+a} &= \\ \frac{a+2}{2a^2+a} & \end{aligned}$$

10 a $\frac{3}{35}$

b $\frac{2}{7}\Big/\frac{3}{10}=\frac{2}{7}\cdot\frac{10}{3}=\frac{20}{21}$

c $\frac{2}{ab}$

d $\frac{2}{a}\Big/\frac{1}{b}=\frac{2}{a}\cdot\frac{b}{1}=\frac{2b}{a}$

11 a $\frac{10}{6xy}=\frac{5}{3xy}$

b $\frac{2}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{4}{2x} - \frac{1}{2x} = \frac{3}{2x}$

c $\frac{3}{5x} / \frac{2x}{5} = \frac{3}{5x} \cdot \frac{5}{2x} = \frac{15}{10x^2} = \frac{3}{2x^2}$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} &= \\ \frac{1(x+1)}{x(x+1)} + \frac{1 \cdot x}{x(x+1)} &= \\ \frac{2x+1}{x^2+x} & \end{aligned}$$

12 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 4x + 10 &= 3x - 2y \\ x + 10 &= \text{-}2y \\ x + 2y + 10 &= 0 \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 2 \cdot y + 2 \cdot x \cdot x + 4 \cdot x &= 6 \cdot x^2 \\ y + x^2 + 2x &= 3x^2 \\ y - 2x^2 + 2x &= 0 \end{aligned}$$

13 a $\frac{3}{y} + \frac{5}{x} = \frac{3x}{xy} + \frac{5y}{xy} = \frac{3x+5y}{xy}$

b $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x} = \frac{3x}{x(x-2)} - \frac{2(x-2)}{x(x-2)} = \frac{x+4}{x(x-2)}$

c $\frac{2}{x} \Big/ \frac{3}{y} = \frac{2}{x} \cdot \frac{y}{3} = \frac{2y}{3x}$

d $2x - \frac{1}{2x} = \frac{2x}{1} - \frac{1}{2x} = \frac{4x^2}{2x} - \frac{1}{2x} = \frac{4x^2-1}{2x}$

e $\frac{10y}{7x} \cdot \frac{5}{6x} = \frac{50y}{42}x^2 = \frac{25y}{21}x^2$

14 a Oplossing:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 10 \\ \text{-}2y &= 10 - x \\ y &= 0{,}5x - 5 \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} (x+2) \cdot y &= 6 \\ y &= \frac{6}{x+2} \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} x &= 4 - y^2 \\ x - 4 &= y^2 \\ y &= \text{-}\sqrt{4-x} \vee y = \sqrt{4-x} \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} x \cdot y^2 &= 4 \\ y^2 &= \frac{4}{x} \\ y &= \pm\sqrt{\frac{4}{x}} = \pm\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{x}} \\ y &= \text{-}\frac{2}{\sqrt{x}} \vee y = \frac{2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

15 a $-3x^2 - 6xy$

b $-x^2 - 8x$

c $t^2 + 15t - 100$

d $3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

e $(a-3)(a+3) = a^2 + 3a - 3a - 9 = a^2 - 9$

f $x^2 - 4x + 4$

16 a $x(x-4)$

b $-2t(t-9)$

c $(x+6)(x-1)$

d $-(p+6)(p-2)$

e $q\left(q^2 + 4q + 8\right)$

17 a $T_F = 1{,}8 \cdot 100 + 32$, dus 212 °F.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} T_F &= 1{,}8T_C + 32 \\ T_F - 32 &= 1{,}8T_C \\ T_C &= \frac{T_F - 32}{1{,}8} = \frac{5(T_F - 32)}{5 \cdot 1{,}8} \\ T_C &= \frac{5}{9} \cdot (T_F - 32) \end{aligned}$$

18 a Van het rechthoekige stuk weiland is de lengte tweemaal zo groot als de breedte. Noem de breedte x meter; dan is de lengte natuurlijk $2x$ meter. Deze twee vermenigvuldigen geeft de oppervlakte $A = 2x^2$.

b Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} (x-6)(2x-10) &= 2x^2 - 2690 \\ 2x^2 - 22x + 60 &= 2x^2 - 2690 \\ -22x &= -2750 \\ x &= 125 \end{aligned}$$

De breedte is dus 125 meter.

19 a $26 = 0{,}00013 \cdot v^3 \cdot 24^2$ geeft $0{,}07488 \cdot v^3 = 26$ hieruit volgt $v^3 = 347{,}22...$ en dus $v \approx 7{,}0$ m/s. Dat is ongeveer 25,3 km/h.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 26 &= 0{,}000\,13 \cdot v^3 \cdot D^2 \\ v^3 \cdot D^2 &= \frac{26}{0{,}000\,13} = 200000 \\ D^2 &= \frac{200000}{v^3} \\ D &= \sqrt{\frac{200000}{v^3}} \end{aligned}$$

c 7,2 km/h = 2 m/s en 36 km/h = 10 m/s.

2 m/s: $D = \sqrt{\frac{200000}{2^3}} \approx 158{,}1$

10 m/s: $D = \sqrt{\frac{200000}{10^3}} \approx 14{,}1$

Je moet dan een diameter kiezen tussen 14,1 meter en 158,1 meter.

20 a $y = x - 3$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} x \cdot x + 4 \cdot y &= 8 \cdot x^2 - 4 \cdot x \\ 4y &= 7x^2 - 4x \\ y &= 1{,}75x^2 - x \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 2xy &= 0{,}4x + 200 \\ y &= \frac{0{,}4x}{2x} + \frac{200}{2x} \\ y &= 0{,}2 + \frac{100}{x} \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} x - 4y^2 &= 2 \\ \text{-}4y^2 &= \text{-}x + 2 \\ y^2 &= 0{,}25x - 0{,}5 \\ y &= \pm\sqrt{0{,}25x - 0{,}5} \end{aligned}$$

21 a $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{4}{2x} = \frac{x^2+4}{2x}$

b $\frac{3}{4x} \Big/ \frac{5}{2x} = \frac{3}{4x} \Big/ \frac{10}{4x} = \frac{3}{10}$

c $\frac{x+1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{2(x+1)}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{2x+3}{2x}$

d $\frac{6xy}{7}$

22 a $s = 1{,}5 \cdot (25 + 2) = 40{,}5$

b $s = 1{,}5(v + 2)$

$s = 1{,}5v + 3$

$1{,}5v = s - 3$

$3v = 2s - 6$

$v = \frac{2}{3}s - 2$

$v = \frac{2}{3} \cdot 42 - 2 = 26$, dus de voetlengte is dan 26 cm.

23 a $(x - 4)(x + 3) - 8$

$x^2 - x - 20$

$(x - 5)(x + 4)$

b $(x + 3)(x - 2) + 4x - 8$

$x^2 + x - 6 + 4x - 8$

$x^2 + 5x - 14$

$(x + 7)(x - 2)$

1.3 Formules en de grafische rekenmachine

V1 a Y1=0.5X^2-X-4

b $y = 27{,}5$

V2 a Voer in: Y1=2X-3 en Y2=-0.5X+2.

Venster: $-10 \leq x \leq 10$ en $-20 \leq y \leq 20$

b Je ziet in de grafiek dat de lijnen elkaar snijden in het punt (2,1).

Je kunt inzoomen op het snijpunt en eventueel het rooster aanzetten om het beter te zien.

Je kunt ook een tabel maken met de GR met stapgrootte 1. Je ziet dan dat voor $x = 2$ de formules dezelfde y-waarde hebben.

1 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 10 \\ 2y &= 10 - 4x \\ y &= -2x + 5 \end{aligned}$$

b Voer in: Y1=-2X+5

Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $-15 \leq y \leq 25$

2 a Herleiden van de eerste formule geeft:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ y &= 6 - 2x \end{aligned}$$

Herleiden van de tweede formule geeft:

$$\begin{aligned} x^2 + 2y &= 12 \\ 2y &= 12 - x^2 \\ y &= 6 - 0{,}5x^2 \end{aligned}$$

b Voer in: Y1=6-2X en Y2=-1/2X^2+6
Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $-25 \leq y \leq 25$

c Zoom in op de snijpunten en loop met de cursor naar de snijpunten toe. (Zet eventueel het rooster aan.) Je vindt de snijpunten (0,6) en (4, -2). Of maak een tabel met stapgrootte 1.

3 Voer in: Y1=8X/(X^2+1)

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 5$ en $0 \leq y \leq 5$

Je vindt dat bij $t = 1$ de concentratie maximaal is.

4 a Als er a kopieën worden gemaakt, dan kost dit $250 + 0{,}06a$ euro. De prijs per kopie krijg je door dit te delen door het aantal kopieën a.

$P = \frac{250+0{,}06a}{a}$.

b Het aantal kopieën zal maandelijks in de duizendtallen lopen, bijvoorbeeld tot 10000 stuks. De prijs per kopie zal bij weinig kopieën boven de 10 cent en altijd boven de 6 cent liggen. Neem bijvoorbeeld a van 0 t/m 10000 en P van 0 t/m 0,20 (in euro dus).

Voer in: Y1=(250+0.06X)/X
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 10000$ en $0 \leq y \leq 0{,}20$

c Voer ook in: Y2=0.10

Met de tabel vind je dat bij 6250 kopieën de kosten precies 10 cent zijn. Dus vanaf 6251 kopieën maakt de school winst.

5 $l \cdot b = 7500$ en $2l + 2b = 400$. Dit kun je ook schrijven als $l = \frac{7500}{b}$ en $l = 200 - b$.

Voer in: Y1=7500/X en Y2=200-X

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 200$ en $0 \leq y \leq 200$

Je vindt $x = 50$ en $y = 150$ of $x = 150$ en $y = 50$.

De afmetingen zijn dan 150 bij 50 meter.

6 $y = 9 - x$ en $y = x^3$.

Voer in: Y1= 9 - X en Y2=X^3

Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 15$ en $-5 \leq y \leq 15$

Je vindt: $x \approx 1{,}9$ (tabel met stapgrootte 0,01).

7 $R = p(200 - 10p)$

Voer in: Y1=X(200-10X)

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq x \leq 1000$

Je ziet aan de grafiek dat er een maximum is bij $x = 10$.

De handelaar moet dan een prijs van € 10,00 vragen.

8 a Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} R &= 2p + 3(3p - 2) \\ R &= 2p + 9p - 6 \\ R &= 11p - 6 \end{aligned}$$

b Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} K &= -2(-v - 3) - 5v + 22 \\ K &= 2v + 6 - 5v + 22 \\ K &= -3v + 28 \end{aligned}$$

c Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 2z &= 3x - 4y \\ 2(2x + 1) &= 3x - 4y \\ 4x + 2 &= 3x - 4y \\ x + 2 &= -4y \\ -\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2} &= y \end{aligned}$$

$a = -\frac{1}{4}$ en $b = -\frac{1}{2}$

d Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 2 &= \tfrac{12x+18}{3y} \\ 6y &= 12x + 18 \\ y &= 2x + 3 \end{aligned}$$

9 a Voer in: Y1=250X-4.9X^2

Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 60$ en $-1000 \leq y \leq 3500$

b Voer in: Y1=0.04+200/X

Venster bijvoorbeeld: $-50 \leq x \leq 50$ en $-50 \leq y \leq 50$

c Voer in: Y1=60/(30+0.5X^2)

Venster bijvoorbeeld: $-30 \leq x \leq 30$ en $-1 \leq y \leq 3$

d Voer in: Y1=√(36-X^2)

Venster bijvoorbeeld: $-8 \leq x \leq 8$ en $-1 \leq y \leq 8$

10 Voer in: Y1=-3X^2+12X+1.2

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 5$ en $0 \leq y \leq 15$

Je vindt met de tabel een grootste y-waarde van 13,2 voor $x = 2$.

De speer komt maximaal 13,2 meter hoog.

11 Oplossing:

$$\begin{aligned} 4xy + 2x^2 &= 100 \\ 4xy &= 100 - 2x^2 \\ y &= \frac{100-2x^2}{4x} \end{aligned}$$

12 a $K = 200 + 0{,}04a$

b $I = 0{,}10a$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 0{,}10a &\geq 200 + 0{,}04a \\ 0{,}06a &\geq 200 \\ a &\geq \frac{200}{0{,}06} \approx 3333{,}3 \end{aligned}$$

Dus bij 3334 kopieën of meer zijn de kosten dekkend.

13 a $l = 200 - 2b$

b $A = l \cdot b = b(200 - 2b) = 200b - 2b^2$

c Voer in: Y1=200X-2X^2

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 100$ en $0 \leq y \leq 5000$

d Maak een tabel. Dan zie je dat bij $b = 50$ het maximum ligt.

14 a Oppervlakte van een cirkel is πr^2. Dus $G = \pi r^2$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 1000 &= \tfrac{1}{3}\pi r^2 h \\ 3000 &= \pi r^2 h \\ \frac{3000}{\pi h} &= r^2 \\ r &= \sqrt{\frac{3000}{\pi h}} \end{aligned}$$

c $r = \sqrt{\frac{3000}{10 \cdot \pi}} \approx 9{,}77$ cm

15 a De lengte van het bedrukte deel plus witte deel is dan $l + 10 + 15$ cm $= l + 25$ cm. Voor de breedte vind je $b + 10 + 10$ cm $= b + 20$ cm .

De oppervlakte van het hele vel (bedrukte deel plus witte deel) is dan $(l + 25)(b + 20)$ cm^2.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} (l + 25)(b + 20) &= 10000 \\ l + 25 &= \frac{10000}{b+20} \\ l &= \frac{10000}{b+20} - 25 \end{aligned}$$

Voer in: Y1=10000/(X+20)-25

Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 300$ en $-10 \leq y \leq 300$

c $l = b$

Voer in: Y2=X

Bepaal de snijpunten van de grafieken Y1 en Y2.
Je vindt voor $x = y \approx 77{,}53$. De afmetingen zijn dan ongeveer $77{,}53 + 20$ bij $77{,}53 + 25$ cm.

De affiche is dan 97,5 bij 102,5 cm.

16 a $y = -0{,}5x + 2{,}5$

Voer in: Y1=-0,5X+5.

Venster: $-10 \leq x \leq 20$ en $-5 \leq y \leq 10$.

b $y = \frac{2}{2x+5}$

Voer in: Y1=2/(2X+5).

Venster: $-10 \leq x \leq 5$ en $-3 \leq y \leq 3$.

17 $y = 2x - \frac{10}{4x+2}$

Voer in: Y1=2X-10/(4x+2).

Venster: $-10 \leq x \leq 10$ en $-20 \leq y \leq 20$.

18 a $T > 2$

b Voer in: Y1=89/(X-2)

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 100$ en $0 \leq y \leq 20$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{89}{T-2} \\ 5(T-2) &= 89 \\ T-2 &= \frac{89}{5} = 17{,}8 \\ T &= 19{,}8 \end{aligned}$$

1.4 Vergelijkingen

V1 a Probeer voor jezelf een overzichtje te maken.

b Noem je de lengte en de breedte van de bodem x, dan is $2x^2 + 48x = 512$. Dit geeft $x = 8$ (het andere antwoord $x = -32$ vervalt).

1 a Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 3t - 400 &= 700 \\ 3t &= 1100 \\ t &= 366\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

b Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 3t - 400 &= 700 - 2t \\ 3t &= -2t + 1100 \\ 5t &= 1100 \\ t &= 220 \end{aligned}$$

c Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} -4x + 5 &= 4x - 11 \\ -8x &= -16 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

2 a Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 2300 - 0{,}15p &= 1600 + 0{,}42p \\ -0{,}15p &= 0{,}42p - 700 \\ -0{,}57p &= -700 \\ p &\approx 1228{,}07 \end{aligned}$$

b Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} \tfrac{x-3}{4} &= \tfrac{1}{5}(10 - 2x) \\ \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{4} &= 2 - \tfrac{2}{5}x \\ \tfrac{13}{20}x &= \tfrac{11}{4} \\ x &\approx 4{,}23 \end{aligned}$$

3 a Heen rekenen: $x \xrightarrow{+3} \dots \xrightarrow{\sqrt{\dots}} \dots \xrightarrow{\times 2} 4$

Terugrekenen: $x \xleftarrow{-3} \dots \xleftarrow{(\dots)^2} \dots \xleftarrow{/2} 4$

Je vindt: $x = \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3$ en dus $x = 1$.

Controle: $2 \cdot \sqrt{1 + 3} = 4$.

b Heen rekenen: $x \xrightarrow{+2} \dots \xrightarrow{\sqrt{\dots}} \dots \xrightarrow{\times 3} \dots \xrightarrow{+5} 2$

Terugrekenen: $x \xleftarrow{-2} \dots \xleftarrow{(\dots)^2} \dots \xleftarrow{/3} \dots \xrightarrow{-5} 2$

Je vindt: $x = \left(\frac{2-5}{3}\right)^2 - 2$ en dus $x = -1$.

Controle: $3\sqrt{-1 + 2} + 5 = 8 \neq 2$.

Er is geen oplossing.

c Als je gaat kwadrateren kunnen er ‘oplossingen’ ontstaan die niet voldoen.

4 a $t \xrightarrow{\times 3} \ldots \xrightarrow{-400} 700$

Je vindt met terugrekenen:

$t = \frac{700+400}{3}$ en dus $t = 366\frac{2}{3}$.

b $t \xrightarrow{\times 3} \ldots \xrightarrow{-20} \ldots \xrightarrow{(\ldots)^2} 1600$

Je vindt met terugrekenen:

$t = \frac{\pm\sqrt{1600}+20}{3}$ en dus $t = 20 \vee t = -6\frac{2}{3}$.

c $p \xrightarrow{(\ldots)^3} \ldots \xrightarrow{\times 3} 81$

Je vindt met terugrekenen:

$p = \sqrt[3]{\frac{81}{3}}$ en dus $p = 3$.

d $x \xrightarrow{\times 2} \ldots \xrightarrow{-4} \ldots \xrightarrow{\sqrt{\ldots}} \ldots \xrightarrow{\times 3} 9$

Je vindt met terugrekenen:

$x = \frac{\left(\frac{9}{3}\right)^2+4}{2}$ en dus $x = 6\frac{1}{2}$.

e $x \xrightarrow{-4} \ldots \xrightarrow{\sqrt{\ldots}} \ldots \xrightarrow{-2} -3$

Je vindt met terugrekenen:

$x = (-3+2)^2 + 4$ en dus $x = 5$.

Controle: $\sqrt{5-4} - 2 = -1 \neq -3$.

Er is geen oplossing.

5 a Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 0{,}5x^2 &= 4x \\ 0{,}5x^2 - 4x &= 0 \\ x(0{,}5x-4) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = 8 \end{aligned}$$

b Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} k^2 + 5k - 6 &= 0 \\ (k+6)(k-1) &= 0 \\ k &= -6 \vee k = 1 \end{aligned}$$

c Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 8p - p^2 &= 0 \\ p(8-p) &= 0 \\ p &= 0 \vee p = 8 \end{aligned}$$

d Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4x \\ x^2 - 4x &= 0 \\ x(x-4) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = 4 \end{aligned}$$

e Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} x^2 &= x+12 \\ x^2-x-12 &= 0 \\ (x-4)(x+3) &= 0 \\ x &= 4 \vee x = -3 \end{aligned}$$

f Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} x(x-2) &= 3x-6 \\ x^2-2x &= 3x-6 \\ x^2-5x+6 &= 0 \\ (x-2)(x-3) &= 0 \\ x &= 2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

6 a Voer in: Y1=X^3+2X en Y2=16

Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 5$ en $-25 \leq y \leq 25$

$x \approx 2{,}26$ (tabel met stapgrootte 0,001 of werken met ‘intersect’).

b Voer in: Y1=X+√X en Y2=10

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 15$ en $0 \leq y \leq 25$

$x \approx 7{,}30$ (tabel met stapgrootte 0,001 of werken met ‘intersect’).

c Voer in: Y1=X+10/X en Y=10

Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 15$ en $-25 \leq y \leq 25$

$l \approx 1{,}13 \vee l \approx 8{,}87$ (twee keer een tabel maken met stapgrootte 0,001 of werken met ‘intersect’).

d Voer in: Y1=300/(X+4) en Y2=20

Venster bijvoorbeeld: $-20 \leq x \leq 20$ en $-50 \leq y \leq 50$

$p = 11$ (tabel met stapgrootte 1 of werken met ‘intersect’).

7 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x-34 &= -x+2 \\ 2x &= -x+36 \\ 3x &= 36 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 5x-3(x-5) &= 8+3x \\ 5x-3x+15 &= 8+3x \\ 2x+15 &= 8+3x \\ -x+15 &= 8 \\ -x &= -7 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} (2x-5)^2 &= 64 \\ 2x-5 &= 8 \vee 2x-5 = -8 \\ 2x &= 13 \vee 2x = -3 \\ x &= 6{,}5 \vee x = -1{,}5 \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} &= 20 \\ x+4 &= 400 \\ x &= 396 \end{aligned}$$

e Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 8x \\ 2x^2-8x &= 0 \\ 2x(x-4) &= 0 \\ 2x &= 0 \vee x-4=0 \\ x &= 0 \vee x=4 \end{aligned}$$

f Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2-4x-32 &= 0 \\ (x-8)(x+4) &= 0 \\ x-8 &= 0 \vee x+4=0 \\ x &= 8 \vee x=\text{-}4 \end{aligned}$$

8 Voer in Y1=√X en Y2=8-X

Venster bijvoorbeeld: $\text{-}5 \leq x \leq 10$ en $\text{-}10 \leq y \leq 10$

Je vindt $x \approx 5{,}6$ (tabel met stapgrootte 0,01).

9 a $W = \text{-}q^2 + 190q$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 10q &= 1000 \\ q &= 100 \end{aligned}$$

$W = \text{-}100^2 + 190 \cdot 100 = 9000$
De winst is € 9000,00.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{-}q^2+190q &= 0 \\ q(\text{-}q+190) &= 0 \\ q &= 0 \vee q=190 \end{aligned}$$

Dus als het bedrijf 190 producten (of geen producten) produceert maakt het bedrijf geen winst en geen verlies.

d Voer in: Y1=-X^2+190X

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 200$ en $0 \leq y \leq 10000$

Aan de grafiek zie je dat er een maximum is bij $x = 95$. Je kunt ook een tabel maken.

Dus het bedrijf kan het beste 95 producten produceren.

10 Oplossing:

$$\begin{aligned} x(x+12)+6\cdot 12 &= 261 \\ x^2+12x-189 &= 0 \\ (x+21)(x-9) &= 0 \\ x &= \text{-}21 \vee x=9 \end{aligned}$$

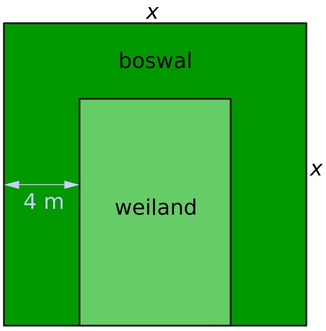
Alleen $x = 9$ voldoet.

11 a $h = 381 - 4{,}9t^2$

b $381 - 4{,}9t^2 = 0$ geeft $t^2 = \frac{381}{4{,}9}$ en dus $t \approx 8{,}8$.

c $v = 9{,}8 \cdot 8{,}8... \approx 86{,}4$, dus $v \approx 86{,}4$ m/s $\approx 311{,}1$ km/h.

12 Zie de figuur.



Noem de lengte van het land zonder boswal x. De oppervlakte van het land zonder boswal is x^2. De lengte van het land met boswal is $x-4$ en de breedte $x-8$. De oppervlakte van het land met boswal is $0{,}5x^2$.

Je krijgt de vergelijking $(x-4)(x-8)=0{,}5x^2$.

Voer in: Y1=(X-4)(X-8) en Y2= 0.5X^2
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 50$ en $0 \leq y \leq 800$

Je vindt $x \approx 20{,}94$ (een tabel met stapgrootte 0,001); $x \approx 3{,}06$ kan niet.

De oppervlakte van het land is ongeveer $20{,}94^2 \approx 438{,}5$ m^2.

De oppervlakte die de boer overhoudt is dan ongeveer 219 m^2.

13 a De heenreis duurde $\frac{10}{25}=0{,}4$ uur en dat is 24 minuten.

De terugreis duurde $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ uur en dat is 40 minuten.

De totale reistijd is $24+40=64$ minuten.

Dus de reistijd was die dag 4 minuten langer.

b De heenweg duurt $\frac{10}{20+w}$ uur en de terugweg duurt $\frac{10}{20-w}$ uur.

Dus de totale reistijd t is $\frac{10}{20+w}+\frac{10}{20-w}$.

$$\begin{aligned} \frac{10}{20+w}+\frac{10}{20-w} &= \\ \frac{10(20-w)}{(20+w)(20-w)}+\frac{10(20+w)}{(20+w)(20-w)} &= \\ \frac{400}{400-w^2} & \end{aligned}$$

c 1 uur en 20 minuten is $1\frac{1}{3}$ uur. Dus je moet de vergelijking $1\frac{1}{3}=\frac{400}{400-w^2}$ oplossen.

Dit geeft $w^2=100$ en dus $w=10$.

Je mag voor deze vergelijking ook de grafische rekenmachine gebruiken.

d Als $w>0$ dan is de noemer $400-w^2$ kleiner dan 400 en geldt $t>1$.

14 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 1{,}25t+5{,}50 &= 1{,}85t \\ 0{,}60t &= 5{,}50 \\ t &= 9\tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 0{,}15(p-2)^2 &= 1{,}35 \\ (p-2)^2 &= 9 \\ p-2 &= 3 \vee p-2=-3 \\ p &= 5 \vee p=-1 \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 12-\sqrt{4+x^2} &= 0 \\ -\sqrt{4+x^2} &= -12 \\ 4+x^2 &= 144 \\ x^2 &= 140 \\ x &= \pm\sqrt{140} \end{aligned}$$

Dus $x=-\sqrt{140} \vee x=\sqrt{140}$.

d Oplossing:

$$\begin{aligned} 3g^2-6g &= 360 \\ 3g^2-6g-360 &= 0 \\ g^2-2g-120 &= 0 \\ (g-12)(g+10) &= 0 \\ g-12 &= 0 \vee g+10=0 \\ g &= 12 \vee g=-10 \end{aligned}$$

15 $q \approx 21{,}9 \vee q \approx 228{,}1$

16 a Oppervlakte van (ronde) onder- en bovenkant plus een (uitgevouwen) rechthoekige zijkant.

b 800π

c $r \approx 61$ mm, dus $d \approx 122$ mm.

d $r \approx 8{,}921$ cm $= 89$ mm, dus $d = 178$ mm.

1.5 Ongelijkheden

V1 a Daarbij hoort de ongelijkheid: $0{,}052v^3 > 20$.

b Eerst los je de bijbehorende vergelijking $0{,}052v^3 = 20$ op.
Vaak kan dat algebraïsch, vaak ook doe je dat met je grafische rekenmachine. Je maakt dan grafieken van Y1=0.052X^3 en Y2=20. Denk dan vooraf goed na over de instellingen van de assen. Bijvoorbeeld windsnelheden liggen in Nederland vaak tussen 0 en 20 m/s.
Kijk dan naar je grafieken voor de oplossing van de ongelijkheid.

1 a Voer in: Y1=0.052X^3 en Y2=20

Je bepaalt het snijpunt van beide grafieken: $(7{,}27; 20)$.

Je leest de oplossing van de ongelijkheid uit de figuur af: $v > 7{,}27$.

b Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 0{,}052v^3 &= 20 \\ v^3 &= \frac{20}{0{,}052} \\ v &= \sqrt[3]{\frac{20}{0{,}052}} \\ v &\approx 7{,}27 \end{aligned}$$

c Omdat het een eenvoudige vergelijking is, gaat het algebraïsch oplossen makkelijker dan beide delen van de vergelijking invoeren in de GR en het snijpunt laten bepalen.

2 a Je wilt alle snijpunten goed in beeld krijgen. Als je ruime beeldinstellingen neemt, kun je zien dat er drie snijpunten zijn. Vervolgens stel je het beeld zo in, dat de snijpunten goed zichtbaar zijn, bijvoorbeeld: $-30 \leq x \leq 30$ en $-30 \leq y \leq 30$.

b Bepaal met de rekenmachine de snijpunten: $(-22{,}36; -22{,}36)$, $(0{,}0)$ en $(22{,}36; 22{,}36)$. Je kunt zien aan de grafiek dat y_1 tussen het eerste en tweede snijpunt en na het derde snijpunt groter is dan y_2. Dus: $-22{,}36 < x < 0 \vee x > 22{,}36$.

3 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 60 - x^2 &= 4x \\ -x^2 - 4x + 60 &= 0 \\ x^2 + 4x - 60 &= 0 \\ (x-6)(x+10) &= 0 \\ x &= -10 \vee x = 6 \end{aligned}$$

b Voer in: Y1=60-X^2 en Y2=4X
Lees af dat Y2=4X groter dan Y1= 60 -X^2 is voor het eerste snijpunt en na het tweede snijpunt. Dus: $x < -10 \vee x > 6$.

4 De formule voor de totale kosten bestaat uit de kosten voor de mengmachine plus de kosten voor a liter verf: $TK = 3000 + 4{,}00 \cdot a$. De totale opbrengst is $TO = 8{,}25a$.

Los op $TO = TK$

$$\begin{aligned} 8{,}25 \cdot a &= 3000 + 4{,}00 \cdot a \\ 4{,}25 \cdot a &= 3000 \\ a &= 705{,}89 \end{aligned}$$

De verfhandelaar maakt winst vanaf 706 liter.

5 Je vindt dat bij $q \approx 2{,}600$ en $q \approx 9{,}439$ de netto winst 100 is. Dus het aantal producten dat die maand wordt verkocht loopt vanaf 260 tot en met 943.

6 a Voer in: Y1=-0.001X^3+2X^2+X

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 2500$ en $-1000000 \leq y \leq 1500000$

b Nee, want dan maakt men een verlies van € 965800,00.

c Voer in: Y1=-0.001X^3+2X^2+X en Y2=1000000

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 3000$ en $0 \leq y \leq 1500000$

Je vindt dat bij $x \approx 999{,}002$ en $x \approx 1619{,}203$ de winst één miljoen is.

Aan de grafiek zie je dat het bedrijf meer dan 999, maar minder dan 1620 producten moet maken.

7 a Oplossing:

$$\begin{aligned} x^3 &= x \\ x^3 - x &= 0 \\ x\left(x^2-1\right) &= 0 \\ x &= 0 \vee x^2 = 1 \\ x &= 0 \vee x = \pm 1 \end{aligned}$$

Voer in: Y1= X^3 en Y2= X
Lees af dat Y1 groter is dan Y2 tussen het eerste en tweede snijpunt in en na het derde snijpunt, dus: $-1 < x < 0 \vee x > 1$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} x^3 &= 80x - 2x^2 \\ x^3 + 2x^2 - 80x &= 0 \\ x\left(x^2 + 2x - 80\right) &= 0 \\ x(x-8)(x+10) &= 0 \\ x &= -10 \vee x = 0 \vee x = 8 \end{aligned}$$

Voer in: Y1= X^3 en Y2= 80X - 2X^2
Lees af dat Y1 groter is dan Y2 is voor het eerste snijpunt en tussen het tweede en derde snijpunt, dus: $x \leq -10 \vee 0 \leq x \leq 8$.

8 Voer in: Y1=X/(X^2+1) en Y2=0.25

Venster: $-10 \leq x \leq 10$ en $-1 \leq y \leq 1$

Met intersect vind je $t \approx 0{,}27$ en $t \approx 3{,}73$.

$t \leq 0{,}3 \vee t \geq 3{,}8$.

