Wiskunde B

4 VWO

Deel 2, Antwoordenboek

Math4all

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

Inhoud

5

Veranderingen

5.1 Veranderingen in grafieken

V1 a Ja, natuurlijk. De stijging wordt soms sterker, maar neemt soms ook af. Dit geldt ook voor de daling.

b Zo ongeveer midden tussen eb en vloed in.

c Die houdt dan op en gaat over in daling. Op het moment zelf is de stijging dus 0 m/s.

1 a De grafiek gaat bij het stijgen omhoog, T neemt dus toe.

b De stijging wordt steeds groter, T neemt dus steeds sterker toe.

c Toenemende daling: steeds sterker wordende daling, T daalt steeds sneller.

Afnemende daling: steeds minder sterke daling, T daalt steeds minder snel.

2 a ⟨←; -0,5⟩: afnemende daling
⟨-0,5; 1⟩: toenemende stijging
⟨1,2⟩: afnemende stijging
⟨2, →⟩: toenemende daling

b Minimum van 0,5 en maximum van 1,5.

3 a Plot de grafiek, bijvoorbeeld met het standaardvenster.

Tot de top van de parabool loopt de grafiek omhoog, daar is hij dus stijgend.
Top bepalen met GR: (3,9).

De grafiek is stijgend op interval ⟨← ,3⟩.

b De stijging wordt steeds minder groot, tot de stijging bij de top 0 is geworden. Er is dus sprake van afnemende stijging.

c Na de top daalt de grafiek. Je ziet dat de lijn steeds steiler wordt. De grafiek daalt dus steeds sterker, dus er is sprake van toenemende daling.

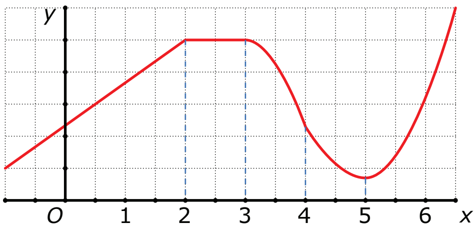
d Na en voor de top liggen de punten van de grafiek lager dan de top. De y-coördinaat van deze top is dus het maximum.

GR gebruiken om maximum te bepalen: (3,9).

4 Toelichting grafiek:

- tot $x = 2$ stijgt de grafiek constant. Dit betekent dat de grafiek tot $x = 2$ een rechte lijn schuin omhoog is;
- van $x = 2$ tot $x = 3$ is de grafiek constant. Dit betekent dat de grafiek horizontaal loopt.
- van $x = 3$ tot $x = 4$ daalt de grafiek toenemend. Dit betekent een lijn die steeds steiler naar beneden loopt.
- van $x = 4$ tot $x = 5$ daalt de grafiek afnemend. Dit betekent dat de lijn steeds minder steil naar beneden loopt.
- Vanaf $x = 5$ stijgt de grafiek toenemend. Dit betekent dat de lijn steeds steiler naar boven loopt.

Bij $x = 5$ is de daling afgenomen tot 0 en begint een stijging. Op dat moment is de grafiek op het laagste punt, hier zit dus een minimum.



Dit is een voorbeeld. Zelf kun je een heel andere grafiek hebben. Controleer of je eigen grafiek wel op de juiste intervallen stijgt, daalt, of constant is.

5 Je krijgt bijna nooit de hele grafiek in beeld. En zelfs als je de hele grafiek zou kunnen zien, blijft de vraag of je bij inzoomen niet meer toppen zou krijgen.

6 ⟨←; -1,5⟩: grafiek daalt steeds minder steil: afnemende daling

⟨-1,5; 0⟩: grafiek gaat steeds steiler omhoog: toenemende stijging

⟨0; 1,5⟩: grafiek gaat steeds minder steil omhoog: afnemende stijging

$\langle 1{,}5; \rightarrow\rangle$: grafiek daalt steeds steiler: toenemende daling

Extremen: bij $x = -1{,}5$ zit een minimum en bij $x = 1{,}5$ een maximum. De extremen zijn dus $f(-1{,}5) \approx -11$ en $f(1{,}5) \approx 11$;

Sterkste stijging: in (0,0) is de stijging maximaal toegenomen, dus daar is de snelheid van stijgen het grootst.

7 a Plot de grafiek met bijvoorbeeld de standaardinstellingen van het venster.

$\langle \leftarrow, -1\rangle$: afnemende stijging

$\langle -1{,}0\rangle$: toenemende daling

$\langle 0{,}1\rangle$: afnemende daling

$\langle 1, \rightarrow\rangle$: toenemende stijging

b maximum: $f(-1) = 2$
minimum: $f(1) = -2$

c Bij hele kleine en grote waarden van x stijgt de grafiek steeds steiler. Dit gaat in theorie oneindig door, dus er is geen maximale stijging.

8 a $f(x)$ invullen in GR. Aflezen dat er één maximum en twee minima zijn. Minima en maximum laten bepalen door GR.

maximum: $f(0) = 8$
minimum: $f(-2) = 0$
minimum: $f(2) = 0$

b Eén interval.

c Vanaf de minima bij de toppen $(-2{,}0)$ en $(2{,}0)$ loopt de grafiek omhoog.
$B_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$

9 $\langle 0{,}7\rangle$: toenemende stijging

$\langle 7{,}22\rangle$: geen stijging/daling (constante snelheid)

$\langle 22{,}32\rangle$: constante daling

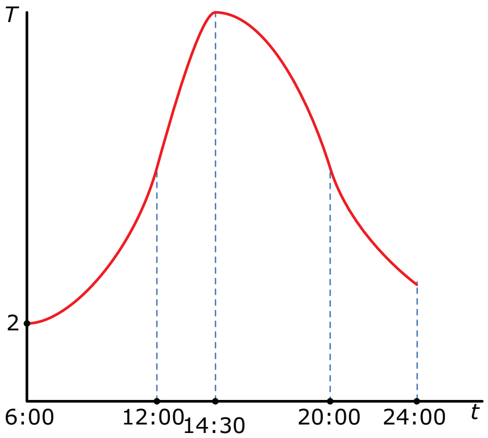
$\langle 32{,}62\rangle$: geen stijging/daling (snelheid is 0)

$\langle 62{,}70\rangle$: constante stijging

$\langle 70{,}190\rangle$: geen stijging/daling (constante snelheid)

$\langle 190{,}202\rangle$: constante daling.

10 Zie de figuur.



Toelichting op de grafiek:

- bij $t = 6$ geldt dat $T = 2$;
- van $t = 6$ tot $t = 12$ is er sprake van toenemende stijging, de grafiek gaat dus steeds steiler omhoog;
- van $t = 12$ tot $t = 14{,}5$ is er sprake van afnemende stijging, de grafiek gaat dus steeds minder steil omhoog;

- van $t = 14{,}5$ tot $t = 20$ is er sprake van toenemende daling, de grafiek gaat dus steeds steiler omlaag;
- van $t = 20$ tot $t = 24$ is er sprake van afnemende daling, de grafiek gaat dus steeds minder steil omlaag.

Om 14:30 uur is de temperatuur tot een maximum gestegen, want daar gaat de stijging over in een daling. Daar zit dus de maximumtemperatuur.

11 a Voer in: Y1=-1/3X^3+4X^2
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 15$ en $0 \leq y \leq 100$

Met de optie maximum vind je $x = 8$.
Het bedrijf moet acht werknemers inzetten.

b Aan de grafiek van W zie je dat bij $x = 4$ de grootste stijging is.

$W(5) - W(4) \approx 15{,}67$ en $W(4) - W(3) \approx 15{,}67$.

Het bedrijf moet dan vier of vijf werknemers inzetten.

c Als je van zeven naar acht werknemers gaat is de winsttoename kleiner dan als je van drie naar vier werknemers gaat. Daarom is het misschien verstandig om minder werknemers in te zetten voor de klus, zodat zij een andere klus kunnen doen waarmee ze meer kunnen verdienen.

12 a Na 60 seconden, daar zit een knik in de grafiek en vanaf dat punt is de daalsnelheid constant. De knik duidt erop dat er iets veranderde op dat moment en de constante en afgenomen daling duidt erop dat hij zijn parachute heeft geopend en dus geleidelijk naar beneden komt.

b De grafiek loopt steeds steiler naar beneden, dus is de grafiek toenemend dalend.

De parachutist valt steeds sneller naar beneden, ofwel de valsnelheid wordt steeds groter.

c De grafiek is vanaf dat moment een rechte lijn, de daling is daarom constant op dat moment. Dat betekent dat de valsnelheid ook constant is:

De valsnelheid is dan $\frac{\text{afstand}}{\text{tijd}} = \frac{1000}{100} = 10$ m/s.

13 a De grafiek stijgt het steilst tussen zijn zeventiende en achttiende verjaardag.

Hij groeit dan: $162 - 135 = 27$ cm.

b De grafiek is stijgend als de grafiek omhoog gaat. Dit is het het geval vanaf het begin (als hij dertien is) tot zijn eenentwintigste levensjaar.

c Er is sprake van afnemende stijging als de grafiek steeds minder steil stijgt. Dit is het geval van zijn achttiende tot zijn eenentwintigste verjaardag.

d Vanaf zijn eenentwintigste, want vanaf dat moment blijft zijn lengte gelijk.

e Gedurende zijn veertiende en vijftiende levensjaar loopt de grafiek redelijk recht, hier is de groeisnelheid dus redelijk constant. Ook als hij gestopt is met groeien, vanaf zijn tweeëntwintigste levensjaar, is de groeisnelheid constant, namelijk: 0. Je ziet niet wat er op de lange termijn gebeurt, daardoor weet je niet of de groeisnelheid constant blijft.

14 a De grafiek daalt tussen het eerste maximum en het minimum en na het tweede maximum. Dus op de intervallen $\langle -2, 0\rangle$ en $\langle 2, \rightarrow\rangle$.

b Twee intervallen.

c Maxima bij $x = -2$ en $x = 2$:

$f(-2) = -0{,}5(-2)^4 + 4(-2)^2 = 8$.

$f(2) = -0{,}5 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^2 = 8$.

Minimum bij $x = 0$:

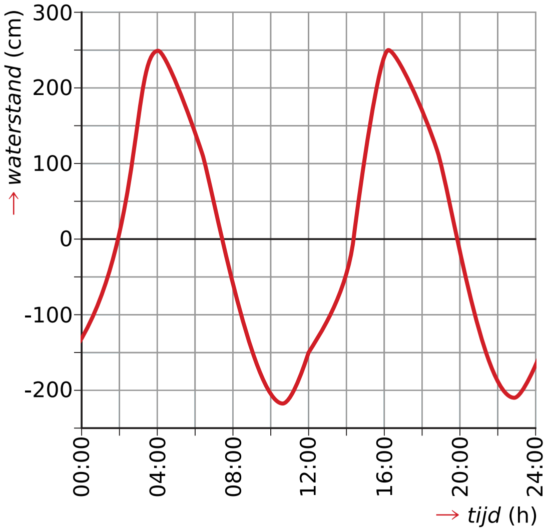
$f(0) = -0{,}5 \cdot 0^4 + 4 \cdot 0^2 = 0$.

5.2 Veranderingen per stap

V1 a Tip: maak om fouten te voorkomen eerst een tabel met tijd, niveau en verandering van niveau:

tijdstip	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
niveau	1	0	-0,9	-1,5	-1,7	-1,5	-1,1	-0,5	0,2	1,3	2,2	2,2	1,5	0,8	-0,4
verandering		-1	-0,9	-0,6	-0,2	0,2	0,4	0,6	0,7	1,1	0,9	0	-0,7	-0,7	-0,2

Het staafdiagram komt er dan zo uit te zien:



b Staaf in positieve richting: stijging. Staaf in negatieve richting: daling.

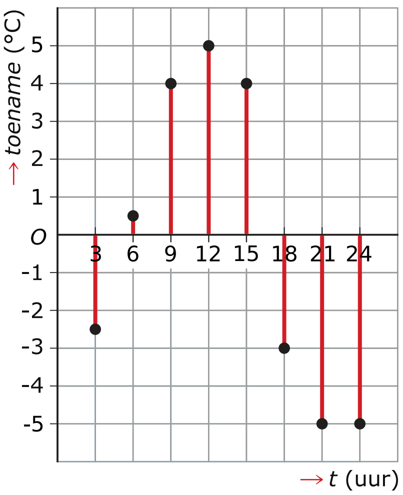
c Een langere staaf betekent grotere snelheid van stijging of daling. Een snelle stijging zie je aan een langere staaf in positieve richting.

d Als je met een dieptemeter de waterdiepte meet, kun je met een dieptekaart (kaart waarop staat hoe diep het water is ten opzichte van NAP) en de komende verandering van het waterniveau snel bepalen hoe lang je nog verder kunt varen zonder vast te lopen.

1 a Zie de tabel.

t (uur)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
T	10	7,5	8	12	17	21	18	13	8
ΔT		-2,5	0,5	4	5	4	-3	-5	-5

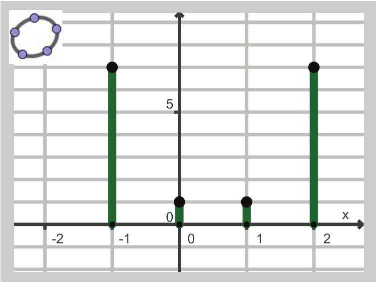
b Zie de figuur.



2 a Zie de tabel.

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8
Δy		7	1	1	7

b Ook deze figuur is (handmatig) gemaakt met GeoGebra.



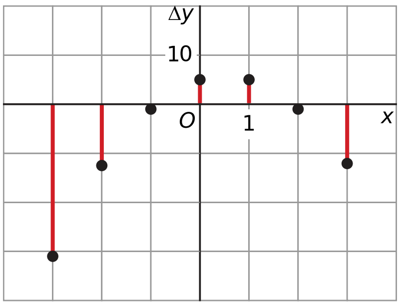
3 Ga na, dat je dezelfde figuur krijgt als in de applet in het voorbeeld.

4 a Voer in: Y1=-X^3+6X en Y2=Y1(X)-Y1(X-1)
Maak de tabel met stapgrootte 1 en startwaarde -3 en neem de tabel over.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Δy	-31	-13	-1	5	5	-1	-13

b D

c Zie de figuur.



5 Zie de tabel.

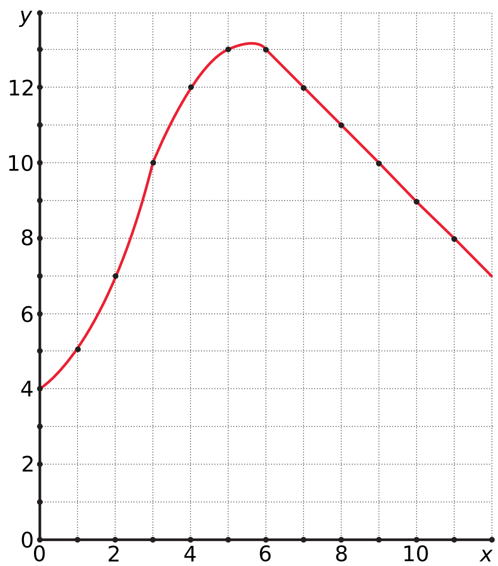
x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Δy	14	9	5	2	0	-1	-1	0	2	5	9	14
y	-5	4	9	11	11	10	9	9	11	16	25	39

Teken een bijpassende grafiek, met de applet kun je de juistheid controleren.

6 a Het bijbehorende toenamediagram:

x	0	1	2	3	4	5	6
Δy		1	2	3	2	1	0
y	4	5	7	10	12	13	13

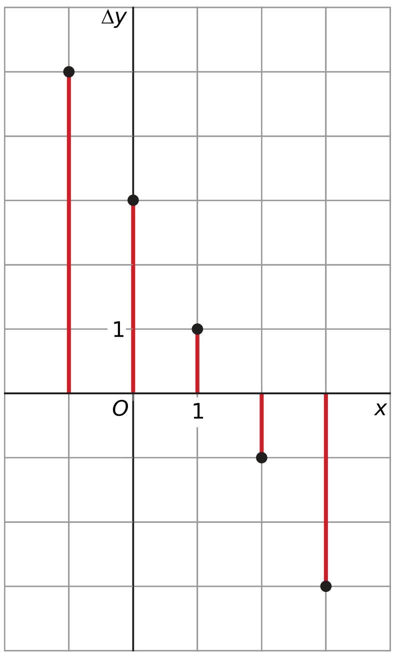
x	7	8	9	10	11	12
Δy	-1	-1	-1	-1	-1	-1
y	12	11	10	9	8	7



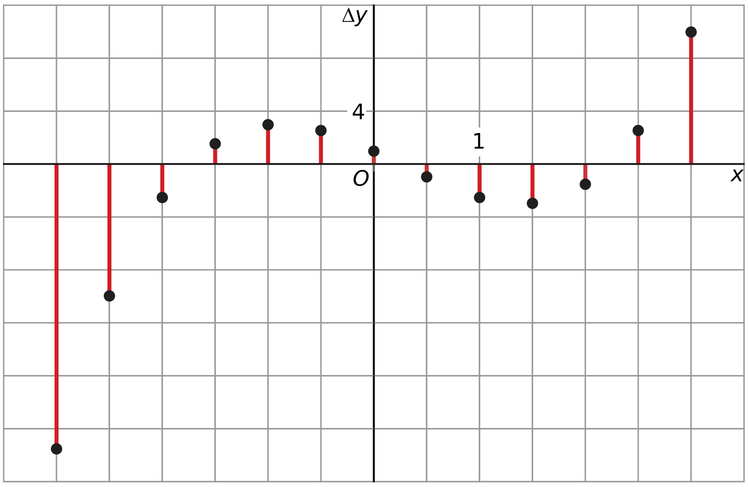
b B

7 Maak eerst een tabel.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	1	4	5	4	1
Δ*y*	-	5	3	1	-1	-3



8 a Voer in: Y1=0.5X^4-4X^2+8 en Y2=Y1(X)-Y1(X-0.5)
Maak een tabel van Y2 met stapgrootte 0,5:

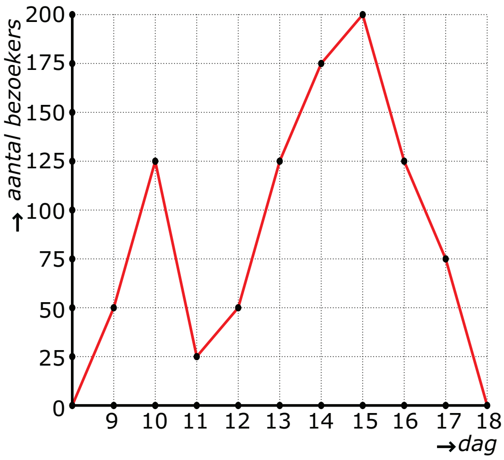


b De staafjes die omlaag gaan, gaan maar op één interval steeds verder omlaag.

c Drie keer wisselt de toename van positief naar negatief of omgekeerd, bij $x = -1,5$, $x = 0,5$ en $x = 2,5$. Dat duidt op drie extremen op dit interval.

9 a Zie de tabel.

t	N	ΔN
0	0	-
9	50	50
10	125	75
11	25	-100
12	50	25
13	125	75
14	175	50
15	200	25
16	125	-75
17	75	-50
18	0	-75



b In de grafiek bij deelvraag a is te zien dat de top van het aantal bezoekers rond 15:00 zit. Toen waren er dus de meeste bezoekers.

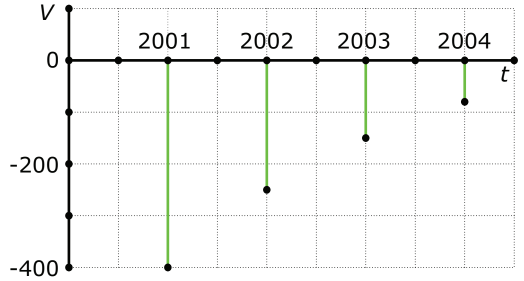
c Nee, dat kan niet precies. Je hebt maar één keer per uur gemeten, dus er kunnen halverwege dat uur meer bezoekers zijn geweest dan aan het eind.

10 a V invoeren in GR en tabel maken:

t	0	1	2	3	4	5	6
V	-667	-400	−240	-144	-86	-52	-31

De formule komt redelijk overeen met de gevonden verschillen.