9 a Oplossing:

$$\begin{aligned} y &\leq 0 \\ \left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right) &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0 \vee x^2 - 9 = 0 \\ x^2 &= 4 \vee x^2 = 9 \\ x &= 2 \vee x = -2 \vee x = 3 \vee x = -3 \end{aligned}$$

y invullen in de GR. Aflezen dat y kleiner is dan 0 tussen het eerste en tweede nulpunt en tussen het derde en vierde snijpunt, dus: $-3 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 3$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} \left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right) &= 36 \\ x^4 - 13x^2 + 36 &= 36 \\ x^4 - 13x^2 &= 0 \\ x^2\left(x^2-13\right) &= 0 \\ x &= 0 \vee x^2 = 13 \\ x &= 0 \vee x = -\sqrt{13} \vee x = \sqrt{13} \end{aligned}$$

Y1=X en Y2=36 invullen in de GR. Aflezen dat Y1 kleiner dan 36 is tussen het eerste en tweede snijpunt en tussen het tweede en het derde snijpunt, dus: $-\sqrt{13} < x < 0 \vee 0 < x < \sqrt{13}$.

10 a De tweede kaars is na 7,5 uur opgebrand, dan is de eerste kaars nog ongeveer 2,7 cm lang.

b Voer in: Y1=20-2√(10X) en Y2=30-4X

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 15$ en $0 \leq y \leq 35$

Je vindt dat de grafieken elkaar snijden bij $t \approx 6{,}55$.

Kaars I is ongeveer 6,6 uur langer dan kaars II.

11 a $q = 10$ geeft $W = -0{,}5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 12 \cdot 10 - 10 = 110$

De winst is € 110000,00.

b Voer in: Y1=-0.5X^3+5X^2+12X-10 en Y2=180

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 15$ en $-100 \leq y \leq 200$

Als je de grafieken plot, zie je dat de grafieken elkaar niet snijden. Dus deze winst is niet haalbaar.

c Voer in: Y2=100

Je vindt dat de grafieken elkaar bij $x \approx 4{,}512$ en $x \approx 10{,}247$ elkaar snijden.

Als $4{,}51 < q < 10{,}25$, dan is de winst meer dan honderdduizend euro.

Dus het bedrijf moet meer dan 451 maar minder dan 1025 producten maken.

d Bepaal het maximum met behulp van de GR, je vindt $x \approx 7{,}705$.

Bij een productie van 770 is de winst € 150583,50 en bij een productie van 771 is de winst € 150583,49.

Dus bij een productie van 770 is er een maximale winst.

12 a Bestuurder B gaat 120 km/h:
$a_{\text{B}} = 120t$

Bestuurder A gaat 110 km/h en begint 24 km van Deventer:
$a_{\text{A}} = 110t + 24$

b Auto B haalt auto A in wanneer de afstand van de auto's tot Deventer even groot is, dus:

$$\begin{aligned} 110t + 24 &= 120t \\ 24 &= 10t \\ t &= 2{,}4 \end{aligned}$$

Na 2,4 uur $\cdot 60$ minuten = 144 minuten.

c Eerst berekenen wanneer hun onderlinge afstand 4 km is: $a_{\text{A}} - a_{\text{B}} = \pm 4 = 110t + 24 - 120t$.

$24 - 10t = 4$ geeft $-15t = -20$ en dus $t = 2{,}8$.

$24 - 10t = -4$ geeft $-15t = -28$ en dus $t = 2$.

Dus tussen 2 en 2,8 uur is de onderlinge afstand minder dan 4 km, want bij 2,4 uur passeren de auto's elkaar.

Er zit dus $2{,}8 - 2{,}0 = 0{,}8$ uur of 48 minuten lang minder dan 4 km afstand tussen de auto's.

$$\begin{aligned} a_A - a_B &= 4 \\ 110t + 24 - 120t &= 4 \\ -10t &= -20 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_A - a_B &= 4 \\ 120t - (110t + 24) &= 2 \\ 120t - 110t + 24 &= 2 \\ 10t &= 28 \\ t &= 2{,}8 \end{aligned}$$

13 a 15 km per liter benzine (€ 1,80) dus: $\frac{1{,}80}{15} = 12$ eurocent per kilometer voor benzine. 1,5 eurocent per kilometer voor onderhoud, dus: $12 + 1{,}5 = 13{,}5$ eurocent per kilometer voor benzine en onderhoud.

b Kosten per jaar = kosten per dag $\cdot 365+$ kosten per kilometer $\cdot$ aantal kilometer $= 10{,}00 \cdot 365 + 0{,}135 \cdot 16000 = 5810{,}00$ euro.

c Kosten per jaar < 6000.
Kosten per dag $\cdot 365+$ kosten per kilometer (€) $\cdot$ aantal kilometer < 6000.

Aantal kilometers = a.
$10{,}00 \cdot 365 + 0{,}135 \cdot a = 3650 + 0{,}135a < 6000$

$$\begin{aligned} 3650 + 0{,}135a &< 6000 \\ 0{,}135a &< 2350 \\ a &< \tfrac{2350}{0{,}135} \\ a &\leq 17407 \end{aligned}$$

Hoe meer kilometers, hoe hoger de kosten per jaar, dus: $a \leq 17407$ km.

d Als $a < 15000$, betaal je € 0,12 per kilometer aan benzinekosten. Voor onderhoud betaal je $0{,}015 \cdot 15000 = 225$ euro. Voor de auto zelf betaal je 365 dagen lang € 10,00. Dus: $K = 365 \cdot 10{,}00 + 225 + 0{,}12a = 3875 + 0{,}12a$ als $a < 15000$ km.

Als $a \geq 15000$, betaal je $0{,}12 + 0{,}015 = 0{,}135$ euro per kilometer aan benzinekosten en onderhoudskosten. Voor de auto zelf betaal je 365 dagen lang € 10,00. Dus: $K = 365 \cdot 10{,}00 + 0{,}135a = 3650 + 0{,}135a$ als $a \geq 15000$ km.

14 a De totale waarde van de aandelen is $150 \cdot 19{,}18 = 2877$ euro bij aankoop en $150 \cdot 21{,}44 = 3216$ euro bij verkoop.
De kosten voor aankoop en verkoop waren dan $0{,}0045 \cdot 2877 + 4 + 0{,}0045 \cdot 3216 + 4 \approx 35{,}42$ euro.

De totale winst is dus $3216 - 2877 - 35{,}42 \approx 303{,}58$ euro.

b Los op: $K = 46$:

$$\begin{aligned} 0{,}004 \cdot w + 7 &= 46 \\ 0{,}004 \cdot w &= 39 \\ w &= \tfrac{39}{0{,}004} = 9750 \end{aligned}$$

De waarde moet tenminste € 9750,00 zijn.

c Je moet twee ongelijkheden oplossen. De eerste is:

$$\begin{aligned} 0{,}004 \cdot w + 7 &= 12 \\ 0{,}004 \cdot w &= 5 \\ w &= 1250 \end{aligned}$$

Ook moet je de volgende ongelijkheid oplossen:
$0{,}0045 \cdot w + 4 = 0{,}004 \cdot w + 7$:

$$\begin{aligned} 0{,}0045 \cdot w + 4 &= 0{,}004 \cdot w + 7 \\ 0{,}0045 \cdot w &= 0{,}004 \cdot w + 3 \\ 0{,}0005 \cdot w &= 3 \\ w &= 6000 \end{aligned}$$

De aandelenwaarden moeten tussen € 1250,00 en € 6000,00 liggen.

15 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 6 - x &= x^2 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x-2)(x+3) &= 0 \\ x &= -3 \vee x = 2 \end{aligned}$$

$y_1 = 6 - x$ en $y_2 = x^2$ invullen in de GR. Aflezen dat y_1 kleiner is dan y_2 voor het eerste snijpunt en na het tweede snijpunt, dus: $x < -3 \vee x > 2$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} (2x-6)^2 &= 16 \\ 2x - 6 &= \pm 4 \\ x &= 1 \vee x = 5 \end{aligned}$$

$y_1 = (2x - 5)^2$ en $y_2 = 16$ invoeren in de GR. Aflezen dat y_1 groter is dan 16 tussen het eerste en tweede snijpunt in, dus: $1 < x < 5$.

16 a Voor de afstand tot Utrecht voor fietser A geldt: $F_A = 18t$. Voor de afstand tot Utrecht voor fietser B geldt: $F_B = 144 - 24t$

De ongelijkheid is $F_B > F_A$, dus: $144 - 24t > 18t$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 144 - 24t &= 18t \\ 144 &= 42t \\ t &= 3{,}429 \end{aligned}$$

Na 3,429 uur is fietser B dichter bij Utrecht dan fietser A, dus bij $t < 3{,}429$ is fietser A dichter bij Utrecht dan fietser B.

c Fietser A is 3,429 uur lang dichter bij Utrecht. 0,429 uur ·60 minuten = 25,7 minuten.

Fietser A is dus 3 uur en 26 minuten lang dichter bij Utrecht.

17 a y_1 en y_2 invullen in de GR. Snijpunten laten bepalen: $(-0{,}82; 3{,}32)$ en $(1{,}82; 0{,}68)$.

b y_1 en y_2 invullen in de GR. Aflezen dat y_1 groter is dan y_2 tussen het eerste en het tweede snijpunt in, dus: $-0{,}82 \leq x \leq 1{,}82$.

1.6 Totaalbeeld

1 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 610+0{,}2q &= 55-0{,}3q \\ 0{,}5q &= -555 \\ q &= -1110 \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 2-8(x-2) &= 4+3(4-x) \\ 2-8x+16 &= 4+12-3x \\ -5x &= -2 \\ 5x &= 2 \\ x &= \tfrac{2}{5} = 0{,}4 \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} -0{,}15(x+25)^2+15 &= 0 \\ -0{,}15(x+25)^2 &= -15 \\ (x+25)^2 &= 100 \\ x+25 &= 10 \vee x+25=-10 \\ x &= -15 \vee x=-35 \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2x-4} &= 10 \\ \sqrt{2x-4} &= 5 \\ 2x-4 &= 25 \\ 2x &= 29 \\ x &= 14{,}5 \end{aligned}$$

e Oplossing:

$$\begin{aligned} k^2-k &= 90 \\ k^2-k-90 &= 0 \\ (k-10)(k+9) &= 0 \\ k &= 10 \vee k=-9 \end{aligned}$$

f Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x^2+10x &= 12 \\ x^2+5x &= 6 \\ x^2+5x-6 &= 0 \\ (x+6)(x-1) &= 0 \\ x+6 &= 0 \vee x-1=0 \\ x &= -6 \vee x=1 \end{aligned}$$

2 Voer in: Y1=X^2+√(2X) en Y2=20

Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 30$

Je vindt $x \approx 4{,}138$ (Tabel met stapgrootte 0,0001).

3 a Oplossing:

$$\begin{aligned} \tfrac{3x-9}{2} &= \tfrac{3y}{4} \\ 2\cdot(3x-9) &= 3y \\ 6x-18 &= 3y \\ y &= 2x-6 \end{aligned}$$

b $K = 3a - 2(-a + 8) + 22 = 3a + 2a - 16 + 22 = 5a + 6$

4 a Voer in: Y1=100+40X−5X^2

Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 10$ en $-5 \leq y \leq 200$

b De vuurpijl werd afgeschoten op 100 meter hoogte. Na 8 seconden heeft de vuurpijl weer dezelfde hoogte.

c Na 4 seconden was de vuurpijl op het hoogste punt. Toen was hij 180 meter boven de begane grond.

d Als $t = 10$, dan is $h = 0$. Dus na 10 seconden kwam de vuurpijl op de grond terecht.

e Nee, je weet niet onder welke hoek de pijl is afgeschoten. In de formule wordt h uitgezet tegen de tijd, dus je weet alleen het verloop van de hoogte.

5 a De oppervlakte van de bodem is x^2. De oppervlakte van de bovenkant is hetzelfde.

De oppervlakte van de opstaande zijvlakken zijn alle vier xh.

Dus $4xh + 2x^2 = 800$.

b Voer in: Y1=48X+2X^2 en Y2=800

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 15$ en $0 \leq y \leq 1000$

Je vindt $x \approx 11{,}32$ (tabel met stapgrootte 0,001).

Dus $x \approx 113$ mm.

c h als een functie van x schrijven:

$$\begin{aligned} 4xh + 2x^2 &= 800 \\ 4xh &= 800 - 2x^2 \\ h &= \tfrac{800-2x^2}{4x} \\ h &= \tfrac{400-x^2}{2x} \end{aligned}$$

$x = 8$ invullen:

$$\begin{aligned} h &= \tfrac{400-x^2}{2x} \\ h &= \tfrac{400-8^2}{2\cdot 8} \\ h &= \tfrac{400-64}{16} \\ h &= 21 \end{aligned}$$

6 a De waarde van de breuk wordt kleiner als v groter wordt.

b $14 = 6{,}9 + \frac{298{,}5}{v}$ geeft $7{,}1 = \frac{298{,}5}{v}$ en dus $v \approx 42$.

De auto reed ongeveer 42 km/h.

c 30 km/h invullen geeft:

$u_{\text{warm}} = 4{,}4 + \frac{196{,}0}{30} \approx 10{,}93$

$u_{\text{koud}} = 6{,}9 + \frac{298{,}5}{30} \approx 16{,}85$

$\frac{16{,}85-10{,}93}{10{,}93} \cdot 100\% \approx 54{,}2\%$

d $v = \frac{L}{\frac{t}{3600}}$

$$u_{\text{tot}} = L \cdot \left(4{,}4 + \frac{196{,}0}{v}\right) = L \cdot \left(4{,}4 + \frac{196}{\frac{L}{\frac{t}{3600}}}\right)$$

Apart: $\frac{196}{\frac{L}{\frac{t}{3600}}}$ hier teller en noemer met $\frac{t}{3600}$ vermenigvuldigen, geeft

$$\frac{196 \cdot \frac{t}{3600}}{L} = \frac{\frac{196}{3600} \cdot t}{L} \approx \frac{0{,}054t}{L}$$

Terug naar de hele formule: $L \cdot \left(4{,}4 + \frac{0{,}054t}{L}\right) \approx 4{,}4L + 0{,}054t$

7 a Omdat de breedte en de lengte van het bakje $l = b = 20 - 2x$ zijn, is $I = x(20 - 2x)^2$.

b $0 < x < 10$ en $0 < b < 20$

c Voer in: Y1=X(20-2x)^2

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 800$

d $x \approx 3{,}33$

8 a 0,75 m^2 per persoon

b $M = 0{,}20$ m^2 per persoon.

c $M = 7$ m^2 per persoon

d 175 mensen per minuut

e 61 m per minuut

9 a $0{,}19s^2 - 8{,}71s + 169{,}72 = 120$

Voer in: Y1=0.19X^2-8.71X+169.72 en Y2=120

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 50$ en $0 \leq y \leq 200$

Er zijn twee snijpunten.

Je vindt $x \approx 7$ en $x \approx 39$.

Dus bij snelheden van ongeveer 7 km per uur en 39 km per uur.

b Bekijk weer de grafiek op de grafische rekenmachine. Je vindt dat er bij ongeveer 23 km per uur een minimum is.

c Bereken p:

$$\begin{aligned} 185 &= p \cdot (0-8)(0-34) + 150 \\ 35 &= p \cdot -8 \cdot -34 \\ p &= \frac{35}{272} \end{aligned}$$

Formule herschrijven:

$$\begin{aligned} V &= \frac{35}{272}(s-8)(s-34) + 150 \\ V &= \frac{35}{272}\left(s^2 - 42s + 27\right) + 150 \\ V &\approx 0{,}1s^2 - 5{,}4s + 185 \end{aligned}$$

2

Functies en grafieken

2.1 Het begrip functie

V1 a Bij $a = 0$ vind je $R = 209$, daar 'begint' de grafiek.

Omdat a de leeftijd in jaren is, kies je $0 \leq a \leq 100$ bijvoorbeeld.

b $R(20) = 209 - 0{,}75 \cdot 20 = 194$ slagen/minuut.

1 a A

b $R(20) = 209 - 0{,}75 \cdot 20 = 209 - 15 = 194$

c Voer in: Y1=209-0.75X
Venster bijvoorbeeld: $13 \leq x \leq 24$ en $180 \leq y \leq 210$

$R(13) = 199{,}25$
$R(24) = 191$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} 209 - 0{,}75a &= 0 \\ a = \frac{209}{0{,}75} &= 278\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Dit is geen realistische situatie omdat niemand zo oud wordt.

2 a $f(x) = 3x^2 + 6x = 3 \cdot -4^2 + 6 \cdot -4 = 3 \cdot 16 + 6 \cdot -4 = 48 + -24 = 24$

b Voer in: Y1=3X^2+6X
Venster bijvoorbeeld: $-8 \leq x \leq 8$ en $-5 \leq y \leq 50$

c Bijvoorbeeld $x = -1{,}5, x = -1$ of $x = -0{,}5$.

d Oplossing:

$$\begin{aligned} 3b^2 + 6b &= 24 \\ 3b^2 + 6b - 24 &= 0 \\ b^2 + 2b - 8 &= 0 \\ (b-2)(b+4) &= 0 \\ b - 2 &= 0 \vee b + 4 = 0 \\ b &= 2 \vee b = -4 \end{aligned}$$

3 a $f(5) = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 = 70$

b $f(-6) = 2 \cdot (-6)^2 + 4 \cdot -6 = 48$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x &= 0 \\ 2x(x+2) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = -2 \end{aligned}$$

4 a $g(2) = -10$

b $g(11) = 5$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} -10 + 5\sqrt{x-2} &= 0 \\ 5\sqrt{x-2} &= 10 \\ \sqrt{x-2} &= 2 \\ x - 2 &= 4 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

5 y is een functie van x als er bij elke waarde van x hoogstens één waarde van y hoort. Dit is het geval bij grafiek A, C en D.

6 a Bij elke (toegestane) waarde voor het gewicht G vind je precies één tarief T. Dus T is een functie van G. Let op dat als je een brief van 20 gram hebt, je € 1,28 moet betalen en niet € 0,64.

b Omgekeerd is G geen functie van T. Als je het bedrag weet, kun je niet precies zeggen hoe zwaar het poststuk is, want daar zijn dan meerdere mogelijkheden voor.

7 a Bijvoorbeeld $x = 0$ geeft $y^2 = 100$. Deze vergelijking heeft twee oplossingen: $y = -10$ en $y = 10$. Eén waarde van x geeft meer dan één waarde voor y en dus is de gegeven formule geen functie.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 100 \\ y^2 &= 100 - x^2 \\ y &= \sqrt{100 - x^2} \vee y = -\sqrt{100 - x^2} \end{aligned}$$

c Het zijn twee halve cirkels die samen een cirkel vormen.

d Er is minstens één waarde van x waarvoor er twee waarden van y zijn.

8 Voer de functies in en gebruik de optie intersect om de coördinaten van de snijpunten te vinden.

Je vindt: $x = -10 \vee x \approx 1{,}13 \vee x \approx 8{,}87$ met respectievelijk $y = 0, y = 11{,}13$ en $y = 18{,}87$.

9 Voer in: Y1=X^3-5X+2 en Y2=-X+1
Venster: standaard

Bepaal de x-coördinaten van de snijpunten.
Je vindt $x \approx -2{,}11 \vee x \approx 0{,}25 \vee x \approx 1{,}86$.

10 a $f(3) = 8 - 4 \cdot 3 + 3^3 = 8 - 12 + 27 = 23$

b $f(x) = 8$ geeft:

$$\begin{aligned} 8 - 4x + x^3 &= 8 \\ x^3 - 4x &= 0 \\ x\left(x^2 - 4\right) &= 0 \\ x &= 0 \vee x^2 - 4 = 0 \\ x &= 0 \vee x^2 = 4 \\ x &= 0 \vee x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

c De toppen en het nulpunt van de grafiek liggen allemaal tussen $x = -3$ en $x = 2$ en tussen $y = 0$ en $y = 12$.
Venster bijvoorbeeld: $-3 \leq x \leq 3$ en $-10 \leq y \leq 15$

d Ja, want y is een functie van x, dus hoort bij elke waarde van x precies één waarde van y.

e Nee, bij b heb je bijvoorbeeld berekend dat bij $f(x) = 8$ meerdere x-waarden horen.

11 a Hoe groter het aantal m^3 (a) dat je verbruikt, hoe groter de jaarlijkse kosten K. Bij elke waarde van a hoort dus precies één waarde van K.

b $K(100) = 35{,}00 + 0{,}77 \cdot 100 = 112$

c Hierbij vervang je de 100 van b door a: $K(a) = 35{,}00 + 0{,}77a$.

d Oplossing:

$$\begin{aligned} 35 + 0{,}77a &= 500 \\ 0{,}77a &= 500 - 35 \\ 0{,}77a &= 465 \\ a &= \frac{465}{0{,}77} \end{aligned}$$

Dus maximaal 603 m^3.

12 a Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= 100 - x^2 = 0 \\ 100 &= x^2 \\ x &= -10 \vee x = 10 \end{aligned}$$

Nulpunten: -10 en 10. Top ligt precies tussen de nulpunten in, dus bij $x = 0$. Invullen: $f(0) = 100 - 0^2 = 100$. Top: $(0,100)$.

b De nulpunten -10 en 10 moeten goed zichtbaar zijn, evenals de toppen bij $(0,100)$ en $(0,0)$.
Venster bijvoorbeeld: $-15 \leq x \leq 15$ en $-10 \leq y \leq 110$

c Gebruik de rekenmachine om de coördinaten van de snijpunten uit te rekenen: $(-7{,}07{,}50)$ en $(7{,}07{,}50)$.

13 a $f(x) = 100x - x^2 = 0$ geeft $x(-x+100) = 0$ en $x = 0 \vee x = 100$. Nulpunten: 0 en 100.

De grafiek is een parabool, dus top en nulpunten moeten goed in beeld. Voorbeeld vensterinstellingen: $-10 \leq x \leq 110$ en $-500 \leq y \leq 2500$.

b $g(x) = 10x(x-50) = 0$ geeft $x = 0 \vee x = 50$. Nulpunten: 0 en 50.

De grafiek is parabool, dus top en nulpunten moeten goed in beeld. Voorbeeld vensterinstellingen: $-5 \leq x \leq 55$ en $-7000 \leq y \leq 2000$.

c $h(x) = (x-10)^2 - 1600 = 0$ geeft $(x-10)^2 = 1600$ en $x - 10 = \pm 40$ zodat $x = -30 \vee x = 50$. Nulpunten: -30 en 50.

De grafiek is een parabool, dus top en nulpunten moeten goed in beeld. Voorbeeld vensterinstellingen: $-35 \leq x \leq 55$ en $-2000 \leq y \leq 500$.

d $k(x) = 200 + 1{,}6x = 0$ geeft $1{,}6x = -200$, dus $x = \frac{-200}{1{,}6} = -125$. Nulpunt: -125.

Grafiek is lineair, snijpunten met de assen moeten goed in beeld. Voorbeeld vensterinstellingen: $-150 \leq x \leq 10$ en $-50 \leq y \leq 250$.

14 a Van y_1:

$$\begin{aligned}\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right) &= 0\\ x^2-4 &= 0 \vee x^2-9=0\\ x^2 &= 4 \vee x^2 = 9\\ x &= 2 \vee x = -2 \vee x = 3 \vee x = -3\end{aligned}$$

De nulpunten van y_1: $x = -3$, $x = 3$, $x = -2$ en $x = 2$.

Van y_2:

$$\begin{aligned}-x^2 - x + 6 &= 0\\ x^2 + x - 6 &= 0\\ (x+3)(x-2) &= 0\\ x &= -3 \vee x = 2\end{aligned}$$

De nulpunten van y_2 : $x = -3$ en $x = 2$.

b Voer in: Y1=(X^2-4)(X^2-9) en Y2=-X^2-X+6
Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $-50 \leq y \leq 50$

c $(-3{,}0)$, $(-1{,}79; 4{,}58)$, $(2{,}0)$ en $(2{,}79; -4{,}58)$.

15 a Vul in $t = 0$:

$h(0) = (4 - 0{,}36 \cdot 0)^2 = 16$ cm

b Voer in: Y1=(4-0.36X)^2
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 20$
De daling neemt af naarmate de tijd toeneemt.

c Los op $h = 0$:

$$\begin{aligned}(4-0{,}36t)^2 &= 0\\ 4 - 0{,}36t &= 0\\ 4 &= 0{,}36t\\ t &= \frac{4}{0{,}36} \approx 11{,}11 \text{ seconden}\end{aligned}$$

d Los op $h = 8$:

$$\begin{aligned}(4-0{,}36t)^2 &= 8\\ 4-0{,}36t &= \sqrt{8}\\ -0{,}36t &= \sqrt{8}-4\\ t &= \frac{\sqrt{8}-4}{-0{,}36} \approx 3{,}25\end{aligned}$$

Na 3,25 seconden.

16 a $h = diameter = 2 \cdot r$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r = 2\pi r^3$

b $V(20) = 2 \cdot \pi \cdot 20^3 \approx 50000$

Voer in: Y1=2πx^3

Venster bijvoorbeeld: $-4 \le x \le 20$ en $-10000 \le y \le 55000$

c Voer in: Y2=1000

Met intersect vind je $r \approx 5{,}42$.

Je kunt dit ook algebraïsch oplossen:

$V(r) = 2\pi r^3 = 1000$ geeft $r^3 = \frac{1000}{2\pi}$ en $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}} \approx 5{,}42$ cm.

17 a $f(5) = 2 \cdot 5 \cdot (5-10)^2 = 10 \cdot (-5)^2 = 250$

$f(-5) = 2 \cdot -5 \cdot (-5-10)^2 = -10 \cdot (-15)^2 = -2250$

b $f(x) = 2x(x-10)^2 = 0$ geeft $2x = 0 \vee x = 10$ en dus $x = 0 \vee x = 10$.

De assen en toppen en nulpunten van de grafiek moeten duidelijk in beeld komen. Kies bijvoorbeeld: $-10 \le x \le 15$ en $-100 \le y \le 400$.

c $f(x) = g(x)$ oplossen:

$$\begin{aligned}2x(x-10)^2 &= 8x\\ 2x\left(x^2-20x+100\right) &= 8x\\ 2x^3-40x^2+200x &= 8x\\ x^3-20x^2+100x &= 4x\\ x^3-20x^2+96x &= 0\\ x\left(x^2-20x+96\right) &= 0\\ x(x-12)(x-8) &= 0\end{aligned}$$

$x = 0 \vee x = 12 \vee x = 8$

De snijpunten vind je zo:

$f(0) = 2 \cdot 0 \cdot (0-10)^2 = 0$, dus (0,0).

$f(8) = 2 \cdot 8 \cdot (8-10)^2 = 64$, dus (8,64).

$f(12) = 2 \cdot 12 \cdot (12-10)^2 = 96$, dus (12,96).

Controleer door invullen van de gevonden x waarden in $g(x) = 8x$.

18 A B

y is functie van x als bij elke waarde van x één waarde van y hoort.

Dit is het geval bij figuur A en B.

2.2 Domein en bereik

V1 a $v \geq 0$. Maar bij een te sterke windkracht wordt de windmolen stilgezet. Dit gebeurt als de windsnelheid groter is dan 30 m/s.

b $P(30) = 14040$

Vermogens tot 14040 kW per uur.

V2 a De wortel uit een negatief getal levert geen reëel getal op. Dus $x \geq 0$.

b GR: Voer in Y1=√(X).

Standaardvenster.

c De functiewaarden zijn groter dan of gelijk aan 0.

1 a Voer in: Y1=0.052x^3.

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 30$ en $0 \leq y \leq 15000$.

b Bij de mogelijke windsnelheden horen vermogens vanaf $P(0) = 0$ tot en met $P(30) = 14040$ kW per uur. Tussentijds loopt de grafiek langzaam op, naarmate v toeneemt, neemt ook P toe. Er zijn geen tussentijdse uitschieters.

Dus $\text{B}_f = [0{,}14040]$.

c $\text{D}_f = [4{,}25]$ en $\text{B}_f = [3{,}328; 812{,}5]$.

d Er zijn geen beperkingen voor de invoerwaarden en ook niet voor de functiewaarden.

D_f en B_f kunnen nu alle waarden aannemen.

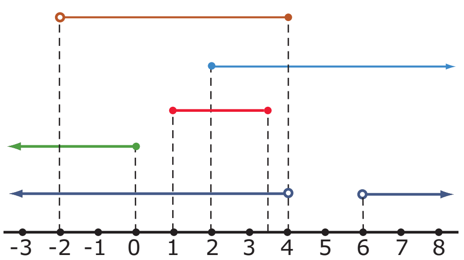
2 a 0 en groter, want de wortel uit een negatief getal heeft geen reële waarde.

b De pijl betekent dat de toegestane getallen oneindig groot kunnen worden. Het rechterhaakje krijgt een andere vorm omdat er aan de rechterkant geen eindwaarde is te vinden die nog bij het interval hoort. Je kunt steeds maar doorgaan.

c Bijvoorbeeld $f(0) = 3$, $f(1) = 4$, $f(4) = 5$ enzovoort. Alleen functiewaarden vanaf 3 en hoger komen voor.

d Alle waarden van 3 en hoger komen voor, dus: $\text{B}_f = [3, \rightarrow\rangle$.

3 Zie de figuur.



Van boven naar beneden:

- $\langle -2{,}4]$ is alles boven -2 tot en met 4.
- $[2, \rightarrow\rangle$ is 2 en alles daarboven.
- $[1; 3{,}5]$ is 1 tot en met 3,5.
- $\langle \leftarrow, 0]$ is alles tot en met 0.
- $\langle \leftarrow, 4\rangle \cup \langle 6, \rightarrow\rangle$ is alles tot 4 en alles boven 6.

4 Van boven naar beneden:

- De lijn is alles boven -2, dus: $\langle -2, \rightarrow\rangle$.
- De lijn is 2 en alles daaronder, dus: $\langle \leftarrow, 2]$.
- De lijn is -2 en alles daarboven, tot 4, dus: $[-2{,}4\rangle$.
- De lijn is alles tot en met 5,5, dus: $\langle \leftarrow; 5{,}5]$.
- De lijn is alles tot 0 en alles na 3,5, dus: $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 3{,}5; \rightarrow\rangle$.

5 Grafiek I: Het domein bestaat uit alle reële getallen, dus:
D = ⟨← , →⟩, of D = ℝ.
Het bereik is alles vanaf - 1 tot en met 7, dus:
B = [- 1,7].

Grafiek II: Het domein is alles vanaf - 1, dus:
D = [- 1, →⟩.
Het bereik is alles van 4 of minder, dus:
B = ⟨← ,4].

Grafiek III: Het domein is alles vanaf - 1 tot en met 5, dus:
D = [- 1,5].
Het bereik is alles vanaf 3 tot en met 6, dus:
B = [3,6].

6 a De wortel uit een negatief getal is niet reëel, dus $x \geq 0$ en $D_f = [0, \rightarrow\rangle$.

b $f(x) = 4 - \sqrt{x} = 0$ geeft $4 = \sqrt{x}$, dus $x = 16$.

Snijpunt x-as: (16,0).

$f(0) = 4 - \sqrt{0} = 4$

Snijpunt y-as: (0,4).

c Aan de grafiek is te zien dat de waarde van $f(x)$ vanaf 4 steeds kleiner wordt. Dus geldt: $B_f = \langle\leftarrow ,4]$.

7 $2x + 4$ staan onder het wortelteken dus $2x + 4 \geq 0$, herleiden geeft $x \geq -2$, dus: $D_f = [-2, \rightarrow\rangle$.

De grafiek begint bij $x = -2$ en is daarna stijgend. $g(-2) = 0$, dus: $B_g = [0, \rightarrow\rangle$.

8 a Voer in Y1=-3.5X^2+14.7X+0.8 met venster $0 \leq x \leq 5$ en $0 \leq y \leq 20$.

Gebruik voor de nulpunten van het CALC-menu 2: zero. (Of een identieke functies als je een andere grafische rekenmachine hebt dan de TI-84, zie **Practicum**.)

b Gebruik voor het maximum van het CALC-menu 4: maximum. (Of een identieke functies als je een andere grafische rekenmachine hebt dan de TI-84, zie **Practicum**.)

Je vindt een maximum van $h = 16{,}235$ bij $t \approx 2{,}1$.

c Los met je grafische rekenmachine op: $h(t) = -3{,}5t^2 + 14{,}7t + 0{,}8 = 10$.

Je vindt $t \approx 0{,}765 \vee t \approx 3{,}435$. De bal is dus ongeveer $3{,}435 - 0{,}765 \approx 2{,}67$ seconden meer dan 10 m boven de grond.

d Er zijn nu geen beperkingen voor x.
Dus $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle\leftarrow; 16{,}235]$.

9 a Als de kogel 14 meter ver komt, geldt: $h(14) = 0$.

$h(14) = -0{,}0625(14 - 6)^2 + 4 = 0$

b De kogel is van 0 tot en met 14 m onderweg. Daarom geldt: $D_h = [0,14]$.

c Bij de top is $h(x)$ maximaal. $h(x)$ is maximaal als $-0{,}0625(x - 6)^2$ zo klein mogelijk is. Dat is het geval als $x - 6 = 0$, dus als $x = 6$.

Invullen geeft: $h(6) = -0{,}0625(6 - 6)^2 + 4 = 4$. De top zit dus bij (6,4), dus 4 meter boven de grond.

d h is minimaal 0 en maximaal 4.
$B_h = [0,4]$

10 a x kan alle waarden aannemen, dus: $D_f = \mathbb{R}$.

y heeft als kleinste functiewaarde de y-waarde van de top. y neemt daarom deze waarde aan en alle waarden daarboven. Top met GR bepalen: (0,5; - 6,25). Dus: $B_f = [-6{,}25; \rightarrow\rangle$.

b x kan alle waarden aannemen, dus: $D_g = \mathbb{R}$.

y kan de waarde van het minimum en alles daarboven krijgen. Minimum met GR bepalen: het laagste punt is (2,59; - 1,62). Dus: $B_g = [-1{,}62; \rightarrow\rangle$.

c Onder het wortelteken kunnen alleen niet negatieve waarden staan, daarom moet gelden $2+6x \geq 0$ geeft $x \geq -\frac{1}{3}$ dus $D_h = \left[-\frac{1}{3}, \rightarrow\right\rangle$.

y kan als uiterste de waarde voor $x = -\frac{1}{3}$ aannemen en daarna stijgt de functie. Invullen geeft $h\left(-\frac{1}{3}\right) = -3$. Dus: $B_h = [-3; \rightarrow\rangle$.

d Onder het wortelteken kunnen alleen niet negatieve waarden staan, daarom moet gelden $9-2x \geq 0$ geeft $x \leq 4{,}5$ dus $D_i = \langle\leftarrow; 4{,}5]$.

y kan als uiterste de waarde voor $x = 4{,}5$ aannemen en daarna daalt de functie. Invullen geeft $i(4{,}5) = 2$. Dus: $B_i = \langle\leftarrow, 2]$.

11 $f(x)$ invullen in GR, maximum en minimum bepalen met GR met domein [0,40].

Maximum: 60 voor $x = 10$. Minimum: -1740 voor $x = 40$ ($f(0) = -140 > -1740$).

Dus: $B_f = [-1740, 60]$.

12 a Alle toppen en nulpunten liggen dicht rondom de oorsprong.
Goede instellingen zijn daarom bijvoorbeeld: $-2 \leq x \leq 2$ en $-2 \leq y \leq 1$.

Nu de toppen f bepalen met de GR: $(-0{,}5; 0{,}125)$, $(0,0)$ en $(0{,}5; 0{,}125)$.

b f gaat na de top (0,125) alleen nog maar naar beneden: $B_f = \langle\leftarrow; 0{,}125]$.

13 a Grafiek van $h(t)$ maken in GR. De top die tussen 0 en 6 seconden ligt, laten bepalen: (4,80). Dus maximale hoogte: 80 meter.

b De vuurpijl begint bij 0 seconden en spat uit elkaar na 6 seconden, dus: $D_h = [0,6]$. De vuurpijl begint bij 0 meter en komt tot maximaal 80 meter dus: $B_h = [0,80]$.

c $h(6) = 40 \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 = 240 - 180 = 60$ meter

d Voer in: Y1=40X-5X^2 en Y2=40
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 6$ en $0 \leq y \leq 100$

Er is één snijpunt (let op het domein).
De optie intersect geeft $x \approx 1{,}17$.

De vuurpijl is ongeveer $6 - 1{,}17 = 4{,}83$ seconden boven 40 meter.

$y = 40$ invullen als grafiek in GR. Snijpunt y en $h(t)$ bepalen met GR: $(1{,}17; 40)$.

Vanaf 1,17 seconde is de vuurpijl op een hoogte van 40 meter of meer gedurende $6 - 1{,}17 = 4{,}83$ seconden.

e h is tegen de tijd t uitgezet, en niet tegen de horizontale afstand.

14 a Oplossing:

$$\begin{aligned} R &= p \cdot q \\ q &= 400 - 0{,}5p \\ R &= p(400 - 0{,}5p) \end{aligned}$$

b Negatieve prijs kan niet, dus $p \geq 0$. Negatieve hoeveelheid verkopen kan ook niet, dus $q \geq 0$.

$$\begin{aligned} q &= 400 - 0{,}5p = 0 \\ 0{,}5p &= 400 \\ p &= 800 \end{aligned}$$

p kan niet groter dan 800 zijn. Dus: $0 \leq p \leq 800$.

c Opbrengst kan niet negatief zijn, dus $R \geq 0$.

$R = p(400 - 0{,}5p)$ invullen in GR.
Top bepalen met GR: $(400; 80000)$.

Dus: $0 \leq R \leq 8000$.

15 a De nulpunten zijn -5 en 5. Omdat voor x-waarden hiertussen alleen maar positieve waarden voor $h(x)$ voorkomen, zijn -5 en 5 daarom de grenzen van het domein.
$D_h = [-5, 5]$

b De top vind je door de x-waarde in te vullen die in het midden van het interval [-5,5] zit, dus $x = 0$.

$f(0) = \sqrt{25 - 0^2} = \sqrt{25} = 5$
$B_h = [0,5]$

16 a Waarden tussen -20 en 20.

b De kortste tuidraad is 5 meter bij $x = 0$. De langste is 63,32 meter bij $x = 18$.

c Los op: $h(x) = 45{,}5$. Dat kan met de GR, maar sneller algebraïsch: $\frac{9}{50}x^2 + 5 = 45{,}5$ geeft $\frac{9}{50}x^2 = 40{,}5$ en dus $x^2 = 225$ en dus $x = -15 \vee x = 15$.

De twee tuidraden hangen 30 meter uit elkaar.

17 a $I = lengte \cdot breedte \cdot hoogte = l \cdot b \cdot h$

$l = 20 - 2 \cdot x$

$b = 12 - 2 \cdot x$

$h = x$

$I(x) = x(20 - 2x)(12 - 2x)$

b Er gaat twee keer x cm van de breedte van 12 cm af. Voor x moet daarom gelden $x < 6$ om papier voor de zijkant over te houden. Dus: $D_I = \langle 0,6 \rangle$.

$I(x)$ invullen in GR. Maximum bepalen met GR: via de top (2,43; 262,68) vind je het maximum 262,68.

$I(x) > 0$ dus: $B_I = \langle 0; 262{,}68]$.

c $I(x)$ invullen in GR. Maximum bepalen op domein $\langle 0,6 \rangle$: het maximum is 262,68 voor $x = 2{,}43$.

Dus 2,43 cm bij 2,43 cm.

18 a Alle waarden van x zijn mogelijk, dus: $D_f = \mathbb{R}$.

$f(x)$ invullen in GR. Top laten bepalen: (2,4).

De y waarde van de top is de grootste functiewaarde, dus: $B_f = \langle \leftarrow ,4]$.

b $D_g = \mathbb{R}$ en $B_g = \mathbb{R}$.

c Wortel uit negatief getal kan niet, dus $(4 - x) \geq 0$, dus $x \leq 4$, dus $D_h = \langle \leftarrow ,4]$.

Hoe kleiner x, hoe groter $h(x)$.

$h(4) = 2 + \sqrt{4 - 4} = 2$, dus: $B_h = [2, \rightarrow \rangle$.

19 a $y(x)$ invullen in GR. Maxima en minima laten bepalen en hiermee de coördinaten van de toppen aflezen. (-2, -16), (0,0) en (2, -16).

b $D_f = \mathbb{R}$.

In de grafiek is te zien dat $f(x)$ vanaf de toppen links en rechts bij -16 steeds grotere functiewaarden aanneemt, dus: $B_f = [-16, \rightarrow \rangle$.

20 a $D_h = [0,285]$

b $B_h = [0,61]$

c Voer $y_1 = -0{,}003x(x - 285)$, en $y_2 = 30.5$

Je vindt ongeveer $x \approx 41{,}8$ en $x \approx 243{,}2$. Ze liggen dus ongeveer $243{,}2 - 41{,}8 \approx 201$ m van elkaar.

2.3 Lineaire en kwadratische functies

V1 a 90 km/h = $\frac{90}{60}$ km/min = 1,5 km/min.

Dus: $a_1 = 1{,}5t$.

120 km/h = $\frac{120}{60}$ km/min = 2 km/min.

Na $t = 6$ min moet auto 2 0 km hebben afgelegd, dus: $a_2(6) = 2 \cdot 6 - b = 12 - b = 0$. Dus: $b = 12$.

Dus: $a_2 = 2t - 12$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 1{,}5t &= 2t - 12 \\ 0 &= 0{,}5t - 12 \\ 0{,}5t &= 12 \\ t &= \tfrac{12}{0{,}5} = 24 \end{aligned}$$

Of: het snijpunt van a_1 en a_2 bepalen met GR: $t = 24$.

1 a A en B liggen 50 km uit elkaar, dus a_1 begint bij 50 en wordt elke minuut $\frac{90}{60} = 1{,}5$ minder.

Dus: $a_1 = 50 - 1{,}5t$.

a_2 begint bij punt B, dus bij 0. a_2 wordt per minuut $\frac{120}{60} = 2$ groter.

Dus: $a_2 = 2t$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 50 - 1{,}5t &= 2t \\ 50 &= 3{,}5t \\ t = \tfrac{50}{3{,}5} &\approx 14{,}3 \end{aligned}$$

Na 14,3 minuten.

c Afstand = $a_1 - a_2 = (50 - 1{,}5t) - (2t) = \pm 20$

$$\begin{aligned} 50 - 3{,}5t &= 20 \vee 50 - 3{,}5t = -20 \\ 30 - 3{,}5t &= 0 \vee 70 - 3{,}5t = 0 \\ 3{,}5t &= 30 \vee 3{,}5t = 70 \\ t &= \tfrac{30}{3{,}5} \approx 8{,}6 \vee t = \tfrac{70}{3{,}5} = 20 \end{aligned}$$

2 a De helling van de grafiek bepaalt hoeveel verder de auto komt per seconde, de snelheid dus. De helling van de grafiek wordt steeds groter, dus de snelheid neemt toe.

b Los op: $s(t) = 100$

$$\begin{aligned} 1{,}2t^2 &= 100 \\ t^2 &= 83\tfrac{1}{3} \\ t &= \sqrt{83\tfrac{1}{3}} \approx 9{,}13 \text{ seconden} \end{aligned}$$

De andere oplossing met de negatieve wortel is niet relevant.

c Gemiddelde snelheid is de afgelegde afstand gedeeld door de tijd: $\frac{1{,}2t^2}{t} = 60$

$$\begin{aligned} \frac{1{,}2t^2}{t} &= 60 \\ 1{,}2t &= 60 \\ t &= \tfrac{60}{1{,}2} = 50 \end{aligned}$$

3 a p en q moeten beide positief zijn, dus minimaal 0.

$$\begin{aligned} 0 &= 4000 - 200p \\ 200p &= 4000 \\ p &= \tfrac{4000}{200} = 20 \end{aligned}$$

Dus: $0 \leq p \leq 20$.

$q = 4000 - 200 \cdot 0 = 4000$

Dus: $0 \leq q \leq 4000$.

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 4000$

b De grafiek is een rechte lijn, de richtingscoëfficiënt is -200.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 4000 - 200p &= 1500 \\ 2500 - 200p &= 0 \\ p &= \tfrac{2500}{200} \\ p &= 12{,}50 \text{ euro} \end{aligned}$$

4 a Je betaalt 3,20 en $10 \cdot 1{,}20$ euro voor de afgelegde kilometers, dus: $3{,}20 + 10 \cdot 1{,}20 = 15{,}20$ euro.

b Je betaalt 3,20 en $a \cdot 1{,}20$ euro voor de afgelegde kilometers, dus: $R(a) = 3{,}20 + 1{,}20a$.

c Voer in: Y1=3.2+1.20X
Venster: standaard

d $(0; 3{,}20)$ is snijpunt y-as en 1,20 is richtingscoëfficiënt.

5 a a is het hellingsgetal. Als je x met 1 verhoogt, wordt y met a verhoogd. Dus is in dit geval $a = 0{,}5$.

b $(0,b)$ is het snijpunt met de y-as, dus $b = 3$.

c Als x met 4 omhoog gaat (van 1 naar 5), gaat y met 1 omhoog (van 2 naar 3).

De helling $a = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Invullen a in functievoorschrift:
$y = 0{,}25x + b$

Coördinaten van A invullen en b berekenen:

$$\begin{aligned} 2 &= 0{,}25 \cdot 1 + b \\ 2 &= 0{,}25 + b \\ b &= 2 - 0{,}25 \\ b &= 1{,}75 \end{aligned}$$

d Bereken a:

$a = \frac{3-2}{5-1} = 0{,}25$

Invullen in functievoorschrift:
$y = 0{,}25x + b$

Coördinaten van A invullen en b berekenen:

$$\begin{aligned} 2 &= 0{,}25 \cdot 1 + b \\ 2 &= 0{,}25 + b \\ b &= 2 - 0{,}25 \\ b &= 1{,}75 \end{aligned}$$

Het antwoord is: a bepalen met A en B en vervolgens A of B invullen in $y = ax + b$.

6 $y = ax + b$

Bereken a:

$a = \frac{82-10}{6-(-2)} = 9$

Invullen in het functievoorschrift:
$y = 9x + b$

Coördinaten P invullen en b berekenen: $10 = 9 \cdot -2 + b$ geeft $b = 28$.

Het functievoorschrift is: $y = 9x + 28$.

7 Groene lijn l:
Lees de coördinaten van twee punten af: $(0, -1)$ en $(1,2)$.
Bereken a:

$a = \frac{2-(-1)}{1-0} = 3$.

Coördinaten A invullen en b berekenen. $y = 3x + b$ geeft $-1 = 3 \cdot 0 + b$, dus: $b = -1$.
Functievoorschrift: $y = 3x - 1$.

Rode lijn m:
Lees de coördinaten van twee punten af: $(0,5)$ en $(3,4)$.

$a = \frac{4-5}{3-0} = -\frac{1}{3}$.

$y = -\frac{1}{3}x + b$ geeft $5 = -\frac{1}{3} \cdot 0 + b$, dus $b = 5$.

Functievoorschrift: $y = -\frac{1}{3}x + 5$.

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= -\tfrac{1}{3}x + 5 \\ 9x - 3 &= -x + 15 \\ 10x &= 18 \\ x &= \tfrac{18}{10} = 1{,}8 \end{aligned}$$

Dus snijpunt: $(1{,}8; 4{,}4)$.

8 a $TO = p \cdot q = p \cdot (4000 - 200p)$

$TO = 4000 \cdot p - 200p \cdot p = 4000p - 200p^2$

b De snijpunten met de p-as zijn gemakkelijker te vinden in de vorm met haakjes.

c p en q moeten allebei positief zijn, want een negatieve prijs en een negatief aantal exemplaren kan niet.

$$\begin{aligned} 0 &= 4000 - 200p \\ 200p &= 4000 \\ p &= \tfrac{4000}{200} = 20 \end{aligned}$$

p loopt dus van 0 tot en met 20. Dit wil je duidelijk in beeld brengen, dus: $-2 \leq p \leq 22$.

Grafiek van TO in beeld brengen, maximum bepalen met GR met $-2 \leq p \leq 22$: $TO = 20000$.

Dit wil je duidelijk in beeld brengen, dus: $-2500 \leq TO \leq 25000$.

Venster bijvoorbeeld: $-2 \leq x \leq 22$ en $-2500 \leq y \leq 25000$

d Grafiek in beeld brengen met GR op $-2 \leq x \leq 22$: top $(10; 20000)$. Maximale opbrengst bij $p = 10$ is: € 20000,00.

9 a Venster bijvoorbeeld: $-1 \leq x \leq 1$ en $-4 \leq y \leq 1$

b Los op: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} 3x(2-5x) &= 0 \\ 3x &= 0 \vee 2 - 5x = 0 \\ x &= 0 \vee 2 = 5x \\ x &= 0 \vee x = \tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

c Gebruik de GR om de top te bepalen.
Je vindt: $(0{,}2; 0{,}6)$

Of gebruik het feit dat de x van de top precies tussen de nulpunten ligt. Je vindt $x_T = \frac{1}{5}$.

$y_T = 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot (2-1) = \frac{3}{5}$.

10 a Bereken a:

$a = \frac{140-80}{8-2} = 10$

Invullen a in functievoorschrift:
$y = 10x + b$

Coördinaten van Q invullen en b berekenen:

$$\begin{aligned} 80 &= 10 \cdot 2 + b \\ 80 &= 20 + b \\ b &= 60 \end{aligned}$$

Dus: $f(x) = ax + b = 10x + 60$.

b Bereken a:

$a = \frac{-25-15}{10--5} = -2\frac{2}{3}$

Invullen a in functievoorschrift:

$y = -2\frac{2}{3}x + b$

Coördinaten R invullen en b berekenen:

$$\begin{aligned} 15 &= -2\frac{2}{3} \cdot -5 + b \\ 15 &= 13\frac{1}{3} + b \\ b &= 1\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dus: $g(x) = ax + b = -2\frac{2}{3} \cdot x + 1\frac{2}{3}$.

11 Auto A:
Neem twee coördinaten:
(0,3000) en (12000,3750).

Bereken a:

$a = \frac{3750-3000}{12000-0} = 0{,}0625$

Invullen a in functievoorschrift:
$K_A = 0{,}0625x + b$

Een paar coördinaten invullen en b berekenen:

$$\begin{aligned} 3000 &= 0{,}10 \cdot 0 + b \\ b &= 3000 \end{aligned}$$

Dus: $K_A = 0{,}0625x + 3000$.

Auto B:
Neem twee coördinaten:
(0,2250) en (12000,3750).

Bereken a:

$a = \frac{3750-2250}{12000-0} = 0{,}125$

Invullen a in functievoorschrift:
$K_B = 0{,}125x + b$

Een paar coördinaten invullen en b berekenen:

$$\begin{aligned} 2250 &= 0{,}125 \cdot 0 + b \\ b &= 2250 \end{aligned}$$

Dus: $K_B = 0{,}125x + 2250$.

Los op: $K_A = K_B$ oplossen:

$$\begin{aligned} 0{,}125x + 2250 &= 0{,}0625x + 3000 \\ 0{,}125x &= 0{,}0625x + 750 \\ 0{,}0625x &= 750 \\ x &= \frac{750}{0{,}0625} = 12000 \text{ km} \end{aligned}$$

12 a l_I door: (1,75) en (3,5; 62,5).

Bereken a:

$a = \frac{62{,}5-75}{3{,}5-1} = -5$

Invullen a in functievoorschrift:
$l_I = -5t + b$

Een paar coördinaten invullen en b berekenen:

$$\begin{aligned} 75 &= -5 \cdot 1 + b \\ 75 &= -5 + b \\ b &= 80 \end{aligned}$$

$l_I = -5t + 80$

l_{II} door: (1,71) en (3,5; 61).

Bereken a:

$a = \frac{61-71}{3{,}5-1} = -4$

Invullen a in functievoorschrift:
$l_{II} = -4t + b$

Een paar coördinaten invullen en b berekenen:

$$\begin{aligned} 71 &= -4 \cdot 1 + b \\ 71 &= -4 + b \\ b &= 75 \end{aligned}$$

$l_{II} = -4t + 75$

b $l_I = l_{II}$

$$\begin{aligned} -5t + 80 &= -4t + 75 \\ -t + 80 &= 75 \\ t &= 5 \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} (-5t + 80) - (-4t + 75) &= \pm 1 \\ -t + 5 &= \pm 1 \\ t &= 4 \vee t = 6 \end{aligned}$$

13 a Het is een lineaire functie met $a = 6$ en $b = 300$.
De formule is $K = 300 + 6q$.

b De q moet positief zijn, dus minimaal 0. Hoe groter de q, hoe groter de K.

$K(0) = 300 + 6 \cdot 0 = 300$

Dus: $q \geq 0$ en $K \geq 300$.

c Per liter krijgt hij € 8,25. Zijn opbrengst is dus: $R = 8{,}25q$.

d $K = R$ oplossen:

$$\begin{aligned} 300 + 6q &= 8{,}25q \\ 300 &= 2{,}25q \\ q &= \tfrac{300}{2{,}25} \\ q &= 133\tfrac{1}{3} \text{ L} \end{aligned}$$

Bij een verkoop van $133\frac{1}{3}$ liter verf zijn de kosten K even hoog als de opbrengst R. Als hij meer dan $133\frac{1}{3}$ liter verf verkoopt, maakt hij dus winst.

14 $TO = p(300 - 10p)$

De grafiek van TO is een parabool en dus lijnsymmetrisch. De nulpunten zijn $p = 0$ en $p = 30$. Hiertussen vind je $p = 15$ om de top van deze bergparabool te bepalen.

Bij een prijs van € 15,00 is er een maximale opbrengst van € 2250,00.

15 Haal coördinaten uit gegevens: $(0{,}0; 1{,}0)$ en $(6{,}0; 2{,}4)$.

Bereken a:

$a = \frac{2{,}4-1{,}0}{6{,}0-0{,}0} = 0{,}2$

Invullen in het functievoorschrift:
$V = 0{,}2t + b$

Een paar coördinaten invullen:
$1{,}0 = 0{,}2 \cdot 0 + b = b$

Het antwoord is: $a = 0{,}2$ en $b = 1{,}0$.

16 Bij $t = 20$ moet gelden dat $h = 7600$, want dat betekent dat de gewichtloosheid precies 20 s duurt. Dus: $h(20) = \text{-}9{,}81 \cdot 20^2 + 0{,}38 \cdot v \cdot 20 + 7600 = 7600$.

Dit betekent $\text{-}9{,}81 \cdot 20^2 + 0{,}38 \cdot v \cdot 20 = \text{-}3924 + 7{,}6v = 0$ en dus $7{,}6v = 3924$ zodat $v = \frac{3924}{7{,}6} \approx 516{,}3$.

Bij een grotere v zal de uitkomst groter zijn, dus zal het langer duren voordat $h = 7600$. Voor gewichtloosheid van minimaal 20 s moet de snelheid dus minimaal 517 km/h zijn.

17 $y = ax + b$

$a = \frac{16-42}{30-(\text{-}24)} \approx \text{-}0{,}48$

$y = \text{-}0{,}48x + b$

$16 = \text{-}0{,}48 \cdot 30 + b = \text{-}14{,}44 + b$ geeft $30{,}44 = b$.

Dus $y = \text{-}0{,}48x + 30{,}44$.

18 a $R(a)$ = instaptarief + kilometertarief + tijdtarief.

$R(a) = 2{,}83 + 2{,}00 \cdot 5 + 0{,}34 \cdot a = 12{,}83 + 0{,}34a$

b $R(a) = 12{,}83 + 0{,}34a = 17{,}50$ geeft $0{,}34a = 4{,}67$, dus $a = \frac{4{,}67}{0{,}34} = 13{,}7$ minuten.

Dus bij meer dan 13,7 minuten.

c 5 km met 30 km per uur: $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ uur en dat is $\frac{1}{6} \cdot 60 = 10$ minuten.

De taxi is 10 minuten onderweg. Kosten $12{,}83 + 10 \cdot 0{,}34 = 16{,}23$ euro. Dus het kilometer/tijdtarief is goedkoper.

19 a De punten $(p,q) = (7{,}00; 1450)$ en $(p,q) = (10{,}00; 1300)$ liggen op de lijn.

$q = a \cdot p + b$

Bereken a:

$a = \frac{1300-1450}{10-7} = \text{-}50$

Invullen a in functievoorschrift:
$q = -50 \cdot p + b$

Een paar coördinaten invullen en b berekenen:

$$1300 = -50 \cdot 10 + b$$
$$1300 = -500 + b$$
$$1800 = b$$

Dus $q = -50p + 1800$.

b Het maximum bepalen van $p \cdot q = p \cdot (-50p + 1800) = -50p^2 + 1800p$.

Voer in: Y1=-150X^2+1800X
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 40$ en $0 \leq y \leq 20000$
Bepaal het maximum: $p = 18$

De opbrengst is maximaal bij een prijs van € 18,00.

2.4 Karakteristieken

V1 a $K = 0{,}06 + \frac{250}{a}$

b € 0,06

c K is volgens de formule onbegrensd. Hoe dichter a bij 0 komt, hoe groter P. Maar $a = 0$ betekent hier dat de school alleen de huurkosten van de machine moet betalen en bijvoorbeeld $a = 0{,}1$ kan niet.

1 a De kosten per gereden kilometer zijn € 1,10 plus de voorrijkosten verdeeld over a gereden kilometers.

$K = 1{,}10 + \frac{5{,}00}{a}$

b De verticale asymptoot vind je bij de a waar er door 0 wordt gedeeld, dus $a = 0$.

De horizontale asymptoot vind je bij de functiewaarde K door voor a een serie hele grote (positieve) waarden in te vullen.

c De verticale asymptoot vind je bij de a waar er door 0 wordt gedeeld, dus $a - 2 = 0$, oftewel $a = 2$. Verticale asymptoot: $a = 2$

De horizontale asymptoot vind je bij de functiewaarde K door voor a een serie hele grote (positieve) waarden in te vullen. Horizontale asymptoot: $K = 1{,}15$.

2 a $K(10000) = \frac{200}{10000} + 0{,}075 = 0{,}095$

Dat is 9,5 eurocent per kopie.

b $K(1000000) = \frac{200}{1000000} + 0{,}075 \approx 0{,}075$

Dat is 7,5 eurocent per kopie.

c De grafiek van K benadert 0,075 bij hele grote waarden van a, dus de horizontale asymptoot is $y = 0{,}075$.

d Hoe minder kopieën, hoe duurder de kopieën per stuk. Dus minimale waarde invullen:

$K(1) = \frac{200}{1} + 0{,}075$

Dus € 200,08

3 a Voer in: Y1= 4/X + 2
Venster: standaard

b Maak een tabel van de grafiek. Je ziet nu bij $x = 0$ als functiewaarde bijvoorbeeld 'ERROR' staan. De verticale asymptoot is dus $x = 0$.

c $f(10000) = \frac{4}{10000} + 2 \approx 2{,}000$

De functiewaarden naderen dus het getal 2.

d $f(\text{-}10000) = \frac{4}{\text{-}10000} + 2 \approx 2{,}000$

De functiewaarden naderen dus het getal 2.

e Als x heel groot of heel klein wordt, wordt $y = 2$ benaderd. De horizontale asymptoot is dus $y = 2$.

f x kan alles worden behalve 0, dus: $\text{D}_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.

y kan alles worden behalve 2, dus: $\text{B}_f = \langle \leftarrow, 2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$.

4 a Delen door 0 kan niet. Dus $x + 2$ kan geen 0 zijn, dus x kan geen -2 zijn.
De verticale asymptoot is dus: $x = \text{-}2$.

b $f(1000) = \frac{4}{1000+2} \approx 0{,}0$

Dus de functiewaarden benaderen het getal 0.

c $f(\text{-}1000) = \frac{4}{\text{-}1000+2} \approx 0{,}0$

Dus de functiewaarden benaderen het getal 0.

d De functiewaarden naderen het getal 0. De asymptoot is dus $y = 0$.

e x kan alles behalve -2 zijn.

$D_f = \langle \leftarrow, -2\rangle \cup \langle -2, \rightarrow\rangle$

y kan alles behalve 0 zijn.

$B_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$

5 a Verticale asymptoot: $x = -10$

Horizontale asymptoot: $y = 1$

b $D_g = \langle \leftarrow, -10\rangle \cup \langle -10, \rightarrow\rangle$

$B_g = \langle \leftarrow, 1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$

6 a Venster bijvoorbeeld: $-20 \leq x \leq 20$ en $-20 \leq y \leq 20$

b Je vindt de snijpunten met de x-as door $f(x) = 0$ op te lossen:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2-12}{x^2-25} &= 0 \\ 2x^2 - 12 &= 0 \\ 2x^2 &= 12 \\ x^2 &= 6 \\ x &= \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6} \end{aligned}$$

Je vindt de snijpunten met de y-as door $x = 0$ in te vullen:

$f(0) = \frac{0^2-12}{0^2-25} = \frac{-12}{-25} = 0{,}48$. Je ziet aan de grafiek dat hier ook een top zit.

Je vindt de verticale asymptoot waar door 0 wordt gedeeld, dus:

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= 0 \\ x^2 &= 25 \\ x &= 5 \vee x = -5 \end{aligned}$$

Je vindt de horizontale asymptoot door te kijken wat de functiewaarde doet door voor x een serie hele grote getallen in te voeren.
In beide gevallen geldt dat $f(x) \rightarrow 2$.

c $D_f = \langle \leftarrow, -2\rangle \cup \langle -2, 2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$

$B_f = \langle \leftarrow; 0{,}48] \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$

7 a $1 + x^2 > 0$

Je krijgt een verticale asymptoot als de noemer van de breuk 0 kan worden.

$1 + x^2$ wordt echter nooit 0, omdat x^2 nooit kleiner dan 0 wordt.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{4x}{1+x^2} &= 0 \\ 4x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

c $g(10000) = \frac{4 \cdot 10000}{1+10000^2} \approx 0{,}0$

$g(-10000) = \frac{4 \cdot -10000}{1+(-10000)^2} \approx 0{,}0$

Bij hele hoge en lage waarden van x benaderen de functiewaarden het getal 0. De horizontale asymptoot is dus: $y = 0$.

d x kan elke waarde aannemen.

$D_g = \mathbb{R}$

In de toppen is $y = 2$ of $y = -2$.
$B_g = [-2,2]$

8 a De noemer van de breuk mag geen 0 zijn, dus de verticale asymptoot bij $x = 0$.

$f(1000) = 4 - \frac{4}{1000} \approx 4$

$f(-1000) = 4 - \frac{4}{-1000} \approx 4$

Bij hoge en lage waarden van x benaderen de functiewaarden 4, dus de horizontale asymptoot is $y = 4$.

x kan alle waarden aannemen behalve 0.
$D_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$

y kan alle waarden aannemen behalve 4.
$B_f = \langle \leftarrow, 4\rangle \cup \langle 4, \rightarrow\rangle$

b De noemer van de breuk mag geen 0 zijn, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 0$.

$g(1000) = \frac{4-1000}{1000} \approx -1$

$g(1000) = \frac{4-(-1000)}{-1000} \approx -1$

Bij hoge en lage waarden van x benaderen de functiewaarden -1, dus de horizontale asymptoot is $y = -1$.

x kan alle waarden aannemen behalve 0.
$D_g = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$

y kan alle waarden aannemen behalve -1.
$B_g = \langle \leftarrow, -1\rangle \cup \langle -1, \rightarrow\rangle$

c De noemer van de breuk mag geen 0 zijn. $x^2 - 4 = 0$ bij $x^2 = 4$, dus bij $x = \pm 2$. Dus zijn er verticale asymptoten $x = -2$ en $x = 2$.