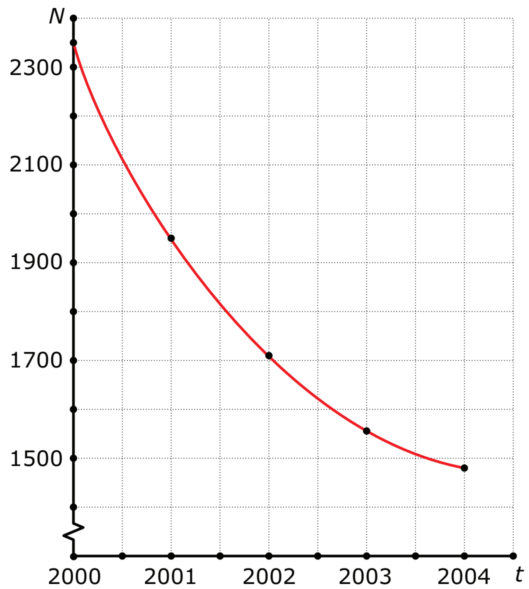
b Maak eerst een tabel.



Toelichting:

De gegevens uit de tabel van $V(t)$ zet je in een toenamediagram.

c Zie de grafiek:



Toelichting:

Je haalt steeds de waarde van V bij een bepaald jaar van de hoeveelheid vlinders van het jaar daarvoor af en zet die hoeveelheid bij dat jaar in de grafiek.

d Er is sprake van een afnemende daling. Je ziet dat de afnames in het afnamediagram steeds kleiner worden.

e De afnames naderen naar 0. De grafiek van N heeft dan een horizontale asymptoot.

11 a A

Diagram A, de toename wordt minder tot bijna 0 waarna de toename weer stijgt.

b $\frac{TK(8000)-TK(4000)}{TK(4000)} \cdot 100\% = \frac{25000-19000}{19000} \cdot 100\% = \frac{6000}{19000} \cdot 100\% \approx 31{,}58$

Ongeveer 32% meer.

12 a Voer in: Y1=-4*(40-X)^3+150*(40-X)^2+16000

Venster bijvoorbeeld: $0 \le x \le 40$ en $0 \le y \le 50000$

b $\langle 0{,}15 \rangle$: afnemende stijging

$\langle 15; 27{,}5 \rangle$: toenemende daling

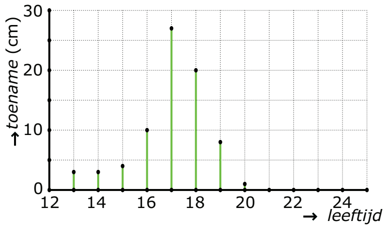
$\langle 27{,}5; 40 \rangle$: afnemende daling

c Na 15 dagen.

Gebruik de GR om de t-coördinaat bij het maximum te bepalen.

d Maak een toenamediagram met de GR. Je ziet dan dat na 14 dagen voor het eerst minder dan 1500 mensen meer last hebben van het ongeval dan twee dagen daarvoor.

13 a Zie het toenamediagram:



Toelichting:

Je neemt steeds de lengte op een bepaalde leeftijd en trekt daar de lengte van het jaar ervoor af. De uitkomst zet je bij de gekozen leeftijd in het toenamediagram. Bijvoorbeeld:

$l(13) - l(13-1) = 108 - 105 = 3$ cm. Dus staat bij leeftijd 13 jaar: 3 cm toename.

b De grafiek daalt als de toename negatief is. In dit geval is de toename altijd positief of gelijk aan 0.

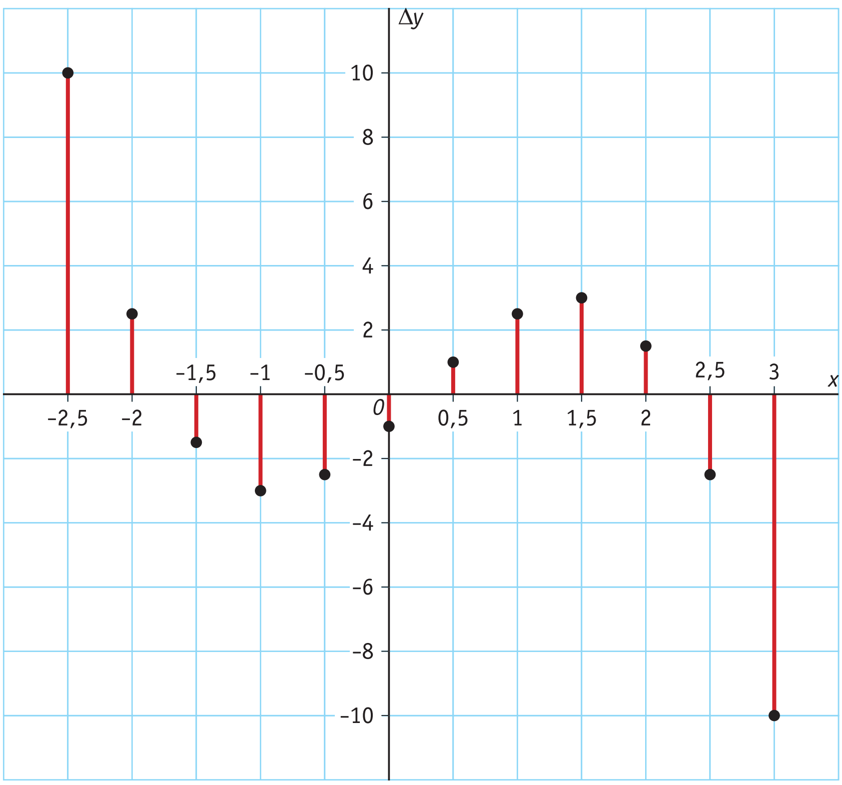
c Er is om het jaar gemeten, wat er binnen zo'n jaar gebeurt weet je niet. Iemand kan het eerste half jaar bijvoorbeeld kleiner worden, maar in het tweede half jaar minstens evenveel groter worden.

d Ongeveer vanaf zijn 20e verjaardag. De toenames zijn dan vrijwel 0.

e In het toenamediagram is te zien dat de toenames tussen zijn 12e en 15e verjaardag en na zijn 20e verjaardag constant zijn. Dat betekent dat de groeisnelheid ook constant is.

14 a GR: Y1=-0.5X^4+4X^2 en Y2=Y1(X)−Y1(X−0.5); tabel met stapgrootte 0,5 vanaf $x = -3$.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Δy		10,0	2,5	-1,5	-3,0	-2,5	-1,0	1,0	2,5	3,0	1,5	-2,5	-10,0

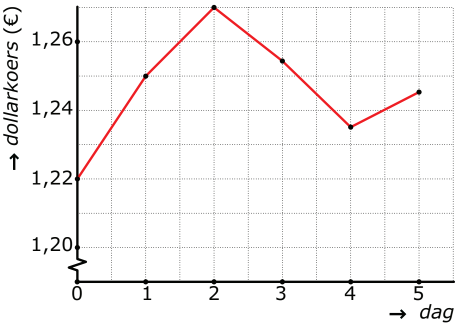


b De staafjes die omlaag gaan, gaan maar op één interval steeds minder ver omlaag.

c Extremen bevinden zich op plekken waar een daling verandert in een stijging of andersom. In een toenamediagram zijn dit plekken waar de toename van negatief naar positief gaat of andersom. Op die overgangen bevindt zich dus een extreme waarde van de functie.

15 Maak eerst een tabel bij het toenamediagram:

dag	zo	ma	di	wo	do	vrij
toename		0,026	0,02	- 0,015	- 0,02	0,01
dollarkoers	1,174	1,2	1,22	1,205	1,185	1,195



5.3 Differentiequotiënt

V1 a Sneller. Hij legt de eerste 8 km in 10 minuten af, dat is 0,8 km per minuut. De volgende 4 km doet hij in 8 minuten, dat is maar 0,5 km per minuut.

b Bij een toenamediagram is het belangrijk dat je regelmatig meetpunten hebt. Deze tijden zijn niet na vaste afstanden gemeten, dus is het niet mogelijk om een toenamediagram te maken.

c Je neemt daarvoor de richtingscoëfficiënt van dat lijnstuk. Anders gezegd: De verandering van de afstand gedeeld door de verandering van de tijd.

d $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18-12}{34-18} = \frac{6}{16} = 0{,}375$ km/min.

e Zoveel kilometer heeft de wielrenner per minuut gereden op dat moment, in andere woorden: dit is zijn/haar gemiddelde snelheid.

1 a $\Delta t = 6 - 0 = 6$
$\Delta s = 1{,}2 \cdot 6^2 - 1{,}2 \cdot 0^2 = 43{,}2$
$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{43{,}2}{6} = 7{,}2$ m/s

b $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot 10^2 - 1{,}2 \cdot 6^2}{10-6} = 19{,}2$ m/s

c Op [6,10].

2 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} \approx \frac{2{,}3-0{,}9}{4} = 0{,}35$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} \approx \frac{1{,}4-2{,}2}{2} = -0{,}4$

c $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} \approx \frac{4{,}3-0{,}9}{5} = 0{,}68$

d Bijvoorbeeld op het interval [5,6].

3 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-0}{1--2} = 1.$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-3}{1--1} = 0.$

4 a $\frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{5^2-5 \cdot 5+4-(2^2-5 \cdot 2+4)}{3} = \frac{6}{3} = 2$

b $\frac{f(6)-f(-3)}{6--3} = \frac{6^2-5 \cdot 6+4-\left((-3)^2-5 \cdot -3+4\right)}{9} = \frac{-18}{9} = -2$

c De twee punten op de grafiek zouden dan dezelfde y-coördinaat moeten hebben. Je kunt twee punten vinden door op de GR een horizontale lijn te tekenen door de grafiek, en dan de snijpunten berekenen. Neem bijvoorbeeld als horizontale lijn $y = 4$. Je vindt dan $x = 0$ en $x = 5$. Op het interval [0,5] is de gemiddelde verandering dus 0.

5 a Op het interval [15,21] geldt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{8{,}0-5{,}5}{21-15} \approx 0{,}42$.
De gemiddelde snelheid is dan 0,42 km/min en op dit interval liep de hardloper dus het snelst.

b De gemiddelde snelheid is $\frac{10-0}{25\frac{1}{3}} \approx 0{,}39$ km per minuut.

6 a $\frac{15}{100} = 0{,}15$, dus de gemiddelde hoogteverandering per meter is 0,15 m.

b $\frac{250-100}{1000-0} = 0{,}15$. Dus 0,15 meter per meter.

c Nee, eigenlijk verwacht je dat de steilste helling wordt aangegeven.

d $\frac{220-210}{500-400} = 0{,}1$ m

e De laatste 100 meter is de gemiddelde helling ongeveer $\frac{65}{100}$.
Aan het eind is de helling dus ongeveer 65%.

7 a De gemiddelde helling van een constante functie $f(x) = c$ op een interval $[a,b]$ is

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{c-c}{b-a} = 0.$

b Het differentiequotiënt van een lineaire functie $f(x) = ax + b$ op een interval $[c,d]$ is $\frac{f(d)-f(c)}{d-c} = \frac{a \cdot d+b-(a \cdot c+b)}{d-c} = \frac{a \cdot (d-c)}{d-c} = a.$

c $\frac{h(b)-h(a)}{b-a} = \frac{b^2+b-(a^2+a)}{b-a} = \frac{b^2-a^2+b-a}{b-a} =$

$= \frac{(b+a) \cdot (b-a)+b-a}{b-a} = \frac{(b+a) \cdot (b-a)}{b-a} + \frac{b-a}{b-a} = b + a + 1$

8 Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+1)-f(a)}{a+1-a} &= \\ \frac{-2(a+1)^2-(-2a^2)}{1} &= \\ -2a^2 - 4a - 2 + 2a^2 &= \\ -4a - 2 & \end{aligned}$$

Het differentiequotiënt van f op $[a,a+1]$ is $-4a - 2$.

9 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{3}$

c Een differentiequotiënt van 0 op een interval betekent dat er tussen de grenzen van dat interval geen hoogteverschil is. Dat is het geval bij de punten D en F en ook bij de punten A en E.

d Aan de uiteinden van het interval [1,4] liggen de punten C en F. Als de richtingscoëfficiënt van dit interval negatief is, wil dat zeggen dat de y-coördinaat bij F lager is dan de y-coördinaat bij C.

10 $\frac{4}{2} = 2$

11 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-6}{2-0} = -2$

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-2}{2--1} = 0$

c Het differentiequotiënt is gelijk aan 0. De punten liggen even hoog, ze hebben dezelfde y-coördinaat.

d Het kan zijn dat de grafiek op dat interval bijvoorbeeld eerst daalt en daarna pas stijgt. Als je de grafiek van f bekijkt, zie je dat dit ook het geval is. Je kunt wel zeggen dat de grafiek op het interval [1,3] gemiddeld stijgend is.

12 Het differentiequotiënt is $\frac{f(a+1)-f(a)}{a+1-a} = \frac{3(a+1)^2+2(a+1)-1-(3a^2+2a-1)}{1} = 6a + 5.$

13 a Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{f(2)-f(-2{,}5)}{2--2{,}5} &= \\ \frac{2-3\sqrt{2 \cdot 2+5}-\left(2-3\sqrt{2 \cdot -2{,}5+5}\right)}{4{,}5} &= \\ \frac{-3\sqrt{9}}{4{,}5} &= -2 \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{f(12)-f(-2)}{12--2} &= \\ \frac{2-3\sqrt{2 \cdot 12+5}-\left(2-3\sqrt{2 \cdot -2+5}\right)}{14} &= \\ \frac{-3\sqrt{29}+3}{14} &\approx -0{,}940 \end{aligned}$$

c Bepaal a met behulp van je grafische rekenmachine door het snijpunt te bepalen van Y1=(3*sqrt(5)-3*sqrt(2X+5))/X en Y2=-2. Je vindt $a \approx -2{,}21$.

14 a $t = 0$ geeft $T = 90$ °C.

b $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(5) - T(0)}{5-0} \approx \frac{45{,}95 - 90}{5} \approx -8{,}8$ °C/min.

De temperatuur daalt gemiddeld 8,8 °C/min in de eerste vijf minuten.

c $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(10) - T(5)}{10-5} \approx \frac{29{,}62 - 45{,}95}{5} \approx -3{,}3$ °C/min.

d De differentiequotiënten worden kleiner. De koffie koelt steeds langzamer af, omdat het temperatuurverschil met de omgeving kleiner wordt.

15 a Het differentiequotiënt is $\frac{V(5) - V(3)}{5-3} \approx \frac{702 - 396}{5-3} = 153$.

b Het differentiequotiënt geeft de gemiddelde toename van het volume in cm^3 per cm hoogte, tussen de hoogtes 3 en 5 cm.

c $\frac{\Delta V}{\Delta t} \approx \frac{702 - 396}{24} = 12{,}75$

Dit betekent dat er in 24 uur gemiddeld 12,75 cm^3 regenwater per uur in de vaas gevallen is.

16 a Differentiequotiënt $= \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{8-0}{10-0} = \frac{8}{10} = 0{,}8$ km/min.

b Het is de gemiddelde snelheid gedurende die periode.

c Het hellingsgetal is $\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{29-23}{60-44} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ km/min.

d $\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{23-12}{44-18} = \frac{11}{26} = 0{,}42$ km/min.

e A C

17 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}5 \cdot 2^4 - 0{,}5 \cdot 0^4}{2-0} = 4$

18 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}5(2p)^2 - 0{,}5p^2}{2p-p} = \frac{1{,}5p^2}{p} = 1{,}5p$ als $p \neq 0$.

5.4 Differentiaalquotiënt

V1 a $1{,}2 \cdot 5^2 = 30$ m.

De snelheid bereken je met een tabel differentiequotiënten op $[5{,}5 + h]$ met $h \to 0$.
Zie de.
Je vindt een snelheid van 12 m/s.

b Bereken de snelheden voor $t = 0{,}1{,}2{,}3{,}...$

t	0	1	2	3	4
$v(t)$	0	2,4	4,8	7,2	9,6

Bij deze tabel past de formule $v(t) = 2{,}4t$.

1 a B

b Ga na, dat je dezelfde uitkomsten krijgt.

c 9,6 m/s.

d C

e Maak eerst deze tabel:

interval	differentiequotiënt
$[5; 5{,}1]$	12,12
$[5; 5{,}01]$	12,012
$[5; 5{,}001]$	12,0012
$[5; 5{,}0001]$	12,000 12

Het differentiaalquotiënt wordt 12 m/s.

f Hij gaat door $P(5{,}30)$.
De vergelijking heeft de vorm $s = 12t + b$.
Invullen van de coördinaten van P geeft $b = -30$.
De vergelijking van de raaklijn is dus $s = 12t - 30$.

2 a A C

b B

3 a Zie de tabel.

interval	differentiequotiënt
$[2; 2{,}1]$	-4,1
$[2; 2{,}01]$	-4,01
$[2; 2{,}001]$	-4,001
$[2; 2{,}0001]$	-4,0001

b Het differentiaalquotiënt voor $x = 2$ is -4.

c Die vergelijking heeft de vorm $y = -4x + b$.

Omdat $f(2) = 0$ gaat de raaklijn door $(2{,}0)$, dus $b = 8$.

De vergelijking van de raaklijn is $y = -4x + 8$.

4 a De helling is bij $t = 4$ iets steiler dan bij $t = 16$.

b 0

c Ongeveer 5 minuten. De grafiek is ongeveer lineair tussen $t = 11$ en $t = 16$, dus hier is met een constante snelheid gereden.

d Een raaklijn aan de grafiek gaat ongeveer door $(4{,}4)$ en $(2{,}0)$.

Dan is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4-0}{4-2} = 2$.

De snelheid van de auto is dan dus ongeveer 2 km/minuut.

5 a $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2-2^2}{2+h-2} = \frac{2^2+4h+h^2-2^2}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4 + h$.

Met $h \rightarrow 0$ vind je het differentiaalquotiënt van 4.

b $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=2} = 4$

c $y = 4x + b$

De raaklijn gaat in ieder geval door het punt (2,4).
$y = 4x + b$geeft $4 = 4 \cdot 2 + b$ en dus $b = -4$.

Dus: $y = 4x - 4$.

d De functie is een parabool. Een parabool heeft een symmetrieas, hier $x = 0$.

Dus in (-2,4) is de helling het tegenovergestelde van die in (2,4).

e In (0,0).

6 a Zie de tabel.

h	interval	berekening	differentiequotiënt
0,1	[2; 2,1]	$\frac{f(2+0{,}1)-f(2)}{0{,}1}$	7,89
0,01	[2; 2,01]	$\frac{f(2+0{,}01)-f(2)}{0{,}01}$	7,9899
0,001	[2; 2,001]	$\frac{f(2+0{,}001)-f(2)}{0{,}001}$	7,998999
0,0001	[2; 2,0001]	$\frac{f(2+0{,}0001)-f(2)}{0{,}0001}$	7,99989999

Het differentiequotiënt benadert het getal 8, dus het hellingsgetal voor $x = 2$ zal 8 zijn.

b In het punt met $x = 2$ stijgt de grafiek. Bij stijgen is het hellingsgetal positief.

c $y = ax + b$;

hellingsgetal $a = 8$.

$f(2) = 5 \cdot 2^2 - 2^3 = 5 \cdot 4 - 8 = 12$, dit geeft het punt = (2,12).

Dit punt invullen in de formule van de raaklijn:

$12 = 8 \cdot 2 + b = 16 + b$ geeft $b = 12 - 16 = -4$ dus $y = 8x - 4$.

7 a De raaklijn aan de grafiek gaat door (0,4) en (2,3).

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-3}{2-0} = -\frac{1}{2}$

b $y = -\frac{1}{2}x + 4$

c Voer in: Y1=5−√(2X) en gebruik de optie dy/dx.

8 a $g(x)$ invullen in GR; dy/dx voor $x = 1$ laten bepalen: -4.

b De grafiek is puntsymmetrisch ten opzichte van (0,0). Het spiegelbeeld van punt (1,4) is hier (-1,-4). In dat punt is de waarde van de helling dus hetzelfde.

c Aangezien er geen functiewaarde is in dat punt, is er ook geen raaklijn en dus geen hellingsgetal.

De grafiek heeft voor $x = 0$ een verticale asymptoot, want bij x-waarden rond $x = 0$ worden de functiewaarden heel groot of juist heel klein, maar x zal nooit 0 worden.