$h(1000) = \frac{1000}{1000^2-4} \approx 0$

$h(-1000) = \frac{-1000}{(-1000)^2-4} \approx 0$

Bij hoge en lage waarden van x benaderen de functiewaarden 0, de horizontale asymptoot is $y = 0$.

x kan alle waarden aannemen behalve -2 en 2, $D_h = \langle \leftarrow, -2\rangle \cup \langle -2, 2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$.
y kan alle waarden aannemen, ook $y = 0$ (bij $x = 0$).
$B_h = \mathbb{R}$

d De noemer van de breuk mag geen 0 zijn. $x^2 + 4 = 0$ komt ook niet voor, want x^2 is nooit negatief. Geen verticale asymptoten dus.

$k(1000) = \frac{1000^2}{1000^2+4} \approx 1$

$k(-1000) = \frac{(-1000)^2}{(-1000)^2+4} \approx 1$

Bij hoge en lage waarden van x benaderen de functiewaarden 1, dus de horizontale asymptoot is $y = 1$.

x kan alle waarden aannemen.
$D_k = \mathbb{R}$
y kan alle waarden tussen 0 en 1 aannemen behalve 1.
$B_k = [0,1\rangle$

9 a $t = 0$ geeft $N = 90$.

b Als t heel groot wordt, dan nadert N het getal 150.

Dus $y = 150$ is de horizontale asymptoot.

Merk op dat $t = -10$ geen verticale asymptoot is, aangezien $t \geq 0$.

c Dat het aantal herten in het natuurgebied stabiliseert, naar 150 gaat.

d Voer in: Y1=150-60/(1+0.1X)
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 150$

Je vindt $t = 10$, dus na 10 jaar.

10 a Oplossing:

$$f(x) = \frac{-5x^2}{(x-10)^2} = 0$$
$$5x^2 = 0$$
$$x = 0$$

b De noemer van de breuk mag geen 0 zijn. $(x-10)^2 = 0$ geeft $x - 10 = 0$, dus $x = 10$.

Een verticale asymptoot bij $x = 10$.

$$f(10000) = \frac{-5 \cdot 10000^2}{(10000-10)^2} \approx -5$$

$$f(-10000) = \frac{-5 \cdot (-10000)^2}{(-10000-10)^2} \approx -5$$

Bij hoge en lage waarden van x benaderen de functiewaarden -5. Er is dus een horizontale asymptoot bij $y = -5$.

c Je wilt het nulpunt bij (0,0) en de asymptoten bij $x = 10$ en $y = -5$ duidelijk in beeld hebben. Je wilt de waarden van x en negatieve waarden van y daarom redelijk ver laten lopen.
Venster bijvoorbeeld: $-100 \leq x \leq 100$ en $-50 \leq y \leq 10$

d De noemer is altijd positief, want die staat in het kwadraat en $x = 10$ behoort niet tot het domein.

De teller is altijd negatief of nul, want er staat een - voor x^2, er geldt $x^2 \geq 0$, dus $-x^2 \leq 0$.

De hele breuk wordt dus altijd negatief, dus: $\langle \leftarrow, 0]$.

11 a $TK = 100 + 0{,}1 \cdot 120^2 = 1540$ euro

Kosten per exemplaar $= \frac{TK}{q} = \frac{1540}{120} = 12{,}83$ euro.

b $GTK = \frac{TK}{q}$

Hellingsgetal $= \frac{TK-0}{q-0} = \frac{TK}{q}$

c $GTK = \frac{TK}{q} = \frac{100+0{,}1q^2}{q} = \frac{100}{q} + 0{,}1q$

d De noemer kan geen 0 zijn, dus $q = 0$ heeft geen uitkomst. Dus zit er een verticale asymptoot bij $x = 0$.

Als q heel groot wordt, benaderen de functiewaarden niet een bepaald getal, dus geen horizontale asymptoot.

q kan alle positieve waarden hebben behalve 0, dus het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

GTK kan alles vanaf het minimum 6,32 bij $q = 31{,}62$ hebben, dus het bereik $[6{,}32; \rightarrow\rangle$.

12 a $W = \frac{330}{15} = 22$

$W = \frac{330}{30000} = 0{,}011$

$B_f = [0{,}011; 22]$

b Hoe hoger de frequentie, hoe hoger het geluid. Het is dus een heel hoog geluid.

c $W = \frac{330}{120000} = 0{,}00275$ meter.

d Bassen.

e $W = \frac{330}{20} = 16{,}5$ meter of langer.

f $W = \frac{330}{1000000} \approx 0$

W nadert dus tot 0 meter.

13 a $Z(0) = 200\left(1 - \frac{10}{0+10} + \frac{100}{(0+10)^2}\right) = 200$

Voer de formule in de GR in met $0 \leq t \leq 100$ en maak een schets van de grafiek.

b De noemers van de breuken kunnen geen 0 zijn. De noemers van beide breuken zijn 0 wanneer $t = \text{-}10$. Dus zit er een verticale asymptoot bij $t = \text{-}10$.

$Z(10000) = 200\left(1 - \frac{10}{10000+10} + \frac{100}{(10000+10)^2}\right) \approx 200$

$Z(\text{-}10000) = 200\left(1 - \frac{10}{\text{-}10000+10} + \frac{100}{(\text{-}10000+10)^2}\right) \approx 200$

Als t heel groot of heel klein wordt, benaderen de functiewaarden het getal 200. Er zit dus een horizontale asymptoot bij $y = 200$.
$t = \text{-}10$ heeft geen betekenis want t kan hier niet negatief zijn.

De horizontale asymptoot betekent dat het zuurstofgehalte langzaam terugkeert naar 200, wanneer de storing erg lang duurt.

c Voer in: Y1=200(1-10/(X+10)+100/(X+10)^2)

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 100$ en $100 \leq y \leq 250$

Er is een minimum bij $t = 10$.

d Normale niveau:

$Z(0) = 200\left(1 - \frac{10}{0+10} + \frac{100}{(0+10)^2}\right) = 200$

80% van 200 is $200 \cdot 0{,}8 = 160$.

$Z(t) = 160$
Met GR snijpunten van $Z(t)$ met $y = 160$ bepalen: $(3{,}82; 160)$ en $(26{,}18; 160)$.

Hiertussen is het zuurstofgehalte ontoelaatbaar, dus $26{,}18 - 3{,}82 = 22{,}36$ minuten.

14 a $f(100) = \frac{4+2 \cdot 100}{100-1} = \frac{204}{99} \approx 2{,}0606$

$f(\text{-}100) = \frac{4+2 \cdot \text{-}100}{\text{-}100-1} = \frac{\text{-}196}{\text{-}101} \approx 1{,}9406$

b $f(x) = \frac{4+2x}{x-1} = 0$ geeft $4 + 2x = 0$, dus $x = \text{-}2$.

Nulpunt is $\text{-}2$.

c GR: $y_1 = \frac{4+2x}{x-1}$ met standaardvenster.

d De noemer van de breuk mag geen 0 zijn, dus bij $x - 1 = 0$ krijg je geen uitkomst.

Dat is dus bij $x = 1$, dat is dus de verticale asymptoot.

$f(100) = \frac{4+2 \cdot 100}{100-1} = \frac{204}{99} \approx 2{,}0606$

$f(\text{-}100) = \frac{4+2 \cdot \text{-}100}{\text{-}100-1} = \frac{\text{-}196}{\text{-}101} \approx 1{,}9406$

Als x heel groot of heel klein wordt, benaderen de functiewaarden het getal 2. De horizontale asymptoot is dus $y = 2$.

e x kan alle waarden hebben behalve 1, dus het domein $\langle \leftarrow, 1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$.

y kan alle waarden hebben behalve 2, dus het bereik $\langle \leftarrow, 2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$.

15 a $f(x) = \frac{x^2}{x^4+10} = 0$ geeft $x^2 = 0$, dus $x = 0$.

b De noemer van de breuk kan geen 0 zijn, maar $x^4 + 10$ wordt ook nooit 0, omdat x^4 niet negatief kan worden. Geen verticale asymptoot dus.

$f(1000) = \frac{1000^2}{1000^4+10} \approx 0$

$f(\text{-}1000) = \frac{(\text{-}1000)^2}{(\text{-}1000)^4+10} \approx 0$

Als x heel groot of heel klein wordt, benaderen de functiewaarden het getal 0. De functie heeft dus een horizontale asymptoot bij $y = 0$.

c Duidelijk moet zijn dat de grafiek van de functie de lijn $y = 0$ benadert aan beide kanten, dus de x moet redelijk ver lopen. De toppen liggen ongeveer bij $y = 0{,}158$, dus de y hoeft niet zo ver te lopen.

Bijvoorbeeld: $\text{-}10 \leq x \leq 10$ en $\text{-}0{,}1 \leq y \leq 0{,}2$.

d De teller en de noemer van de grafiek worden beide nooit negatief, dus y loopt sowieso vanaf 0. Het maximum met de GR bepalen: $y \approx 0{,}16$. Dus $[0; 0{,}16]$.

16 a $K = \frac{89}{T-2} = 10$ geeft $T - 2 = \frac{89}{10} = 8{,}9$, dus $T = 10{,}9$.

Hoe groter de T, hoe kleiner de K, dus bij temperaturen boven 10,9 °C is de helft van de zaden binnen 10 dagen ontkiemd.

b De kiemtijd moet natuurlijk groter dan 0 zijn, dus de noemer van de grafiek mag niet negatief of 0 zijn, dus T moet meer dan 2 zijn. Een zinvol domein is dus $\langle 2, \rightarrow \rangle$.

c De noemer van de breuk mag geen 0 zijn, dus $T - 2 = 0$ heeft geen uitkomst. Er zit dus een verticale asymptoot bij $T = 2$.

$K = \frac{89}{10000-2} \approx 0$

$K = \frac{89}{\text{-}10000-2} \approx 0$

Als T heel groot of heel klein wordt, benaderen de functiewaarden het getal 0. Er zit dus een horizontale asymptoot bij $K = 0$.

d K is altijd groter dan 0 en kan verder alle waarden aannemen, dus het bereik $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

2.5 Transformaties

V1 a De grafiek van f wordt 4 eenheden naar rechts verschoven.

b De grafiek van f wordt 3 eenheden naar boven verschoven.

c De grafiek van f wordt met 1,5 vermenigvuldigd in de verticale richting.

d De grafiek van f wordt met $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigd in de horizontale richting. (In dit geval kun je ook zeggen dat hij in de verticale richting wordt vermenigvuldigd, maar dan met 9, want $(3 \cdot x)^2 = 9x^2$.)

e De grafiek van f wordt 4 eenheden naar rechts verschoven, dan met 1,5 vermenigvuldigd in de verticale richting en ten slotte 3 omhoog geschoven.

1 a Met factor 0,5 herschalen in de y-as richting.

b 4 ten opzichte van de y-as verschuiven en 2 ten opzichte van de x-as verschuiven.

c Met factor -1 herschalen in de y-as richting. en dan 2 ten opzichte van de x-as verschuiven.

d Met factor $\frac{1}{3}$ herschalen in de richting van de x-as en dan 2 ten opzichte van de x-as verschuiven.

2 a Herschalen in de y-richting met factor 3.

b -4 stappen in de x-richting verschuiven en 2 stappen in de y-richting verschuiven.

c Met factor -2 herschalen in de y-as richting en dan 5 in de y-richting verschuiven.

d Met factor 2 herschalen in de x-richting en dan 1 in de y-richting verschuiven.

3 a Voer in: Y1=X^3
Venster: standaard

b $y_2 = (x+4)^3$

Voer in: Y2=(X+4)^3
Verschuiving in de x-richting met -4.

c $y_3 = x^3 + 5$

Voer in: Y3=X^3+5
Verschuiving in de y-richting met 5.

d $y_4 = (x+4)^3 + 5$

Voer in: Y4=(X+4)^3+5
Verschuiving in de x-richting met -4 en daarna in de y-richting met 5.

4 a Voer in: Y1=0.5X^3
Venster: standaard.

b $y_3 = (2x)^3$

Voer in: Y2=(2X)^3
Herschalen in de x-richting met factor 0,5.

c $y_3 = 2x^3$

Voer in: Y3=2X^3
Herschalen in de y-richting met factor 2.

5 a Voer in: Y1=X^3-4X
Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 5$ en $-10 \leq x \leq 10$

b $y_2 = (2x)^3 - 8x$

Voer in: Y2=(2X)^3-8X
Herschalen in de x-richting met factor 0,5.

c $y_3 = 2x^3 - 8x$

Voer in: Y3=2(X^3-4X)
Herschalen in de y-richting met factor 2.

6 a Herschalen in de y-richting met 2 en dan een verschuiving van 3 in de y-richting.

b Verschuiving van 4 in de x-richting en dan een verschuiving van 2 in de y-richting.

c Herschalen in de y-richting met factor -1 en dan een verschuiving van 2 in de y-richting.

d Herschalen met factor $\frac{1}{3}$ in de x-richting en dan een verschuiving van 2 in de y-richting.

e Eerst verschuiving van 1 in de x-richting, vervolgens met factor 2 herschalen in de y-richting en ten slotte een verschuiving van 4 in de y-richting.

7 a $g(x) = -2 \cdot f(x) + 1$

b $g(x) = f(0{,}5x) - 3$

c $g(x) = f(x-4) - 2$

d $g(x) = f(2(x-4)) = f(2x-8)$

e $g(x) = 0{,}5 \cdot f(x-4) - 2$

8 a $y = x^4$

b Eerst 5 verschuiven in de x-richting, dan herschalen in de y-richting met factor 0,25 en tot slot -10 verschuiven in de y-richting.

c De top van $y = x^4$ is $(0,0)$ en de top van f is na de twee verschuivingen $(5,-10)$. Het minimum is dan -10 voor $x = 5$.

9
- a: verschuiving van -3 in de y-richting, dus $y = x^2 - 3$
- b: verschuiving van 3 in de x-richting, dus $y = (x-3)^2$
- c: de functie gaat door $(1; 0{,}5)$, $(2,2)$, $(3; 4{,}5)$ enzovoort, hetgeen precies de helft van de y-waarden van de oorspronkelijke functie is; de vervorming is herschalen in de y-richting met factor 0,5, dus $y = 0{,}5x^2$
- d: de functie is gespiegeld in de x-as, dus $y = -x^2$
- e: verschuiving van -4 in de y-richting en 2 in de x-richting, dus $y = (x-2)^2 - 4$
- f: de functie is met factor -0,5 herschaald in de y-richting, 5 verschoven in de y-richting en -3 verschoven in de x-richting.

10 Venster $-10 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 10$ is standaard. Nu ga je 20 in de x-richting verschuiven en 200 in de y-richting verschuiven. Je krijgt dan $10 \leq x \leq 30$ en $190 \leq y \leq 210$.

11 a Herschaling in de y-richting met factor 0,5.

$y_2 = x^2$

b Verschuiving van 4 in de x-richting en 2 in de y-richting.

$y_3 = 2(x-4)^2 + 2$

c Herschaling in de y-richting met factor -1 en verschuiving van 2 in de y-richting.

$y_4 = 2 - 2x^2$

d Herschaling in de x-richting met factor $\frac{1}{3}$ en dan verschuiving van -4 in de y-richting.

$y_5 = 18x^2 - 4$

12 a: Verschuiven in de y-richting met 4 eenheden geeft $y_2 = x^3 + 4$

b: Verschuiven in de x-richting met 4 eenheden geeft $y_3 = (x-4)^3$

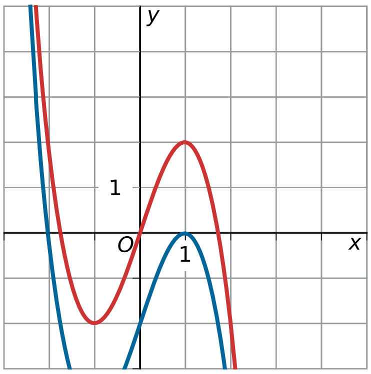
c: Herschalen in de y-richting met factor $-\frac{1}{4}$ geeft $y_4 = -0{,}25x^3$

d: Hier zijn twee verschuivingen uitgevoerd. Eerst een verschuiving van 2 in de x-richting, daarna een verschuiving van -4 in de y-richting. Dus $y_4 = (x-2)^3 - 4$.

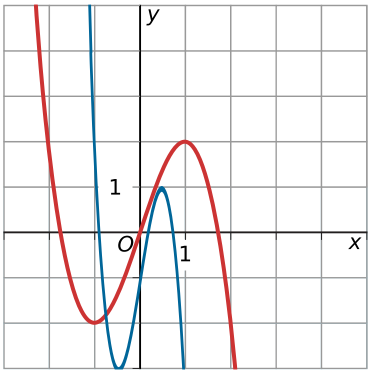
13 a 2 naar rechts verschuiven.

b Met factor -2 herschalen in de y-richting.

c Translatie van -2 in de y-richting.



d Herschalen in de x-richting met factor $\frac{1}{2}$ en verschuiven in de y-richting met -1.



14 a Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 25$ en $0 \leq y \leq 5$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} -0{,}02(x-10)^2+4 &= 0 \\ (x-10)^2 &= 200 \\ x-10 &= \sqrt{200} \\ x = 10+\sqrt{200} &\approx 24{,}14 \end{aligned}$$

De kogel komt ongeveer 24,14 meter ver.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} -0{,}02(x-10)^2+4 &= 2 \\ (x-10)^2 &= 100 \\ x-10 &= 10 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Na 20 meter.

15 a $y_1 = \sqrt{x-5} - 2$

Het domein en het bereik van de standaardfunctie zijn $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.

Door de verschuivingen wordt dit $D_{y_1} = [5, \rightarrow\rangle$ en $B_{y_1} = [-2, \rightarrow\rangle$.

b $y_2 = 2\sqrt{x-3} - 4$

Het domein en het bereik van de standaardfunctie zijn $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.

Door de verschuivingen wordt dit $D_{y_2} = [3, \rightarrow\rangle$ en $B_{y_2} = [-4, \rightarrow\rangle$.

c $y_3 = \sqrt{-2x+4} + 4$

Het domein en het bereik van de standaardfunctie zijn $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [0, \rightarrow\rangle$.

Door de verschuivingen en de negatieve factor wordt dit $D_{y_3} = \langle\leftarrow, 2]$ en $B_{y_3} = [4, \rightarrow\rangle$.

16 Eigen antwoord.

17 De grafiek van TW is een bergparabool met nulpunten die je kunt vinden door $TW = -0{,}01q^2 + 4q = 0$ op te lossen. Dit geeft $q = 0 \vee q = 400$. De top van de parabool zit dus bij $q = 200$ en na invullen vind je $TW = 400$.

De grafiek van TW ontstaat uit de grafiek van $y_1 = -x^2$ door 200 naar rechts te verschuiven, te herschalen in de y-richting met factor 0,01 en 400 omhoog te verschuiven.

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 400$ en $0 \leq y \leq 400$.

18 a $y_2 = \frac{1}{x-3}$

Verschuiving van 3 ten opzichte van de y-as.

b $y_3 = \frac{0{,}5}{x} + 1$

Met factor $\frac{1}{2}$ herschalen ten opzichte van de x-as en dan 1 ten opzichte van de x-as verschuiven.

c $y_4 = \frac{1}{3x}$

Met factor $\frac{1}{3}$ herschalen ten opzichte van de y-as.

19 a $y = \sqrt{x}$

b Herschalen met factor 10 ten opzichte van x-as en dan 50 verschuiven ten opzichte van de x-as.

c $0 \leq x \leq 10$ en $50 \leq x \leq 100$

$[0{,}10] \times [50{,}100]$

2.6 Totaalbeeld

1 a $f(x) = 5x^2(x+20) = 0$ geeft $x = 0 \vee x = -20$.

b Gebruik de GR. De snijpunten zijn (0,0) en (-10,5000).

c Aflezen dat $g(x)$ alleen groter is dan $f(x)$ voor het eerste snijpunt, dus: $x < -10$.

2 a Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\left(x^2-400\right) = 0 \\ x &= 0 \vee x^2 = 400 \\ x &= 0 \vee x = -20 \vee x = 20 \end{aligned}$$

Het minimum bepalen met de GR: (±14,1; -40000). x kan alle waarden aannemen.

$D_f = \mathbb{R}$

y kan alle waarden vanaf -40000 aannemen.

$B_f = [-40000, \rightarrow\rangle$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{20-x}-40 = 0 \\ \sqrt{20-x} &= 40 \\ 20-x &= 1600 \\ x &= -1580 \end{aligned}$$

x kan alle waarden aannemen tot maximaal 20.

$D_g = \langle\leftarrow, 20]$

y kan alle waarden aannemen vanaf -40.

$B_g = [-40, \rightarrow\rangle$.

3 a De noemer van de breuk mag geen 0 zijn, dus er zit een verticale asymptoot bij $x^2 = 0$, dus bij $x = 0$.

$y(1000) = 4 - \frac{1}{1000^2} \approx 4$

$y(-1000) = 4 - \frac{1}{(-1000)^2} \approx 4$

Als x heel groot of heel klein wordt, benaderen de functiewaarden het getal 4. Er zit dus een horizontale asymptoot bij $y = 4$.

b $y(x)$ invoeren in de GR. Aflezen dat x alle waarden kan hebben behalve $x = 0$, dus het domein $\langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$. Aflezen dat y alle waarden onder de 4 kan hebben, dus het bereik $\langle\leftarrow, 4\rangle$.

c $4 - \frac{1}{x^2} = 2$ geeft $\frac{1}{x^2} = 2$ en $1 = 2x^2$, dus $x^2 = 0{,}5$ zodat $x = \pm\sqrt{0{,}5} = \pm 0{,}71$.

$x = -0{,}71 \vee x = 0{,}71$

$y(x)$ en $y = 2$ invullen in de rekenmachine. Aflezen dat $y(x)$ groter is dan 2 voor het eerste snijpunt en na het tweede snijpunt, dus: $x \leq -0{,}71 \vee x \geq 0{,}71$.

4 a Verschuiven in de x-richting met 10 en herschalen in de y-richting met 0,25. Als laatste verschuiven in de y-richting met -16.

b $f(x)$ invullen in de GR. Laten bepalen wat de nulpunten en het minimum zijn. De nulpunten zijn $x = 2$ en $x = 18$. De top is (10, -16).

De nulpunten algebraïsch vinden: $f(x) = 0$ oplossen.

$$\begin{aligned} (x-10)^2 &= 64 \\ x-10 &= -8 \vee x-10 = 8 \end{aligned}$$

De nulpunten zijn dan 2 en 18.

De x van de top is $\frac{2+18}{2} = 10$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 0{,}25(x-10)^2-16 &= 10 \\ (x-10)^2 &= 104 \\ x-10 &= \pm\sqrt{104} \\ x &= 10-\sqrt{104} \vee x = 10+\sqrt{104} \end{aligned}$$

$f(x)$ en $y = 10$ invullen in de GR. Aflezen dat $f(x)$ kleiner is dan 10 tussen de twee snijpunten in, dus: $10-\sqrt{104} < x < 10+\sqrt{104}$.

5 a De punten (10, -30) en (20, -5) moeten op de lijn $h(t) = at + b$ liggen.

$a = \frac{-5--30}{20-10} = 2{,}5$ dus $h(t) = 2{,}5t + b$.

Er moet gelden $-30 = 2{,}5 \cdot 10 + b = 25 + b$, dit geeft $b = -55$. Dus $h(t) = 2{,}5t - 55$.

b Los op $h(t) = 0$:

$$\begin{aligned} 2{,}5t-55 &= 0 \\ 2{,}5t &= 55 \\ t &= \tfrac{55}{2{,}5} = 22 \end{aligned}$$

Na 22 seconden.

c Het einde van de transportband ligt op $h = 22$, los op voor t:

$$\begin{aligned} 2{,}5t-55 &= 22 \\ 2{,}5t &= 77 \\ t &= \tfrac{77}{2{,}5} = 30{,}8 \end{aligned}$$

$D_h = [0; 30{,}8]$
$B_h = [-55; 22]$

6 a De diameter is in het begin 10 cm. De straal is dan dus $\frac{10}{2} = 5$ cm. Elke omwenteling komt daar 0,5 cm straal bij. Dus $r = 5 + 0{,}5a$. Dit invullen in de functie voor het volume: $S(a) = \frac{4}{3}\pi \cdot (5+0{,}5a)^3$.

b Je hoeft sowieso alleen positieve waarden in beeld, want het volume van de bal en het aantal omwentelingen zijn altijd positief.

Je wilt een flink aantal omwentelingen in beeld hebben, want het is een lange helling. Bovendien wil je functiewaarden in beeld hebben die passen bij het gekozen aantal omwentelingen.

Venster bijvoorbeeld: $-1 \leq x \leq 1{,}5$ en $-1000 \leq y \leq 2000$

c $1000 \text{ dm}^3 = 1000 \cdot 1000 = 1000000 \text{ cm}^3$
$y = 1000000$ invullen in de GR. Het snijpunt met $S(a)$ bepalen: (114; 1000000).
De sneeuwbal heeft dus na 114 omwentelingen een volume van ongeveer 1000 dm^3.

7 a Doen.

b Maximale winst bij $p = 13$ van € 9800 per week.

c Verkoop is dan $q = 900$ blikken per dag en hij raakt dus niet alles binnen de gestelde termijn kwijt. Winst: $27000 \cdot (1{,}60 - 0{,}90) = 18900$ euro.

d $W = (2{,}5 - 0{,}001q)q - 0{,}9q$ invoeren in de GR. De maximale winst per dag blijkt bij $q = 800$ op te treden en bedraagt 640 euro. De handelaar doet dan 37,5 dagen over de verkoop van zijn blikken, maar de totale winst is 24000 euro. De verkoopprijs is dan € 1,70.

8 a $I = x(12-2x)(20-2x)$

b $D_I = [0{,}6]$ en $B_I = [0; 262{,}68]$.

c 2,43 cm.

9 a $T = 2$ geeft $A = 30100$. De totale dagopbrengst aan tolgeld is dan € 60200.

b De totale dagopbrengst is $D = A \cdot T = 400T^3 - 9150T^2 + 46800T$. Met de GR vind je een maximum bij $T = 3{,}25$.

c $T = 2{,}40$ geeft $A = 27144$. $T = 2{,}52$ geeft $A = 26282$. Er zijn dan dus 862 auto's minder. En dat is ongeveer 3,18%.

10 a In 1 uur reed Indurain $\frac{53040}{250} = 212{,}16$ ronden. In 1 uur reed Rominger $\frac{55291}{250} = 216{,}164$ ronden. Rominger legde 9,004 ronden meer af en zou Indurain dus 9 keer hebben ingehaald.

b GR: $y_1 = \left(0{,}15x^2 + 4\right) \cdot x$ en $y_2 = 300$ met venster op $0 \le x \le 15$ en $0 \le y \le 350$. Daan kan ongeveer 11,89 m/sec behalen en dat is ongeveer 42,8 km/uur.

c $W \approx 420$ Joule/sec (aflezen). Met $v = 15{,}3$ levert dit op: $\left(k \cdot 15{,}3^2 + 4\right) \cdot 15{,}3 = 420$. Dit geeft: $k \approx 0{,}10$.

d Maximale vermogen op zeeniveau is ongeveer 465 Joule/sec (aflezen). Dan geldt $k = 0{,}13$ en Indurain's snelheid was 53,040 km/uur, dus ongeveer 14,73 m/sec. Volgens de formule moet hij dan een vermogen leveren van $W \approx 474{,}4$ Joule/sec. Volgens de maker van de figuur kan dit niet.

3

Veranderingen

3.1 Veranderingen in grafieken

V1 a Ja, natuurlijk. De stijging wordt soms sterker, maar neemt soms ook af. Dit geldt ook voor de daling.

b Zo ongeveer midden tussen eb en vloed in.

c Die houdt dan op en gaat over in daling. Op het moment zelf is de stijging dus 0 m/s.

1 a De grafiek gaat bij het stijgen omhoog, T neemt dus toe.

b De stijging wordt steeds groter, T neemt dus steeds sterker toe.

c Toenemende daling: steeds sterker wordende daling, T daalt steeds sneller.

Afnemende daling: steeds minder sterke daling, T daalt steeds minder snel.

2 a ⟨←; -0,5⟩: afnemende daling
⟨-0,5; 1⟩: toenemende stijging
⟨1,2⟩: afnemende stijging
⟨2, →⟩: toenemende daling

b Minimum van 0,5 en maximum van 1,5.

3 a Plot de grafiek, bijvoorbeeld met het standaardvenster.

Tot de top van de parabool loopt de grafiek omhoog, daar is hij dus stijgend.
Top bepalen met GR: (3,9).

De grafiek is stijgend op interval ⟨← ,3⟩.

b De stijging wordt steeds minder groot, tot de stijging bij de top 0 is geworden. Er is dus sprake van afnemende stijging.

c Na de top daalt de grafiek. Je ziet dat de lijn steeds steiler wordt. De grafiek daalt dus steeds sterker, dus er is sprake van toenemende daling.

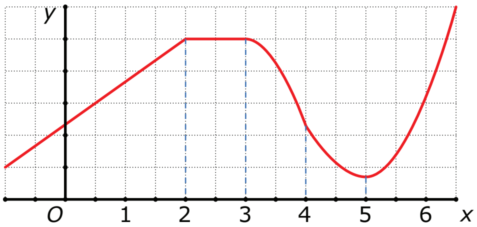
d Na en voor de top liggen de punten van de grafiek lager dan de top. De y-coördinaat van deze top is dus het maximum.

GR gebruiken om maximum te bepalen: (3,9).

4 Toelichting grafiek:

- tot $x = 2$ stijgt de grafiek constant. Dit betekent dat de grafiek tot $x = 2$ een rechte lijn schuin omhoog is;
- van $x = 2$ tot $x = 3$ is de grafiek constant. Dit betekent dat de grafiek horizontaal loopt.
- van $x = 3$ tot $x = 4$ daalt de grafiek toenemend. Dit betekent een lijn die steeds steiler naar beneden loopt.
- van $x = 4$ tot $x = 5$ daalt de grafiek afnemend. Dit betekent dat de lijn steeds minder steil naar beneden loopt.
- Vanaf $x = 5$ stijgt de grafiek toenemend. Dit betekent dat de lijn steeds steiler naar boven loopt.

Bij $x = 5$ is de daling afgenomen tot 0 en begint een stijging. Op dat moment is de grafiek op het laagste punt, hier zit dus een minimum.



Dit is een voorbeeld. Zelf kun je een heel andere grafiek hebben. Controleer of je eigen grafiek wel op de juiste intervallen stijgt, daalt, of constant is.

5 Je krijgt bijna nooit de hele grafiek in beeld. En zelfs als je de hele grafiek zou kunnen zien, blijft de vraag of je bij inzoomen niet meer toppen zou krijgen.

6 ⟨←; -1,5⟩: grafiek daalt steeds minder steil: afnemende daling

⟨-1,5; 0⟩: grafiek gaat steeds steiler omhoog: toenemende stijging

⟨0; 1,5⟩: grafiek gaat steeds minder steil omhoog: afnemende stijging

⟨1,5; →⟩: grafiek daalt steeds steiler: toenemende daling

Extremen: bij $x = -1{,}5$ zit een minimum en bij $x = 1{,}5$ een maximum. De extremen zijn dus $f(-1{,}5) \approx -11$ en $f(1{,}5) \approx 11$;

Sterkste stijging: in (0,0) is de stijging maximaal toegenomen, dus daar is de snelheid van stijgen het grootst.

7 a Plot de grafiek met bijvoorbeeld de standaardinstellingen van het venster.

⟨← , -1⟩: afnemende stijging

⟨-1,0⟩: toenemende daling

⟨0,1⟩: afnemende daling

⟨1, →⟩: toenemende stijging

b maximum: $f(-1) = 2$
minimum: $f(1) = -2$

c Bij hele kleine en grote waarden van x stijgt de grafiek steeds steiler. Dit gaat in theorie oneindig door, dus er is geen maximale stijging.