9 a De grafiek is afnemend dalend.

b $C(0) = 10 \cdot 0{,}9^0 = 10$;

$C(5) = 10 \cdot 0{,}9^0 \approx 5{,}9$;

$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{10 \cdot 0{,}9^5 - 10 \cdot 0{,}9^0}{5-0} = \frac{-4{,}09}{5} = -0{,}819$;

Over de eerste 5 uur is de gemiddelde hoeveelheid stof die per uur verdwijnt: 0,82 g/L.

c Met de GR: $Y1 = 10 \cdot 0{,}9^X$ en dan $\frac{dy}{dx}$ gebruiken.

Ongeveer - 0,62 g/L per uur.

10 a Gemiddelde groei is: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{5{,}6-0}{5-0} = 1{,}12$ m/jaar

b De raaklijn bij vijf jaar gaat ongeveer door (5; 5,6) en (2,4).

Bepaal het differentiequotiënt van de raaklijn: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{5{,}6-4}{5-2} = 0{,}53$.

De boom groeit na vijf jaar dus met ongeveer 0,53 m/jaar.

c Na 2 jaar gaat de toenemende stijging over in een afnemende stijging. Op dat punt is de stijging dus het grootst. De grafiek loopt daar ook het steilst omhoog.

d Uiteindelijk is de boom uitgegroeid en blijft de lengte gelijk, de groeisnelheid is dan dus 0 m/jaar. De grafiek krijgt een horizontaal karakter.

11 a Met de GR kun je berekenen dat de helling 10 is als $x = 0$.

b In de top is er geen stijging en geen daling, dus de helling is daar 0. Bepaal met de GR het maximum: 25 voor $x = 5$. De top is (5,25).

c Bij $x = 8$ spat hij uiteen en $h(8) = -\left(8^2\right) + 10 \cdot 8 = 16$ meter hoog.

Helling bepalen bij $x = 8$ met de GR: - 6.

12 a $\frac{s(5)-s(0)}{5-0} = \frac{4{,}9 \cdot 5^2}{5} = 24{,}5$ m/s

b Het differentiequotiënt op $[5{,}5 + h]$ is:

$$\frac{s(5+h)-s(5)}{h} = \frac{4{,}9 \cdot (5+h)^2 - 4{,}9 \cdot 5^2}{h} = 49h + 4{,}9h^2$$

Met $h \to 0$ vind je $\left[\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right]_{t=5} = 49$ m/s.

c Het tijdstip dat de steen op de grond valt vind je door $4{,}9t^2 = 500$ op te lossen.

Dit geeft $t^2 = \frac{500}{4{,}9}$, dus $t = \sqrt{\frac{500}{4{,}9}} \approx 10{,}1$ (en $t \approx -10{,}1$ maar deze oplossing is niet relevant).

Daarbij vind je $\left[\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right]_{t=10{,}1} = 98{,}98$ m/s.

13 Het muntje is ongeveer $380 = 4{,}9t^2$ geeft $t \approx 8{,}8$ s.

Daarbij hoort een snelheid van ongeveer 86,3 m/s en dat is ongeveer 311 km/h.

14 a $\frac{2500 \cdot 1{,}2^4 - 2500 \cdot 1{,}2^0}{4-0} \approx 671$ kg/dag.

b Met de GR: Y1=2500*1,2^X en dy/dx gebruiken geeft $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=4} = -1 \approx 945$ kg/dag.

c Eerst een raaklijn tekenen aan de grafiek in het punt met $t = 4$. Vervolgens de richtingscoëfficiënt van die raaklijn aangeven in de grafiek.

15 a Zie de tabel.

interval	differentiequotiënt
[3; 3,1]	6,1
[3; 3,01]	6,01
[3; 3,001]	6,001
[3; 3,0001]	6,0001

GR: $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]_{x=3} = 6$

b De raaklijn gaat door (3,13).
De vergelijking is daarom $y = 6x - 5$.

c De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een top is 0, dus in het punt (0,4) is het hellingsgetal van de raaklijn 0.

5.5 Hellingsgrafiek

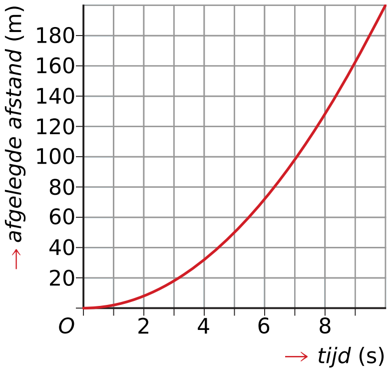
V1 a Het is een rechte lijn. Gaat door de punten (0,0) en (10,40);

het hellingsgetal is: $\frac{40-0}{10-0} = 4$;

het startgetal is: 0.

de formule wordt: $v = 4t$.

b Dat wordt een (halve) parabool:



c $s = 2t^2$ geeft $s(20) = 800$ m.

1 a Voer in je GR in Y1=X^2 en gebruik de optie dy/dx.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

b Vergelijk jouw grafiek met die in de uitleg.

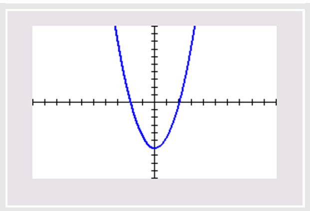
De grafiek voldoet aan $y = 2x$.

c Voor de x-waarde die hoort bij $f'(x) = 0$ heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn. Hier is dat voor $x = 0$.

2 a Zie de tabel.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	7,5	0	-4,5	-6	-4,5	0	7,5

b Voer in Y1=0.5X^3-6X en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/(0,001).



c Bij een top van een grafiek hoort een raaklijn met hellingsgetal 0.

d $y = ax + b$

Het hellingsgetal is: -4,5;

De raaklijn gaat in ieder geval door het punt (1; -5,5). Bereken b.

$$\begin{aligned} y &= -4{,}5x + b \\ -5{,}5 &= -4{,}5 \cdot 1 + b \\ -1 &= b \end{aligned}$$

$y = -4{,}5x - 1$

e f' heeft een minimum van -6 voor $x = 0$. De grafiek van f gaat daar van toenemend dalend over naar afnemend dalend.

3 a C

b C

c B

4 a C

b A B D

5 a D

b Grafiek B.

6 Grafiek B.

7 a Uit de tabel blijkt dat het hellingsgetal steeds 2 keer de x-waarde is. Het lijkt erop dat $f'(x) = 2x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

b Oplossing:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\frac{(x+h)^2+4-(x^2+4)}{h} =$$

$$\frac{x^2+2hx+h^2+4-x^2-4}{h} =$$

$$\frac{2xh+h^2}{h} = 2x + h$$

Dit differentiequotiënt heeft voor elke waarde van h (behalve $h = 0$) de waarde $2x + h$. Hoe dichter h bij 0 komt, hoe dichter $2x + h$ bij $2x$ komt. Dit betekent, dat $f'(x) = 2x$. Je vermoeden is juist.

c De formules zijn gelijk. De werkwijze bij b is beter, want

- om te beginnen weet je niet zeker of de gevonden regelmaat voor elke waarde van x opgaat;
- en bij ingewikkelder functies is de regelmaat niet zo eenvoudig vast te stellen vanuit een tabel.

8 a Met de GR of via $\frac{\text{dy}}{\text{dx}}$ of via een hellingsgrafiek:

$a'(5) = 12$ m/s en dat is $12 \cdot 3{,}6 = 43{,}2$ km/h.

b $\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{1{,}2(t+h)^2-1{,}2t^2}{h} = \frac{2{,}4th+h^2}{h} = 2{,}4t + h$.

De bijbehorende formule wordt met $h \to 0$: $v(t) = a'(t) = 2{,}4t$.

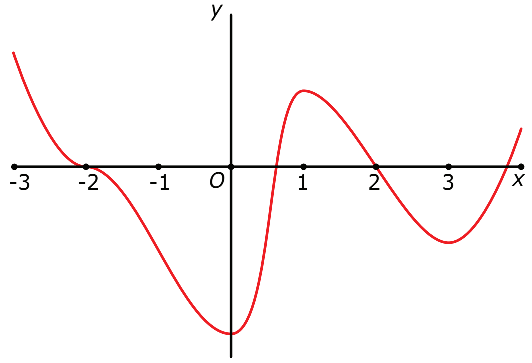
c 50 km/h is omgerekend: $\frac{50}{3{,}6} \approx 13{,}89$ m/s.

$v(t) = 13{,}89$ invullen: $2{,}4t \approx 13{,}89$ geeft $t \approx 5{,}8$ seconden.

Na 5,8 seconden beweegt de zeilwagen met een snelheid van 50 km/h.

9 De blauwe grafiek (met de langere streepjes).

10 Bijvoorbeeld zo. De ligging van de grafiek ten opzichte van de x-as kun je niet weten, net zo min als de mate van stijging of daling.



11 a Je ziet de hellingsgrafiek van f. De grafiek van f is stijgend als de hellingsgrafiek positief is (boven de x-as ligt), dus op het interval: $\langle -1,1 \rangle$.

b Voor extreme waarden geldt vaak $f'(x) = 0$. Maar dit kunnen zowel minima als maxima zijn. Een maximum is te vinden als $f'(x)$ van positief naar negatief gaat. Dit is het geval bij $x = 1$.

c Nee, daarvoor moet je het functievoorschrift van f weten.

d Je grafiek moet in ieder geval door (0,2) gaan en een maximum hebben voor $x = 1$ en een minimum voor $x = -1$.

12 Voer in: Y1=0.5X^2+3X

Gebruik $\frac{dy}{dx}$. Maak een tabel van de hellingsfunctie:

x	0	1	2	3	4
$f'(x)$	3	4	5	6	7

Lineaire functie met hellingsgetal 1 en begingetal 3.

Functievoorschrift: $f'(x) = x + 3$.

13 a Vul elke functie in de GR in en bepaal $\frac{dy}{dx}$ als $x = 1$:

- $f'(1) = -2$
- $g'(1) = 0{,}5$
- $h'(1) = -4$
- $k'(1) = 0$

b Vul elke functie als Y1 in de GR in en neem Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/(0.001).

c Bij de extremen van de gekozen functie zit een nulpunt bij de hellingsfunctie van die grafiek, want de helling in een top is 0. Bepaal de nulpunten van de hellingsgrafiek:

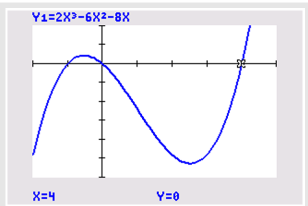
$f(x)$: $x = 0$, max. $f(0) = -\left(0^2\right) + 4 = 4$;

$g(x)$: $x = 0$, max. $g(0) = \sqrt{0^2 + 3} = \sqrt{3}$;

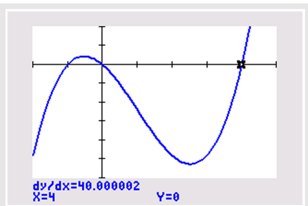
$h(x)$: geen nulpunten, geen extremen;

$k(x)$: $x = 1$, max. $k(1) = -\left(1^4\right) + 4 \cdot 1 = 3$.

14 a Voer in: Y1=2X^3-6X^2-8X
Venster bijvoorbeeld: $-2 \leq x \leq 5$ en $-30 \leq y \leq 10$.
Bereken met de GR het snijpunt van de grafiek met de x-as.



b Met de GR: gebruik $\frac{dy}{dx}$.



Het hellingsgetal bij dit punt is 40.

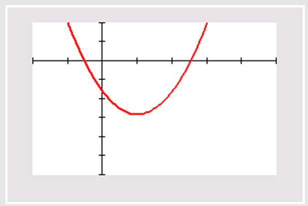
c Een raaklijn is een rechte lijn. Je zoekt de richtingscoëfficiënt a en het begingetal b.

De richtingscoëfficiënt is gelijk aan het hellingsgetal: 40.

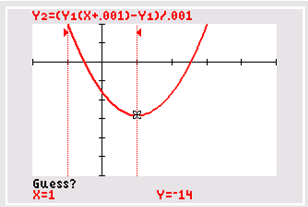
De lijn gaat in ieder geval door het punt (4,0).

De vergelijking van de raaklijn aan $f(x)$ door (4,0) is dan: $y = 40x - 160$.

d Voer in: Y1=2X^3-6X^2-8X en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(x))/(0.001).
Venster bijvoorbeeld: $-2 \leq x \leq 5$ en $-30 \leq y \leq 10$.



e Voer in: gebruik de hellingsgrafiek. Via menu calculate met de optie zero, krijg je:



$x \approx 2{,}53$ en $x \approx -0{,}53$ invullen in de oorspronkelijk functie levert:

min. $f(2{,}53) \approx -26{,}26$ en max. $f(-0{,}52) \approx 2{,}26$.

15 a De afgelegde weg wordt in meters uitgedrukt. De hellingsgrafiek geeft de verandering per seconde. De hellingsgrafiek wordt dus uitgedrukt in m/s.

Voer in: Y1=1.6X^2 en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/(0.001) en je ziet (een benadering van) de hellingsgrafiek.

b De richtingscoëfficiënt van de lijn blijkt 3,2 en het begingetal is 0, dus $v(t) = 3{,}2t$.

c v wordt uitgedrukt in m/s. Reken eerst de 80 km/h om: $\frac{80}{3{,}6} \approx 22{,}22$ m/s.

Invullen in de formule levert:

$22{,}22 = 3{,}2t$ en dus $t = \frac{22{,}22}{3{,}2} \approx 6{,}94$.

Na ongeveer 7 s is de snelheid meer dan 80 km/h.

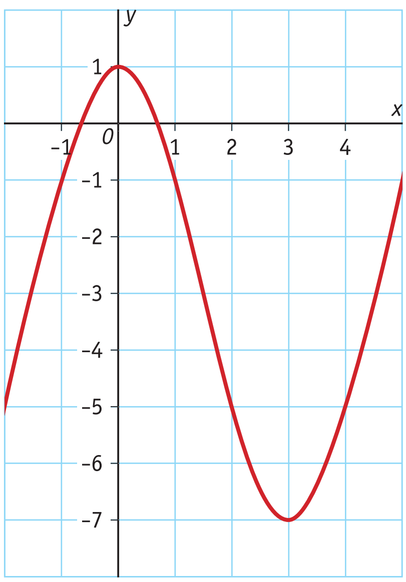
16 Gebruik de GR. Maak een tabel. Je vindt de grafiek van: $f'(x) = 2x - 4$.

17 De grafiek van g moet in ieder geval door het punt (2,4) gaan en drie extremen hebben: maxima voor $x = -3$ en $x = 3$ en een minimum voor $x = 0$.

18 a Tot $x = 0$ stijgt de grafiek en na $x = 0$ daalt de grafiek weer. Daar is de grafiek dus maximaal gestegen, dus daar zit een maximum.

b Bij het interval ⟨0,3⟩ staan mintekens, dat gedeelte van de grafiek is dus dalend.

c Mogelijke schets van de grafiek:



De grafiek van f moet in ieder geval door (0,1) gaan en heeft twee extremen: een maximum voor $x = 0$ (zie opdracht a) en een minimum voor $x = 3$ (waar de grafiek maximaal gedaald is).

19 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4(x+h)^2+1-(4x^2+1)}{h} = \frac{4(x^2+xh+h^2)+1-4x^2-1}{h} = 8x + 4h$.

Neem $h \to 0$ en je vindt de afgeleide functie $f'(x) = 8x$.

5.6 Totaalbeeld

1 a De daling wordt steeds steiler op het interval [-1,1]; er is sprake van een toenemende daling op het interval [0,1].

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = -11$
De gemiddelde daling op het interval [0,1] is 11.

c Zie de tabel.

interval	differentiequotiënt
[1; 1,1]	-11,99
[1; 1,01]	-11,9999
[1; 1,001]	-12,0000
[1; 1,0001]	-12,0000

Deze rij getallen nadert naar $f'(1) = -12$.

Controleer dit met $\frac{dy}{dx}$ op je grafische rekenmachine.

d Uit het antwoord bij c weet je dat het hellingsgetal van de raaklijn -12 is. Er geldt daarom $y = -12x + b$.

De raaklijn gaat door het raakpunt $(1, -11)$. $-12 \cdot 1 + b = -11$: $b = 1$

De vergelijking van de raaklijn is $y = -12x + 1$.

e Op basis van de karakteristieken kun je een hellingsgrafiek schetsen. Die moet nulpunten hebben bij $x = -1$ en $x = 3$ en een laagste waarde (minimum) bij $x = 1$. Het is een dalparabool.

2 a $h(10) = 60 \cdot 100 - 5 \cdot 10^2 = 100$
Op 100 meter hoogte.

b Gebruik de grafische rekenmachine om een toenametabel te maken.
Voer in: Y1=60X-50X^2 en Y2=Y1(X+1)-Y1(X).

c Tussen $t = 6$ en $t = 7$.

Bij $t = 6$ is nog sprake van toename ten opzichte van de hoogte bij $t = 5$. Bij $t = 7$ is sprake van een afname ten opzichte van de hoogte bij $t = 6$. Ergens tussen $t = 6$ en $t = 7$ gaat de toename over in een afname en bereikt de vuurpijl zijn hoogste punt. Als je de top berekent met de formule van de grafiek, blijkt dat precies bij $t = 6$ te zijn. De maximale hoogte van de vuurpijl is 180 m.

d $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{180}{6} = 30$ m/s

e GR: Y1=60X-5X^2 en Y2=(Y1(X+0.001)-Y1(X))/0.001 en bekijk de tabel met (benaderde) hellingsgetallen.
Plot de grafiek van Y2.

f $v = 60 - 10t$

$v(10) = -40$, dus de snelheid op het moment van ontploffen is -40 m/s.

3 a Het migratiesaldo is positief. Dat betekent dat er netto 3500 mensen zijn bijgekomen.

Hetzelfde geldt voor het geboorteoverschot, waar 2100 meer baby's zijn geboren dan dat er mensen overleden zijn.

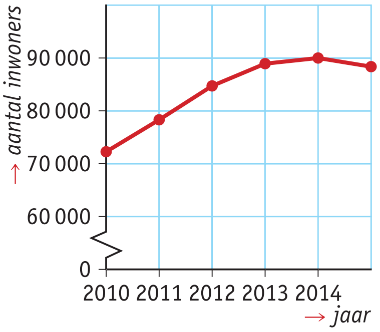
In totaal zijn er in het jaar 2010: $3500 + 2100 = 5600$ mensen bijgekomen.

b Je vindt negatieve waarden voor het migratiesaldo in 2013 en 2014. Maar door het geboorteoverschot komen er in 2013 toch nog netto 1200 mensen bij. Pas in 2014 is er een netto afname.

c Zie de tabel.

jaartal	migratiesaldo	geboorteoverschot	toename totaal	aantal inwoners
2010	3500	2100	5600	72600
2011	3700	2800	6500	78200
2012	1800	2300	4100	84700
2013	-700	1900	1200	88800
2014	-1200	-400	-1600	90000
2015				88400

De toenames zijn achtereenvolgens: 5600, 6500, 4100, 1200 en −1600.
De aantallen inwoners zijn daarom: 72600 (begin 2010), 78200 (begin 2011), 84700 (begin 2012), 88800 (begin 2013), 90000 (begin 2014) en 88400 (begin 2015).



d 88400 inwoners

4 a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}25(2+h)^2+2+h-(0{,}25\cdot 2^2+2)}{2+h-2} = \frac{0{,}25\cdot(4+4h+h^2)+2+h-3}{h} = 2 + 0{,}25h$

Met $h \to 0$ is het differentiaalquotiënt 2.

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}25(x+h)^2+x+h-(0{,}25x^2+x)}{x+h-x} = \frac{0{,}5xh+h+0{,}25h^2}{h} = 0{,}5x + 1 + 0{,}25h$

Met $h \to 0$ vind je de hellingsfunctie $f'(x) = 0{,}5x + 1$.

5 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - 2x &= 0 \\ x\left(0{,}5x^2 - 1{,}5x - 2\right) &= 0 \\ x &= 0 \vee 0{,}5x^2 - 1{,}5x - 2 = 0 \\ x &= 0 \vee x^2 - 3x - 4 = 0 \\ x &= 0 \vee (x+1)(x-4) = 0 \\ x &= 0 \vee x+1 = 0 \vee x-4 = 0 \\ x &= 0 \vee x = \text{-}1 \vee x = 4 \end{aligned}$$

De snijpunten zijn $A(\text{-}1{,}0), B(0{,}0)$ en $C(4{,}0)$.

b $D(\text{-}0{,}5; 0{,}5625)$

De lijn door de punten C en D heeft de vergelijking $y = \text{-}\frac{1}{8}x + 0{,}5$.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=\text{-}0{,}5} = \text{-}\frac{1}{8}$.

De raaklijn is $y = \text{-}\frac{1}{8} + b$: $b = 0{,}5625 - 0{,}625 = 0{,}5$.

De raaklijn heeft de vergelijking $y = \text{-}\frac{1}{8} + 0{,}5$.

6 a September/oktober en maart/april; de grafiek is daar het steilst.

b Ja, in dezelfde maanden. Dit heeft te maken met de plaats van Nederland op Aarde en het feit dat de Aardas niet loodrecht staat op het vlak waarin de baan van de Aarde om de Zon ligt.

c Je neemt het verschil van het tijdstip van zonsopkomst en zonsondergang.

d -

e Eigen antwoord

f In dezelfde maanden als zonsopkomst en zonsondergang.

g In juni/juli en in december/januari. Toenames vrijwel 0.

h In augustus/september. Grote afnames (negatieve toenames).

7 a Het wordt de grafiek van $s(t) = 1{,}2t^2$ als je uitgaat van een afgelegde weg van 0 op $t = 0$.

b $v'(t) = 2{,}4t$ want de grafiek van v is een rechte lijn met een richtingscoëfficiënt van 2,4.

c De versnelling.

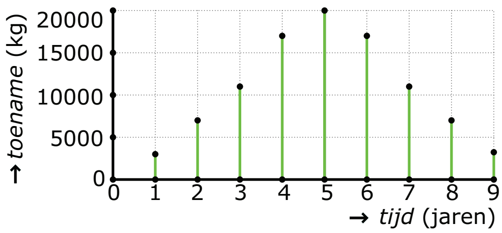
d $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}2 \cdot (t+h)^2 - 1{,}2 \cdot t}{h} = \frac{2{,}4 \cdot (th) + 1{,}2 \cdot h^2}{h} = 2{,}4t \ \ (h \to 0)$

8 a In 1975: $T \approx 1540$ mld liter per dag en $B \approx 215$ miljoen.
Per inwoner gemiddeld ongeveer 7163 liter per dag, dus per jaar $365 \cdot 7163 \approx 2600000$ liter per inwoner.

b In 1950: $\frac{625}{700} \cdot 100 \approx 89{,}3\%$.
In 1980: $\frac{1525}{1680} \cdot 100 \approx 90{,}8\%$ (het getal 1525 vind je door bij de hoeveelheid in 1950 alle toenames op te tellen)

c Tussen $1525 + 6 \cdot 110 = 2185$ en $1525 + 6 \cdot 200 = 2725$ mld liter per dag.

9 a Zie de figuur.



b In het vijfde jaar is de toename van het aantal kg vis het grootst (20.000 kg). Als de viskweker 5 jaar wacht is er 60000 kg vis en hij kan dan jaarlijks 20.000 kg vis vangen, precies de toename in dat vijfde jaar. Zo houdt hij steeds tussen de 40.000 en de 60.000 kg vis.

10 De grafiek van de eerste formule is een rechte lijn met helling 6,6.

De helling van $H = 200 - (0{,}0545V - 0{,}836)^{-1}$ voor $V = 17$ is ongeveer 6,65.

De hellingen zijn ongeveer gelijk.

6

Logaritmische functies

6.1 Logaritmen

V1 Los met de GR op: $6 \cdot 2^t = 1000$. Je vindt $t \approx 7{,}381$ uur. Dus 7 uur en 23 minuten.

1 a Voer in: Y1=2^X en Y2=30
Venster bijvoorbeeld: $[0{,}10] \times [0{,}50]$
Je vindt met behulp van de intersect-optie het getal 4,907.
Dus $t \approx 4{,}91$.

b $t = {}^{2}\log(30)$

c Voer in: Y1=2^X en Y2=100
Met intersect vind je 6,64 uur, dat is 6 uur en 39 minuten. Het antwoord genoteerd als logaritme is ${}^{2}\log(100)$.

2 a Maak eerst een functie waarmee je de hoeveelheid gas in het luchtschip kunt berekenen. Elke dag 2% minder betekent een groeifactor van $g = 0{,}98$. Dus $G(t) = 3000 \cdot 0{,}98^t$ met G de hoeveelheid gas in m^3 en t in dagen. Stel gelijk aan 2800. Dit levert de gevraagde vergelijking: $3000 \cdot 0{,}98^t = 2800$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 3000 \cdot 0{,}98^t &= 2800 \\ 0{,}98^t &= \tfrac{2800}{3000} \\ 0{,}98^t &= \tfrac{14}{15} \end{aligned}$$

c Gebruik de definitie van de logaritme. Uit $g^x = y$ volgt $x = {}^{g}\log(y)$.

Dus $t = {}^{0{,}98}\log\left(\frac{14}{15}\right)$

d Voer in: Y1=2^X en Y2=7
De optie intersect geeft $x \approx 3{,}42$.

3 a Voer in: Y1=2^X en Y2=7
De optie intersect geeft $x \approx 2{,}807$.
Gebruik de definitie van de logaritme: uit $g^x = y$ volgt $x = {}^{g}\log(y)$.
Dus: $x = {}^{2}\log(7) \approx 2{,}807$.

b Je ziet dat $3^4 = 81$.
Gebruik de definitie van de logaritme: uit $g^x = y$ volgt $x = {}^{g}\log(y)$.
Dus: $x = {}^{3}\log(81) = 4$.

c Je ziet dat $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$.

Gebruik de definitie van de logaritme: uit $g^x = y$ volgt $x = {}^{g}\log(y)$.

Dus: $x = {}^{\frac{1}{3}}\log(9) = -2$.

d Voer in: Y1=(1/3)^X en Y2=0.01
De optie intersect geeft $x \approx 4{,}192$.
Gebruik de definitie van de logaritme: uit $g^x = y$ volgt $x = {}^{g}\log(y)$.

Dus: $x = {}^{\frac{1}{3}}\log(0{,}01) \approx 4{,}192$.

4 a ${}^{5}\log(125) = {}^{5}\log\left(5^3\right) = 3$

b ${}^{5}\log\left(\frac{1}{25}\right) = {}^{5}\log\left(5^{-2}\right) = -2$

c ${}^{4}\log(64) = {}^{4}\log\left(4^3\right) = 3$

d ${}^{\frac{1}{4}}\log(64) = {}^{\frac{1}{4}}\log\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\right) = -3$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right) = {}^{\frac{1}{3}}\log\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\right) = 4$

f ${}^{2}\log\left(\sqrt{2}\right) = {}^{2}\log\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$

5 a $5^3 = 125$ en $5^4 = 625$
$3 < {}^{5}\log(150) < 4$

b $10^2 = 100$ en $10^3 = 1000$
$2 < {}^{10}\log(758) < 3$

c $2^5 = 32$ en $2^6 = 64$
$5 < {}^{2}\log(60) < 6$

d $2^{-3} = \frac{1}{8}$ en $2^{-2} = \frac{1}{4}$

$-3 < {}^{2}\log\left(\frac{1}{7}\right) < -2$

e $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$ en $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

$-5 < {}^{\frac{1}{2}}\log(20) < -4$

f $\left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{1}{3}$ en $\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}$

$1 < {}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{5}\right) < 2$

6 a Bepaal de x-waarde van het snijpunt van Y1=5^X en Y2=150: ${}^{5}\log(150) \approx 3{,}1$

b Bepaal de x-waarde van het snijpunt van Y1=10^X en Y2=758: ${}^{10}\log(758) \approx 2{,}9$

c Bepaal de x-waarde van het snijpunt van Y1=2^X en Y2=60: ${}^{2}\log(60) \approx 5{,}9$

d Bepaal de x-waarde van het snijpunt van Y1=2^X en Y2=1/7: ${}^{2}\log\left(\frac{1}{7}\right) \approx -2{,}8$

e Bepaal de x-waarde van het snijpunt van Y1=(1/2)^X en Y2=20: ${}^{\frac{1}{2}}\log(20) \approx -4{,}3$

f Bepaal de x-waarde van het snijpunt van Y1=(1/3)^X en Y2=1/5: ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{5}\right) \approx 1{,}5$

7 a Dit wordt $3^x = 600$, dus $x = {}^{3}\log(600) \approx 5{,}8$ (gebruik je GR om $3^x = 600$ op te lossen).

b $1{,}7^t = 525$, dus $x = {}^{1,7}\log(525) \approx 11{,}8$ (gebruik je GR om $1{,}7^t = 525$ op te lossen).

c $0{,}6^t = \frac{30}{572}$, dus $x = {}^{0,6}\log\left(\frac{30}{572}\right) \approx 5{,}8$ (gebruik je GR om $0{,}6^t = \frac{30}{572}$ op te lossen).

8 Los op $10000 \cdot 1{,}08^t = 15000$, ofwel $1{,}08^t = 1{,}5$.
Dus $t = {}^{1,08}\log(1{,}5) \approx 5{,}268$ (gebruik de GR om $1{,}08^t = 1{,}5$ op te lossen).
Na vijf jaar, drie maanden en zeven dagen. Dat is in april 2019.

9 a ${}^{4}\log(64) = {}^{4}\log\left(4^3\right) = 3$

b ${}^{4}\log(400) \approx 4{,}3$ (met de GR)

c ${}^{\frac{1}{3}}\log(60) \approx -3{,}7$ (met de GR)

d ${}^{\frac{1}{3}}\log(81) = {}^{\frac{1}{3}}\log\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\right) = -4$

e ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{1}{81}\right) = {}^{\frac{1}{3}}\log\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\right) = 4$

f ${}^{0,1}\log(1000000) = {}^{0,1}\log\left(0{,}1^{-6}\right) = -6$

10 a Bepaal de x-waarde van het snijpunt van Y1=2.5^X en Y2=100: ${}^{2,5}\log(100) \approx 5{,}026$

b Bepaal de x-waarde van het snijpunt van Y1=0.7^X en Y2=20: ${}^{0,7}\log(20) \approx -8{,}399$

c Bepaal de x-waarde van het snijpunt van Y1=2.3^X en Y2=0.05: ${}^{2,3}\log(0{,}05) \approx -3{,}597$

d Bepaal de x-waarde van het snijpunt van Y1=15.2^X en Y2=2.3: ${}^{15,2}\log(2{,}3) \approx 0{,}306$

11 a $6^1 = 6$ en $6^2 = 36$
$1 < {}^{6}\log(30) < 2$

b $3^3 = 27$ en $3^4 = 81$
$3 < {}^{3}\log(70) < 4$

c $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$ en $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

$-4 < {}^{\frac{1}{2}}\log(10) < -3$

d $\left(\frac{1}{3}\right)^{4} \approx 0{,}012$ en $\left(\frac{1}{3}\right)^{5} \approx 0{,}004$

$4 < {}^{\frac{1}{3}}\log(0{,}01) < 5$

12 a Je ziet dat $10^x = 0{,}01$ gelijk is aan $10^{-2} = 0{,}01$.
Dus $x = {}^{10}\log(0{,}01) = -2$.

b $2^x = 60$, dus $x = {}^{2}\log(60) \approx 5{,}9$
Gebruik de GR om $2^x = 60$ op te lossen.

c $0{,}8^t = 0{,}5$; dus $t = {}^{0,8}\log(0{,}5) \approx 3{,}1$
Gebruik de GR om $0{,}8^t = 0{,}5$ op te lossen.

13 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 15 \cdot 0{,}4^x &= 45 \\ 0{,}4^x &= 3 \\ x &= {}^{0,4}\log(3) \approx -1{,}20 \end{aligned}$$

Gebruik de GR om $0{,}4^x = 3$ op te lossen.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 17 \cdot 4^x &= 391 \\ 4^x &= 23 \\ x &= {}^{4}\log(23) \approx 2{,}26 \end{aligned}$$

Gebruik de GR om $4^x = 23$ op te lossen.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 15 \cdot 2^x &= 3 \\ 2^x &= 0{,}2 \\ x &= {}^{2}\log(0{,}2) \approx -2{,}32 \end{aligned}$$

Gebruik de GR om $2^x = 0{,}2$ op te lossen.

14 $2^t = 3$ geeft $t = {}^{2}\log(3) \approx 1{,}58$ uur; ofwel ongeveer 1 uur en 35 minuten (gebruik de GR om $2^t = 3$ op te lossen).

15 a Stel een exponentieel verband op met groeifactor per jaar $g = 1{,}07$ en een beginhoeveelheid van 250000 op 1 juli 2014. Noem dit moment $t = 0$.
Het is negentien jaar geleden.
De waarde wordt $250000{,}00 \cdot 1{,}07^{-19} = 69127{,}08$ euro.

b Stel het exponentiële verband dat je bij a hebt gebruikt gelijk aan 200000.

$$\begin{aligned} 250000 \cdot 1{,}07^t &= 200000 \\ 1{,}07^t &= 0{,}8 \\ t &= {}^{1,07}\log(0{,}8) \approx -3{,}298 \end{aligned}$$

Gebruik de GR om $1{,}07^t = 0{,}8$ op te lossen.
Ongeveer drie jaar geleden.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 250000 \cdot 1{,}07^t &= 50000 \\ 1{,}07^t &= \tfrac{1}{5} \\ t &= {}^{1{,}07}\log\left(\tfrac{1}{5}\right) \approx -23{,}78 \end{aligned}$$

Gebruik de GR om $1{,}07^t = \frac{1}{5}$ op te lossen.

16 a ${}^{2}\log\left(2^{2{,}5}\right) = 2{,}5$

b ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right) = -3$

17 a $2^9 = 512$ en $2^{10} = 1024$, dus $9 < {}^{2}\log(513) < 10$.

${}^{2}\log(513) \approx 9{,}003$ (gebruik je GR om $2^x = 513$ op te lossen).

b $0{,}4^{-4} \approx 39$ en $0{,}4^{-3} = 15{,}625$, dus $-4 < {}^{0{,}4}\log(25) < -3$.

${}^{0{,}4}\log(25) \approx -3{,}513$ (gebruik je GR om $0{,}4^x = 25$ op te lossen).

18 a $4^x = \frac{35}{6}$, dus $x = {}^{4}\log\left(\frac{35}{6}\right) \approx 1{,}27$ (gebruik je GR om $4^x = \frac{35}{6}$ op te lossen).

b $1{,}08^t = \frac{12}{7}$, dus $t = {}^{1{,}08}\log\left(\frac{12}{7}\right) \approx 7{,}00$ (gebruik je GR om $1{,}08^t = \frac{12}{7}$ op te lossen).

19 $S(t) = 150 \cdot 0{,}85^t = 10$. Dit geeft $0{,}85^t = \frac{1}{15}$ en dus $t = {}^{0{,}85}\log\left(\frac{1}{15}\right) \approx 16{,}7$ (gebruik je GR om $0{,}85^t = \frac{1}{15}$ op te lossen). Dus na 17 keer spoelen.

6.2 Eigenschappen van logaritmen

V1 a Vul $y = g^x$ in in de formule $x = {}^g\log(y)$. Je krijgt dan $x = {}^g\log(g^x)$.

b Vul $x = {}^g\log(y)$ in in $y = g^x$. Je krijgt dan $y = g^{{}^g\log(y)}$.

c Nee, dit klopt niet. Probeer maar eens met geschikte getallen waarbij de logaritmen uitkomen. Hoe het wel zit, komt in dit onderdeel aan bod.

1 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 4000 \cdot 1{,}05^t &= 8000 \\ 1{,}05^t &= 2 \\ t &= {}^{1{,}05}\log(2) \approx 14{,}2 \end{aligned}$$

Na ongeveer 14,2 jaar.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 4000 \cdot 1{,}05^t &= 12000 \\ 1{,}05^t &= 3 \\ t &= {}^{1{,}05}\log(3) \approx 22{,}5 \end{aligned}$$

Na ongeveer 22,5 jaar.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 4000 \cdot 1{,}05^t &= 24000 \\ 1{,}05^t &= 6 \\ t &= {}^{1{,}05}\log(6) \approx 36{,}7 \end{aligned}$$

Na ongeveer 36,7 jaar.

d $36{,}7 - 22{,}5 = 14{,}2$

Als je de tijd waarin het saldo verdubbelt, optelt bij de tijd waarin het saldo verdriedubbelt, krijg je de tijd waarin het saldo zes keer zo groot is geworden: $t = {}^g\log(2) + {}^g\log(3) = {}^g\log(2 \cdot 3) = {}^g\log(6)$. Andersom krijg je de verdubbelingstijd als je de verdriedubbeling van het saldo van het zesvoud van het saldo afhaalt: $t = {}^g\log(6) - {}^g\log(3) = {}^g\log\left(\frac{6}{3}\right) = {}^g\log(2)$.

e ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$

2 a De tijd die nodig is om de hoeveelheid te halveren:

$g^t = \frac{1}{2}$, dus $t = {}^g\log\left(\frac{1}{2}\right)$

b $g = 0{,}93$, dus $t = {}^{0{,}93}\log\left(\frac{1}{2}\right) \approx 9{,}55$.

Dat is negen jaar en zeven maanden.

c $g^{28} = \frac{1}{2}$; dus $g = \sqrt[28]{0{,}5} \approx 0{,}976$

3 a ${}^2\log(16) + {}^2\log(8) = 4 + 3 = 7 = {}^2\log(128)$

$16 \cdot 8 = 128$

De eigenschap klopt.

b ${}^2\log(16) - 3 \cdot {}^2\log(2) = 4 - 3 \cdot 1 = 1 = {}^2\log(2)$

$\frac{16}{2^3} = \frac{16}{8} = 2$

De eigenschap klopt.

c ${}^3\log(3) + {}^3\log(9) = 1 + 2 = 3 = {}^3\log(27)$

$3 \cdot 9 = 27$

De eigenschap klopt.

4 a Oplossing:

$$\begin{aligned} {}^{2}\log(72) - 2 \cdot {}^{2}\log(3) &= \\ {}^{2}\log(72) - {}^{2}\log\left(3^{2}\right) &= \\ {}^{2}\log\left(\tfrac{72}{9}\right) &= \\ {}^{2}\log(8) &= 3 \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} {}^{2}\log(80) + {}^{0,5}\log(5) &= \\ {}^{2}\log(80) + \frac{{}^{2}\log(5)}{{}^{2}\log(0,5)} &= \\ {}^{2}\log(80) - {}^{2}\log(5) &= \\ {}^{2}\log\left(\tfrac{80}{5}\right) &= \\ {}^{2}\log(16) &= 4 \end{aligned}$$

Merk op dat ${}^{2}\log(0,5) = {}^{2}\log\left(2^{-1}\right) = -1$.

c ${}^{2}\log(7) + {}^{3}\log(81) = {}^{2}\log(7) + 4 = {}^{2}\log(7) + {}^{2}\log(16) = {}^{2}\log(112)$

Merk op dat $4 = {}^{2}\log\left(2^{4}\right) = {}^{2}\log(16)$.

d $0,5 \cdot {}^{2}\log(36) - 1 = {}^{2}\log\left(36^{0,5}\right) - {}^{2}\log(2) = {}^{2}\log\left(\frac{6}{2}\right) = {}^{2}\log(3)$

5 a $(g^{r})^{s} = g^{r \cdot s}$

Gebruik vervolgens $r = {}^{g}\log(a)$ en $s = p$ en substitueer dit: $\left(g^{{}^{g}\log(a)}\right)^{p} = g^{{}^{g}\log(a) \cdot p}$

Nu volgt: $a^{p} = g^{p \cdot {}^{g}\log(a)}$

Neem aan beide zijden de logaritme met grondtal g en je vindt:

${}^{g}\log\left(a^{p}\right) = {}^{g}\log\left(g^{p \cdot {}^{g}\log(a)}\right)$

${}^{g}\log\left(a^{p}\right) = \left(p \cdot {}^{g}\log(a)\right)$

b Gebruik: ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a) + -1 \cdot {}^{g}\log(b)$

${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a) + {}^{g}\log\left(b^{-1}\right)$

${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a) + {}^{g}\log\left(\frac{1}{b}\right)$

${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$

6 a Methode I:

aan beide zijden de logaritme nemen geeft $\log\left(3^{x}\right) = x \cdot \log(3) = \log(8100)$ en dus $x = \frac{\log(8100)}{\log(3)} \approx 8,1918$

Methode II:

$3^{x} = 8100$ geeft $x = {}^{3}\log(8100) = \frac{\log(8100)}{\log(3)} \approx 8,1918$

b Methode I:

aan beide zijden de logaritme nemen geeft $\log\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = x \cdot \log\left(\frac{1}{4}\right) = \log(0,002)$ en dus

$x = \frac{\log(0,002)}{\log\left(\frac{1}{4}\right)} \approx 4,4829$

Methode II:

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = 0,002$ geeft $x = {}^{\frac{1}{4}}\log(0,002) = \frac{\log(0,002)}{\log\left(\frac{1}{4}\right)} \approx 4,4829$

7 a $x = 5^{2} = 25$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x &= 4^0 = 1 \\ x &= 0{,}5 \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\tfrac{1}{4}\right)^{-4} = 256 \\ x &= 16 \vee x = -16 \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= 2^5 = 32 \\ x &= 32^2 \\ x &= 1024 \end{aligned}$$

8 a $\log(4x \cdot x) = \log\left(4x^2\right) = 1$, geeft $4x^2 = 10^1 = 10$ en dus $x = \pm\sqrt{2{,}5}$.
Omdat je geen logaritme uit een negatief getal kunt trekken, is er maar één oplossing mogelijk: $x = \sqrt{2{,}5}$.

b $\log\left(x^2\right) - \log(2x) = \log\left(\frac{x^2}{2x}\right) = \log\left(\frac{1}{2}x\right) = 2$, geeft $\frac{1}{2}x = 10^2 = 100$ en dus $x = 200$.