8 a $f(x)$ invullen in GR. Aflezen dat er één maximum en twee minima zijn. Minima en maximum laten bepalen door GR.

maximum: $f(0) = 8$
minimum: $f(-2) = 0$
minimum: $f(2) = 0$

b Eén interval.

c Vanaf de minima bij de toppen (-2,0) en (2,0) loopt de grafiek omhoog.
$B_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$

9 ⟨0,7⟩: toenemende stijging

⟨7,22⟩: geen stijging/daling (constante snelheid)

⟨22,32⟩: constante daling

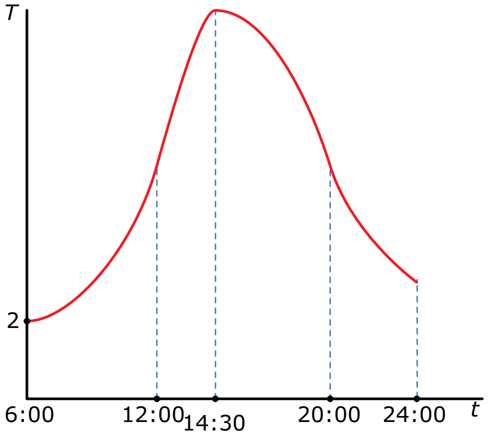
⟨32,62⟩: geen stijging/daling (snelheid is 0)

⟨62,70⟩: constante stijging

⟨70,190⟩: geen stijging/daling (constante snelheid)

⟨190,202⟩: constante daling.

10 Zie de figuur.



Toelichting op de grafiek:

- bij $t = 6$ geldt dat $T = 2$;
- van $t = 6$ tot $t = 12$ is er sprake van toenemende stijging, de grafiek gaat dus steeds steiler omhoog;
- van $t = 12$ tot $t = 14{,}5$ is er sprake van afnemende stijging, de grafiek gaat dus steeds minder steil omhoog;

- van $t = 14{,}5$ tot $t = 20$ is er sprake van toenemende daling, de grafiek gaat dus steeds steiler omlaag;
- van $t = 20$ tot $t = 24$ is er sprake van afnemende daling, de grafiek gaat dus steeds minder steil omlaag.

Om 14:30 uur is de temperatuur tot een maximum gestegen, want daar gaat de stijging over in een daling. Daar zit dus de maximumtemperatuur.

11 a Voer in: Y1=-1/3X^3+4X^2
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 15$ en $0 \leq y \leq 100$

Met de optie maximum vind je $x = 8$.
Het bedrijf moet acht werknemers inzetten.

b Aan de grafiek van W zie je dat bij $x = 4$ de grootste stijging is.

$W(5) - W(4) \approx 15{,}67$ en $W(4) - W(3) \approx 15{,}67$.

Het bedrijf moet dan vier of vijf werknemers inzetten.

c Als je van zeven naar acht werknemers gaat is de winsttoename kleiner dan als je van drie naar vier werknemers gaat. Daarom is het misschien verstandig om minder werknemers in te zetten voor de klus, zodat zij een andere klus kunnen doen waarmee ze meer kunnen verdienen.

12 a Na 60 seconden, daar zit een knik in de grafiek en vanaf dat punt is de daalsnelheid constant. De knik duidt erop dat er iets veranderde op dat moment en de constante en afgenomen daling duidt erop dat hij zijn parachute heeft geopend en dus geleidelijk naar beneden komt.

b De grafiek loopt steeds steiler naar beneden, dus is de grafiek toenemend dalend.

De parachutist valt steeds sneller naar beneden, ofwel de valsnelheid wordt steeds groter.

c De grafiek is vanaf dat moment een rechte lijn, de daling is daarom constant op dat moment. Dat betekent dat de valsnelheid ook constant is:

De valsnelheid is dan $\frac{\text{afstand}}{\text{tijd}} = \frac{1000}{100} = 10$ m/s.

13 a De grafiek stijgt het steilst tussen zijn zeventiende en achttiende verjaardag.

Hij groeit dan: $162 - 135 = 27$ cm.

b De grafiek is stijgend als de grafiek omhoog gaat. Dit is het het geval vanaf het begin (als hij dertien is) tot zijn eenentwintigste levensjaar.

c Er is sprake van afnemende stijging als de grafiek steeds minder steil stijgt. Dit is het geval van zijn achttiende tot zijn eenentwintigste verjaardag.

d Vanaf zijn eenentwintigste, want vanaf dat moment blijft zijn lengte gelijk.

e Gedurende zijn veertiende en vijftiende levensjaar loopt de grafiek redelijk recht, hier is de groeisnelheid dus redelijk constant. Ook als hij gestopt is met groeien, vanaf zijn tweeëntwintigste levensjaar, is de groeisnelheid constant, namelijk: 0. Je ziet niet wat er op de lange termijn gebeurt, daardoor weet je niet of de groeisnelheid constant blijft.

14 a De grafiek daalt tussen het eerste maximum en het minimum en na het tweede maximum. Dus op de intervallen $\langle -2, 0\rangle$ en $\langle 2, \rightarrow\rangle$.

b Twee intervallen.

c Maxima bij $x = -2$ en $x = 2$:

$f(-2) = -0{,}5(-2)^4 + 4(-2)^2 = 8$.

$f(2) = -0{,}5 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^2 = 8$.

Minimum bij $x = 0$:

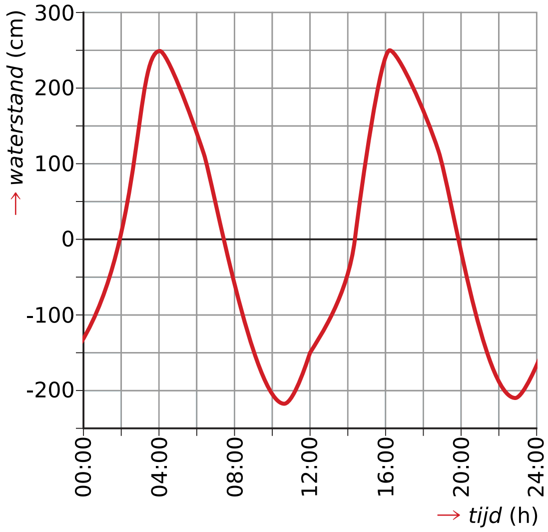
$f(0) = -0{,}5 \cdot 0^4 + 4 \cdot 0^2 = 0$.

3.2 Veranderingen per stap

V1 a Tip: maak om fouten te voorkomen eerst een tabel met tijd, niveau en verandering van niveau:

tijdstip	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
niveau	1	0	- 0,9	- 1,5	- 1,7	- 1,5	- 1,1	- 0,5	0,2	1,3	2,2	2,2	1,5	0,8	- 0,4
verandering		- 1	- 0,9	- 0,6	- 0,2	0,2	0,4	0,6	0,7	1,1	0,9	0	- 0,7	- 0,7	- 0,2

Het staafdiagram komt er dan zo uit te zien:



b Staaf in positieve richting: stijging. Staaf in negatieve richting: daling.

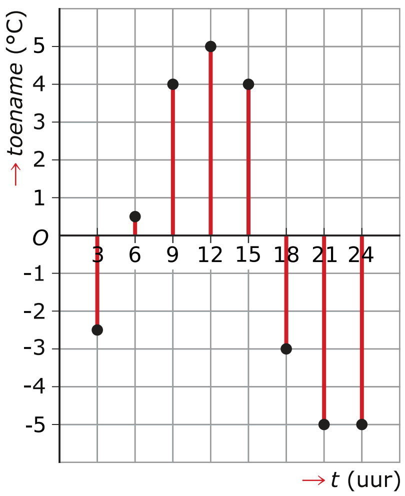
c Een langere staaf betekent grotere snelheid van stijging of daling. Een snelle stijging zie je aan een langere staaf in positieve richting.

d Als je met een dieptemeter de waterdiepte meet, kun je met een dieptekaart (kaart waarop staat hoe diep het water is ten opzichte van NAP) en de komende verandering van het waterniveau snel bepalen hoe lang je nog verder kunt varen zonder vast te lopen.

1 a Zie de tabel.

t (uur)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
T	10	7,5	8	12	17	21	18	13	8
ΔT		- 2,5	0,5	4	5	4	- 3	- 5	- 5

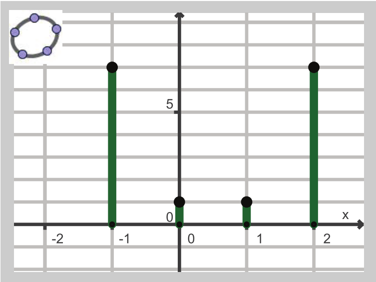
b Zie de figuur.



2 a Zie de tabel.

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8
Δy		7	1	1	7

b Ook deze figuur is (handmatig) gemaakt met GeoGebra.



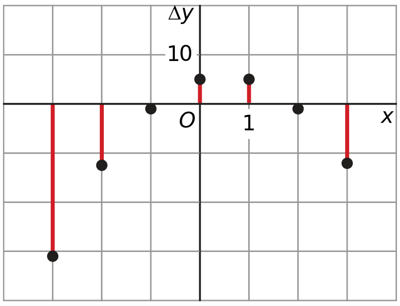
3 Ga na, dat je dezelfde figuur krijgt als in de applet in het voorbeeld.

4 a Voer in: Y1=-X^3+6X en Y2=Y1(X)-Y1(X-1)
Maak de tabel met stapgrootte 1 en startwaarde -3 en neem de tabel over.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Δy	-31	-13	-1	5	5	-1	-13

b D

c Zie de figuur.



5 Zie de tabel.

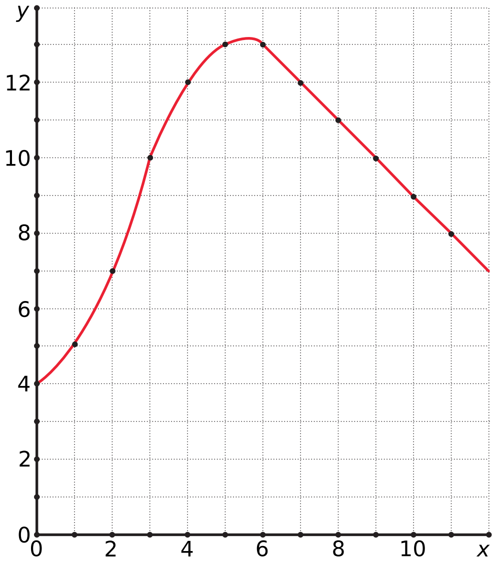
x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Δy	14	9	5	2	0	-1	-1	0	2	5	9	14
y	-5	4	9	11	11	10	9	9	11	16	25	39

Teken een bijpassende grafiek, met de applet kun je de juistheid controleren.

6 a Het bijbehorende toenamediagram:

x	0	1	2	3	4	5	6
Δy		1	2	3	2	1	0
y	4	5	7	10	12	13	13

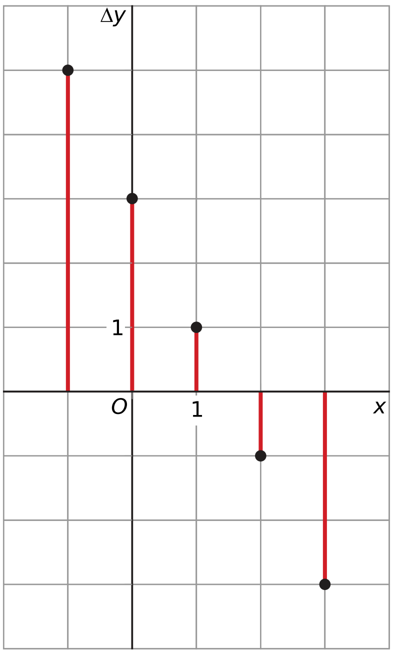
x	7	8	9	10	11	12
Δy	-1	-1	-1	-1	-1	-1
y	12	11	10	9	8	7



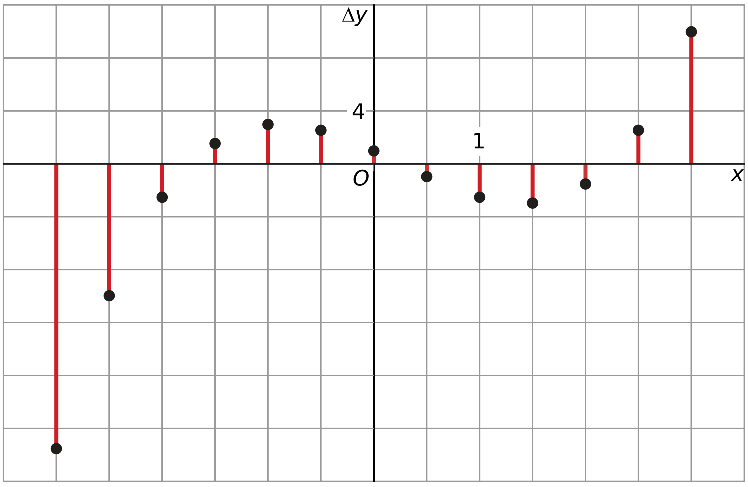
b B

7 Maak eerst een tabel.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	1	4	5	4	1
Δy	-	5	3	1	-1	-3



8 a Voer in: Y1=0.5X^4-4X^2+8 en Y2=Y1(X)-Y1(X-0.5)
Maak een tabel van Y2 met stapgrootte 0,5:

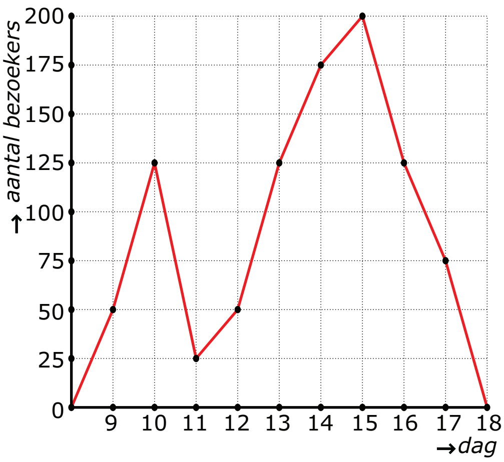


b De staafjes die omlaag gaan, gaan maar op één interval steeds verder omlaag.

c Drie keer wisselt de toename van positief naar negatief of omgekeerd, bij $x = -1{,}5$, $x = 0{,}5$ en $x = 2{,}5$. Dat duidt op drie extremen op dit interval.

9 a Zie de tabel.

t	N	ΔN
0	0	-
9	50	50
10	125	75
11	25	-100
12	50	25
13	125	75
14	175	50
15	200	25
16	125	-75
17	75	-50
18	0	-75



b In de grafiek bij deelvraag a is te zien dat de top van het aantal bezoekers rond 15:00 zit. Toen waren er dus de meeste bezoekers.

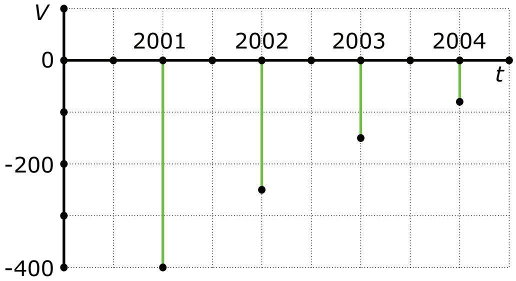
c Nee, dat kan niet precies. Je hebt maar één keer per uur gemeten, dus er kunnen halverwege dat uur meer bezoekers zijn geweest dan aan het eind.

10 a V invoeren in GR en tabel maken:

t	0	1	2	3	4	5	6
V	-667	-400	−240	-144	-86	-52	-31

De formule komt redelijk overeen met de gevonden verschillen.

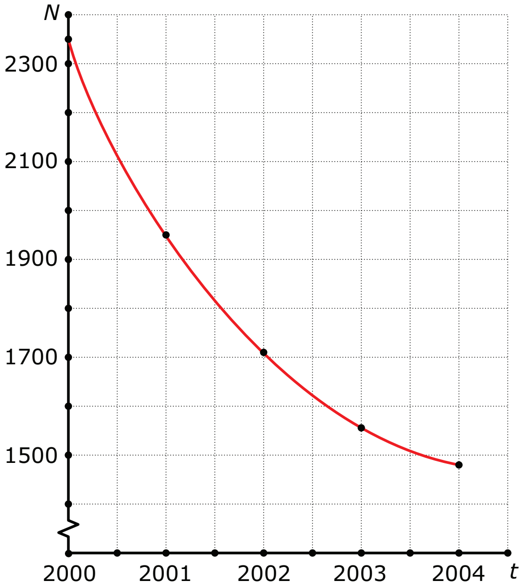
b Maak eerst een tabel.



Toelichting:

De gegevens uit de tabel van $V(t)$ zet je in een toenamediagram.

c Zie de grafiek:



Toelichting:

Je haalt steeds de waarde van V bij een bepaald jaar van de hoeveelheid vlinders van het jaar daarvoor af en zet die hoeveelheid bij dat jaar in de grafiek.

d Er is sprake van een afnemende daling. Je ziet dat de afnames in het afnamediagram steeds kleiner worden.

e De afnames naderen naar 0. De grafiek van N heeft dan een horizontale asymptoot.

11 a A

Diagram A, de toename wordt minder tot bijna 0 waarna de toename weer stijgt.

b $\frac{TK(8000)-TK(4000)}{TK(4000)} \cdot 100\% = \frac{25000-19000}{19000} \cdot 100\% = \frac{6000}{19000} \cdot 100\% \approx 31{,}58$

Ongeveer 32% meer.

12 a Voer in: Y1=-4*(40-X)^3+150*(40-X)^2+16000

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 40$ en $0 \leq y \leq 50000$

b $\langle 0{,}15 \rangle$: afnemende stijging

$\langle 15; 27{,}5 \rangle$: toenemende daling

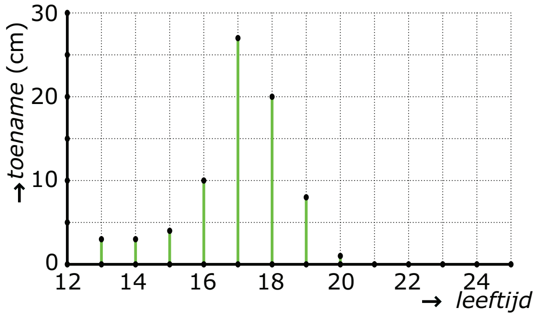
$\langle 27{,}5; 40 \rangle$: afnemende daling

c Na 15 dagen.

Gebruik de GR om de t-coördinaat bij het maximum te bepalen.

d Maak een toenamediagram met de GR. Je ziet dan dat na 14 dagen voor het eerst minder dan 1500 mensen meer last hebben van het ongeval dan twee dagen daarvoor.

13 a Zie het toenamediagram:



Toelichting:

Je neemt steeds de lengte op een bepaalde leeftijd en trekt daar de lengte van het jaar ervoor af. De uitkomst zet je bij de gekozen leeftijd in het toenamediagram. Bijvoorbeeld:

$l(13) - l(13-1) = 108 - 105 = 3$ cm. Dus staat bij leeftijd 13 jaar: 3 cm toename.

b De grafiek daalt als de toename negatief is. In dit geval is de toename altijd positief of gelijk aan 0.

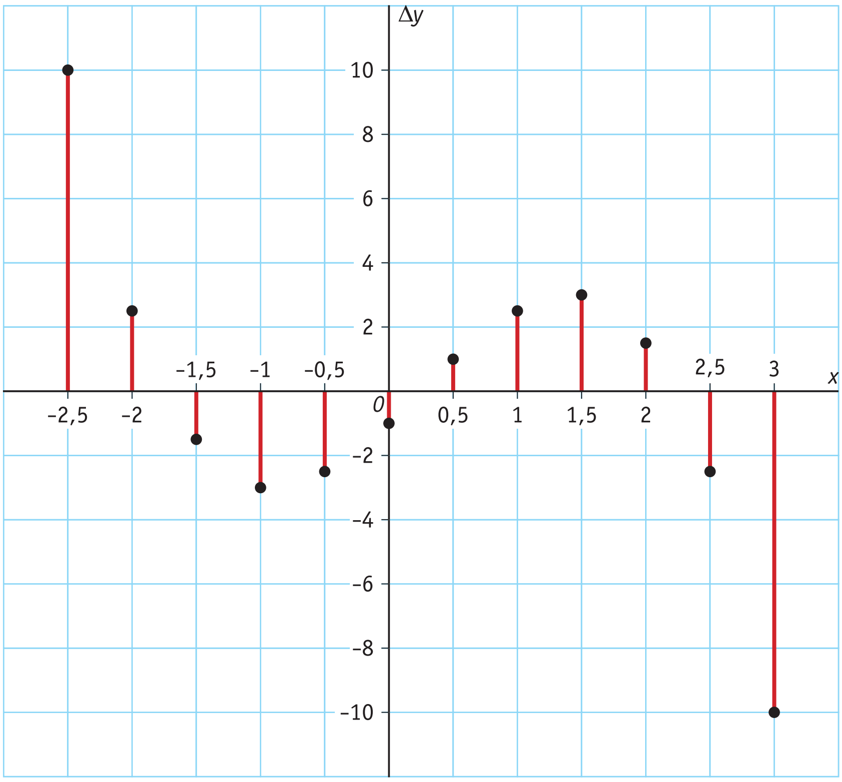
c Er is om het jaar gemeten, wat er binnen zo'n jaar gebeurt weet je niet. Iemand kan het eerste half jaar bijvoorbeeld kleiner worden, maar in het tweede half jaar minstens evenveel groter worden.

d Ongeveer vanaf zijn 20e verjaardag. De toenames zijn dan vrijwel 0.

e In het toenamediagram is te zien dat de toenames tussen zijn 12e en 15e verjaardag en na zijn 20e verjaardag constant zijn. Dat betekent dat de groeisnelheid ook constant is.

14 a GR: Y1=-0.5X^4+4X^2 en Y2=Y1(X)−Y1(X−0.5); tabel met stapgrootte 0,5 vanaf $x = -3$.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Δy		10,0	2,5	-1,5	-3,0	-2,5	-1,0	1,0	2,5	3,0	1,5	-2,5	-10,0

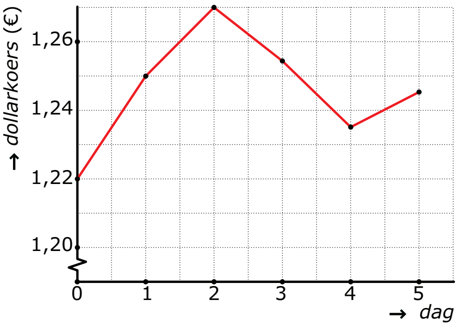


b De staafjes die omlaag gaan, gaan maar op één interval steeds minder ver omlaag.

c Extremen bevinden zich op plekken waar een daling verandert in een stijging of andersom. In een toenamediagram zijn dit plekken waar de toename van negatief naar positief gaat of andersom. Op die overgangen bevindt zich dus een extreme waarde van de functie.

15 Maak eerst een tabel bij het toenamediagram:

dag	zo	ma	di	wo	do	vrij
toename		0,026	0,02	- 0,015	- 0,02	0,01
dollarkoers	1,174	1,2	1,22	1,205	1,185	1,195



3.3 Differentiequotiënt

V1 a Sneller. Hij legt de eerste 8 km in 10 minuten af, dat is 0,8 km per minuut. De volgende 4 km doet hij in 8 minuten, dat is maar 0,5 km per minuut.

b Bij een toenamediagram is het belangrijk dat je regelmatig meetpunten hebt. Deze tijden zijn niet na vaste afstanden gemeten, dus is het niet mogelijk om een toenamediagram te maken.

c Je neemt daarvoor de richtingscoëfficient van dat lijnstuk. Anders gezegd: De verandering van de afstand gedeeld door de verandering van de tijd.

d $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18-12}{34-18} = \frac{6}{16} = 0{,}375$ km/min.

e Zoveel kilometer heeft de wielrenner per minuut gereden op dat moment, in andere woorden: dit is zijn/haar gemiddelde snelheid.

1 a $\Delta t = 6 - 0 = 6$

$\Delta s = 1{,}2 \cdot 6^2 - 1{,}2 \cdot 0^2 = 43{,}2$

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{43{,}2}{6} = 7{,}2$ m/s

b $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot 10^2 - 1{,}2 \cdot 6^2}{10-6} = 19{,}2$ m/s

c Op [6,10].

2 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} \approx \frac{2{,}3-0{,}9}{4} = 0{,}35$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} \approx \frac{1{,}4-2{,}2}{2} = \text{-}0{,}4$

c $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} \approx \frac{4{,}3-0{,}9}{5} = 0{,}68$

d Bijvoorbeeld op het interval [5,6].

3 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-0}{1-\text{-}2} = 1.$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-3}{1-\text{-}1} = 0.$

4 a $\frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{5^2-5\cdot 5+4-(2^2-5\cdot 2+4)}{3} = \frac{6}{3} = 2$

b $\frac{f(6)-f(\text{-}3)}{6-\text{-}3} = \frac{6^2-5\cdot 6+4-\left((\text{-}3)^2-5\cdot\text{-}3+4\right)}{9} = \frac{\text{-}18}{9} = \text{-}2$

c De twee punten op de grafiek zouden dan dezelfde y-coördinaat moeten hebben. Je kunt twee punten vinden door op de GR een horizontale lijn te tekenen door de grafiek, en dan de snijpunten berekenen. Neem bijvoorbeeld als horizontale lijn $y = 4$. Je vindt dan $x = 0$ en $x = 5$. Op het interval [0,5] is de gemiddelde verandering dus 0.

5 a Als je van alle tijdsintervallen de gemiddelde verkoop berekent komt het tijdsinterval van 12:00 tot 13:30 uur als hoogste eruit.

b De gemiddelde verkoop is $\frac{331-181}{80} = 1{,}875$ kaartjes per minuut.

6 a $\frac{15}{100} = 0{,}15$, dus de gemiddelde hoogteverandering per meter is 0,15 m.

b $\frac{250-100}{1000-0} = 0{,}15$. Dus 0,15 meter per meter.

c Nee, eigenlijk verwacht je dat de steilste helling wordt aangegeven.

d $\frac{220-210}{500-400} = 0{,}1$ m

e De laatste 100 meter is de gemiddelde helling ongeveer $\frac{65}{100}$.

Aan het eind is de helling dus ongeveer 65%.

7 a Het differentiequotiënt van f op het interval $[0,a]$ is $2a$. Neem a is 3 en je ziet dat het differentiequotiënt op het interval [0,3] gelijk is aan 6.

b $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{2 \cdot 4^2+5-(2 \cdot 1^2+5)}{3} = \frac{30}{3} = 10$

c Neem $a = 5$. Met de formule uit het voorbeeld zie je dat het differentiequotiënt op het interval [0,5] gelijk is aan $2 \cdot 5 = 10$.

8 a De gemiddelde verandering op een willekeurig interval $[a,b]$ is:
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{c-c}{b-a} = \frac{0}{b-a} = 0$.

b Het differentiequotiënt op een interval is de gemiddelde verandering op dat interval. Aangezien de grafiek van een lineaire functie $f(x) = ax + b$ een rechte lijn is, is het differentiequotiënt van f op elk interval gelijk aan het hellingsgetal a.

9 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{-1--2} = \frac{2}{1} = 2$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{4-1} = \frac{-2}{3}$

c Een differentiequotiënt van 0 betekent dat de helling in dat gebied gemiddeld 0 was. Het zijn dus lijnstukken met twee punten op dezelfde hoogte, dus DF en AE.

d Het differentiequotiënt is -2, dus negatief. De lijn is dalend.

10 a Coördinaten die bij dit interval horen, aflezen: (0; 6) en (2; 2).
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-6}{2-0} = \frac{-4}{2} = -2$

b Coördinaten die bij dit interval horen aflezen: (-1; 2) en (2; 2).
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-2}{2--1} = \frac{0}{3} = 0$

c De differentiequotiënt is 0. Dit kun je verklaren omdat de twee punten even hoog liggen, ze hebben dezelfde y-waarde.

11 a Als je van alle tijdsintervallen de gemiddelde snelheid berekent, komt [12,27] als hoogste uit.

b Cedric heeft een snelheid van $\frac{1{,}5}{6} = 0{,}25$ km/min. Dan doet hij over 10 kilometer dus $\frac{10}{0{,}25} = 40$ minuten. Dan finisht hij dus na Bram.

12 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a} = \frac{3(a+1)^2-3a^2}{1} = 3\left(a^2+2a+1\right) - 3a^2 = 3a^2 + 6a + 3 - 3a^2 = 6a + 3$

13 a $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{-1\frac{1}{3}-0}{2} = -\frac{2}{3}$

b Voer in: Y1=1/3X^3-2.5X^2+3X en Y2=-2/3X
Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 10$.

Je ziet dat de lijn $y = -\frac{2}{3}x$ de grafiek van f drie keer snijdt, namelijk bij $x = 0, x = 2$ en $x = 5{,}5$. Op de intervallen [0,2],[2; 5,5] en [0; 5,5] is het differentiequotiënt van f gelijk aan die bij a.

14 a $K(20) - K(0) = 0{,}01 \cdot 20^3 - 0{,}6 \cdot 20^2 + 13 \cdot 20 - \left(0{,}01 \cdot 0^3 - 0{,}6 \cdot 0^2 + 13 \cdot 0\right) = 100$ euro

b $\frac{K(20)-K(0)}{20-0} = \frac{100}{20} = 5$ euro per zak.

c (40,200)

d Ja, op alle punten waar K de lijn snijdt is de gemiddelde kostenstijging hetzelfde. Dus voor [20,40] is deze ook € 5,00 per zak.

15 a Koffie wordt ingeschonken bij $t = 0$, dus: $T(0) = 20 + 70 \cdot 0{,}82^0 = 20 + 70 \cdot 1 = 90$ °C.

b Stijging per minuut $= \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(5)-T(0)}{5-0} \approx \frac{45{,}95-90}{5} \approx -8{,}8$ °C/min.
Dus daling van 8,8 °C/min.

c Stijging per minuut $= \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(10)-T(5)}{10-5} \approx \frac{29{,}62-45{,}95}{5} \approx -3{,}3$ °C/min.

Er is over deze 5 minuten een gemiddelde daling van 3,3 °C/min.

d De differentiequotiënten worden steeds kleiner, dus daalt de temperatuur van de koffie steeds minder snel.

Natuurkundig gezien wordt het temperatuursverschil met de omgeving steeds kleiner, dus koelt de koffie steeds minder snel af.

16 a Differentiequotiënt = $\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{8-0}{10-0} = \frac{8}{10} = 0{,}8$ km/min.

b Het is de gemiddelde snelheid gedurende die periode.

c Het hellingsgetal is $\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{29-23}{60-44} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ km/min.

d $\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{23-12}{44-18} = \frac{11}{26} = 0{,}42$ km/min.

e A C

17 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{-4-4}{2-0} = -\frac{8}{2} = -4$.

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7)-f(-3)}{7--3} = \frac{-6{,}5-23{,}5}{10} = -\frac{30}{10} = -3$.

c De twee punten op de grafiek zouden dan dezelfde y-coördinaat moeten hebben. Je kunt twee punten vinden door op de GR een horizontale lijn te tekenen door de grafiek, en dan de snijpunten berekenen. Neem bijvoorbeeld als horizontale lijn $y = -8$. Je vindt dan $x = 4$ en $x = 6$. Op het interval [4,6] is de gemiddelde verandering dus 0. Een ander interval waarvoor dat geldt is bijvoorbeeld [3,7].

3.4 Differentiaalquotiënt

V1 a $1{,}2 \cdot 5^2 = 30$ m.

De snelheid bereken je met een tabel differentiequotiënten op $[5{,}5 + h]$ met $h \to 0$.
Zie de.
Je vindt een snelheid van 12 m/s.

b Bereken de snelheden voor $t = 0{,}1{,}2{,}3{,}...$

t	0	1	2	3	4
$v(t)$	0	2,4	4,8	7,2	9,6

Bij deze tabel past de formule $v(t) = 2{,}4t$.

1 a B

b Ga na, dat je dezelfde uitkomsten krijgt.

c 9,6 m/s.

d C

e Maak eerst deze tabel:

interval	differentiequotiënt
$[5; 5{,}1]$	12,12
$[5; 5{,}01]$	12,012
$[5; 5{,}001]$	12,0012
$[5; 5{,}0001]$	12,000 12

Het differentiaalquotiënt wordt 12 m/s.

f Hij gaat door $P(5{,}30)$.
De vergelijking heeft de vorm $s = 12t + b$.
Invullen van de coördinaten van P geeft $b = -30$.
De vergelijking van de raaklijn is dus $s = 12t - 30$.

2 a A C

b B

3 a Zie de tabel.

interval	differentiequotiënt
$[2; 2{,}1]$	-4,1
$[2; 2{,}01]$	-4,01
$[2; 2{,}001]$	-4,001
$[2; 2{,}0001]$	-4,0001

b Het differentiaalquotiënt voor $x = 2$ is -4.

c Die vergelijking heeft de vorm $y = -4x + b$.

Omdat $f(2) = 0$ gaat de raaklijn door $(2{,}0)$, dus $b = 8$.

De vergelijking van de raaklijn is $y = -4x + 8$.

4 a De helling is bij $t = 4$ iets steiler dan bij $t = 16$.

b 0

c Ongeveer 5 minuten. De grafiek is ongeveer lineair tussen $t = 11$ en $t = 16$, dus hier is met een constante snelheid gereden.

d Een raaklijn aan de grafiek gaat ongeveer door $(4{,}4)$ en $(2{,}0)$.

Dan is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4-0}{4-2} = 2$.

De snelheid van de auto is dan dus ongeveer 2 km/minuut.

5 a $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2-2^2}{2+h-2} = \frac{2^2+4h+h^2-2^2}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4 + h$.

Met $h \rightarrow 0$ vind je het differentiaalquotiënt van 4.

b $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 4$

c $y = 4x + b$

De raaklijn gaat in ieder geval door het punt (2,4).
$y = 4x + b$geeft $4 = 4 \cdot 2 + b$ en dus $b = -4$.

Dus: $y = 4x - 4$.

d De functie is een parabool. Een parabool heeft een symmetrieas, hier $x = 0$.

Dus in (-2,4) is de helling het tegenovergestelde van die in (2,4).

e In (0,0).

6 a Zie de tabel.

h	interval	berekening	differentiequotiënt
0,1	[2; 2,1]	$\frac{f(2+0{,}1)-f(2)}{0{,}1}$	7,89
0,01	[2; 2,01]	$\frac{f(2+0{,}01)-f(2)}{0{,}01}$	7,9899
0,001	[2; 2,001]	$\frac{f(2+0{,}001)-f(2)}{0{,}001}$	7,998999
0,0001	[2; 2,0001]	$\frac{f(2+0{,}0001)-f(2)}{0{,}0001}$	7,99989999

Het differentiequotiënt benadert het getal 8, dus het hellingsgetal voor $x = 2$ zal 8 zijn.

b In het punt met $x = 2$ stijgt de grafiek. Bij stijgen is het hellingsgetal positief.

c $y = ax + b$;

hellingsgetal $a = 8$.

$f(2) = 5 \cdot 2^2 - 2^3 = 5 \cdot 4 - 8 = 12$, dit geeft het punt = (2,12).

Dit punt invullen in de formule van de raaklijn:

$12 = 8 \cdot 2 + b = 16 + b$ geeft $b = 12 - 16 = -4$ dus $y = 8x - 4$.

7 a De raaklijn aan de grafiek gaat door (0,4) en (2,3).

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-3}{2-0} = -\frac{1}{2}$

b $y = -\frac{1}{2}x + 4$

c Voer in: Y1=5−√(2X) en gebruik de optie dy/dx.

8 a $g(x)$ invullen in GR; dy/dx voor $x = 1$ laten bepalen: -4.

b De grafiek is puntsymmetrisch ten opzichte van (0,0). Het spiegelbeeld van punt (1,4) is hier (-1, -4). In dat punt is de waarde van de helling dus hetzelfde.

c Aangezien er geen functiewaarde is in dat punt, is er ook geen raaklijn en dus geen hellingsgetal.

De grafiek heeft voor $x = 0$ een verticale asymptoot, want bij x-waarden rond $x = 0$ worden de functiewaarden heel groot of juist heel klein, maar x zal nooit 0 worden.

9 a De grafiek is afnemend dalend.

b $C(0) = 10 \cdot 0{,}9^0 = 10$;

$C(5) = 10 \cdot 0{,}9^0 \approx 5{,}9$;

$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{10 \cdot 0{,}9^5 - 10 \cdot 0{,}9^0}{5-0} = \frac{-4{,}09}{5} = -0{,}819$;

Over de eerste 5 uur is de gemiddelde hoeveelheid stof die per uur verdwijnt: 0,82 g/L.

c Met de GR: $Y1 = 10 \cdot 0{,}9^X$ en dan $\frac{dy}{dx}$ gebruiken.

Ongeveer - 0,62 g/L per uur.

10 a Gemiddelde groei is: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{5{,}6-0}{5-0} = 1{,}12$ m/jaar

b De raaklijn bij vijf jaar gaat ongeveer door (5; 5,6) en (2,4).

Bepaal het differentiequotiënt van de raaklijn: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{5{,}6-4}{5-2} = 0{,}53$.

De boom groeit na vijf jaar dus met ongeveer 0,53 m/jaar.

c Na 2 jaar gaat de toenemende stijging over in een afnemende stijging. Op dat punt is de stijging dus het grootst. De grafiek loopt daar ook het steilst omhoog.

d Uiteindelijk is de boom uitgegroeid en blijft de lengte gelijk, de groeisnelheid is dan dus 0 m/jaar. De grafiek krijgt een horizontaal karakter.

11 a Met de GR kun je berekenen dat de helling 10 is als $x = 0$.

b In de top is er geen stijging en geen daling, dus de helling is daar 0. Bepaal met de GR het maximum: 25 voor $x = 5$. De top is (5,25).

c Bij $x = 8$ spat hij uiteen en $h(8) = -\left(8^2\right) + 10 \cdot 8 = 16$ meter hoog.

Helling bepalen bij $x = 8$ met de GR: - 6.

12 a $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(5)-y(0)}{5-0} = \frac{4{,}9 \cdot 5^2 - 4{,}9 \cdot 0^2}{5} = \frac{4{,}9 \cdot 25 - 0}{5} = 24{,}5$ m/s

b Differentiequotiënt $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$

h	interval	berekening	differentiequotiënt
0,1	[5; 5,1]	$\frac{y(5+0{,}1)-y(5)}{0{,}1}$	49,49
0,01	[5; 5,01]	$\frac{y(5+0{,}01)-y(5)}{0{,}01}$	49,049
0,001	[5; 5,001]	$\frac{y(5+0{,}001)-y(5)}{0{,}001}$	49,0049
0,0001	[5; 5,0001]	$\frac{y(5+0{,}0001)-y(5)}{0{,}0001}$	49,00049

Het differentiequotiënt benadert het getal 49, de snelheid zal na 5 seconden dus ongeveer 49 m/s zijn.

Bepaal met GR de dy/dx bij $t = 5$; de GR geeft: 49 m/s.

c Steen raakt de grond als $y(t) = 4{,}9t^2 = 500$.

Dit geeft $t^2 = \frac{500}{4{,}9} \approx 102{,}04$, dus $t \approx \sqrt{102{,}04} \approx 10{,}1$ s.

De steen raakt de grond dus na 10,1 s.

Met de GR dy/dx bepalen bij $t = 10{,}1$; GR geeft 99 m/s.

13 a $\frac{2500 \cdot 1{,}2^4 - 2500 \cdot 1{,}2^0}{4-0} \approx 671$ kg/dag.

b Met de GR: Y1=2500*1,2^X en dy/dx gebruiken geeft $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=4} = -1 \approx 945$ kg/dag.

c Eerst een raaklijn tekenen aan de grafiek in het punt met $t = 4$. Vervolgens de richtingscoëfficiënt van die raaklijn aangeven in de grafiek.

14 a Zie de tabel.

interval	differentiequotiënt
$[3; 3{,}1]$	6,1
$[3; 3{,}01]$	6,01
$[3; 3{,}001]$	6,001
$[3; 3{,}0001]$	6,0001

GR: $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 6$

b De raaklijn gaat door (3,13).
De vergelijking is daarom $y = 6x - 5$.

c De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een top is 0, dus in het punt (0,4) is het hellingsgetal van de raaklijn 0.

3.5 Hellingsgrafiek

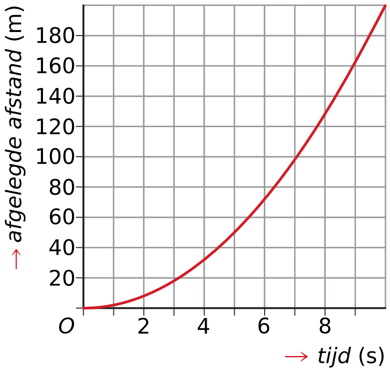
V1 a Het is een rechte lijn. Gaat door de punten (0,0) en (10,40);

het hellingsgetal is: $\frac{40-0}{10-0} = 4$;

het startgetal is: 0.

de formule wordt: $v = 4t$.

b Dat wordt een (halve) parabool:



c $s = 2t^2$ geeft $s(20) = 800$ m.

1 a Voer in je GR in Y1=X^2 en gebruik de optie dy/dx.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

b Vergelijk jouw grafiek met die in de uitleg.

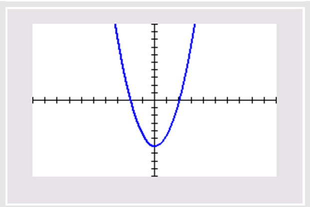
De grafiek voldoet aan $y = 2x$.

c Voor de x-waarde die hoort bij $f'(x) = 0$ heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn. Hier is dat voor $x = 0$.

2 a Zie de tabel.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	7,5	0	-4,5	-6	-4,5	0	7,5

b Voer in Y1=0.5X^3-6X en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/(0,001).



c Bij een top van een grafiek hoort een raaklijn met hellingsgetal 0.

d $y = ax + b$

Het hellingsgetal is: -4,5;

De raaklijn gaat in ieder geval door het punt (1; -5,5). Bereken b.

$$\begin{aligned} y &= -4{,}5x + b \\ -5{,}5 &= -4{,}5 \cdot 1 + b \\ -1 &= b \end{aligned}$$

$y = -4{,}5x - 1$

e f' heeft een minimum van -6 voor $x = 0$. De grafiek van f gaat daar van toenemend dalend over naar afnemend dalend.

3 a C

b C

c B

4 a C

b A B D

5 a D

b Grafiek B.

6 Grafiek B.

7 Zie de tabel.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g'(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

Deze tabel past bij een lineaire functie met hellingsgetal 2 en begingetal 0.

Dus $g'(x) = 2x$.

8 a Met de GR of via $\frac{dy}{dx}$ of via een hellingsgrafiek:

$a'(5) = 12$ m/s en dat is $12 \cdot 3{,}6 = 43{,}2$ km/h.

b De grafiek van $v(t)$ is de hellinggrafiek van $a(t)$.
Zo'n hellinggrafiek kun je met je GR tekenen. Voer in Y1=1.2*X^2 en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/(0.001) en je krijgt een goede benadering ervan. De hellinggrafiek is een rechte lijn door (0,0) en (5,12).

Van die rechte lijn is het hellingsgetal $\frac{12-0}{5-0} = 2{,}4$ en het begingetal 0.

De bijbehorende formule wordt: $v(t) = a'(t) = 2{,}4t$.

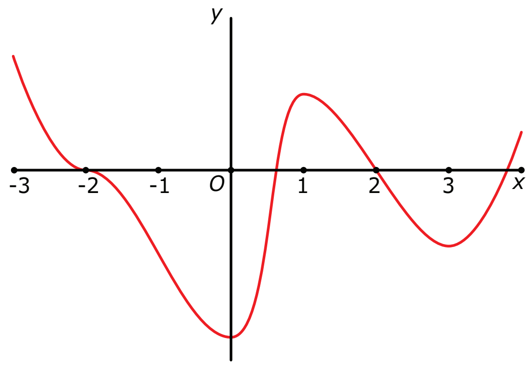
c 50 km/h is omgerekend: $\frac{50}{3{,}6} \approx 13{,}89$ m/s.

$v(t) = 13{,}89$ invullen: $2{,}4t \approx 13{,}89$ geeft $t \approx 5{,}8$ seconden.

Na 5,8 seconden beweegt de zeilwagen met een snelheid van 50 km/h.

9 De blauwe grafiek (met de langere streepjes).

10 Bijvoorbeeld zo. De ligging van de grafiek ten opzichte van de x-as kun je niet weten, net zo min als de mate van stijging of daling.



11 a Je ziet de hellingsgrafiek van f. De grafiek van f is stijgend als de hellingsgrafiek positief is (boven de x-as ligt), dus op het interval: ⟨-1,1⟩.

b Voor extreme waarden geldt vaak $f'(x) = 0$. Maar dit kunnen zowel minima als maxima zijn. Een maximum is te vinden als $f'(x)$ van positief naar negatief gaat. Dit is het geval bij $x = 1$.

c Nee, daarvoor moet je het functievoorschrift van f weten.

d Je grafiek moet in ieder geval door (0,2) gaan en een maximum hebben voor $x = 1$ en een minimum voor $x = -1$.

12 Voer in: Y1=0.5X^2+3X

Gebruik $\frac{dy}{dx}$. Maak een tabel van de hellingsfunctie:

x	0	1	2	3	4
$f'(x)$	3	4	5	6	7

Lineaire functie met hellingsgetal 1 en begingetal 3.

Functievoorschrift: $f'(x) = x + 3$.

13 a Vul elke functie in de GR in en bepaal $\frac{dy}{dx}$ als $x = 1$:

- $f'(1) = -2$
- $g'(1) = 0{,}5$
- $h'(1) = -4$
- $k'(1) = 0$

b Vul elke functie als Y1 in de GR in en neem Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/(0.001).

c Bij de extremen van de gekozen functie zit een nulpunt bij de hellingsfunctie van die grafiek, want de helling in een top is 0. Bepaal de nulpunten van de hellingsgrafiek:

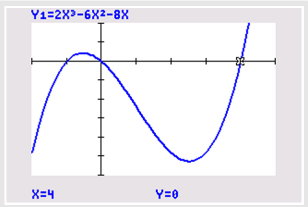
$f(x)$: $x = 0$, max.$f(0) = -\left(0^2\right) + 4 = 4$;

$g(x)$: $x = 0$, max.$g(0) = \sqrt{0^2 + 3} = \sqrt{3}$;

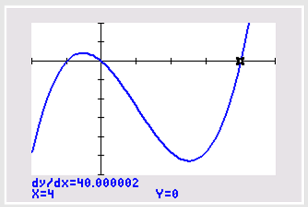
$h(x)$: geen nulpunten, geen extremen;

$k(x)$: $x = 1$, max.$k(1) = -\left(1^4\right) + 4 \cdot 1 = 3$.

14 a Voer in: Y1=2X^3-6X^2-8X
Venster bijvoorbeeld: $-2 \leq x \leq 5$ en $-30 \leq y \leq 10$.
Bereken met de GR het snijpunt van de grafiek met de x-as.



b Met de GR: gebruik $\frac{dy}{dx}$.



Het hellingsgetal bij dit punt is 40.

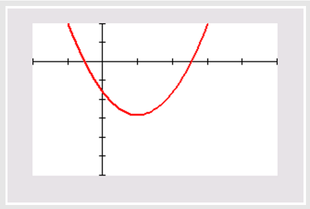
c Een raaklijn is een rechte lijn. Je zoekt de richtingscoëfficient a en het begingetal b.

De richtingscoëfficient is gelijk aan het hellingsgetal: 40.

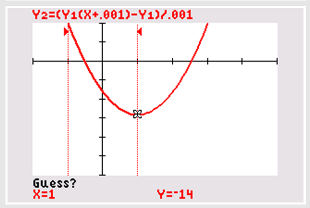
De lijn gaat in ieder geval door het punt (4,0).

De vergelijking van de raaklijn aan $f(x)$ door (4,0) is dan: $y = 40x - 160$.

d Voer in: Y1=2X^3-6X^2-8X en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(x))/(0.001).
Venster bijvoorbeeld: $-2 \leq x \leq 5$ en $-30 \leq y \leq 10$.



e Voer in: gebruik de hellingsgrafiek. Via menu calculate met de optie zero, krijg je:



$x \approx 2{,}53$ en $x \approx -0{,}53$ invullen in de oorspronkelijk functie levert:

min. $f(2{,}53) \approx -26{,}26$ en max. $f(-0{,}52) \approx 2{,}26$.

15 a De afgelegde weg wordt in meters uitgedrukt. De hellingsgrafiek geeft de verandering per seconde. De hellingsgrafiek wordt dus uitgedrukt in m/s.

Voer in: Y1=1.6X^2 en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/(0.001) en je ziet (een benadering van) de hellingsgrafiek.

b De richtingscoëfficient van de lijn blijkt 3,2 en het begingetal is 0, dus $v(t) = 3{,}2t$.

c v wordt uitgedrukt in m/s. Reken eerst de 80 km/h om: $\frac{80}{3{,}6} \approx 22{,}22$ m/s.

Invullen in de formule levert:

$22{,}22 = 3{,}2t$ en dus $t = \frac{22{,}22}{3{,}2} \approx 6{,}94$.

Na ongeveer 7 s is de snelheid meer dan 80 km/h.

16
- Grafiek 4 hoort bij model A want de helling is constant hetzelfde.
- Grafiek 1 hoort bij model B want de helling neemt voortdurend af.
- Grafiek 3 hoort bij model C want de helling neemt eerst toe en dan af maar blijft positief.
- Grafiek 2 hoort bij model D want de helling neemt eerst toe en dan af en wordt negatief.

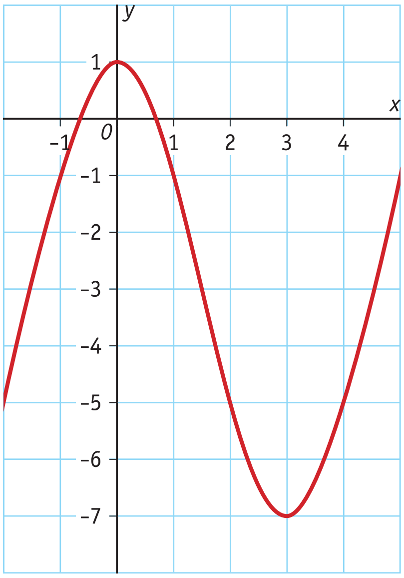
17 Gebruik de GR. Maak een tabel. Je vindt de grafiek van: $f'(x) = 2x - 4$.

18 De grafiek van g moet in ieder geval door het punt (2,4) gaan en drie extremen hebben: maxima voor $x = -3$ en $x = 3$ en een minimum voor $x = 0$.

19 a Tot $x = 0$ stijgt de grafiek en na $x = 0$ daalt de grafiek weer. Daar is de grafiek dus maximaal gestegen, dus daar zit een maximum.

b Bij het interval $\langle 0,3 \rangle$ staan mintekens, dat gedeelte van de grafiek is dus dalend.

c Mogelijke schets van de grafiek:



De grafiek van f moet in ieder geval door (0,1) gaan en heeft twee extremen: een maximum voor $x = 0$ (zie opdracht a) en een minimum voor $x = 3$ (waar de grafiek maximaal gedaald is).

3.6 Totaalbeeld

1 a $f(1) = -11$

$f(-3) = -27$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(-3)}{1--3} = \frac{16}{4} = 4$

b Voer in: Y1=X^3-3X^2-9X en bijvoorbeeld Y2=0

Met de optie intersect vind je nu twee (of drie) punten op de grafiek die dezelfde y-waarde hebben, namelijk $y = 0$. Op dat interval is het differentiequotiënt dus 0.

Bijvoorbeeld $[-1{,}854; 0]$.

c Zie de tabel.

interval	differentiequotiënt
[1; 1,001]	- 11,9999
[1; 1,0001]	- 11.999999

$f'(1) = -12$.

Je kunt ook de optie dy/dx op de GR gebruiken.
Verder gaat de raaklijn door het punt $(1, -11)$. Invullen levert: $-11 = -12 \cdot 1 + b$.
Hieruit volgt: $b = 1$.
De raaklijn heeft de vergelijking: $y = -12x + 1$.

d Zo'n hellinggrafiek kun je met je GR tekenen.
Voer in Y1=X^3-3X^2-9X en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/(0.001) en je krijgt een goede benadering ervan.

e In een extreem punt is de helling 0. Daar zit dus een nulpunt in de hellingsgrafiek. Zoek de nulpunten van de hellingsfunctie. Je vindt: min. $> f(3) = -27$ en max. $> f(-1) = 5$.

2 a $t = 10$ invullen:

$h(10) = 60 \cdot 10 - 5 \cdot (10)^2 = 600 - 500 = 100$

Op 100 meter hoogte ontploft de pijl.

b GR: Y1=60X-5X^2 en Y2=Y1(X+1)-Y1(X) en bekijk de tabel met toenames.

c $h(6) = 180$

$h(0) = 0$

$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{180-0}{6-0} = \frac{180}{6} = 30$

De gemiddelde snelheid van de vuurpijl over de eerste 6 seconden is 30 m/s.

d Je kunt met de GR de helling bij $t = 4$ bepalen. Het getal dat hier uit komt is de snelheid in meter per seconde. Je vindt 20 m/s.

e GR: Y1=60X-5X^2 en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/0.001 en bekijk de tabel met (benaderde) hellingsgetallen.
Plot de grafiek van Y2.

f Bekijk met een tabel enkele waarden:

t	0	1	2	3
v	60	50	40	30

Uit de tabel kun je opmaken dat het begingetal gelijk is aan 60 en het hellingsgetal gelijk is aan -10.

$v = 60 - 10t$

$t = 10$ levert op $v(10) = 60 - 10 \cdot 10 = -40$ m/s.

3 a Het migratiesaldo is positief. Dat betekent dat er netto 3500 mensen zijn bijgekomen.

Hetzelfde geldt voor het geboorteoverschot, waar 2100 meer baby's zijn geboren dan dat er mensen overleden zijn.

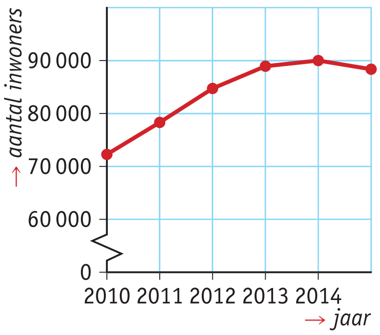
In totaal zijn er in het jaar 2010: 3500 + 2100 = 5600 mensen bijgekomen.

b Je vindt negatieve waarden voor het migratiesaldo in 2013 en 2014. Maar door het geboorteoverschot komen er in 2013 toch nog netto 1200 mensen bij. Pas in 2014 is er een netto afname.

c Zie de tabel.

jaartal	migratiesaldo	geboorteoverso	toename totaal	aantal inwoners
2010	3500	2100	5600	72600
2011	3700	2800	6500	78200
2012	1800	2300	4100	84700
2013	-700	1900	1200	88800
2014	-1200	-400	-1600	90000
2015				88400

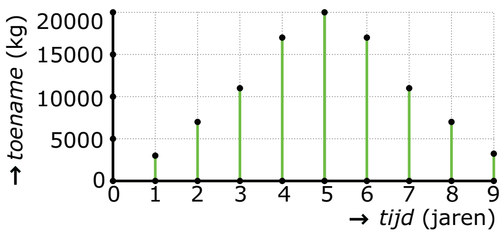
De toenames zijn achtereenvolgens: 5600, 6500, 4100, 1200 en −1600.
De aantallen inwoners zijn daarom: 72600 (begin 2010), 78200 (begin 2011), 84700 (begin 2012), 88800 (begin 2013), 90000 (begin 2014) en 88400 (begin 2015).



d 88400 inwoners

4 a Zie de tabel.

tijd	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
hoeveelheid	4000	6000	12000	23000	40000	60000	77000	88000	94000	96000
toename		2000	6000	11000	17000	20000	17000	11000	6000	2000



b In het vijfde jaar is de toename van het aantal kilogram vis het grootst (20000 kg).
Als de viskweker vijf jaar wacht is er 60000 kg vis en hij kan dan jaarlijks 20000 kg vis vangen, precies de toename in dat vijfde jaar. Zo houdt hij steeds tussen de 40000 en de 60000 kg vis.

5 a $23\frac{2}{3} \cdot 100$ euro.

b GR: Y1=-(1/3)X^3+6X^2 en Y2=Y1(X)−Y1(X−1)
De boer zal 7 bietenwieders in dienst nemen.

c De 6e en de 7e bietenwieder hebben de hoogste meeropbrengst en brengen dus het meeste binnen tegen dezelfde loonkosten.

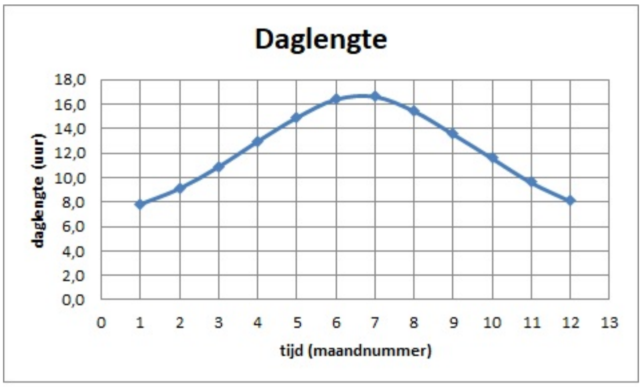
6 a September/oktober en maart/april; de grafiek is daar het steilst.

b Ja, in dezelfde maanden. Dit heeft te maken met de plaats van Nederland op Aarde en het feit dat de Aardas niet loodrecht staat op het vlak waarin de baan van de Aarde om de Zon ligt.

c Je neemt het verschil van het tijdstip van zonsopkomst en zonsondergang.

d In juli, augustus en een deel van september.

e Zie de figuur.



f In dezelfde maanden als zonsopkomst en zonsondergang.

g In juni/juli en in december/januari. Toenames vrijwel 0.

h In augustus/september. Grote afnames (negatieve toenames).

7 a Het wordt de grafiek van $s(t) = 1{,}2t^2$ als je uitgaat van een afgelegde weg van 0 op $t = 0$.

b $v'(t) = 2{,}4t$ want de grafiek van v is een rechte lijn met een richtingscoëfficiënt van 2,4.

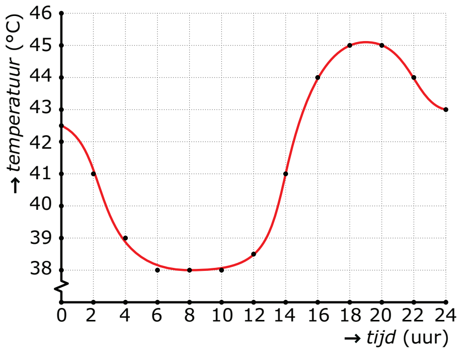
c De versnelling.

d $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2\cdot(t+h)^2 - 1{,}2\cdot t}{h} = \frac{2{,}4\cdot(th)+1{,}2\cdot h^2}{h} = 2{,}4t \ \ (h \to 0)$

8 a Lees uit de grafiek af dat de hagedis actief is tussen ongeveer 7:30 uur en 8:00 uur ’s morgens en tussen 18:00 uur en 18:30 uur ’s avonds. Dus in totaal ongeveer 1 uur.

b Ongeveer $\frac{40}{5} = 8$ °C/uur.

c Zie de figuur.



d Rond 12:00 uur.

9 a In 1975: $T \approx 1540$ mld liter per dag en $B \approx 215$ miljoen.
Per inwoner gemiddeld ongeveer 7163 liter per dag, dus per jaar $365 \cdot 7163 \approx 2600000$ liter per inwoner.

b In 1950: $\frac{625}{700} \cdot 100 \approx 89{,}3\%$.
In 1980: $\frac{1525}{1680} \cdot 100 \approx 90{,}8\%$ (het getal 1525 vind je door bij de hoeveelheid in 1950 alle toenames op te tellen)

c Tussen $1525 + 6 \cdot 110 = 2185$ en $1525 + 6 \cdot 200 = 2725$ mld liter per dag.

10 a Je kunt in de grafiek aflezen dat het roofdier na 0,5 uur 1,5 ee heeft gevangen. De dubbele hoeveelheid van 3 ee kun je aflezen bij 3 uur.

De tweede portie van 1,5 ee heeft het roofdier dus 2,5 uur gekost, 5 maal zoveel tijd als de eerste portie.

b De stippellijn gaat door de oorsprong en punt Q. Omdat punt P op deze stippellijn ligt, is de gemiddelde voedselopbrengst bij punt P hetzelfde als bij punt Q en dus 0,6 ee/uur.

c De lijn vanuit (0,0) met de steilste helling die nog raakt aan de grafiek geeft het punt met de hoogste gemiddelde opbrengst.

Na het tekenen van deze lijn vind je $t \approx 3$ uur.

d Voer in: Y1=4/(sqrt(X-1)) en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/(0.001).

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 6$ en $0 \leq y \leq 5$.

- De hellingsfunctie is overal positief (voor $t > 1$) dus de grafiek van de voedselopbrengst stijgt naarmate t groter wordt.
- De hellingsfunctie daalt dus de toename van de voedselopbrengst neemt af naarmate t groter wordt.

4

Exponentiële functies

4.1 Exponentiële groei

V1 a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{20} = 1048576$ lagen.

b Omdat het papier dan veel te dik wordt waardoor vouwen onmogelijk wordt.

c 1048576 lagen van 0,15 mm.

$1048576 \cdot 0{,}15 = 157286{,}4$ mm ≈ 157 meter.

d 1048576 lagen zijn samen 5 cm dik.

$\frac{5}{1048576} \approx 0{,}00000477$ cm per laag $\approx 0{,}00005$ mm per laag papier.

1 a Het getal waarmee de hoeveelheid bacteriën elk uur wordt vermenigvuldigd.

b Per uur verdubbelt het aantal bacteriën. Het aantal bacteriën gaat dus van 100% naar 200%. Er komt dus 100% bij.

c $B(12) = 6 \cdot 2^{12} = 24576$ milligram bacteriën na 12 uur.

d $B(12) = 6 \cdot 2^{12} = 24576$ milligram bacteriën na 12 uur.

Een uur later hebben de bacteriën zich weer verdubbeld, dus $24576 \cdot 2 = 49152$ milligram bacteriën na 13 uur.

Of: $B(13) = 6 \cdot 2^{13} = 49152$ milligram bacteriën na 13 uur.

e $B(15) = 6 \cdot 2^{15} = 196608$ milligram bacteriën.

2 a $2^4 \cdot 2^{14} = 2^{4+14} = 2^{18}$

b $3^3 \cdot 3^5 = 3^{3+5} = 3^8$

c $\frac{5^9}{5^4} = 5^{9-4} = 5^5$

d $\left(6^3\right)^6 = 6^{3 \cdot 6} = 6^{18}$

3 a $\frac{150}{50} = \frac{450}{150} = \frac{1350}{450} = \frac{4050}{1350} = \frac{12150}{4050} = \frac{36450}{12150} = 3$

Er is dus sprake van exponentiële groei.

Omdat je de hoeveelheid bacteriën elk uur met hetzelfde getal vermenigvuldigt is er sprake van exponentiële groei.

b 3

c $36450 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 984150$ milligram bacteriën

4 a Zijn geld groeit elk jaar met 6%, dus zijn geld wordt 106%, dus de groeifactor is 1,06.

b Hij begint met € 800,00 en heeft vijf jaar lang een groeifactor van 1,06:

$800 \cdot 1{,}06^5 = 1070{,}58$ euro

c Hij begint met € 800,00 en heeft elk jaar een groeifactor van 1,06:

$S = 800 \cdot 1{,}06^t$

d $1{,}06^5 = 1{,}34$ is de groeifactor per vijf jaar.