9 a ${}^{10}\log(5 \cdot 20) = {}^{10}\log(100) = 2$

b ${}^{5}\log\left(\frac{100}{4}\right) = {}^{5}\log(25) = 2$

c ${}^{6}\log\left(3^2 \cdot 4\right) = {}^{6}\log(36) = 2$

d ${}^{\frac{1}{3}}\log\left(\frac{45}{5}\right) = {}^{\frac{1}{3}}\log(9) = -2$

10 a ${}^{2}\log(100) = \frac{\log(100)}{\log(2)} \approx 6{,}644$

b ${}^{7}\log\left(7^{0{,}5}\right) = 0{,}5$

c ${}^{8}\log(8000) = \frac{\log(8000)}{\log(8)} \approx 4{,}322$

d $\frac{\log(50)}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} \approx -3{,}561$

e $\log(40 \cdot 25) = \log(1000) = \log\left(10^3\right) = 3$

f $\frac{\log(0{,}0003)}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 7{,}384$

11 a $0{,}93^t = 0{,}5$, dus $t = {}^{0{,}93}\log(0{,}5) \approx 9{,}55$ jaar.

b $400 \rightarrow 200 \rightarrow 100 \rightarrow 50$, dus je halveert het aantal drie keer. Drie keer de halveringstijd is $3 \cdot 9{,}55 = 28{,}65$ jaar.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 50 \cdot 0{,}93^t &= 10 \\ 0{,}93^t &= 0{,}2 \\ t &= {}^{0{,}93}\log(0{,}2) \approx 22{,}18 \end{aligned}$$

Ongeveer 22,18 jaar. Dat is 22 jaar en ruim twee maanden.

12 a Twee halveringstijden en dus $2 \cdot 165 = 330$ dagen.

b Drie halveringstijden, dus $3 \cdot 165 = 495$ dagen.

c $100 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 12{,}5$, dus na drie keer halveren is er nog 12,5 gram over van de stof. Het duurt iets minder lang om 15 gram van de stof over te houden, dus het duurt iets minder lang dan 495 dagen.

d $g^{165} = 0{,}5$; dus $g_{\text{dag}} \approx 0{,}9958$.

Dit levert de vergelijking $100 \cdot 0{,}9958^t = 15$ op:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 0{,}9958^t &= 15 \\ 0{,}9958^t &= 0{,}15 \\ t &= {}^{0{,}9958}\log(0{,}15) \approx 451 \end{aligned}$$

Ongeveer 451 dagen.

13 a $5^x = 0{,}016$ geeft $x = {}^{5}\log(0{,}016) \approx -2{,}6$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 &= 3^3 = 27 \\ x &= \pm\sqrt{27} \\ x &\approx 5{,}2 \vee x \approx -5{,}2 \end{aligned}$$

c $\log(2x) - \log\left(x^2\right) = \log\left(\frac{2x}{x^2}\right) = \log\left(\frac{2}{x}\right) = 1$ geeft $\frac{2}{x} = 10^1 = 10$ en dus $x = \frac{2}{10} = 0{,}2$.

14 Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} \left(1 + \tfrac{p}{100}\right)^T &= 2 \\ \log\left(\left(1 + \tfrac{p}{100}\right)^T\right) &= \log(2) \\ T \cdot \log\left(1 + \tfrac{p}{100}\right) &= \log(2) \\ T &= \frac{\log(2)}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)} \end{aligned}$$

15 a $800 \to 400 \to 200 \to 100$, dat is 3 keer halfwaardetijd, dus $3 \cdot 15 = 45$ uur.

b $g^{15} = 0{,}5$, dus $g \approx 0{,}9548$.

c Los op: $800 \cdot 0{,}9548^t = 160$; dus $0{,}9548^t = 0{,}2$ en $t = {}^{0{,}9548}\log(0{,}2) \approx 34{,}8$; ofwel ongeveer 34 uur en 3 kwartier.

16 Gebruik de eigenschappen ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$ en ${}^{g}\log(a) = \frac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$.

Je krijgt: $\text{Nap}\log(x) = \frac{10^7}{10^7-1}\log\left(10^7\right) - \frac{10^7}{10^7-1}\log(x) = \frac{10^7}{10^7-1}\log\left(\frac{10^7}{x}\right) = \frac{\log\left(\frac{10^7}{x}\right)}{\log\left(\frac{10^7}{10^7-1}\right)}$.

En dit is $\text{Nap}\log(x) = \frac{\log\left(\frac{10^7}{x}\right)}{\log\left(\frac{10^7}{10^7-1}\right)} = \frac{7-\log(x)}{7-\log\left(10^7-1\right)}$.

17 a $200000 \cdot 1{,}10^t = 300000$; dus $1{,}10^t = 1{,}5$ en $t = {}^{1{,}10}\log(1{,}5) \approx 4{,}25$ jaar; en dat is ongeveer 4 jaar en 3 maanden.

b $1{,}10^t = 2$; dus $t = {}^{1{,}10}\log(2) \approx 7{,}27$ jaar

c $1{,}10^t = 3$; dus $t = {}^{1{,}10}\log(3) \approx 11{,}53$ jaar.

d $1{,}10^t = 6$; dus $t = {}^{1{,}10}\log(6) = {}^{1{,}10}\log(2 \cdot 3) = {}^{1{,}10}\log(2) + {}^{1{,}10}\log(3) \approx 7{,}27 + 11{,}53 = 18{,}80$ jaar.

e $t = {}^{1{,}10}\log(6) \approx 18{,}80$ jaar

18 $g = 0{,}92$; dus $0{,}92^T = \frac{1}{3}$ en $T = \frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log(0{,}92)} \approx 13{,}175$. Dus ongeveer 13 uur.

19 a $0{,}5^t = \frac{1}{30}$ geeft $t = {}^{0{,}5}\log\left(\frac{1}{30}\right) \approx 4{,}907$

b $1 - x = 5^2 = 25$ geeft $x = -24$

c ${}^{2}\log\left(3x^2\right) = 5$ geeft $3x^2 = 2^5 = 32$ en dus $x = \pm\sqrt{10\frac{2}{3}}$.

$-\sqrt{10\frac{2}{3}}$ voldoet niet, omdat in een logaritme geen negatief getal kan worden ingevuld. Dus $x = \sqrt{10\frac{2}{3}}$.

20 $g = 1{,}003$; dus $1{,}003^T = 2$ en $T = \frac{\log(2)}{\log(1{,}003)} \approx 231$. Dus ongeveer 231 jaar.

6.3 Logaritmische schalen

V1 a De schaalverdeling op de verticale as loopt niet gelijkmatig op: tussen 1 en 10 zit evenveel afstand als tussen 10 en 100.

b Doen, je moet een rechte lijn krijgen.

1 a Nee, op de verticale as zit tussen twee opeenvolgende streepjes steeds een factor 10. De stappen worden dus steeds groter: van 1 naar 10 is een kleinere afstand dan van 10 naar 100.

b $B(5) = 6 \cdot 2^5 = 6 \cdot 32 = 192$, dus tussen 100 en 1000.
De juiste plek vind je door de logaritme te berekenen: $\log(192) \approx 2{,}28$.
Op vergelijkbare manier is $B(10) = 6 \cdot 2^{10} = 6144$ en $\log(6144) \approx 3{,}79$.

c Zie de tabel.

t	0	1	2	3	4	5	...	15
$\log(B)$	0,78	1,08	1,38	1,68	1,98	2,28	...	5,29

d Zie figuur in de uitleg.

e $\log(B) = \log\left(6 \cdot 2^t\right) = \log(6) + \log\left(2^t\right) = \log(6) + t \cdot \log(2)$
De grafiek wordt een rechte lijn door $(0, \log(6))$ en met richtingscoëfficiënt $\log(2)$.

2 a Zie de tabel.

x	0	1	2	3	4	5	...	15
$\log(y)$	0,30	0,78	1,26	1,73	2,21	2,69	...	7,46

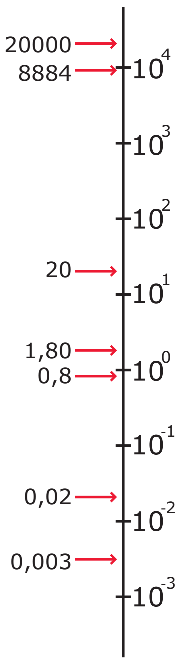
De grafiek wordt een rechte lijn.

b Op de verticale as krijg je van beneden naar boven de waarden $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ enzovoort.

c Aflezen: $f(10) \approx 120000$
GR: $f(10) = 118098$

d $\log(y) = \log(2 \cdot 3^x) = \log(2) + x \cdot \log(3)$

3 a Zie de figuur.



$\log(20000) = 4{,}30$. Dus $20000 \approx 10^{4,3}$. Je plaatst 20000 dus op 4,3 eenheden boven 10^0, dat is tussen 10^4 en 10^5.

$\log(0{,}02) = -1{,}69$. Dus $0{,}02 \approx 10^{-1,69}$. Je plaatst 0,02 dus op 1,69 eenheden onder 10^0, dat is tussen 10^{-2} en 10^{-1}.

b Zie de figuur bij a.
$\log(1{,}80) = 0{,}255$. Dus $1{,}8 \approx 10^{0{,}225}$.
Je plaatst 1,80 dus op 0,255 eenheden boven 10^0, dat is tussen 10^0 en 10^1.

c Zie de figuur bij a.
$\log(8884) = 3{,}95$. Dus $8884 \approx 10^{3{,}95}$.
Je plaatst 8884 dus op 3,95 eenheden boven 10^0, dat is tussen 10^3 en 10^4.

d Zie de figuur bij a.
0,003 mm = 0,000003 m en 0,8 mm = 0,0008 m.

$\log(0{,}000003) = -5{,}52$. Dus $0{,}00003 \approx 10^{-5{,}52}$.
Je plaatst 0,000003 dus op 5,52 eenheden onder 10^0, dat is halverwege tussen 10^{-5} en 10^{-6}.

$\log(0{,}0008) = -3{,}097$. Dus $0{,}0008 \approx 10^{-3{,}097}$.
Je plaatst 0,0008 dus op 3,097 eenheden onder 10^0, dat is net iets onder 10^{-3}.

e $a = 10^{3{,}5} \approx 3162$

4 a Je krijgt een dalende rechte lijn door $(0{,}12000) \approx \left(0{,}10^{4{,}08}\right)$ en $\approx (10{,}1288) \approx \left(10{,}10^{3{,}11}\right)$.

b $\log(N) = \log\left(12000 \cdot 0{,}8^t\right) = \log(12000) + \log\left(0{,}8^t\right) = \log(12000) + t \cdot \log(0{,}8)$

5 a $\log(y) = \log(b \cdot g^x) = \log(b) + x \cdot \log(g)$. Omdat $\log(b)$ en $\log(g)$ constanten zijn, is dit een lineair verband tussen $\log(y)$ en x. Op enkellogaritmisch papier zet je $\log(y)$ uit tegen x, dus wordt dit een rechte lijn.

b Omgekeerd: $\log(y) = a \cdot x + b$ geeft $y = 10^{ax+b} = 10^{ax} \cdot 10^b = 10^b \cdot (10^a)^x = c \cdot g^x$, waarbij $c = 10^b$ en $g = 10^a$ constanten zijn.

6 a $A(2) \approx 120$
$A(10) \approx 1800$

b $A(t) = b \cdot g^t$
$A(2) \approx 120 = b \cdot g^2$
$A(10) \approx 1800 = b \cdot g^{10}$

Hieruit volgt: $g^8 \approx \frac{1800}{120}$ en $g \approx \left(\frac{1800}{120}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}40$; en $b = \frac{120}{(1{,}40)^2} \approx 61$.

b en g invullen geeft $A(t) = 61 \cdot 1{,}40^t$.

c Je kunt dan direct de waarde van b bepalen, want in $A(t) = b \cdot g^t$ geldt $A(0) = b \cdot g^0 = b \cdot 1 = b$.

7 a $\left(0{,}10^0\right) = (0{,}1)$

b Lees de punten $(-4{,}1000)$ en $(5; 0{,}01)$ af.
$N(-4) = b \cdot g^{-4} = 1000$
$N(5) = b \cdot g^5 = 0{,}01$

Hieruit volgt: $g^9 = \frac{0{,}01}{1000} = 0{,}00001$, zodat $g = 0{,}00001^{\frac{1}{9}} \approx 0{,}28$.

Vervolgens invullen: $0{,}01 = b \cdot 0{,}28^5$, dus $b = \frac{0{,}01}{0{,}28^5} \approx 6$. Dus $N(t) \approx 6 \cdot 0{,}28^t$.

c $N(t) = 1$ geeft $N(t) = 6 \cdot 0{,}28^t = 1$.
$0{,}28^t \approx 0{,}167$
$t \approx {}^{0{,}28}\log(0{,}167) \approx 1{,}40$

Het snijpunt wordt ongeveer $(1{,}40; 1)$.

d $N(t) \approx 6 \cdot 0{,}28^t$ is altijd positief, welke waarde je ook voor t invult.

8 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 35 &= 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right) \\ \frac{35}{20} &= \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right) \\ 10^{\frac{35}{20}} &= \frac{p}{0{,}00002} \\ p &= 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{35}{20}} \approx 0{,}0011 \end{aligned}$$

b 55 dB:

$55 = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$ geeft $p = 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{55}{20}} \approx 0{,}0112$ Pa.

95 dB:

$95 = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$ geeft $p = 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{95}{20}} \approx 1{,}1247$ Pa.

Dat is samen 1,1359 Pa en dat is $20 \cdot \log\left(\frac{1{,}1359}{0{,}00002}\right) \approx 95{,}1$ dB, dus nauwelijks meer dan de drilboor alleen.

c 110 dB:

$110 = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$ geeft $p = 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{110}{20}} \approx 6{,}3246$ Pa.

130 dB:

$130 = 20 \cdot \log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$ geeft $p = 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{130}{20}} \approx 63{,}2456$ Pa.

Dus tien keer zo groot.

9 a De beginwaarde is 80000 en er is een toename van 6% per jaar. Dit laatste leidt tot een groeifactor g van 1,06. Dus $A(t) = 80000 \cdot 1{,}06^t$.

b $A(15) \approx 191725$

10 a Voor $V(t) = b \cdot g^t$ geldt:

$V(0) = b \cdot g^0 = 3$
$V(6) = b \cdot g^6 = 7$

Dit levert: $b = 3$ en $g^6 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, zodat $g = \left(2\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}15$.

Een passende formule is dan $V(t) \approx 3 \cdot 1{,}15^t$.

b Los op: $V(t) = 5$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1{,}15^t &= 5 \\ 1{,}15^t &= 1\tfrac{2}{3} \\ t &= {}^{1{,}15}\log\left(1\tfrac{2}{3}\right) \approx 3{,}65 \end{aligned}$$

c t-as ligt op hoogte 1
Los op: $V(t) = 1$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1{,}15^t &= 1 \\ 1{,}15^t &= \tfrac{1}{3} \\ t &= {}^{1{,}15}\log\left(\tfrac{1}{3}\right) \approx -7{,}86 \end{aligned}$$

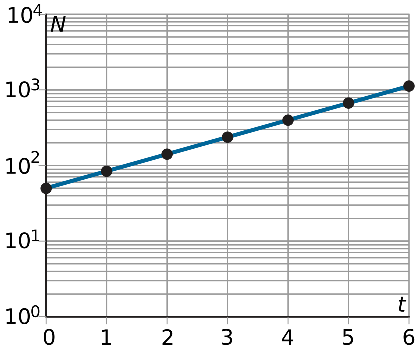
11 Het getal a ligt ongeveer op $\frac{7}{10}$ deel van de afstand tussen 10^2 en 10^3.

Dus $a \approx 10^{2{,}7} \approx 501$.

12 a Bereken bijvoorbeeld $\log(50) \approx 1{,}70$. Zo kun je de gegeven tabel omzetten naar een tabel waarin $\log(N)$ wordt uitgezet tegen t.

t (uur)	0	1	2	3	4	5	6
$\log(N)$	1,70	1,92	2,15	2,37	2,60	2,83	3,05

b Zie de figuur.



c Ja, je krijgt ongeveer een rechte lijn door $(0; 1{,}70)$ en $(4; 2{,}60)$.

d Omdat de grafiek van $\log(N(t))$ bij benadering een rechte lijn is, is $N(t)$ bij benadering een exponentiële functie.

e De grafiek gaat door de punten $(0; 1{,}7)$ en $(4; 2{,}6)$. Tussen deze twee punten bestaat een lineair verband van de vorm $y = ax + b$. Dat is hier dus $y = 0{,}225x + 1{,}7$. Vertaald naar het verband tussen $\log(N)$ en t wordt dit $\log(N) \approx 1{,}70 + 0{,}225t$.

f $N(t) \approx 10^{1{,}70+0{,}225t} = 10^{1{,}70} \cdot \left(10^{0{,}225}\right)^t \approx 50 \cdot 1{,}68^t$

13 a Kies als beginwaarde 100. Er is sprake van een afname van 6% per uur, dus een groeifactor van 0,94.

b Los de vergelijking $100 \cdot 0{,}94^u = 10$ op.

$$\begin{aligned} 100 \cdot 0{,}94^u &= 10 \\ 0{,}94^u &= 0{,}10 \\ u &= {}^{0{,}94}\log(0{,}10) \approx 37{,}2 \end{aligned}$$

Je kunt de accu iets meer dan 37 uur gebruiken.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} P &= 100 \cdot 0{,}94^u \\ \frac{P}{100} &= 0{,}94^u \\ u &= {}^{0{,}94}\log\left(\frac{P}{100}\right) \end{aligned}$$

14 De lijn gaat door de punten $(\log(h), w) = (0{,}2)$ en $(\log(h), w) = (2{,}8)$.

De helling is dan $a = \frac{8-2}{2-0} = 3$.

Invullen van $(2{,}8)$ levert je de waarde van b: $8 = 3 \cdot \log(100) + b$. Dus $b = 2$.

Het startgetal is dan gelijk aan 2.

15 a Zo nauwkeurig mogelijk aflezen (hiervoor kun je je geodriehoek gebruiken) geeft de waarden $m = 1{,}3$ en dus $\log(m) \approx 0{,}1$, en $p = 240$ en dus $\log(P) \approx 2{,}4$.

b Het is een rechte lijn, dus is de formule van de vorm $\log(P) = a \cdot \log(m) + b$, door $(0{,}1; 2{,}4)$ en $(2{,}9; 2{,}0)$.

Invullen in $\log(P) = a \cdot \log(m) + b$ geeft $2{,}4 = 0{,}1a + b$ en $2{,}0 = 2{,}9a + b$. Dit geeft $a = \frac{-0{,}4}{2{,}8} \approx -0{,}14$ en $b \approx 2{,}41$, dus $\log(P) \approx -0{,}14 \cdot \log(m) + 2{,}41$.

c Ga uit van $\log(P) \approx -0{,}14 \cdot \log(m) + 2{,}41$ en schrijf beide zijden als macht van 10.

$P \approx 10^{-0,14 \cdot \log(m) + 2,41} = \left(10^{\log(m)}\right)^{-0,14} \cdot 10^{2,41} \approx m^{-0,14} \cdot 257$

16 a Het pijltje staat $\frac{1}{10}$-de deel van de afstand tussen de groene stippen. De afstand tussen de groene stippen stelt een macht van 10 voor. In dit geval moet je pijltje dus voor het getal $10^{1,1}$ staan en dit is ongeveer gelijk aan 12,59.

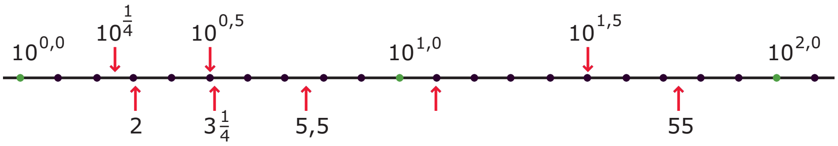
b $\log(2) = 0,3$ ofwel $10^{0,3} \approx 2$. Dus het pijltje komt $\frac{3}{10}$-de deel na 10^0.

c $\log(55) = 1,74$. Ofwel $10^{1,74} \approx 55$. Dus het pijltje komt $\frac{7,4}{10}$-de deel na 10^1.

$10^{0,5} \approx 3,16$. Het pijltje wordt $\frac{5}{10}$-de deel na 10^0 geplaatst.

d $\log\left(3\frac{1}{4}\right) = 0,51$ ofwel $10^{0,51} \approx 3\frac{1}{4}$. Dus het pijltje komt $\frac{5}{10}$-de deel na 10^0.

$10^{\frac{1}{4}} \approx 1,78$. Het pijltje wordt $\frac{2,5}{10}$-de deel na 10^0 geplaatst.



17 a (0,40) correspondeert met $(0, \log(40))$ ofwel ongeveer $(0; 1,60)$; etc.

b De punten liggen ongeveer op een rechte lijn door (0,40) en (4,200).

c De punten liggen ongeveer op een rechte lijn, dus er is sprake van exponentiële groei.

d Beginwaarde is 40 en groeifactor (ongeveer) 1,495.

Dit leidt dus tot de formule $N(t) = 40 \cdot 1,495^t$ (met t in weken).

6.4 Logaritmische functies

V1 a Gebruik de standaardinstellingen van het venster. Merk op dat veel rekenmachines deze grafiek niet goed tekenen. Daarover zie je in het vervolg meer.

$D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \mathbb{R}$.

b De lijn $x = 0$.

c Bij de machten van 2.

1 a Voer in: Y1=2^X en Y2=log(X)/log(2)
Venster: standaard.
Merk op dat veel rekenmachines moeite hebben met het tekenen van een logaritmische functie in de buurt van de verticale asymptoot.

b Bij de inverse functie wisselen de x-coördinaat en de y-coördinaat van positie.
(2,4) wordt dus (4,2).

c Bijvoorbeeld: (0,1) en (1,0); (1,2) en (2,1).

d Het domein gaat over de mogelijke x-waarden die je in kunt vullen. Het bereik gaat over de mogelijke y-coördinaten die eruit kunnen komen. Bij twee functies die elkaars inverse zijn, gelden de eigenschappen van x-coördinaten van een functie ook voor de eigenschappen van de y-coördinaten van de inverse functie.

2 a Voer in: Y1=0.5^X en Y2=log(X)/log(0.5)
Venster: standaard
Merk op dat veel rekenmachines moeite hebben met het tekenen van een logaritmische functie in de buurt van de verticale asymptoot.

b Bij de inverse functie wisselen de x-coördinaat en de y-coördinaat van positie. $\left(4, \frac{1}{16}\right)$ wordt dus $\left(\frac{1}{16}, 4\right)$.

c Bijvoorbeeld: (0,1) en (1,0); (1; 0,5) en (0,5; 1).

d Het domein gaat over de mogelijke x-waarden die je in kunt vullen. Het bereik gaat over de mogelijke y-coördinaten die eruit kunnen komen. Bij twee functies die elkaars inverse zijn, gelden de eigenschappen van x-coördinaten van een functie ook voor de eigenschappen van de y-coördinaten van de inverse functie.

e Bij de limiet van $y_1 = 0{,}5^x$ kun je een tabel maken voor x-waarden zoals $x = 100$, $x = 1000$, $x = 10000$, enzovoort. De bijbehorende y-waarden liggen dan steeds dichter bij 0. Van al de bijbehorende punten op de grafiek van de exponentiële functie liggen de spiegelbeelden bij spiegeling in $y = x$ op de logaritmische functie met hetzelfde grondtal. Van die punten komen de x-waarden dus steeds dichter bij 0 en gaan tegelijk de bijbehorende y-waarden steeds verder de positieve y-as op.

3 a Je kunt geen logaritme berekenen van een getal gelijk aan of kleiner dan 0.
Dus $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Als je de grafiek tekent op de GR, dan kun je zien dat alle uitkomsten mogelijk zijn. Dus: $B_f = \mathbb{R}$.

De verticale asymptoot is $x = 0$.

b Oplossing:

$$
\begin{aligned}
{}^{\frac{1}{2}}\log(x) &= 2 \\
x &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}
\end{aligned}
$$

c Voer in: Y1=log(X)/log(1/2) en Y2=2

Gebruik het antwoord van b en je kunt de oplossing aflezen: $0 < x < \frac{1}{4}$.

4 a Je kunt geen logaritme berekenen van een getal gelijk aan of kleiner dan 0.
Dus $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Als je de grafiek tekent op de GR, dan kun je zien dat alle uitkomsten mogelijk zijn. Dus: $B_f = \mathbb{R}$.

De verticale asymptoot is $x = 0$.

b ${}^{3}\log(x) = 2$ geeft $x = 3^2 = 9$

c Voer in: Y1=log(X)/log(3) en Y2=2
Gebruik het antwoord bij b en je kunt de oplossing aflezen: $x > 9$.

d Voer in: Y1=log(X)/log(3) en Y2=2
Gebruik het antwoord bij b en je kunt de oplossing aflezen: $0 < x < 9$.

5 a Je kunt geen logaritme berekenen van een getal kleiner dan of gelijk aan 0. In dit geval betekent dit dat moet gelden $x - 1 > 0$ en dus $x > 1$.
$D_f = \langle 1, \rightarrow\rangle$

Als je de functie plot op de GR, dan kun je vaststellen dat $B_f = \mathbb{R}$.

b Uit het domein $x > 1$ volgt direct de verticale asymptoot $x = 1$. Controleer dit met behulp van een plot van de grafiek.

c Oplossing:

$y = {}^{0,3}\log(x)$

met 1 transleren ten opzichte van de y-as

$y = {}^{0,3}\log(x-1)$

met 2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as

$y = 2 \cdot {}^{0,3}\log(x-1)$

met -1 transleren ten opzichte van de x-as

$y = -1 + 2 \cdot {}^{0,3}\log(x-1)$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} -1 + 2 \cdot {}^{0,3}\log(x-1) &= 0 \\ 2 \cdot {}^{0,3}\log(x-1) &= 1 \\ {}^{0,3}\log(x-1) &= \tfrac{1}{2} \\ x - 1 &= 0{,}3^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}55 \\ x &\approx 1{,}55 \end{aligned}$$

Het nulpunt is $(1{,}55; 0)$.

6 a Je kunt geen logaritme berekenen van een getal kleiner dan of gelijk aan 0. In dit geval betekent dit dat moet gelden $x + 4 > 0$ en dus $x > -4$.
$D_f = \langle -4, \rightarrow\rangle$

Als je de functie plot op de GR, dan kun je vaststellen dat $B_f = \mathbb{R}$.

b Uit het domein $x > -4$ volgt direct de verticale asymptoot $x = -4$. Controleer dit met behulp van een plot op de GR.

c Oplossing:

$y = {}^{2}\log(x)$

met -4 transleren ten opzichte van de y-as

$y = {}^{2}\log(x+4)$

met 3 vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as

$y = 3 \cdot {}^{2}\log(x)$

met 2 transleren ten opzichte van de x-as

$y = 2 + 3 \cdot {}^{2}\log(x)$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} 2 + 3 \cdot {}^{2}\log(x+4) &= 0 \\ 3 \cdot {}^{2}\log(x+4) &= -2 \\ {}^{2}\log(x+4) &= -\tfrac{2}{3} \\ 2^{-\frac{2}{3}} &= x+4 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}} &= x+4 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 4 &= x \end{aligned}$$

Dus: $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 4$

7 a Je kunt geen logaritme berekenen van een getal kleiner dan of gelijk aan 0. In dit geval betekent dit dat moet gelden $2 - x > 0$ en dus $x < 2$.

$D_g = \langle \leftarrow, 2 \rangle$.

Als je de functie plot, dan kun je vaststellen dat $B_g = \mathbb{R}$.

b Uit $x < 2$ volgt direct de verticale asymptoot $x = 2$.

Controleer dit met behulp van een plot. Je ziet dan dat $\lim_{x \uparrow 2} \left(-1 + 4 \cdot {}^{0,5}\log(2-x)\right) = \infty$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= {}^{0,5}\log(x) \\ y &= {}^{0,5}\log(-x) \\ y &= {}^{0,5}\log(-(x-2)) \\ y &= 4 \cdot {}^{0,5}\log(2-x) \\ y &= -1 + 4 \cdot {}^{0,5}\log(2-x) \end{aligned}$$

met -1 vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as

met 2 transleren ten opzichte van de y-as

met 4 vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as

met -1 transleren ten opzichte van de x-as

d Oplossing:

$$\begin{aligned} -1 + 4 \cdot {}^{0,5}\log(2-x) &= 0 \\ {}^{0,5}\log(2-x) &= \tfrac{1}{4} \\ 2 - x &= 0,5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{0,5} \end{aligned}$$

Dus: $x \approx 1,16$.

8 a Kijk als je herleiding klaar is of je hetzelfde hebt gedaan als in het voorbeeld en of je dezelfde uitkomst hebt.

b $p \approx 0,00002 \cdot 1,12^{20} \approx 19 \cdot 10^{-3}$ Pa.

c $L = 20 \cdot \log\left(\frac{0,001}{0,00002}\right) \approx 34$ dB.

9 a $h = -19 \log(p) + 57$ geeft $\log(p) = \frac{h-57}{-19} \approx -0,0526h + 3$.

En dit betekent $p \approx 10^{-0,0526h+3} = 10^3 \cdot 10^{-0,0526h} = 1000 \cdot 0,886^h$.

b $p \approx 1000 \cdot 10^{-0,0526h}$.

10 a $f(x)$ is uit de standaardfunctie $f(x) = {}^{7}\log(x)$ ontstaan door deze ten opzichte van de x-as met -2 te transleren. Je kunt geen logaritme berekenen van een getal kleiner of gelijk aan 0. Dus $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

De verticale asymptoot is dan $x = 0$ en het bereik is $B_f = \mathbb{R}$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} -2 + {}^{7}\log(x) &= 0 \\ {}^{7}\log(x) &= 2 \\ x &= 7^2 = 49 \end{aligned}$$

c Snijpunt met de y-as betekent $x = 0$ invullen, maar dit valt buiten het domein dat je bij a vond. Er is dus geen snijpunt met de y-as.

11 a Je kunt geen logaritme berekenen van een getal kleiner dan of gelijk aan 0. In dit geval betekent dit dat moet gelden $x + 4 > 0$ en dus $x > -4$. Dan geldt voor het domein: $D_f = \langle -4, \rightarrow \rangle$.

Als je de functie plot, dan kun je vaststellen dat $B_f = \mathbb{R}$.

b Uit het domein $x > -4$ volgt direct de verticale asymptoot $x = -4$. Controleer dit met behulp van een plot. Je ziet dat $\lim_{x \downarrow -4} (1 - 3 \cdot \log(x + 4)) = \infty$.

c Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} y &= \log(x) \\ y &= \log(x+4) \\ y &= -3 \cdot \log(x+4) \\ y &= -3 \cdot \log(x+4) + 1 = 1 - 3 \cdot \log(x+4) \end{aligned}$$

met -4 transleren tov de y-as
met -3 vermenigvuldigen tov de x-as
met 1 transleren tov de x-as

d Oplossing:

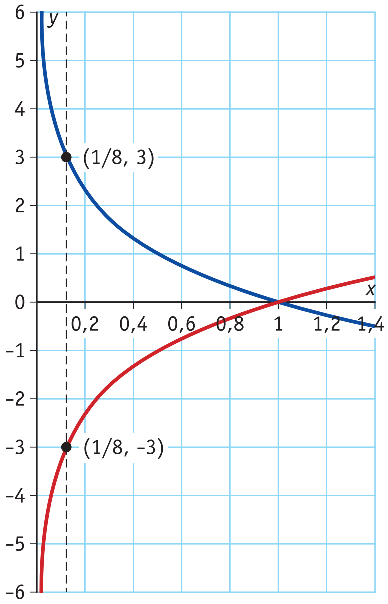
$$\begin{aligned} 1 - 3 \cdot \log(x+4) &= 0 \\ -3 \cdot \log(x+4) &= -1 \\ \log(x+4) &= \tfrac{1}{3} \\ x + 4 &= 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} \\ x &= \sqrt[3]{10} - 4 \end{aligned}$$

12 a $^{\frac{1}{2}}\log(x) = 3$, dus $x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b $^{2}\log(x) = -3$, dus $x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

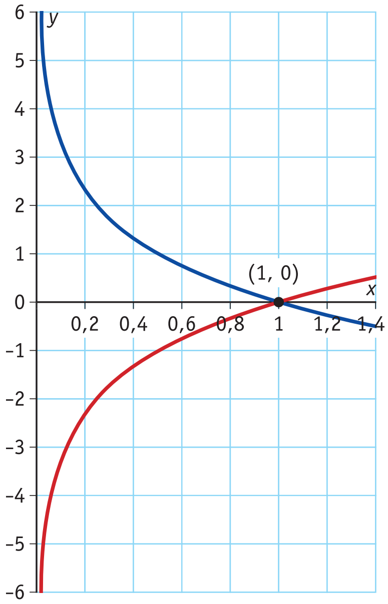
c Als twee punten elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de x-as, dan hebben ze dezelfde x-coördinaat en zijn de y-coördinaten tegengesteld. Dus $\left(\frac{1}{8}, -3\right)$ is het spiegelbeeld van $\left(\frac{1}{8}, 3\right)$.

Je kunt het ook zien aan de grafiek. Plot beide grafieken op de GR, dan kun je coördinaten aflezen.



d Vul bijvoorbeeld in $h(x)$ voor x het getal $\frac{1}{2}$ in, dit levert $y = 1$ op. Vul daarna in $k(x)$ voor x de waarde $\frac{1}{2}$ in, dit levert voor y de waarde -1 op. Dus een mogelijk antwoord is $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ en $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. Controleer dit ook in de figuur bij c.

e Zie de figuur.



Voer in: Y1=log(X)/log(2) en Y2=log(X)/log(0.5)
Los de vergelijking op.

Dit kan ook algebraïsch:

$$\begin{aligned} {}^{2}\log(x) &= {}^{0,5}\log(x) \\ \frac{\log(x)}{\log(2)} &= \frac{\log(x)}{\log(0,5)} \\ \log(x) &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

f $^{\frac{1}{2}}\log(x) = \dfrac{^{2}\log(x)}{^{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{^{2}\log(x)}{^{2}\log(2^{-1})} = \dfrac{^{2}\log(x)}{-1} = -{}^{2}\log(x)$

13 a Omdat $\frac{1}{2}x - 6 > 0$ moet $x > 3$ en is $D_f = \langle 3, \rightarrow\rangle$.

Verder is $B_f = \mathbb{R}$.

b Voor f geldt: $y = {}^{4}\log\left(\frac{1}{2}x - 6\right) + 2$.

Verwisselen van x en y geeft $x = {}^{4}\log\left(\frac{1}{2}y - 6\right) + 2$.
Herleid dit tot y is uitgedrukt in x:

$x = {}^{4}\log\left(\frac{1}{2}y - 6\right) + 2$geeft ${}^{4}\log\left(\frac{1}{2}y - 6\right) = x - 2$ en dus $\frac{1}{2}y - 6 = 4^{x-2}$.

Hieruit volgt: $y = 2 \cdot 4^{x-2} + 12$.

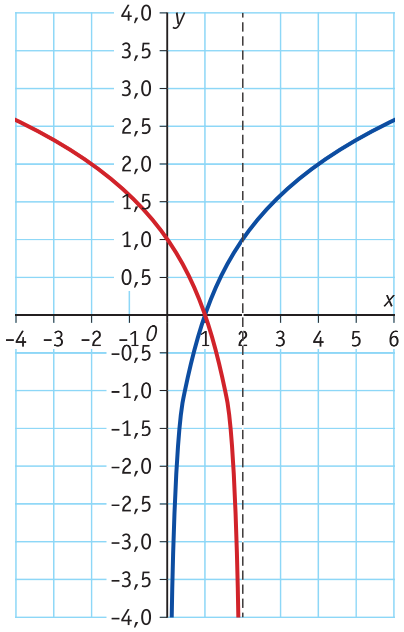
c $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle 3, \rightarrow\rangle$.

14 a Voor $f(x)$:

Je kunt geen logaritme berekenen van een getal kleiner dan of gelijk aan 0. Dus is het domein $D_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$ en de verticale asymptoot is dan de lijn $x = 0$. Voor het bereik geldt $B_f = \mathbb{R}$.

Voor $g(x)$:

Je kunt geen logaritme berekenen van een getal kleiner dan of gelijk aan 0. Dus geldt voor het domein van g dat $2 - x > 0$ en dus $x < 2$ en de verticale asymptoot is $x = 2$. Voor het bereik geldt hetzelfde als bij f: $B_g = \mathbb{R}$.



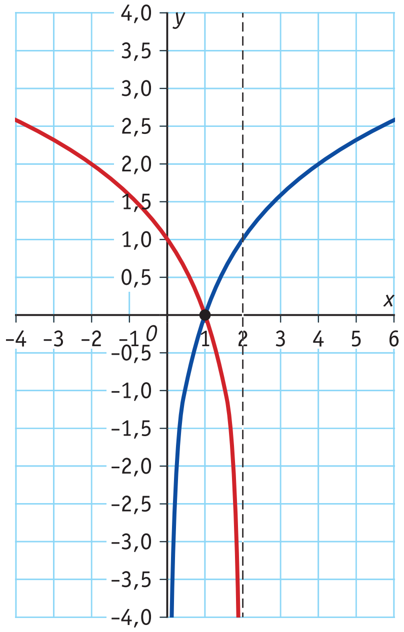
b $f(x) = {}^2\log(x)$ spiegelen in de y-as, ofwel met - 1 vermenigvuldigen in de x-richting, geeft ${}^2\log(-x)$.

Dit met 2 transleren ten opzichte van de y-as geeft ${}^2\log(2-x) = g(x)$.

c ${}^2\log(x) = {}^2\log(2-x)$

Dit geldt alleen als wat tussen de haakjes staat hetzelfde is.

$x = 2 - x$ geeft $x = 1$



d Kijk in de figuur bij a. Dan kun je zien dat de grafieken in de lijn $x = 1$ elkaars spiegelbeeld zijn.

15 Oplossing:

$$\begin{aligned}
k &= 4\cdot\log\left(\frac{D+10}{100}\right) + 5 \\
\log\left(\frac{D+10}{100}\right) &= \frac{k-5}{4} = 0{,}25k - 1{,}25 \\
\frac{D+10}{100} &= 10^{0{,}25k-1{,}25} \\
D &= 100\cdot 10^{0{,}25k-1{,}25} - 10 \\
D &= 100\cdot 10^{-1{,}25}\cdot 10^{0{,}25k} - 10 \\
D &\approx 5{,}62\cdot 10^{0{,}25k} - 10
\end{aligned}$$

16 a $21 = 1 + a \cdot \log(100)$.

$\log(100) = 2$, dit geeft $21 = 1 + 2a$ en dus $a = 10$.

b De meest gangbare ASA-waarden zijn tussen 50 en 1000 en $1 + 10 \cdot \log(1000) = 31$.
GR: Y1=1+10*log(X) met venster [0,1000] × [0,31].

c $31 = 1 + 10 \cdot \log(x)$ geeft $\log(x) = 3$ en dus $x = 1000$. Dus 1000 ASA.

d $y = 1 + 10 \cdot \log(x)$ geeft $\log(x) = \frac{y-1}{10} = 0{,}1y - 0{,}1$ en dus $x = 10^{0{,}1y-0{,}1} = 10^{-0{,}1} \cdot 10^{0{,}1y}$.