Groeifactor van 1,34 staat gelijk aan groeipercentage van 34.

e Je vindt telkens ongeveer € 2565,71.

- $S(20) = 800 \cdot 1{,}06^{20} = 2565{,}71$
- $1{,}06^4 = 1{,}2624$ dus $800 \cdot 1{,}2624^5 = 2565{,}71$
- $1{,}06^5 = 1{,}3382$ dus $800 \cdot 1{,}3382^4 = 2565{,}71$

5 a Doen.

b $A(t) = 784 \cdot 0{,}97^t$

c In 2022 is $t = 7$ als je van $t = 0$ in 2000 uitgaat.
Dan is $a \approx 496$, dus het aantal abonnees is dan onder de 500000.

6 Zie de tabel.

procentuele toename per jaar	13	-6	0,3	15	-2	295	-99
groeifactor per jaar	1,13	0,94	1,003	1,15	0,98	3,95	0,01

7 a $3^{83} \cdot (3^{40})^2 = 3^{83} \cdot 3^{80} = 3^{83+80} = 3^{163}$

b $\frac{2^{214} \cdot 2^{80}}{(2^{12})^{24}} = \frac{2^{214+80}}{2^{12 \cdot 24}} = \frac{2^{294}}{2^{288}} = 2^6$

c $\frac{(3^{21})^4 \cdot 3^{41}}{(3^3)^9} = \frac{3^{84} \cdot 3^{41}}{3^{27}} = \frac{3^{125}}{3^{27}} = 3^{125-27} = 3^{98}$

d $\frac{(2^2)^9 \cdot 2^4}{(2^4)^3} = \frac{2^{18} \cdot 2^4}{2^{12}} = \frac{2^{22}}{2^{12}} = 2^{10}$

8 a De oppervlakte wordt elk jaar drie keer zo groot, dus de groeifactor is 3.
Het startgetal is 2 km^2:
$R = 2 \cdot 3^t$

b Zie de tabel.

jaar	2014	2015	2016	2017	2018	2019
R	2	6	18	54	162	486

$R(t) = 2 \cdot 3^t$ invullen van $t = 0$ tot en met $t = 5$ en invullen in tabel.

c $R(5) = 2 \cdot 3^5 = 486$ km^2 op 1 januari 2019.

$R(6) = 2 \cdot 3^6 = 1458$ km^2 op 1 januari 2020.

Het meer is 1000 km^2, in het jaar 2019 is het hele meer voor het eerst helemaal begroeid met riet.

9 Zie de tabel.

p	17	0,7	105,1	-9	-0,15	-22	-93	2	296
g	1,17	1,007	2,051	0,91	0,9985	0,78	0,07	1,02	3,96

10 a $2^{41} \cdot 2^{39} = 2^{41+39} = 2^{80}$

b $\frac{2^4}{2} = \frac{2^4}{2^1} = 2^{4-1} = 2^3$

c $(5^3)^2 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$

d $\frac{2^{512}}{2^{509}} = 2^3$

e $5^8 \cdot 5^3 = 5^{11}$

11 a Het startgetal van 5000 daalt per jaar met 4%. Er blijft elk jaar dus $100 - 4 = 96$% over.

De groeifactor is daarom $\frac{96}{100} = 0{,}96$. Dus:

$N = 5000 \cdot 0{,}96^t$

b In 2024 is $t = 10$
$5000 \cdot 0{,}96^{10} \approx 3324$
Er zijn dan 3324 herten in het natuurgebied.

c De groeifactor per 10 jaar: $0{,}96^{10} \approx 0{,}6648$.

Groeipercentage: $66{,}48 - 100{,}00 = -33{,}52$%.

d Het aantal herten is gehalveerd als $N = 2500$.
Functie invullen in GR.
Aflezen uit tabel wanneer N voor het eerst kleiner dan 2500 is.

$N(16) \approx 2602$

$N(17) \approx 2498$

In de loop van 2030 is het aantal herten gehalveerd.

12 a $\frac{(2^{30})^{12} \cdot 2^{60}}{2^{343} \cdot 2^{77}} = \frac{2^{360} \cdot 2^{60}}{2^{343} \cdot 2^{77}} = \frac{2^{420}}{2^{420}} = 1$

b $\frac{64^{56}}{(2^7)^{12}} = \frac{(2^6)^{56}}{(2^7)^{12}} = \frac{2^{336}}{2^{84}} = 2^{252}$

c $\frac{(3^{16})^{10}}{3^{10} \cdot (3^3)^{24}} = \frac{3^{160}}{3^{10} \cdot 3^{72}} = \frac{3^{160}}{3^{82}} = 3^{160-82} = 3^{78}$

d $\frac{3^{214}}{3^{211}} \cdot 81^{25} = 3^3 \cdot \left(3^4\right)^{25} = 3^3 \cdot 3^{100} = 3^{103}$

13 a $\frac{10850}{10415} \approx 1{,}04$; $\frac{11300}{10850} \approx 1{,}04$; $\frac{11760}{11300} \approx 1{,}04$; $\frac{12250}{11760} \approx 1{,}04$; $\frac{12760}{12250} \approx 1{,}04$

Als je twee opvolgende kapitalen deelt, vind je telkens ongeveer 1,04. Een constante vermenigvuldigingsfactor duidt op een exponentiële toename.

b Nieuwe percentage per jaar: $1{,}04 \cdot 100 = 104\%$.
Groei is dus ongeveer $104 - 100 = 4\%$ per jaar en dat is het rendement.

c Groeipercentage 8, nieuwe percentage is $8 + 100 = 108\%$.

Groeifactor: $\frac{108}{100} = 1{,}08$.

Startgetal: 10000.

Dus: $K(t) = 10000 \cdot 1{,}08^t$.
Invullen in GR. Tabel van $t = 0$ tot $t = 10$ bekijken.

d Kapitiaal is verdubbeld als $K = 20000$.

Na 9 jaar: $K \approx 19990$

Na 10 jaar: $K \approx 21589$

Dus kapitaal is na tien jaar verdubbeld.

e Na vijf jaar:
Groeipercentage van 14.

Dus groeifactor is $\frac{14+100}{100} = 1{,}14$.

Startgetal is 10000.

$K(5) = 10000 \cdot 1{,}14^5 = 19254{,}15$ euro.

Na tien jaar:
Groeipercentage van 4.

Dus groeifactor is $\frac{4+100}{100} = 1{,}04$.

Startgetal is 19254,15.

$K(5) = 19254{,}15 \cdot 1{,}04^5 = 23425{,}61$ euro.

f $K = \left(10000 \cdot 1{,}14^5\right) \cdot 1{,}04^5 = 23425{,}61$

$K = \left(10000 \cdot 1{,}04^5\right) \cdot 1{,}14^5 = 23425{,}61$

Het maakt dus geen verschil.

14 Zie de tabel.

leeftijd	15	16	17	18	19	20	21	22
zakgeld Mark	10	20	40	80	160	320	640	1280
zakgeld Peter	105	205	305	405	505	605	705	805

Vanaf hun 22ste levensjaar krijgt Mark voor het eerst meer zakgeld dan Peter.

15 a Groeipercentage van 4%. Dus groeifactor is $\frac{4+100}{100} = 1{,}04$. Startgetal is € 950,00.

$H = 950 \cdot 1{,}04^t$, met H als huurbedrag in euro en t de tijd in jaren nadat de huur € 950,00 was.

b Zie de tabel.

tijd (jaren)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
huur (euro)	950	988	1027,52	1068,62	1111,36	1155,82	1202,05	1250,13	1300,14

Tabel moet doorlopen tot $H > 1300$, dus tot $t = 8$.

c $1{,}04^4 \approx 1{,}17$

d 20 jaar is vijf periodes met groeifactor 1,17, dus:

$1{,}17^5 \approx 2{,}19$.

e Het groeipercentage is het percentage dat bovenop de 100% van het begin is gekomen. Die 100% is nu $100 \cdot 2{,}19 = 219\%$ geworden. Het groeipercentage is dus $219 - 100 = 119\%$.

f Verdubbeling bij $H(t) = 2 \cdot 950 = 1900{,}00$ euro. $H(t)$ invullen in GR, uitlezen in tabel wanneer H meer dan € 1900 is:

$H(17) \approx 1851$

$H(18) \approx 1925$

Na achttien jaar is de huur per maand dus meer dan verdubbeld.

16 a $\frac{17^{31} \cdot 17^{54}}{(17^3)^{21}} = \frac{17^{31+54}}{17^{3 \cdot 21}} = \frac{17^{85}}{17^{63}} = 17^{85-63} = 17^{22}$

b $\frac{2^{45} \cdot 64^{22}}{8^{20}} = \frac{2^{45} \cdot (2^6)^{22}}{(2^3)^{20}} = \frac{2^{45} \cdot 2^{132}}{2^{60}} = \frac{2^{177}}{2^{60}} = 2^{117}$

17 a Groeipercentage van -12. Dus groeifactor is $\frac{-12+100}{100} = 0{,}88$. Startgetal is € 5000,00.

$W(t) = 5000 \cdot 0{,}88^t$ met W als waarde in euro's en t de tijd in jaren.

b $W(t)$ invullen in GR. Tabel maken en uitlezen wanneer aandelen onder € 1000 komen.

$W(12) \approx 1078$

$W(13) \approx 949$

Dus na 13 jaar is de waarde minder dan € 1000,00 geworden.

c Groeifactor per 5 jaar: $0{,}88^5 \approx 0{,}528$.

Dat betekent dat er na 5 jaar nog 52,8% van de waarde over is. Het groeipercentage is dus $52{,}8 - 100 = -47{,}2\%$.

d Na 10 jaar is de waarde 2 keer met de groeifactor per 5 jaar vermenigvuldigd, dus: $5000 \cdot 0{,}528 \cdot 0{,}528 =$ € 1392,50 is de waarde van de aandelen na 10 jaar.

Let op: Neem hiervoor wel de onafgeronde waarde van de groeifactor na 5 jaar, anders volgt een andere uitkomst.

e Groeifactor per 10 jaar: $(0{,}88^5)^2 \approx 0{,}279$.

Dat betekent dat er na 10 jaar nog 27,9% van de waarde over is. Het groeipercentage is dus $27{,}9 - 100 = -72{,}1\%$.

4.2 Reële exponenten

V1 a 11:00 is op $t = -1$ dus $B = 600 \cdot 2^{-1} = 300$.

b Vooruit in de tijd verdubbelt het aantal bacteriën zich elk uur. Terug in de tijd halveert het aantal bacteriën zich dus elk uur. Terug in de tijd is de groeifactor daarom $\frac{1}{2}$.

c Ja, door bijvoorbeeld de groeifactor per kwartier te gebruiken. Die is $2^{0,25} = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}189$

1 a Je wilt het aantal milligram bacteriën weten vier uur voor $t = 0$.
Je vult dus $t = -4$ in de formule in.

b $600 \cdot 2^{-4} = 37{,}5$ milligram

Vooruit in de tijd verdubbelt het aantal bacteriën zich elk uur. Terug in de tijd halveert het aantal bacteriën zich elk uur. Terug in de tijd is de groeifactor daarom $\frac{1}{2}$. Vier uur terug in de tijd geeft:

$600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 37{,}5$

2 a Je wilt $2\frac{1}{2}$ uur na $t = 0$ weten. Je vult daarom $t = 2\frac{1}{2}$ in in de formule.

b Groeifactor per uur is 2 en $t = 2\frac{1}{2}$.

$B\left(2\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot 2^{2\frac{1}{2}} \approx 3394$.

Groeifactor per half uur is $2^{0,5} = \sqrt{2}$.

Na $2\frac{1}{2}$ uur geldt dus: $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \approx 3394$.

3 a In drie uur verdubbelt het aantal bacteriën zich drie keer, dus $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

b De groeifactor per t uren is 2^t. De groeifactor per half uur is dus $2^{0,5} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$.

c De groeifactor per t uren is 2^t. De groeifactor per kwartier is dus $2^{0,25} \approx 1{,}19$.

d Na vijf uur: $600 \cdot 2^5 = 19200$.

Na 5,5 uur: $600 \cdot 2^{5,5} = 272152$.

Na 5,75 uur: $600 \cdot 2^{5,75} = 32290$.

e Aantal na vijf uur: $B(5) = 6 \cdot 2^5 = 192$

Groeifactor na 0,5 uur: $2^{0,5}$

Groeifactor na 0,25 uur: $2^{0,25}$

Dus: $192 \cdot 2^{0,5} \cdot 2^{0,25} = 323$.

4 a $720 \cdot 1{,}12^{-6} \approx 365$

b Voer in: Y1=720*1.12^X
Maak een tabel.
Je ziet dat bij $t = -11$ het aantal leden 207 was. Dus de vereniging is in 1998 opgericht.

5 a Het kapitaal wordt per jaar 4,2% groter. Het nieuwe kapitaal is 104,2% van het oude. De groeifactor is dus $\frac{104{,}2}{100} = 1{,}042$. Het startbedrag was € 7500,00. Het kapitaal staat anderhalf jaar op de bank, dus $t = 1{,}5$.

$K(t) = 7500 \cdot 1{,}042^t = 7500 \cdot 1{,}042^{1,5} \approx 7977{,}43$ euro

b De groeifactor per half jaar is $1{,}042^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}0208$.

Het startbedrag was € 7500,00.
Kapitaal staat drie halve jaren op de bank dus $t = 3$.

$N(t) = 7500 \cdot \left(1{,}042^{\frac{1}{2}}\right)^t = 7500 \cdot \left(1{,}042^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 7977{,}43$ euro

c De groeifactor per maand is $1{,}042^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}0034$.

Het startbedrag was € 7500,00.
Kapitaal staat 12 + 6 = 18 maanden op de bank dus $t = 18$.

$$N(t) = 7500 \cdot \left(1{,}042^{\frac{1}{12}}\right)^{t} = 7500 \cdot \left(1{,}042^{\frac{1}{12}}\right)^{18} = 7977{,}43 \text{ euro}$$

6 a De halveringstijd is 5736 jaar. Dus er moet gelden $g^{5376} = 0{,}5$. Bereken met je GR de waarde van g per jaar. Deze is gelijk aan ongeveer 0,999879. Per 100 jaar vind je dan $0{,}999879^{100} = 0{,}987972$. De groeifactor per eeuw is afgerond op drie decimalen 0,988.

b Na t eeuwen met groeifactor 0,988 is er nog 38% C14 over: $0{,}988^{t} = \frac{38}{100} = 0{,}38$.

Oplossen met GR: $t \approx 80{,}15$ eeuwen
Het gebruiksvoorwerp is ongeveer 8015 jaar oud.

7 a 2015 is tien jaar na 2005, dus $t = 10$.

$25000 \cdot 1{,}1^{10} \approx 64844$ inwoners.

b Van 1 januari 2005 naar 1 augustus 2015 is $10\frac{7}{12}$ jaar, $t = 10\frac{7}{12}$.

$25000 \cdot 1{,}1^{10\frac{7}{12}} \approx 68551$ inwoners.

c Aflezen uit formule: 1,1.

d Maand is $\frac{1}{12}$ jaar dus $1{,}1^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}008$ is de groeifactor per maand.

Na een maand is het nieuwe percentage dus 100,8%.
Het groeipercentage is dan $100{,}8 - 100 = 0{,}8\%$.

e 2000 is vijf jaar voor 2005, dus bij $t = -5$:
$25000 \cdot 1{,}1^{-5} = 15523$ inwoners

1995 is tien jaar voor 2005, dus bij $t = -10$:
$25000 \cdot 1{,}1^{-10} = 9639$ inwoners

8 a $g_3 = \frac{3000}{1200} = 2{,}5$

b $g_1 = (g_3)^{\frac{1}{3}} = 2{,}5^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}357$.
Dus per uur is de groei 35,7%.

c De groeifactor is 1,357. Het startgetal is 1200. Dus:
$H(t) = 1200 \cdot 1{,}357^{t}$

d $H(t) = 1200 \cdot 1{,}357^{t} = 600$

Vergelijking met GR oplossen: $t = -2{,}27$. Dus 2,27 uur voor $t = 0$ waren er 600 bacteriën. Dat is dus ongeveer 2 uur en een kwartier voor $t = 0$.

9 a 1500 - 1750: groeifactor per jaar ongeveer 1,00115, dus groei ongeveer 0,12% per jaar.

1750 - 1800: groeifactor per jaar ongeveer 1,00814, dus groei ongeveer 0,81% per jaar.

1986 - 1997: groeifactor per jaar ongeveer 1,01735, dus groei ongeveer 1,74% per jaar.

b In vier periodes:

Periode 0-1500.
Periode 1500-1800.
Periode 1800-1950.
Periode 1950-1986.

c 0 - 1500: groeifactor per jaar $2^{\frac{1}{1500}} \approx 1{,}00046$, dus groei ongeveer 0,05% per jaar.

1500 - 1800: groeifactor per jaar $2^{\frac{1}{300}} \approx 1{,}002313$, dus groei ongeveer 0,23% per jaar.

1800 - 1950: groeifactor per jaar $2^{\frac{1}{150}} \approx 1{,}00463$, dus groei ongeveer 0,46% per jaar.

1950 - 1986: groeifactor per jaar $2^{\frac{1}{36}} \approx 1{,}01944$, dus groei ongeveer 1,94% per jaar.

10 a Zes jaar voor $t = 0$, dus zes jaar voor 2012, dus in 2006.

b De groeifactor is $\frac{106}{100} = 1{,}06$.

Het startgetal is € 7969,24 en $t = 0$ op 1 januari 2012.
Dus: $K(t) = 7969{,}24 \cdot 1{,}06^t$.

1 januari 2011: $7969{,}24 \cdot 1{,}06^{-1} \approx 7518{,}15$ euro

1 januari 2010: $7969{,}24 \cdot 1{,}06^{-2} \approx 7092{,}60$ euro

1 januari 2009: $7969{,}24 \cdot 1{,}06^{-3} \approx 6691{,}13$ euro

c Voer in: Y1=7969.24*1.06^X
Maak een tabel: er is blijkbaar € 5000,00 ingelegd bij $t = -8$. Dus dat bedrag werd ingelegd op 1 januari 2004.

Hij heeft € 5000,00 ingelegd op 1 januari 2004.

11 a De groeifactor per twee jaar is 0,81, dus de groeifactor per jaar is $0{,}81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$.
Je beginhoeveelheid is 1000. Dus: $R = 1000 \cdot 0{,}90^t$.

b Los op $1000 \cdot 0{,}90^t = 800$.
De GR geeft $t \approx 2{,}118$, dus ongeveer twee jaar en twee maanden.

c Los op $0{,}90^t = 0{,}5$.
Met de GR vind je $t \approx 6{,}58$ jaar.

d Als 750 mg is omgezet, is er dus nog 250 mg over. De 1000 mg is dan dus twee keer gehalveerd. Dit kost twee keer de halveringstijd, dus $2 \cdot 6{,}58 = 13$ jaar.

12 a Het startgetal is 10 en per week is het groeipercentage 15. Het nieuwe percentage is dus steeds $100 + 15 = 115$ en de groeifactor is $\frac{115}{100} = 1{,}15$. Dus:

$A(t) = 10 \cdot 1{,}15^t$ met $A(t)$ in gram per liter en t in weken.

b Drie weken voor $t = 0$ is dus $t = -3$. Invullen: $A(-3) = 10 \cdot 1{,}15^{-3} \approx 6{,}6$ gram per liter.

c Twee dagen is $\frac{2}{7}$ week. $\frac{2}{7}$ week voor $t = 0$ is dus $t = -\frac{2}{7}$. Invullen: $A\left(-\frac{2}{7}\right) = 10 \cdot 1{,}15^{-\frac{2}{7}} \approx 9{,}6$ gram per liter.

d Verdubbeld als $1{,}15^t = 2$. Oplossen met GR: $t \approx 4{,}96$ weken. Dus na $4{,}96 \cdot 7 \approx 35$ dagen.

13 a Groeifactor per vier jaar is $\frac{4300}{6000}$.

Groeifactor per jaar is dus $\left(\frac{4300}{6000}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}92$.

b De beginhoeveelheid is 6000. De groeifactor per jaar is 0,92:
$N(t) = 6000 \cdot 0{,}92^t$.

c Elk jaar blijft er $100 \cdot 0{,}92^1 = 92\%$ vlinders over.
Het aantal vlinders neemt dus met $100 - 92 = 8\%$ per jaar af.

d Bij halvering geldt $0{,}92^t = 0{,}5$.
Los dit op met de GR: $t \approx 8{,}31$.
De halveringstijd is ongeveer 8 jaar en 113 dagen.

e $6000 \cdot 0{,}92^t = 1000$

Los op met de GR. Maak een tabel. Aflezen na hoeveel jaar het aantal vlinders minder dan 1000 wordt:

Na 21 jaar ≈ 1042

Na 22 jaar ≈ 958

Na 22 jaar is het aantal vlinders voor het eerst minder dan 1000.

4.3 Exponenten en machten

V1 $\frac{\sqrt[3]{14^{120}}}{14^{39}} = \frac{14^{\frac{120}{3}}}{14^{39}} = \frac{14^{40}}{14^{39}} = 14^1 = 14$

1 a Met $\sqrt[n]{g} = g^{\frac{1}{n}}$ is de n-demachtswortel veranderd in een n-de macht, zodat er alleen machten overblijven, wat het rekenen gemakkelijker maakt.

b Met $(g^a)^b = g^{ab}$ zijn de machten in de teller samengetrokken om de breuk zo eenvoudiger te maken.

c Met $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ is de breuk weggewerkt zodat je een getal als antwoord overhoudt.

2 $\frac{31^{25}.\sqrt[3]{31^{30}}}{(31^{12})^3} = \frac{31^{25}.31^{\frac{30}{3}}}{31^{12\cdot 3}} = \frac{31^{25}.31^{10}}{31^{36}} = \frac{31^{35}}{31^{36}} = \frac{1}{31}$

3 a $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

b $8^{1\frac{2}{3}} = 8^1 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 8 \cdot \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 8 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32$

c $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

d $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$

e $2^{-3} \cdot 2^7 = 2^{-3+7} = 2^4 = 16$

f $\frac{5^2.5^3}{25^{1,5}} = \frac{5^2.5^3}{25^1.25^{\frac{1}{2}}} = \frac{5^2.5^3}{25.5} = \frac{5^2.5^3}{5^3} = 5^2 = 25$

4 a $2x^{2\frac{1}{3}} = 2x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 2x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

b $\frac{3x^{-1}}{2x} = \frac{3}{2x.x} = \frac{3}{2x^2}$

c $4x^{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$

d $2x^{2\frac{1}{2}} = 2x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2x^2 \cdot \sqrt[2]{x^1} = 2x^2\sqrt{x}$

e $\frac{1}{3}x^{-4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{1.1}{3.x^4} = \frac{1}{3x^4}$

f $3x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{3}{x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{3}{x^2.x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{x^2.\sqrt{x}}$

5 a $x^{-\frac{3}{4}}$

b $\frac{2x}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} = 2x^{-\frac{1}{2}}$

c $5(\sqrt[3]{x})^2 = 5(\sqrt[3]{x})^2 = 5x^{\frac{2}{3}}$

d $\frac{x^3.\sqrt[3]{x^2}}{4\sqrt[3]{x}} = \frac{x^3.x^{\frac{2}{3}}}{4x^{\frac{1}{3}}} = \frac{x^{3\frac{2}{3}}}{4x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{4}x^{3\frac{1}{3}}$

6 a In de exponent staat $2x + 1$. Voor exponentiële groei moet de formule de vorm $y = b \cdot g^x$ hebben.

b Oplossing:

$y = 0{,}5^{2x+1}$
$y = 0{,}5^{2x} \cdot 0{,}5^{1}$
$y = 0{,}5 \cdot \left(0{,}5^{2}\right)^{x}$
$y = 0{,}5 \cdot 0{,}25^{x}$

7 a $y = 2 \cdot 3^{2x+2}$
$y = 2 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{2}$
$y = 18 \cdot \left(3^{2}\right)^{x}$
$y = 18 \cdot 9^{x}$

b $y = 5 \cdot 0{,}2^{3x-1}$
$y = 5 \cdot 0{,}2^{3x} \cdot 0{,}2^{-1}$
$y = 25 \cdot 0{,}2^{3x}$
$y = 25 \cdot \left(0{,}2^{3}\right)^{x}$
$y = 25 \cdot 0{,}008^{x}$

c $y = 0{,}4 \cdot 5^{-2x+3}$
$y = 0{,}4 \cdot 5^{-2x} \cdot 5^{3}$
$y = 50 \cdot 5^{-2x}$
$y = 50 \cdot \left(5^{-2}\right)^{x}$
$y = 50 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{x}$

8 a $\left(2^{3}\right)^{2} = 2^{3\cdot 2} = 2^{6} = 64$

b $2^{3} \cdot 2^{2} = 2^{3+2} = 2^{5} = 32$

c $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{8} = 2^{\frac{1}{4}\cdot 8} = 2^{2} = 4$

d $\sqrt[3]{1000} = 1000^{\frac{1}{3}} = \left(10^{3}\right)^{\frac{1}{3}} = 10^{3\cdot\frac{1}{3}} = 10^{1} = 10$

9 a $\frac{1}{x^{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = x^{-2\frac{1}{2}}$

b $\frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{-\frac{1}{4}}$

c $\sqrt{x} \cdot x^{-2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-2} = x^{-1\frac{1}{2}}$

d $\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x\cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-1\frac{1}{2}}$

10 a $x^{-1} = \frac{1}{x^{1}} = \frac{1}{x}$

b $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

c $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^{3}}$

d $x^{1\frac{3}{4}} = x^{1} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x \cdot \sqrt[4]{x^{3}}$

e $3x^{-1,5} = \frac{3}{x^{1,5}} = \frac{3}{x\sqrt{x}}$

f $x^{-2,75} = \frac{1}{x^{2,75}} = \frac{1}{x^{2} \cdot x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{x^{2} \cdot \sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{x^{2} \cdot \sqrt[4]{x^3}}$

11 a $\frac{17^{105}}{17^{23}} \cdot 17^{-85} = 17^{82} \cdot 17^{-85} = 17^{82-85} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$

b $\left(\frac{1}{2}\right)^{219} \cdot 8^{72} = \left(2^{-1}\right)^{219} \cdot \left(2^3\right)^{72} = 2^{-219} \cdot 2^{216} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

c $\left(\frac{3}{4}\right)^{231} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{230} \cdot 3^{233} = 3^{231} \cdot 4^{-231} \cdot 4^{230} \cdot 9^{-230} \cdot 3^{233} = 4^{-1} \cdot 3^{464} \cdot 3^{-460} = \frac{3^4}{4} = \frac{81}{4} = 20{,}25$

d $\frac{7^{102}}{\left(49^{10}\right)^5} = \frac{7^{102}}{\left(\left(7^2\right)^{10}\right)^5} = \frac{7^{102}}{7^{2 \cdot 10 \cdot 5}} = \frac{7^{102}}{7^{100}} = 7^2 = 49$

e $\left(\frac{4}{9} \cdot \sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{4^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} \cdot 2 = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$

f $\frac{5^3 \cdot \left(3^5\right)^{15}}{25 \cdot \sqrt[3]{3^{225}}} = \frac{5^3 \cdot 3^{75}}{5^2 \cdot 3^{75}} = 5$

12 a $y = \left(2x^3\right)^4 \cdot -3x^5 = 2^4 \cdot x^{3 \cdot 4} \cdot -3x^5 = 16x^{12} \cdot -3x^5 = 16 \cdot -3 \cdot x^{12+5} = -48x^{17}$

b $y = \frac{2x \cdot x^2}{x^6} = \frac{2x^{1+2}}{x^6} = \frac{2x^3}{x^6} = 2x^{3-6} = 2x^{-3}$

c $y = 4x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 4x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 4x^{2+\frac{1}{3}} = 4x^{2\frac{1}{3}}$

d $y = \frac{2}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{x^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{2}{x^{1\frac{1}{2}}} = 2x^{-1\frac{1}{2}}$

13 a $y = 3 \cdot 2^{0,5x} = 3 \cdot \left(2^{0,5}\right)^x = 3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^x$

b $y = 0{,}5^{-x+2} = 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^{-x} = 0{,}25 \cdot \left(0{,}5^{-1}\right)^x = 0{,}25 \cdot 2^x$

c $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-2x} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x} = \frac{1}{27} \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^x = \frac{1}{27} \cdot 9^x$

d $y = 6 \cdot 2^{4x-2} = 6 \cdot 2^{-2} \cdot 2^{4x} = 1{,}5 \cdot \left(2^4\right)^x = 1{,}5 \cdot 16^x$

14 a $y = 4^{-2x+1} = \left(4^{-2}\right)^x \cdot 4^1 = 4 \cdot 0{,}0625^x$

b $y = 4^{-2x} + 1 = \left(4^{-2}\right)^x + 1 = 0{,}0625^x + 1$

Deze formule krijgt niet de standaardvorm $y = b \cdot g^x$.

15 a $5^{-5} \cdot 25^2 = 5^{-5} \cdot \left(5^2\right)^2 = 5^{-5} \cdot 5^{2 \cdot 2} = 5^{-5} \cdot 5^4 = 5^{-5+4} = 5^{-1}$

b $7^{-10} \cdot \left(7^3\right)^5 = 7^{-10} \cdot 7^{3 \cdot 5} = 7^{-10} \cdot 7^{15} = 7^{-10+15} = 7^5$

c $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1 \cdot 4} = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right)^4 = 5^4$

d $125^{-\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3} \cdot -1} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^{-1} = 5^{-1}$

16 a $2x^4 \cdot \left(3x^3\right)^2 = 2 \cdot x^4 \cdot 3^2 \cdot \left(x^3\right)^2 = 2 \cdot 9 \cdot x^4 \cdot x^{3 \cdot 2} = 18 \cdot x^4 \cdot x^6 = 18 \cdot x^{4+6} = 18x^{10}$

b $\frac{x^3 \cdot 5x^4}{x^8} = \frac{5 \cdot x^{3+4}}{x^8} = \frac{5 \cdot x^7}{x^8} = 5x^{7-8} = 5x^{-1}$

c $\frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} = 3x^{-\frac{1}{2}}$

d $5x \cdot \sqrt[5]{x^2} = 5x \cdot x^{\frac{2}{5}} = 5 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{2}{5}} = 5 \cdot x^{1+\frac{2}{5}} = 5x^{1\frac{2}{5}}$

17 a $x^{1\frac{1}{4}} = x^{1+\frac{1}{4}} = x \cdot x^{\frac{1}{4}} = x \cdot \sqrt[4]{x}$

b $\frac{x^2 \cdot x^{-4}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{-2}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

4.4 Exponentiële functies

V1 a Uit de grafiek is af te lezen dat de grafiek nooit de x-as raakt. De y-as wordt uiteraard bij $x = 0$ gesneden, dus: $B = 600 \cdot 2^0 = 600 \cdot 1 = 600$.

Het enige snijpunt is dus (0,600).

b De grafiek stijgt eigenlijk alleen maar, er zijn dus geen extremen.

c Als je hele lage waarden voor x gaat invullen, benaderen de y-waarden het getal 0. De x-as is dus een asymptoot.

1 a $f(x) = 1 \cdot 2^x = 2^x$.

Grafiek heeft geen nulpunten, want 2^x wordt nooit 0 of negatief.

Bij hele kleine waarden van x benaderen de functiewaarden het getal 0, dus de grafiek komt steeds dichter bij $y = 0$.

De grafiek is stijgend.

b $f(x) = 1 \cdot 3^x = 3^x$.

Grafiek heeft geen nulpunten, want 3^x wordt nooit 0 of negatief.

Bij hele kleine waarden van x benaderen de functiewaarden het getal 0, dus de grafiek komt steeds dichter bij $y = 0$.