Dus $x \approx 0{,}79 \cdot 10^{0{,}1y}$ ASA.
Je vindt: $b \approx 0{,}79$ en $k = 0{,}1$.

17 a $m = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{2}\right) - 3$ geeft $\log\left(\frac{E}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot (m+3) = 1{,}5m + 4{,}5$, zodat
$E = 2 \cdot 10^{1{,}5m+4{,}5} = 2 \cdot 10^{4{,}5} \cdot 10^{1{,}5m} \approx 63245 \cdot 10^{1{,}5m}$.

b $E \approx 63245 \cdot 10^{1{,}5 \cdot 5{,}2} \approx 4{,}0 \cdot 10^{12}$.

Dus ongeveer 4,0 TJ (TeraJoule).

18 a $130 = k \cdot \log\left(\frac{26{,}3}{2{,}4}\right) = k \cdot 1{,}0397$, dus $k \approx 125$.

b $140 = 125 \cdot \log\left(\frac{G}{2{,}4}\right)$ geeft

$\log(G) - \log(2{,}4) = 1{,}12$

$\log(G) = 1{,}12 + \log(2{,}4)$

zodat $G \approx 31{,}6$ kg

c $L = 120 \cdot \log\left(\frac{G}{2{,}4}\right) = 120 \cdot (\log(G) - \log(2{,}4)) = 120\log(G) - 120\log(2{,}4)$

Dus $120\log(G) = L + 120\log(2{,}4)$ en $\log(G) = \frac{1}{120}L + \log(2{,}4)$;

zodat $G = 10^{\frac{1}{120}L + \log(2{,}4)} = 10^{\log(2{,}4)} \cdot 10^{\frac{1}{120}L}$.

$G \approx 2{,}4 \cdot 1{,}0194^{L}$

19 a GR: Y1 = log(2X)/log(1/3) met venster bijvoorbeeld [0,10] × [-4,4].

Je kunt geen logaritme berekenen van een getal gelijk aan of kleiner dan 0. Dus voor $f(x)$ geldt $x > 0$, zodat $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Het bereik is $B_f = \mathbb{R}$ en de verticale asymptoot is $x = 0$ met $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$.

b Vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y-as.

c GR: Y1 = log(3X-6)/log(3) met venster bijvoorbeeld [0,10] × [-4,4].

Je kunt geen logaritme berekenen van een getal gelijk aan of kleiner dan 0. Dus voor $g(x)$ geldt dan $3x - 6 > 0$ en dus $D_g = \langle 2, \rightarrow \rangle$.

Het bereik is $B_g = \mathbb{R}$ en de verticale asymptoot is $x = 2$ met $\lim\limits_{x \downarrow 2} g(x) = -\infty$.

d Start met $y = {}^{3}\log(x)$:

$y = {}^{3}\log(x)$
$y = {}^{3}\log(3x)$
$y = {}^{3}\log(3(x-2)) = {}^{3}\log(3x-6)$

e Los de vergelijking op met je GR: $x \approx 2{,}080$.

6.5 Logaritmische vergelijkingen

V1 Los eerst op: ${}^5\log(x) = 3$. Daaruit volgt $x = 5^3 = 125$. Inspectie van de grafiek geeft $x < 125$.

Tevens is ${}^5\log(x) > 0$ voor alle waarden van x.

Dus $0 < x < 125$.

1 a Voer in: Y1=3*log(X)/log(2)+16.
Venster bijvoorbeeld: $[0{,}200] \times [0{,}50]$.

b Voer in: Y2=38
Bepaal het snijpunt van Y1 met Y2. Je vindt $x \approx 161{,}27$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 3 \cdot {}^2\log(x) + 16 &= 38 \\ 3 \cdot {}^2\log(x) &= 22 \\ {}^2\log(x) &= \tfrac{22}{3} \\ x &= 2^{\frac{22}{3}} \end{aligned}$$

d De tweede reden is zonder meer waar. Een precies antwoord is beter dan een benadering. Of het venster instellen meer tijd kost, hangt af van jouw persoonlijke vaardigheden met de GR.

2 a Omdat je geen logaritme uit een negatief getal kunt nemen, geldt $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Uit de plot van de grafische rekenmachine kun je zien dat $B_f = \mathbb{R}$.

De asymptoot van f zit bij $x = 0$.

b De oplossing voor $f(x) = 38$: $x \approx 161{,}27$. Dus $x \leq 161{,}2$. Omdat je met het domein van de functie rekening moet houden, is de oplossing $0 < x \leq 161{,}2$.

3 Oplossing:

$$\begin{aligned} 2 + 3 \cdot {}^2\log(x-4) &= 11 \\ {}^2\log(x-4) &= 3 \\ x - 4 &= 2^3 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Vanwege het domein van de logaritme moet $x > 4$. Uit de grafiek lees je de oplossing van de ongelijkheid af: $4 < x \leq 12$.

4 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 1 + 4 \cdot {}^{0{,}5}\log(x+5) &= -3 \\ {}^{0{,}5}\log(x+5) &= -1 \\ x + 5 &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

b Omdat $x + 5 > 0$ is $D_f = \langle -5, \rightarrow \rangle$.

$B_f = \mathbb{R}$.
De verticale asymptoot is $x = -5$.

GR: Y1=1+4*log(X+5)/log(0.5) met venster $[-5{,}5] \times [-5{,}5]$.

c Grafiek: $-5 < x \leq -3$

5 a Je kunt geen logaritme berekenen van een getal kleiner dan of gelijk aan 0. Dus voor f geldt $x > 0$, zodat $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$. Voor g moet gelden $2 - x > 0$ en dus $x < 2$, zodat $D_g = \langle \leftarrow ; 2 \rangle$.

b Voor f is de verticale asymptoot $x = 0$.

Voor $g(x)$ is de verticale asymptoot $x = 2$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} {}^2\log(x) &= {}^2\log(2-x) \\ x &= 2-x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

d Gebruik eerst de algebraïsche oplossing van de vergelijking en teken dan de grafieken. Let op het domein. Lees vervolgens de oplossing af: $1 < x < 2$.

6 Oplossing:

$$\begin{aligned} {}^6\log(x(x-1)) &= 1 \\ x^2 - x &= 6 \\ (x-3)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Je vindt: $x = 3 \vee x = -2$, waarvan $x = -2$ niet voldoet (valt buiten het domein).

7 a $x = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

b Grafiek: $x \geq \frac{1}{81}$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} -5 + 4 \cdot {}^2\log(x-2) &= 11 \\ 4 \cdot {}^2\log(x-2) &= 16 \\ {}^2\log(x-2) &= 4 \\ x-2 &= 2^4 = 16 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

d Grafiek: $2 < x \leq 18$

e Oplossing:

$$\begin{aligned} {}^3\log(x-2) &= 1 + 5 \cdot {}^3\log(2) \\ {}^3\log(x-2) &= {}^3\log(3) + {}^3\log\left(2^5\right) \\ {}^3\log(x-2) &= {}^3\log(3) + {}^3\log(32) \\ {}^3\log(x-2) &= {}^3\log(96) \\ x-2 &= 96 \\ x &= 98 \end{aligned}$$

f Oplossing:

$$\begin{aligned} \log(2x) - \log(x-1) &= 2 \\ \log\left(\frac{2x}{x-1}\right) &= 2 \\ 10^2 &= \frac{2x}{x-1} \\ 100 &= \frac{2x}{x-1} \\ 100x - 100 &= 2x \\ 98x &= 100 \\ x &= \frac{100}{98} = \frac{50}{49} \end{aligned}$$

8 a ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) = \frac{{}^2\log(x)}{{}^2\log\left(\frac{1}{2}\right)} = -{}^2\log(x)$

Je krijgt dan ${}^2\log(x) = -{}^2\log(x)$ en dus ${}^2\log(x) = 0$ zodat $x = 2^0 = 1$.

b Grafieken: $0 < x < 1$.

9 a Je kunt geen logaritme berekenen van een getal gelijk aan of kleiner dan 0.

Dus $x + 4 > 0$ en $D_f = \langle -4, \rightarrow \rangle$.

Voor het bereik geldt $B_f = \mathbb{R}$.
De verticale asymptoot is $x = -4$.

b Los op: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} \log(x+4) &= \tfrac{1}{3} \\ x+4 &= 10^{\frac{1}{3}} \\ x &= \sqrt[3]{10} - 4 \end{aligned}$$

Met behulp van een grafiek lees je de oplossing af: $x > \sqrt[3]{10} - 4$.

10 a Je kunt geen logaritme berekenen van een getal gelijk aan of kleiner dan 0. Dus $x - 1 > 0$ en D_g: $x > 1$.
Voor het bereik geldt $B_g = \mathbb{R}$.
De verticale asymptoot is $x = 1$.

b Los op: $g(x) = -14$

$$\begin{aligned} {}^{\frac{1}{3}}\log(x-1) &= -2 \\ x-1 &= \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-2} = 9 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Met behulp van een grafiek lees je de oplossing af: $1 < x \leq 10$.

11 a ${}^{3}\log(x) = {}^{3}\log\left(5^2\right)$, dus $x = 5^2 = 25$.

b ${}^{\frac{1}{3}}\log(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log(5 \cdot 2)$, dus $x = 10$.

c ${}^{2}\log(x) = 5$, dus $x = 2^5 = 32$.

d ${}^{5}\log(x) = {}^{5}\log\left(5^3\right) + {}^{5}\log\left(3^4\right)$, geeft ${}^{5}\log(x) = {}^{5}\log\left(5^3 \cdot 3^4\right)$, dus $x = 125 \cdot 81 = 10125$.

e $x = 5(2 - x)$ geeft $x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

f ${}^{5}\log(x) = {}^{5}\log\left(5^3\right) + {}^{5}\log\left(x^4\right) = {}^{5}\log\left(5^3 \cdot x^4\right)$ geeft $x = 125x^4$.
Dit geeft:

$$\begin{aligned} x &= 125x^4 \\ x\left(125x^3 - 1\right) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = 0{,}2 \end{aligned}$$

Omdat $x = 0$ buiten het domein valt, geldt uitsluitend $x = 0{,}2$.

12 a Je kunt geen logaritme berekenen van een getal kleiner dan of gelijk aan 0. Voor $f(x)$ is dus het domein $D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Voor $g(x)$ geldt dan $x + 3 > 0$ en dus $D_g = \langle -3, \rightarrow \rangle$.

Het bereik van beide functies is gelijk: $B_f = B_g = \mathbb{R}$.
De asymptoot van f is $x = 0$ en de asymptoot van g is $x = -3$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} {}^{\frac{1}{4}}\log(x) &= -1 + {}^{4}\log(x+3) \\ {}^{\frac{1}{4}}\log(x) &= \frac{{}^{4}\log(x)}{{}^{4}\log\left(\frac{1}{4}\right)} = -{}^{4}\log(x) \\ -{}^{4}\log(x) &= {}^{4}\log\left(\tfrac{1}{4}\right) + {}^{4}\log(x+3) \\ {}^{4}\log\left(\tfrac{1}{x}\right) &= {}^{4}\log\left(\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

Dit betekent: $\frac{1}{x} = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$, dus $x^2 + 3x = 4^1 = 4$ en dus $x^2 + 3x - 4 = 0$, zodat $x = -4 \vee x = 1$.

Alleen $x = 1$ zit in beide domeinen, dus $x = 1$ is het enige antwoord.

c Gebruik je antwoord bij b en een grafiek om de oplossing af te lezen: $x \geq 1$.

d Gebruik je antwoord bij b en een grafiek om de oplossing af te lezen: $0 < x < 1$.

13 a Oplossing:

$$\begin{aligned} p &= 15 - {}^3\log(5-q) \\ {}^3\log(5-q) &= 15 - p \\ 3^{15-p} &= 5 - q \\ q &= 5 - 3^{15-p} \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} p &= 600 + 15 \cdot \log\left(\frac{q}{200}\right) \\ 15 \cdot \log\left(\frac{q}{200}\right) &= p - 600 \\ \log\left(\frac{q}{200}\right) &= \frac{p-600}{15} \\ \frac{q}{200} &= 10^{\frac{p-600}{15}} \\ q &= 200 \cdot 10^{\frac{p-600}{15}} \end{aligned}$$

14 a De grenswaarde van het domein ligt bij $5 - 3x = 0$. Dus $3x = 5$ en $x = \frac{5}{3}$.

Dit is de vergelijking van de verticale asymptoot.

b Vul voor x de waarde -2 in:

$g(-2) = {}^2\log(5+6) = {}^2\log(11)$

De coördinaten van het snijpunt zijn dan $\left(-2, {}^2\log(11)\right)$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} {}^2\log(5-3x) &= -2 \\ {}^2\log(5-3x) &= {}^2\log\left(2^{-2}\right) \\ 5 - 3x &= \frac{1}{4} \\ 3x &= \frac{19}{4} \\ x &= \frac{19}{12} \end{aligned}$$

Dus het snijpunt is $\left(\frac{19}{12}, -2\right)$.

15 a $\log(10A) = \log(10) + \log(A) = 1 + \log(A)$

b $10^{3,3} \approx 1995$

16 a Vergelijkbaar bewijs als ina.

b $D = 152{,}7°$, dus 16967 km.

c $8{,}8 = \log\left(\frac{A}{T}\right) + 1{,}66 \cdot \log(D) + 3{,}30$ geeft $\log\left(\frac{A}{T}\right) + \log\left(D^{1,66}\right) = 5{,}5$ en dus $\log\left(\frac{A}{T} \cdot D^{1,66}\right) = 5{,}5$.

Dit betekent: $\frac{A}{T} \cdot D^{1,66} = 10^{5,5}$ en $D^{1,66} = 10^{5,5} \cdot \frac{T}{A}$ zodat $D \approx \left(316227{,}766 \cdot \frac{T}{A}\right)^{\frac{1}{1,66}}$.

Dit kun je schrijven als $D = 2057{,}09 \cdot \left(\frac{T}{A}\right)^{0,60}$.

$p \approx 2057{,}09$ en $q \approx 0{,}60$.

17 a $x - 5 = 7^0 = 1$, dus $x = 6$

b $x^{-1} = 5$, dus $x = 0{,}2$

c ${}^{4}\log(x) = 0{,}5 - {}^{4}\log(3)$

${}^{4}\log(x) = {}^{4}\log\left(4^{0{,}5}\right) - {}^{4}\log(3)$

$x = \frac{4^{0{,}5}}{3} = \frac{2}{3}$

d $2x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

geeft $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Alleen $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ voldoet, want $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ valt buiten het domein (het is een negatief getal).

18 a Je kunt geen logaritme berekenen van een getal kleiner dan of gelijk aan 0. Voor $f(x)$ is dus het domein $D_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$.

Voor $g(x)$ geldt dan $3x - 6 > 0$ en dus $D_g = \langle 2, \rightarrow\rangle$. Het bereik van beide functies is gelijk: $B_f = B_g = \mathbb{R}$.

De asymptoot van f is $x = 0$ en de asymptoot van g is $x = 2$.

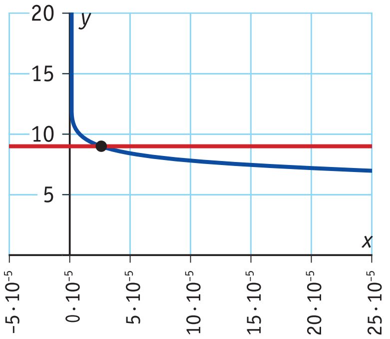
b Oplossing:

$$
\begin{aligned}
{}^{\frac{1}{3}}\log(2x) &= -2 \\
2x &= \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-2} = 9 \\
x &= 4{,}5
\end{aligned}
$$

c Oplossing:

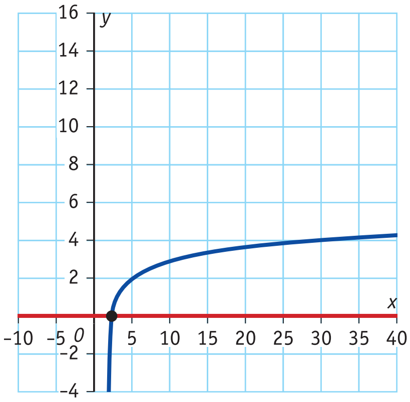
$$
\begin{aligned}
{}^{\frac{1}{3}}\log(2x) &= 9 \\
2x &= \left(\tfrac{1}{3}\right)^{9} \approx 0.0000508 \\
x &\approx 0.0000254
\end{aligned}
$$

Lees de oplossing af met behulp van een grafiek: $0 < x < 0.0000254$.



d Oplossing:

$$
\begin{aligned}
{}^{3}\log(3x - 6) &= 0 \\
3x - 6 &= 1 \\
x &= \tfrac{7}{3}
\end{aligned}
$$



Lees de oplossing af met behulp van een grafiek: $2 < x < \frac{7}{3}$.

e Oplossing:

$$\begin{aligned} {}^{\frac{1}{3}}\log(2x) &= {}^{3}\log(3x-6) \\ {}^{\frac{1}{3}}\log(2x) &= \frac{{}^{3}\log(2x)}{{}^{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)} = -{}^{3}\log(2x) \\ {}^{3}\log(3x-6) &= -{}^{3}\log(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-6 &= (2x)^{-1} \\ 2x(3x-6) &= 1 \\ 6x^2-12x-1 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{12-\sqrt{168}}{12} \vee x = \frac{12+\sqrt{168}}{12}$$

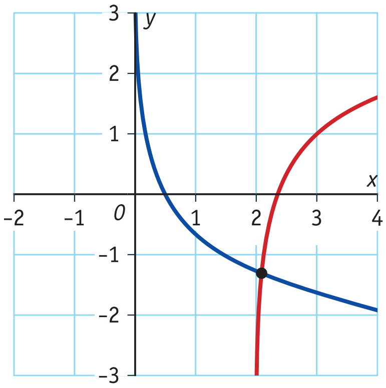
$$x = 1-\frac{2\sqrt{42}}{12} \vee x = 1+\frac{2\sqrt{42}}{12}$$

$$x = 1-\frac{1}{6}\sqrt{42} \vee x = 1+\frac{1}{6}\sqrt{42}$$

Het domein van f is $\langle 0, \rightarrow\rangle$, daarom voldoet alleen $x = 1+\frac{1}{6}\sqrt{42}$

f Gebruik het antwoord van e en een grafiek om het antwoord af te lezen: $2 < x \leq 1+\frac{1}{6}\sqrt{42}$

Bedenk dat $x = 2$ een verticale asymptoot is van $g(x)$.



19 a $L = 125 \cdot \log\left(\frac{G}{2{,}4}\right)$ geeft $\log\left(\frac{G}{2{,}4}\right) = 0{,}008L$ en dus $G = 2{,}4 \cdot 10^{0{,}008L}$.

b $G = 2{,}4 \cdot 10^{0{,}008 \cdot 130} \approx 26{,}3$ kg.

6.6 Totaalbeeld

1 a $x+2=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$
Dit geeft: $x=7$

b ${}^{2}\log(x)={}^{2}\log\left(2^5\right)-{}^{2}\log(16)={}^{2}\log\left(\frac{32}{16}\right)$

Dit geeft: $x=\frac{32}{16}=2$

c ${}^{5}\log\left(4x^2\right)={}^{5}\log\left(5^2\right)+{}^{5}\log(x)$
Dit geeft: $4x^2=25x$ en dus $x=0 \vee x=6{,}25$
Alleen $x=6{,}25$ voldoet.

d $10+5\cdot{}^{2}\log(x-5)=100$
Dit geeft: ${}^{2}\log(x-5)=18$ en dus $x=2^{18}+5=262149$
Met behulp van grafieken vind je: $5<x\leq 262149$.

2 a f is alleen gedefinieerd als $x+10>0$, ofwel als $x>-10$, dus $D_f=\langle -10,\rightarrow\rangle$.

Nu is $\lim\limits_{x\downarrow -10} f(x)=-\infty$, dus $x=-10$ is de verticale asymptoot, en $\lim\limits_{x\to\infty}=\infty$.

$f(x)$ neemt dus het volledige bereik van y-waarden aan, dus $B_f=\mathbb{R}$.

g is alleen gedefinieerd als $-x>0$, ofwel als $x<0$, dus $D_g=\langle\leftarrow,0\rangle$.