De grafiek is stijgend.

c $f(x) = 1 \cdot 1^x = 1^x = 1$.

$f(x)$ is dus altijd 1. Dus geen lijn waar de grafiek van $f(x)$ naar toe loopt en ook nergens een snijpunt met de x-as.

d $f(x) = 1 \cdot 0{,}5^x = 0{,}5^x$.

Grafiek heeft geen nulpunten, want $0{,}5^x$ wordt nooit 0 of negatief.

Bij hele grote waarden van x benaderen de functiewaarden het getal 0, dus de grafiek komt steeds dichter bij $y = 0$.

De grafiek is dalend.

e $f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$.

Grafiek heeft geen nulpunten, want $1{,}5^x$ wordt nooit 0 of negatief.

Bij hele kleine waarden van x benaderen de functiewaarden het getal 0, dus de grafiek komt steeds dichter bij $y = 0$.

De grafiek is stijgend.

f $f(x) = -2 \cdot 1{,}5^x$.

Grafiek heeft geen nulpunten, want $1{,}5^x$ wordt nooit 0 of negatief, dus de hele functie wordt nooit 0 of positief.

Bij hele kleine waarden van x benaderen de functiewaarden het getal 0, dus de grafiek komt steeds dichter bij $y = 0$.

De grafiek is dalend.

2
- Als $g > 1$ is de grafiek voortdurend dalend, want de uitkomst wordt een groter negatief getal.
- Als $g = 1$ is de grafiek constant, want 1^x geeft altijd 1.
- Als $0 < g < 1$ is de grafiek voortdurend stijgend, want de uitkomst wordt een steeds kleiner negatief getal.
- Er zijn geen nulpunten, want g^x kan geen 0 worden.
- De x-as is een horizontale asymptoot, want bij extreme waarden van x benaderen de functiewaarden $y = 0$.
- Er zijn geen extremen, want de grafiek is óf dalend, óf stijgend, óf constant.

3 a Los eerst de vergelijking $40 \cdot 0{,}8^t = 10$ op met de GR. Je vindt $t \approx 6{,}21$.

Hoe groter t hoe kleiner de functiewaarden, dus de oplossing is $t \geq 6{,}3$.

b Nee, de grafiek van C snijdt de x-as niet.

4 a Voer in: Y1=2*8^X en Y2=40
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 5$ en $0 \leq y \leq 50$

De optie intersect geeft $x = 1{,}440...$. In de grafiek zie je dat $x \leq 1{,}44$.

b Voer in: Y1=1/3*4^X en Y2=124
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 150$

De optie intersect geeft $x = 4{,}269...$. Aan de grafiek zie je dat $x \geq 4{,}27$.

c Voer in: Y1=55*0.5^X en Y2=100
Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 150$

De optie intersect geeft $x = -0{,}862...$. Aan de grafiek zie je dat $x \geq -0{,}86$.

5 a De groeifactor van A is gelijk aan 1,025 en van B is deze 1,031. Groeifactor van B is dus groter dan die van A. Conclusie: de bevolking bij B groeit harder dan die van A.

b Voer in: Y1=750000*1.025^X en Y2=620000*1.031^X
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 50$ en $0 \leq y \leq 2400000$

c $B(8) \approx 791{,}518$, dus op 1 januari 2021 heeft stad C 791518 inwoners. Op 1 januari 2013 hadden ze $791518 \cdot 1{,}083^{-8} \approx 418247$ inwoners.

Noem C het aantal inwoners in duizendtallen van stad C, dan is $C(t) = 418{,}247 \cdot 1{,}083^{t}$, met $t = 0$ op 1 januari 2013.

Voer in: Y1=750*1.025^X en Y2=418.247*1.083^X
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 1500$

De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 10{,}6$.

Dus in het jaar 2023 zijn de steden even groot.

6 Als x van 10 naar 14 gaat, wordt $f(x)$ vermenigvuldigd met $\frac{350}{200} = 1{,}75$. Voor g geldt daarom $g^4 = 1{,}75$ en dus $g = \sqrt[4]{1{,}75} \approx 1{,}15$.

Invullen: $f(x) = b \cdot g^x = b \cdot 1{,}15^x$.

Coördinaat invullen: $f(10) = b \cdot 1{,}15^{10} = 200$

$4{,}05 \cdot b = 200$

$b = \frac{200}{4{,}05} \approx 49$.

Dus: $f(x) = 49 \cdot 1{,}15^x$.

7 a Het startgetal is 1 en het groeipercentage is 5, dus het nieuwe percentage is $5 + 100 = 105$ en de groeifactor is $\frac{105}{100} = 1{,}05$. Dus: $S(t) = 1 \cdot 1{,}05^t = 4000$.

$S(t)$ en $y = 4000$ invullen in GR. Snijpunt bepalen: $(170{,}4000)$.

De € 1,00 moet dus 170 jaar geleden op de rekening zijn gezet.

b Ja. Dan neem je het moment dat hij € 4000,00 op zijn rekening had staan als $t = 0$. $S(t) = 1$ bij $t \approx -170$, dus kies dan bijvoorbeeld $-175 \leq t \leq -165$.

c Nee, want $1{,}05^t$ kan geen 0 worden. De functiewaarden benaderen 0 echter wel als t hele kleine waarden aanneemt. Er is dus een horizontale asymptoot $S = 0$.

8 a Voer in: Y1=50*1.5^X en Y2=200
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 300$

De optie intersect geeft $x = 3{,}419...$. Aan de grafiek zie je dat $x \leq 3{,}41$.

b Voer in: Y1=25*1.8^X en Y2=250*0.75^X
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 300$

De optie intersect geeft $x = 2{,}630...$. Aan de grafiek zie je dat $x > 2{,}63$.

9 a Persoon A:
Startgetal is 2000 en groeipercentage is 4. Het nieuwe percentage is $100 + 4 = 104$, dus groeifactor is $\frac{104}{100} = 1{,}04$, zodat $a(t) = b \cdot g^t = 2000 \cdot 1{,}04^t$.

Persoon B:
Startgetal is 1500 en groeipercentage is 6. Het nieuwe percentage is $100 + 6 = 106$, dus groeifactor is $\frac{106}{100} = 1{,}06$, zodat $b(t) = b \cdot g^t = 1500 \cdot 1{,}06^t$.

b Venster bijvoorbeeld: $-4 \leq x \leq 20$ en $-1000 \leq y \leq 5000$

c Voer in: Y1=2000*1.04^X en Y2=1500*1.06^X
Bepaal het snijpunt. Je vindt $x = 15{,}1028...$ jaar. Dit is 15 jaar en 1,2 maanden na 1 januari 2010, dus vanaf 1 maart 2025.

10 a Groeifactor per vier maanden: $\frac{1630}{2000} = 0{,}815$, dus groeifactor per jaar: $0{,}815^3 \approx 0{,}541$.

Op 6 januari 2014 was de straling 2000 Bq, dus een jaar eerder was het $2000 \cdot 0{,}541^{-1} \approx 3695$ Bq.

b $2000 \cdot 0{,}541^{2{,}5} \approx 431$ Bq.

c Het startgetal is $b = 2000$ Bq. De groeifactor per jaar is $g = 0{,}541$. Dus:

$S = b \cdot g^t = 2000 \cdot 0{,}541^t$ met $t = 0$ als 6 januari 2014.

d Bij 1000 Bq is de straling gehalveerd, dus groeifactor van 0,5. Dus: $0{,}541^t = 0{,}5$

$y = 0{,}541^t$ en $y = 0{,}5$ invullen in GR. Snijpunt bepalen: $(1{,}13; 0{,}5)$.

Dus na 1,13 jaar is de straling gehalveerd, dus na 1 jaar en $0{,}13 \cdot 365 = 47{,}45$ dagen.

47 dagen na 6 januari is $47 + 6 - 31 = 22$ februari.

De straling was dus minder dan 1000 Bq vanaf 22 februari 2015.

11 Beide grafieken gaan door $(0{,}10)$, dus $b = 10$.

Bij $x = 0$ heeft $f(x)$ de waarde 10 en bij $x = 1$ de waarde 20, dus $g = \frac{20}{10} = 2$. Dus: $f(x) = b \cdot g^x = 10 \cdot 2^x$.

Bij $x = -1$ heeft $g(x)$ de waarde 30 en bij $x = 0$ de waarde 10, dus $g = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Dus: $g(x) = b \cdot g^x = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

12 Bij lineaire groei geldt voor de beginhoeveelheid: € 650,00. Er komt jaarlijks € 50,00 bij, dus $H(t) = 650 + 50t$.

Bij exponentiële groei geldt voor beginhoeveelheid b: € 650,00. Er komt jaarlijks 5,5% bij, dus de groeifactor is $g = \frac{105{,}5}{100} = 1{,}055$, zodat $I(t) = b \cdot g^t = 650 \cdot 1{,}055^t$.

$H(t)$ en $I(t)$ invullen in GR. Snijpunt bepalen: $(12{,}8; 1290)$. Het levert de huurder dus na dertien jaar voordeel op.

13 De groeifactor per dag is 0,8.

Je moet de ongelijkheid $40 \cdot 0{,}8^t < 1$ oplossen.

Eerst los je met de grafische rekenmachine de vergelijking $40 \cdot 0{,}8^t = 1$ op. Je vindt $t \approx 16{,}53$. Hoe groter t hoe minder de concentratie wordt. Dus na ongeveer 16 dagen en 13 uur is de stof verdwenen.

14 a Het aantal transistoren A is dan $A = 120000 + 117750t$ met 1982 als $t = 0$.

Los nu op: $120000 + 117750t = 3100000$.

$3100000 - 120000 = 2980000 = 117750t$

$t = \frac{2980000}{117750} \approx 25{,}3$

Het aantal van 3100000 transistoren wordt dus 25 jaar na 1982 bereikt, dus in het jaar 2007.

b 1971 - 2000 is een periode van 29 jaar. Groeifactor per 29 jaar $= \frac{42000000}{2250} \approx 18667$, dus groeifactor per jaar $= \left(\frac{42000000}{2250}\right)^{\frac{1}{29}} = 1{,}4037$.

c 1971 - 2014 is een periode van 43 jaar.
$A = 2250 \cdot 1{,}404^{43} \approx 4886165278$ transistoren volgens Moore.

$\frac{4310000000}{4886165278} \cdot 100 \approx 88\%$, het werkelijke aantal wijkt dus 12% af van de voorspelling van Moore.

d $A = 2250 \cdot 1{,}404^t = 10^{10}$.

A en $y = 10^{10}$ invullen in GR. Snijpunt bepalen: $(45{,}1; 10^{10})$.

Dit is dus het geval 45 jaar na 1971, dus in het jaar 2016.

15 a De groeifactor is groter dan 1 en dan worden de functiewaarden steeds groter, zolang de beginhoeveelheid positief is.

b Groeipercentage van 200% betekent dat er een groeifactor is van 3. Dus: $1{,}03^t = 3$.

Oplossen met GR: $t \approx 37{,}167$.

Dus vanaf $t \approx 37{,}167$ is de hoeveelheid 200% groter geworden.

c $H(t) = 200 \cdot 1{,}03^t = 0{,}01$

$1{,}03^t = 0{,}00005$

Oplossen met GR: $t = -335{,}044$.

Dus bij $t < -335{,}044$ is de hoeveelheid kleiner dan 0,01.

16 a Groeipercentage van 5,5 per jaar, dus nieuw percentage is $100 + 5{,}5 = 105{,}5$. Groeifactor is dus $g = \frac{105{,}5}{100} = 1{,}055$. Beginhoeveelheid $b = 850$. Dus:

$H(t) = b \cdot g^t = 850 \cdot 1{,}055^t$.

b $H(t) = 850 \cdot 1{,}055^t = 1000$

$1{,}055^t = \frac{1000}{850} = \frac{20}{17}$

Oplossen met GR: $t \approx 3{,}035$.

Dus na 3 jaar, vanaf 1 januari 2003, is de huur hoger dan € 1000,00 per maand.

17 Als x van 2 naar 8 gaat, wordt $f(x)$ vermenigvuldigd met $\frac{200}{80} = 2{,}5$. Voor g geldt daarom $g^6 = 2{,}5$ en dus $g = \sqrt[6]{2{,}5} \approx 1{,}165$.

Invullen: $f(x) = b \cdot g^x = b \cdot 1{,}165^x$.

Coördinaten punt invullen: $f(2) = b \cdot 1{,}165^2 = 80$

$1{,}357 \cdot b = 80$

$b = \frac{80}{1{,}357} \approx 58{,}94$.

Dus: $f(x) = 58{,}94 \cdot 1{,}165^x$.

4.5 Meer exponentiële functies

V1 a $y_1 = \text{-}3 \cdot 0{,}5^x + 1$

b $y_2 = \text{-}3 \cdot 0{,}5^{2x} - 4 = \text{-}3 \cdot \left(0{,}5^2\right)^x - 4 = \text{-}3 \cdot 0{,}25^x - 4$.

1 a $f_1(x) = b \cdot g^x + d = 3 \cdot 2^x + 1$

- $y = 2^x$ herschalen in de y-richting met factor 3 geeft: $y = 3 \cdot 2^x$.
- $y = 3 \cdot 2^x$ verschuiven met 1 in de y-richting geeft: $y = 3 \cdot 2^x + 1 = f_1(x)$.

b $f_2(x) = b \cdot g^x + d = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$. Ontstaat uit grafiek van $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

- $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ herschalen in de y-richting met factor 3 geeft: $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
- $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ verschuiven met -1 in de y-richting geeft: $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 = f_2(x)$.

c $f_3(x) = b \cdot g^x + d = \text{-}10 \cdot 1{,}5^x + 100$.

Grafiek is dalend, dus geen extremen. Snijpunten met assen moeten wel zichtbaar zijn.
Venster bijvoorbeeld: $\text{-}2 \le x \le 8$ en $\text{-}10 \le y \le 100$

2 a $f(x) = 6 \cdot 2^{\text{-}x-1} - 12 = 6 \cdot 2^{\text{-}1} \cdot 2^{\text{-}x} - 12 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{\text{-}1 \cdot x} - 12 = 3 \cdot \left(2^{\text{-}1}\right)^x - 12 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 12$

b Ontstaat uit grafiek van $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

- $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ herschalen in de y-richting met factor 3 geeft: $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
- $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ verschuiven met -12 in de y-richting geeft: $y = 3 \cdot 2^x - 12 = f(x)$.

c $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 12$ invullen in GR en nulpunt bepalen: (-2; 0).

d Oplossing:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^x - 12 &= 0 \\ 3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^x &= 12 \\ \left(\tfrac{1}{2}\right)^x &= 4 \\ \left(\tfrac{1}{2}\right)^x &= 2^2 \\ \left(2^{\text{-}1}\right)^x &= 2^2 \\ 2^{\text{-}1 \cdot x} &= 2^2 \\ \text{-}x &= 2 \\ x &= \text{-}2 \end{aligned}$$

3 a Nulpunt is $x = 3$.

b $60 \cdot 2^x - 480 = 0$ geeft $2^x = \frac{480}{60} = 8 = 2^3$, dus het nulpunt is $x = 3$.

4 a $f(x)$ met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen in de y-richting geeft: $f(x) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = g(x)$.

b $f(x)$ met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen in de y-richting geeft: $f(x) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Dit met 5 eenheden naar beneden schuiven geeft: $f(x) \cdot \frac{1}{2} - 5 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5 = h(x)$.

c Als x hele grote waarden aanneemt, benadert $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ het getal 0.

Dat betekent: $h = \frac{1}{2} \cdot 0 - 5 = 0 - 5 = \text{-}5$. De functiewaarden benaderen dan dus het getal -5.

d x kan alle waarden aannemen.

y kan alle waarden boven -5 aannemen, want $y = -5$ is de lijn waar $h(x)$ naar nadert en verder stijgt de functie alsmaar.

e $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5 = 10$ geeft $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 30$.

Gebruik verder de GR om deze vergelijking op te lossen: $x \approx -3{,}096$.

f $x < -3{,}096$

5 a $f(x) = 2 \cdot 2^x \cdot 2^1 - 1 = 4 \cdot 2^x - 1$

b $g(x) = 2^x$ herschalen in de y-richting met factor 4 geeft: $y = 4 \cdot 2^x$.

$y = 4 \cdot 2^x$ verschuiven met -1 in de y-richting geeft: $y = 4 \cdot 2^x - 1 = f(x)$.

c Ten opzichte van de grafiek van g is bij de grafiek van f elke waarde van y vermenigvuldigd met vier en vervolgens met één verlaagd, dus: $(0{,}1 \cdot 4 - 1) = (0{,}3)$ óf $x = 0$ invullen in f: $f(0) = 4 \cdot 2^0 - 1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$. Dus: $(0{,}3)$.

d Grafiek van f plotten, aflezen dat f bij hele kleine waarden van x het getal -1 benadert en verder alleen maar stijgt. Dus de grafiek nadert tot $y = -1$.

e $4 \cdot 2^x - 1$ geeft $2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2}$.

Nulpunt $x = -2$.

6 a De groeifactor 0,998 is kleiner dan 1, dus als t groter wordt neemt $60 \cdot 0{,}998^t + 20$ af.

b $y = 20$ is de horizontale asymptoot.

De temperatuur van de koffie nadert de omgevingstemperatuur van 20 °C.

c Voer in: Y1=60*(0.998)^X+20 en Y2=70

Venster bijvoorbeeld: $0 \le x \le 40$ en $0 \le y \le 300$

$x \approx 91{,}07$, dus na ongeveer 91 seconden uur is de temperatuur 70 °C.

7 a Oplossing:

$$\begin{aligned} T(t) = 20 + 60 \cdot 0{,}83^t &= 50 \\ 60 \cdot 0{,}83^t &= 30 \\ 0{,}83^t &= \tfrac{30}{60} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Oplossen met GR: $t \approx 3{,}72$.

Koffie is dus tot 3 uur en drie kwartier na 8:00 uur te drinken, dus tot 11:45 uur.

b Thermoskan werd gevuld bij $t = 0$, dus $t = 0$ invullen:

$T(0) = 20 + 60 \cdot 0{,}83^0 = 20 + 60 \cdot 1 = 80$ °C

c Groeifactor is 0,83. Als groeifactor $g < 1$, is de grafiek dalend.

d $T(t) = 20 + 60 \cdot 0{,}83^t = 21$ geeft $0{,}83^t = 0{,}01666...$

Gebruik je GR. Snijpunt bepalen: (22,21).

Het duurt dus 22 uur voordat de koffie een temperatuur bereikt van 21 °C.

e $T(t)$ invullen in GR. Als je x ver door laat lopen, is te zien dat de functiewaarden het getal 20 benaderen, dus $T = 20$.

f De koffie koelt af tot de kamertemperatuur. $60 \cdot 0{,}83^t$ benadert uiteindelijk 0, dus de +20 bepaalt de kamertemperatuur: 20 °C.

8 a Eerst herschalen in de y-richting met factor $\frac{1}{6}$ en daarna verschuiven met 340 in de y-richting.

b Venster bijvoorbeeld: $-10 \le x \le 10$ en $300 \le y \le 1000$.

c $y = 340$

9 a $5^x = 10$ oplossen met GR: $x \approx 1{,}43$.

b $5^x = 10$ oplossen met GR: $x \approx 1{,}43$.

Hoe groter x, hoe groter 5^x, dus $x \le 1{,}43$.

c Oplossing:

$$5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 8 = 2$$

$$5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 10$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{10}{5} = 2$$

Oplossen met GR: $x \approx -0{,}63$.

d $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 8 = 2$ geeft $x \approx -0{,}63$.

Hoe groter x, hoe kleiner $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 8$

$x > -0{,}63$

10 a Hoe groter x, hoe kleiner $4 \cdot 0{,}5^x - 1$, dus: $x > 2$.

b Hoe kleiner x, hoe groter $-x + 1$, hoe groter $2 \cdot 2^{-x+1} - 1$, dus: $x < 2$.

c Hoe groter x, hoe groter $3{,}5^{x+50} - 0{,}5$, dus: $x > -49$.

d Hoe kleiner x, hoe kleiner 3^{x-4}, dus: $x < 2\frac{1}{2}$.

11 a $540 \cdot 0{,}95^t$ is dalend, omdat de groeifactor kleiner dan 1 is. Omdat $540 \cdot 0{,}95^t$ steeds van 540 wordt afgetrokken, wordt er dus steeds minder afgetrokken, dus stijgt de grafiek.

b $A(t)$ plotten met goede instellingen, bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 100$ en $-100 \leq y \leq 550$.

Aflezen dat de uiteindelijke waarde bij 540 mg zit.

c Maximale hoeveelheid = 540

$0{,}75 \cdot 540 = 405$

Oplossen met GR: $t \approx 27{,}03 \approx 27$ minuten.

12 a $f(x) = 2^{x-2} - 3 = 2^x \cdot 2^{-2} - 3 = \frac{1}{4} \cdot 2^x - 3$. Ontstaat uit $y = 2^x$:

- $y = 2^x$ herschalen in de y-richting met factor $\frac{1}{4}$ geeft: $y = \frac{1}{4} \cdot 2^x$;
- $y = \frac{1}{4} \cdot 2^x$ verschuiven met -3 in de y-richting geeft: $y = \frac{1}{4} \cdot 2^x - 3 = f(x)$.

$g(x) = 4 \cdot 0{,}5^{x+3} - 1 = 4 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^x - 1 = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0{,}5^x - 1 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5^x - 1$. Ontstaat uit $y = 0{,}5^x$:

- $y = 0{,}5^x$ herschalen in de y-richting met factor $\frac{1}{2}$ geeft: $y = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5^x$.
- $y = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5^x$ verschuiven met -1 in de y-richting geeft: $y = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5^x - 1 = g(x)$.

b $2^{x-2} = 2^{-3}$ geeft $x = -1$

c Oplossen met GR: $x \approx -2{,}32$

Hoe kleiner x, hoe groter $4 \cdot 0{,}5^{x+3} - 1$, dus: $x < -2{,}32$.

d $g(-2) = 4 \cdot 0{,}5^{-2+3} - 1 = 4 \cdot 0{,}5^1 - 1 = 1$.

Hoe kleiner x, hoe groter de functiewaarden, dus als $x \leq -2$, dan $g(x) \geq 1$.

13 a Stel eerst een formule op: $D(t) = 0{,}05 \cdot 2^t$.
Zeven keer vouwen geeft: $D(7) = 6{,}4$ mm.

b De diameter van de aarde is $2 \cdot 6365 = 12730$ km.

12730 km $= 12730 \cdot 10^6$ mm.

De volgende ongelijkheid moet dan worden opgelost:

$D(t) > 12730000000$

$0{,}05 \cdot 2^t > 12730000000$

Met behulp van de GR kom je dan op het antwoord: voor $t \geq 38$ is de dikte van het papier groter dan de diameter van de aarde.

c De oppervlakte van het resultaat na dertien keer vouwen is $4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$ m^2. Bij elke keer vouwen werd de oppervlakte 0,5 keer zo groot. Dus de oorspronkelijke oppervlakte is $0{,}4 \cdot 2^{13} = 3276{,}8$ m^2. Dit is ter vergelijking ongeveer 65% van een voetbalveld.

Het aantal velletjes toiletpapier die ze hebben gebruikt is 163840. Dit zijn ter vergelijking ongeveer 800 rolletjes toiletpapier!

14 a Met 5 herschalen in de y-richting en 10 naar beneden verschuiven.

b $y = -10$

c Oplossen met GR: $x \approx 2{,}81$.

Hoe groter x, hoe groter $g(x)$, dus $x \geq 2{,}8$.

15 a $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$

$\frac{1^x}{3^x} = 9$

$\frac{1}{3^x} = 9$

$3^{-x} = 9$

$x = -2$

$x = -2$

Hoe groter x, hoe kleiner $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, dus: $x > -2$.

b $2 \cdot 5^{2x} = 250$

$5^{2x} = 125$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

Hoe groter x, hoe groter $2 \cdot 5^{2x}$, dus $x > \frac{3}{2}$.

c < not enough right fences : 1 >

< not enough right fences : 1 >

$-x + 2 = 1{,}5$

$x = 0{,}5$

Hoe groter x hoe kleiner 2^{-x+2}, dus $x > 0{,}5$.

16 a $f(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 2 = 5 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b Eerst de y-as herschalen met de factor 10 en daarna 2 omhoog verschuiven.

c $y = 2$

d $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2 = 42$

$5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 40$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 8$

$\frac{1^{x-1}}{2^{x-1}} = 2^3$

$2^{-x+1} = 2^3$

$-x + 1 = 3$

$x = -2$

4.6 Totaalbeeld

1 a Oplossing:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 50 = 25$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 75$$

Oplossen met GR: $x \approx -6{,}229$

Hoe groter x, hoe kleiner $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, dus $x > -6{,}23$.

b Voer in: Y1 = 500*1.5^X en Y2 = 300*2^X
Met de optie intersect vind je $x \approx 1{,}776$.

Vóór het snijpunt geldt $y_1 > y_2$, dus bij $x < 1{,}78$.

2 a Oplossing:

$$\begin{aligned} -35 + 5 \cdot 3^{x-5} &= 100 \\ 5 \cdot 3^{x-5} &= 135 \\ 3^{x-5} &= 27 \\ 3^{x-5} &= 3^3 \\ x - 5 &= 3 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2^{2x-4} &= 10\sqrt{2} \\ 2^{2x-4} &= 2\sqrt{2} \\ 2^{2x-4} &= 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ 2x - 4 &= 1{,}5 \\ 2x &= 5{,}5 \\ x &= 2{,}75 \end{aligned}$$

3 a Groeipercentage van 2%, dus nieuwe percentage is $100 + 2 = 102\%$, dus groeifactor $g = \frac{102}{100} = 1{,}02$.

b Startgetal $b = 43000$, groeifactor $g = 1{,}02$, dus:

$p(t) = b \cdot g^t = 43000 \cdot 1{,}02^t$.

c Verdubbeling bij $43000 \cdot 2$, dus $1{,}02^t = 2$.

Oplossen met GR: $t \approx 35$ jaar.

d 2010 is drie jaar voor 2013, dus $t = -3$ invullen: $p(-3) = 43000 \cdot 1{,}02^{-3} \approx 40520$ passagiers.

e $1{,}02^{10} \approx 1{,}2189$

f Kwartaal is $\frac{1}{4}$ jaar, dus: $1{,}02^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}0050$

4 a Er blijft telkens 80% van het licht over. Dus groeifactor van $\frac{80}{100} = 0{,}8$ per cm kunststof.

b $P(d) = 100 \cdot 0{,}8^d$ met P als percentage dat doorgelaten wordt en d als dikte in cm.

$d = 2{,}5$, dus: $P(2{,}5) = 100 \cdot 0{,}8^{2{,}5} \approx 57{,}2\%$ wordt doorgelaten, dus $100 - 57{,}25 = 42{,}8\%$ wordt geabsorbeerd.

c Er wordt dan dus 10% doorgelaten, dus los op $100 \cdot 0{,}8^d = 10$.

$0{,}8^d = \frac{10}{100} = 0{,}1$

Oplossen met GR: $d \approx 10{,}32$ cm.

d 1 cm = 0,1 mm, dus $g^{0{,}1} = 0{,}8^{0{,}1} \approx 0{,}978$.

5 a $f(x) = 45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} - 240$

$f(x) = 45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{x} - 240$

$f(x) = 5 \cdot 3^{x} - 240$

b Eerst herschaling in de y-richting met factor 5 en daarna een verschuiving van -240 in de y-richting.

c $y = -240$

d Los de vergelijking $5 \cdot 3^{x} - 240 = 0$ met de grafische rekenmachine op. Je vindt $x \approx 3{,}52$.

6 a Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 25$ en $0 \leq y \leq 25$

b Als $t = 0$ dan $T_1 = 19 - 13 = 6$ en $T_2 = 6 + 13 = 19$.

Melk is aan het begin koud, dus T_1.

Cola is aan het begin warm, dus T_2.

c T_2 invoeren op de GR.
Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 50$ en $-5 \leq y \leq 25$

Aflezen dat de horizontale asymptoot bij $T = 6$ zit.

d T_1 invullen in GR met goede instellingen, bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 50$ en $-5 \leq y \leq 25$.

Aflezen dat de horizontale asymptoot bij $T = 19$ zit.

e Cola had kamertemperatuur en melk wordt langzaam kamertemperatuur, dus kamertemperatuur is 19 °C.

f T_1 en T_2 invullen in GR. Snijpunt bepalen: $(2{,}79; 12{,}5)$.

Dus vanaf 2,8 minuten is de cola kouder dan de melk.

7 a $R = 1000 \cdot 0{,}90^{t}$

b Los op $1000 \cdot 0{,}90^{t} = 800$, dus $0{,}90^{t} = 0{,}8$. De GR geeft $t \approx 2{,}118$, dus 2 jaar en 1 maand.

c Los op $0{,}90^{t} = 0{,}5$. De GR geeft $t \approx 6{,}58$ jaar.

d 750 ligt midden tussen 500 en 1000, schatting 2,8 jaar.

8 a 1,021

b 1971: 3,68 mld; 1988: 5,23 mld; 1900: 0,84 mld; 0: $5{,}96 \cdot 10^{-9}$ mld, hetgeen nogal ongeloofwaardig is. De aanname, dat de groeifactor constant is, is dus onjuist.

c $B = 3{,}6 \cdot 1{,}021^{t}$ mld.

d $B(80) \approx 18{,}98$ mld. Dus de 9 mld volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 zit daar ver onder.

e Uit het voorgaande resultaat volgt dat de groei van de wereldbevolking zal afremmen. En dat moet ook wel want onze planeet heeft te weinig grondstoffen om een exponentieel groeiend aantal mensen op den duur van voedsel en woonruimte te voorzien.

9 a Het aantal volwassen vissen in een bepaald jaar bereken je zo: $200.000 + \frac{2}{3} \cdot$ aantal volwassen vissen van het voorgaande jaar $+0{,}10 \cdot 5.000.000$

b Doen, gebruik je GR.

c Begin met $N(t) = 2{,}1 - b \cdot g^{t}$. Uit $N(0) = 2$ volgt $b = 1{,}9$. Gebruik bijvoorbeeld $N(5)$ om g te berekenen.

d De groei wordt op den duur steeds langzamer.

10 a Elke nacht wordt 3% van het water ververst, 97% niet, dus er blijft $0{,}97 \cdot 500 = 485$ g ureum over. De tweede dag komt er weer 500 g ureum bij, samen 985 g. Aan het begin van de derde dag is daar nog 97% van over: $0{,}97 \cdot 985 = 955{,}45$ g.

b Begin dag 3: 955,45 g en eind dag 3: 1455,45 g. Begin dag 4: 1411,79 g en eind dag 3: 1911,79 g. Begin dag 5: 1854,43 g en eind dag 3: 2354,43 g. Dus in de loop van de vijfde dag.

c Nu wordt 20% van het totaal ververst. Er blijft dus 80% van $U + 500$ over, dat is $0{,}8(U + 500) = 0{,}8U + 400$.

d $500 \cdot 0{,}8^{n} > 0$ voor elke n, dus $2000 - 500 \cdot 0{,}8^{n} < 2000$ voor elke n.

e Eigen antwoord.

11 a $1{,}035^t = 2$ oplossen met de GR geeft $t \approx 20{,}15$. Na 21 jaar is het bedrag verdubbeld.

b $G = 10000 \cdot 1{,}035^{10} \approx 14105{,}99$. Dit betekent een rente van $\frac{4105{,}99}{10} \approx 410{,}60$ per jaar en dat is ongeveer 4,1%.

c $\frac{2615-2130}{10000} = 0{,}0485$, dus 4,85%.

d $10000 \cdot g^{10} = 14475$ en dus is $g = 1{,}4475^{\frac{1}{10}} \approx 1{,}0377$. De groeirekening moet een rentepercentage hebben van 3,77%.