Nu is $\lim\limits_{x\uparrow 0} g(x)=-\infty$, dus $x=0$ is de verticale asymptoot, en $\lim\limits_{x\to -\infty}=\infty$. $g(x)$ neemt dus het volledige bereik van y-waarden aan, dus $B_g=\mathbb{R}$.

b Voor f:

$$\begin{aligned}\log(x+10)+4 &= 0\\ \log(x+10) &= -4\\ x+10 &= 10^{-4}\\ x &= -10+10^{-4}\end{aligned}$$

Dus een nulpunt op $x=-9{,}9999$.

Voor g:

$$\begin{aligned}\log(-x) &= 0\\ -x &= 10^0=1\\ x &= -1\end{aligned}$$

Dus een nulpunt $x=-1$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned}\log(x+10)+4 &= \log(-x)\\ \log(x+10)+\log\left(10^4\right) &= \log(-x)\\ 10000x+100000 &= -x\\ x &= -\frac{100000}{10001}\approx -9{,}999\end{aligned}$$

Oplossing ongelijkheid: $-10<x<-9{,}999$.

d $h(x)=\log(x+10)+4+\log(-x)=\log(x+10)+\log\left(10^4\right)+\log(-x)=\log\left(-10^4x(x+10)\right)$.
En dat levert het gewenste resultaat.

3 a Met een stijging van 11% per jaar is de groeifactor 1,11 per jaar. Je zoekt dus $1{,}11^t=1{,}5$, dus $t={}^{1{,}11}\log(1{,}5)\approx 3{,}89$ jaar.

b $1{,}11^t=2$, dus $t={}^{1{,}11}\log(2)\approx 6{,}64$ jaar.
$1{,}11^t=3$, dus $t={}^{1{,}11}\log(3)\approx 10{,}53$ jaar.
$1{,}11^t=6$, dus $t={}^{1{,}11}\log(6)\approx 17{,}17$ jaar.
Het lijkt erop dat ${}^{1{,}11}\log(2)+{}^{1{,}11}\log(3)={}^{1{,}11}\log(6)$.

4 $l(d) = 100 \cdot 0{,}73^d$, waarin d de dikte van de kunststof in cm en l het doorgelaten percentage licht is.
$0{,}73^d = 0{,}5$ geeft $d = {}^{0{,}73}\log(0{,}5) \approx 2{,}2$ cm.
De dikte moet dus ongeveer 22 mm zijn.

5 a Voer in: Y1=-15xlog(X/1010)
Venster bijvoorbeeld: [0,1500] × [-10,15]

b $p = 400$, dus $h = -15 \cdot \log\left(\frac{400}{1010}\right) \approx 6{,}034$.
Het vliegtuig vliegt op ongeveer 6 km hoogte.

c $h = -15 \cdot (\log(p) - \log(p_0)) = -15\log(p) + 15\log(p_0)$
De grafiek van h vind je door die van $y = -15 \cdot \log(p)$ ten opzichte van de x-as $15 \cdot \log(p_0)$ te transleren.

d $3 = -15 \cdot \log\left(\frac{p}{1000}\right)$ geeft $p \approx 0{,}631$. De bemanning meet dus een luchtdruk van 631 mbar.
$p_0 = 1010$ en dus is $h \approx -15 \cdot \log\left(\frac{631}{1010}\right) \approx 3{,}064$. Zij vliegen op 3064 m hoogte.

6 a A aflezen op $t = 0$ geeft beginwaarde $10^3 = 1000$.

b $A_1 = 1000 \cdot g^t$ door $(10{,}10^6)$ geeft $g \approx 2{,}00$, dus $A_1 = 1000 \cdot 2{,}00^t$ (0 graden).
$A_2 = 1000 \cdot g^t$ door $(5{,}10^6)$ geeft $g \approx 3{,}98$, dus $A_2 = 1000 \cdot 3{,}98^t$ (4 graden).

c $A_1(10) \approx 1024000$
$A_2(10) \approx 997311256$
Ongeveer 974 keer zoveel.

d $3{,}98^t = 2$ geeft $t \approx 0{,}50$ dagen. Dat is 12 uur.

e De verdubbelingstijd bij 6 °C is $\frac{12{,}04}{1{,}5^2} \approx 5{,}35$ uur.
De verdubbelingstijd bij 10 °C is $\frac{12{,}04}{2{,}5^2} \approx 1{,}93$ uur.

7 a $pH = -\log(18) \approx -1{,}26$

b $-\log(H^+) = 11{,}5$ dus $[H^+] = 10^{-11{,}5} \approx 3{,}16 \cdot 10^{-12}$ Mol/L.

c $-\log(H^+) = 4$ dus $[H^+] = 10^{-4} = 0{,}0001$ Mol/L.

d $-\log(H^+) = 0$ dus $[H^+] = 10^0 \approx 1$ Mol/L, dus als $[H^+] > 1$ Mol/L.
De oplossing is dan niet erg zuur, maar wordt steede zuurder.

e $-\log(H^+) = 5{,}5$ dus $[H^+] = 10^{-5{,}5}$ Mol/L, dus $[H^+] = 3{,}16 \cdot 10^{-6}$ Mol/L.

8 a $g^{5730} = \frac{1}{2}$ geeft $g \approx 0{,}999879$.
De verhouding C-14 : C-12 = $\frac{1}{10^{13}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10^{12}}$.
Dus $0{,}999879^t = 0{,}1$. Dat geeft $t \approx 19034{,}6$, dus ongeveer 19000 jaar.

b $0{,}999879^t = 0{,}65$ geeft $t \approx 3559{,}097$, dus ongeveer 3560 jaar.

c $0{,}999879^t = 0{,}77$ geeft $t \approx 2159{,}9$. $0{,}999879^t = 0{,}81$ geeft $t \approx 1741{,}4$.
Dus tussen 1740 en 2160 jaar.

d $0{,}999879^{4500} \approx 0{,}58$, dus ongeveer 58% van de oorspronkelijke hoeveelheid.

9 a $20\log\left(\frac{2}{0{,}00002}\right) = 100$ en $20\log\left(\frac{20}{0{,}00002}\right) = 120$, een verschil van 20.
$20\log\left(\frac{20}{0{,}00002}\right) = 120$ en $20\log\left(\frac{200}{0{,}00002}\right) = 140$, ook een verschil van 20.

b $L = 20\log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right)$ geeft $\log\left(\frac{p}{0{,}00002}\right) = \frac{L}{20}$ en dus $p = 0{,}00002 \cdot 10^{\frac{L}{20}}$.

c Bij $L = 50$ dB hoort een effectieve geluidsdruk van $p \approx 0{,}0063$ W/m^2.
Bij $L = 125$ dB hoort een effectieve geluidsdruk van $p \approx 35{,}5656$ W/m^2.
Dat is meer dan 5600 keer zoveel.

10 a Er moet gelden: $b \cdot {}^{2}\log(19) = 8$. Hieruit volgt: $b = \frac{8}{{}^{2}\log(19)} \approx 1{,}9$

b Uit $b_p \cdot 2\log(17) = b_v \cdot 2\log(5)$ volgt $b_p = b_v \cdot \frac{{}^{2}\log(5)}{{}^{2}\log(17)}$

$\frac{{}^{2}\log(5)}{{}^{2}\log(17)} \approx 0{,}6$

De b-waarde van Pim is niet half zo groot.

c Bij $n = 18$ geldt $T \approx 3{,}82$.
Bij $n = 3$ geldt $T \approx 1{,}80$.
Bij $n = 6$ geldt $T \approx 2{,}53$.
En $T(3) + T(6) - T(18) > 0{,}5$.

d Eén menu: $T = 1 \cdot {}^{2}\log(p \cdot q + 1)$.

Submenu's:$T = 1 \cdot {}^{2}\log(p+1) + 1 \cdot {}^{2}\log(q+1) = {}^{2}\log((p+1)(q+1))$.

En $(p+1)(q+1) = pq + p + q + 1 > p \cdot q + 1$.

11 a $\frac{\Delta}{\Delta h} = \frac{4{,}3-1{,}2}{80-10} \approx 0{,}0443$.
$h = 80$ en $W = 4{,}3$ invullen in $W = 0{,}0443h + b$ geeft $b \approx 0{,}761$ en dus $a \approx 0{,}044$.

b $6{,}0 = 5{,}76 \cdot m \cdot \log\left(\frac{10}{10 \cdot 0{,}12}\right)$, dus $m \approx 0{,}542$.

$W = 5{,}76 \cdot 0{,}542 \cdot \log\left(\frac{5{,}7}{0{,}542}\right) = 8{,}4$, dus de gevraagde windsnelheid is ongeveer 8,4 (m/s)

c $5{,}76 \cdot 0{,}45 \cdot \log\left(\frac{60}{r}\right) = 1{,}3 \cdot 5{,}76 \cdot 0{,}45 \cdot \log\left(\frac{20}{r}\right)$
geeft met de GR $r \approx 0{,}51$.

7

Machtsfuncties

7.1 Werken met machten

V1 a Vul in $h = 100$, dan is $a = 35730$ m ofwel bijna 36 km.

b Vul in $h = 50$, dan is $a \approx 25265$ m ofwel ruim 25 km. De bewering is dus niet waar.

c Bij $h = 50$ is $a \approx 25265$ en als $h = 100$ is $a = 35730$.

35730 is duidelijk niet twee keer zo groot als 25265.

Dus de bewering klopt niet.

1 a $I = 4^3 = 64$ cm^3.

b De inhoud wordt dan acht keer zo groot, want $2r \cdot 2r \cdot 2r = 2^3 r^3 = 8r^3$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} r^3 &= 500 \\ r &= 500^{\frac{1}{3}} \\ r &\approx 7{,}9 \end{aligned}$$

d Als de inhoud $I = r^3$ bijvoorbeeld twee keer zo groot wordt, wordt m dat ook.
De formule is $m = 2{,}7 \cdot r^3$.

2 a A is recht evenredig met de tweede macht van r.

b $A = 6 \cdot 4^2 = 96$ cm^2.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 6r^2 &= 300 \\ r^2 &= 50 \\ r &= \sqrt{50} \vee r = -\sqrt{50} \end{aligned}$$

De negatieve waarde valt in dit geval weg omdat het over een lengte gaat.

$r = \sqrt{50} \approx 7{,}1$ cm

d Als de ribben twee keer zo groot worden, wordt de oppervlakte $2 \cdot 2 = 4$ keer zo groot. De oppervlakte van één zijvlak wordt dan $2r \cdot 2r = 4r^2$.

e Oplossing:

$$\begin{aligned} 6r^2 &= A \\ r^2 &= \frac{A}{6} \\ r &= \sqrt{\frac{1}{6}A} \end{aligned}$$

3 a Dat is $\frac{4}{3}\pi$.

b In het voorbeeld zie je $r = \left(\frac{3}{4\pi} \cdot I\right)^{\frac{1}{3}}$.

De evenredigheidsconstante is $\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

4 a y is recht evenredig met x.
De evenredigheidsconstante is 2.

b y is niet recht evenredig met een macht van x. Dit komt door de +5 aan het eind van de formule.

c y is recht evenredig met x^4.
De evenredigheidsconstante is 5.

d Oplossing:

$$x = 5y^4$$
$$y^4 = \tfrac{1}{5}x$$
$$y = \left(\tfrac{1}{5}x\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\tfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}}$$

Dus y is recht evenredig met $x^{\frac{1}{4}}$ met evenredigheidsconstante $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$.

5 a $V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$
De evenredigheidsconstante is 2π.

b Algebraïsch: $2\pi r^3 = 1000$ geeft $r = \left(\frac{1000}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5{,}4$ cm.
Ga na, dat je met de GR hetzelfde vindt.

c $V = 2\pi r^3$ geeft $r^3 = \frac{V}{2\pi}$ en dus $r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}54V^{\frac{1}{3}}$.

$V = 1000$ geeft dan $r \approx 0{,}54 \cdot 1000^{\frac{1}{3}} = 5{,}4$ cm.

6 a Als $h = 50$, dan $a = 3572 \cdot 50^{\frac{1}{2}} \approx 25258$.
Dus ongeveer 25258 meter.

b Eerste manier: de grafiek geeft $h \approx 48{,}98 \approx 49$.

Tweede manier: los op $3572 \cdot h^{\frac{1}{2}} = 25000$. Dat geeft $h^{\frac{1}{2}} \approx 6{,}998$ en $h \approx 48{,}98$. Dus de hoogte is ongeveer 49 m.

Derde manier: $h = \left(\frac{25000}{3572}\right)^2 \approx 48{,}98$. Dus de hoogte is ongeveer 49 m.

7 a Ga uit van het verband $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$ en vul steeds de in de tabel gegeven waarden in. Bijvoorbeeld de combinatie $G = 430$ en $H = 507$.

Je vindt dan $507 = c \cdot 430^{\frac{2}{3}}$. Dus $c = \frac{507}{430^{\frac{2}{3}}} \approx 8{,}9$.

Reken dit ook na voor de andere waarden in de tabel. Telkens vind je bij benadering $c \approx 8{,}9$.

b Oplossing:

$$510 \approx 8{,}9 \cdot G^{\frac{2}{3}}$$
$$G^{\frac{2}{3}} \approx 57{,}3$$
$$G \approx (57{,}3)^{1{,}5} \approx 434$$

Ongeveer 434 kg.

c Oplossing:

$$H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$$
$$G^{\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{c} \cdot H$$
$$G = \left(\tfrac{1}{c}\right)^{1{,}5} \cdot H^{1{,}5}$$

Dus $G = K \cdot H^{1{,}5}$ met $K = c^{-1{,}5}$.

d Ga uit van $H = c \cdot G^{\frac{2}{3}}$ en vul voor G een keer de waarde a en een keer de waarde $2a$ in. Bij de laatste bereken je H als G twee keer zo groot is.

$H = c \cdot a^{\frac{2}{3}}$

$H = c \cdot (2a)^{\frac{2}{3}} = c \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$

Dus H is $2^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}59$ keer zo groot.

Dus de huidoppervlakte wordt dan minder dan twee keer zo groot.

8 a Zoek bijvoorbeeld in Binas. Je vindt dan:

- inhoud van een bol: $I = \frac{4}{3}\pi r^3$
- oppervlakte van een bol: $A = 4\pi r^2$

b De soortelijke massa van ijzer is gelijk aan 7,9 g/cm^3 . Dit verwerk je in de formule voor de inhoud van een bol die je gevonden hebt bij a:

$G = \frac{4}{3}\pi r^3$

$G = 7{,}9 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 33{,}09 r^3$

c Uit $G \approx 33{,}09r^3$ volgt $r \approx \left(\frac{G}{33{,}09}\right)^{\frac{1}{3}}$ en dus $A \approx 4\pi \cdot \left(\frac{G}{33{,}09}\right)^{\frac{2}{3}} \approx \frac{4\pi}{33{,}09^{\frac{2}{3}}} \cdot G^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}22G^{\frac{2}{3}}$

Dus $c \approx 1{,}22$.

9 a $f(3) = 105 \cdot 3^6 = 76545$

b $105 \cdot x^6 = 15000$ geeft $x = \left(\frac{15000}{105}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 2{,}29 \vee x = -\left(\frac{15000}{105}\right)^{\frac{1}{6}} \approx -2{,}29$.

c Ga uit van $105x^6$ en vul voor x een keer a in en een keer $5a$.

$f(x) = 105 \cdot a^6$

$f(x) = 105 \cdot (5a)^6 = 105 \cdot a^6 \cdot 5^6$

Dus de tweede functiewaarde is $5^6 = 15625$ keer zo groot.

10 a $r = \frac{s^2}{100} \cdot 0{,}75 = \frac{0{,}75}{100} \cdot s^2 = 0{,}0075 \cdot s^2$

De evenredigheidsconstante is 0,0075.

b $r = 10$ geeft $s^2 = \frac{10}{0{,}0075} \approx 1333{,}33$ en dus $s \approx 36{,}5$.

Omdat het een maximumsnelheid is rond je af naar beneden dus wordt het 36 km/h.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} r &= \frac{s^2}{100} \cdot 0{,}75 \\ 0{,}75s^2 &= 100r \\ s^2 &= \frac{100}{0{,}75} \cdot r \\ s &= \sqrt{\frac{100}{0{,}75}} \cdot r^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dus s is recht evenredig met $r^{\frac{1}{2}}$.

d Als $s = 60$, dan $r = \frac{60^2}{100} \cdot 0{,}75 = 27$ meter.

Als $s = 30$, dan $r = \frac{30^2}{100} \cdot 0{,}75 = 6{,}75$ meter.

$4 \cdot 6{,}75 = 27$, dus de uitspraak klopt.

Je kunt ook vergelijken $r = \frac{a^2}{100} \cdot 0{,}75$ en $r = \frac{(2a)^2}{100} \cdot 0{,}75$.

11 a $I(2) = 2^3 = 8$ cm^3.

b $I(6) = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$

c De inhoud is $\frac{216}{8} = 27$ ofwel $3^3 = 27$ keer zo groot.

Algemener: inhoud eerste kubus is r^3. Inhoud tweede kubus is $(3r)^3 = 27r^3$. Je ziet nu dat de inhoud 27 keer zo groot is geworden.

d $r^3 = 50$, dus $r = \sqrt[3]{50} \approx 3{,}7$.

e De formule is $I = r^3$.

f $r^3 = I$ geeft $r = \sqrt[3]{I}$.

12 a Zes vierkanten met een oppervlakte van r^2 geeft de formule $A = 6r^2$.

b $A(3) = 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ cm}^2$
$A(6) = 6 \cdot 6^2 = 216 \text{ cm}^2$

c Neem voor r de waarde a en $2a$, reken in beide gevallen de oppervlakte uit en kijk hoeveel groter de oppervlakte is geworden:

$r = a$: $A = 6 \cdot a^2 = 6a^2$

$r = 2a$: $A = 6 \cdot (2a)^2 = 24a^2$

Dus de oppervlakte is $\frac{24a^2}{6a^2} = 4$ keer zo groot geworden.

d $A = 6r^2$ gelijkstellen aan 500:

$$\begin{aligned} 6r^2 &= 500 \\ r^2 &= \left(\frac{500}{6}\right) \\ r &= \sqrt{\frac{500}{6}} \approx 9{,}13 \end{aligned}$$

e Ga uit van $A = 6r^2$ en druk r uit in A:

$$\begin{aligned} 6r^2 &= A \\ r^2 &= \frac{A}{6} \\ r &= \sqrt{\frac{A}{6}} \end{aligned}$$

13 a De formule voor de inhoud van deze kubus zou zijn $I = r^3$. De soortelijke massa van ijzer is 7,9 g/cm^3. Om het gewicht G te berekenen vermenigvuldig je de inhoud met de soortelijke massa: $G = 7{,}9r^3$.

b Een kubus heeft zes vierkanten als zijden. De oppervlakte van één vierkant is r^2. Van zes vierkanten dus $6r^2$. Dit geeft voor de oppervlakte A van de kubus: $A = 6r^2$.

c $G = 7{,}9r^3$ geeft $r = \left(\frac{1}{7{,}9}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot G^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}502G^{\frac{1}{3}}$.

Dus is $A = 6r^2 = 6 \cdot \left(0{,}502G^{\frac{1}{3}}\right)^2 \approx 1{,}51G^{\frac{2}{3}}$ en $c \approx 1{,}51$.

d Ga uit van $A = 1{,}51 \cdot G^{\frac{2}{3}}$ en vul voor A de waarde 150 in.

$$\begin{aligned} 1{,}51 \cdot G^{\frac{2}{3}} &= 150 \\ G^{\frac{2}{3}} &= \frac{150}{1{,}51} \\ G &= \left(\frac{150}{1{,}51}\right)^{\frac{3}{2}} \\ G &\approx 990 \end{aligned}$$

14 a $T = 2\pi\left(\frac{0{,}70}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 2\pi \cdot 0{,}267 \approx 1{,}7$ seconden

b In de formule komt geen variabele ‘gewicht’ voor. Het gewicht heeft dus geen invloed op de slingertijd.

c Manier 1:
GR geeft $l \approx 0{,}9$.

Manier 2:

$$\begin{aligned} 1{,}9 &= 2\pi\left(\frac{l}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1{,}9}{2\pi} &= \left(\frac{l}{9{,}81}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0{,}09144 &\approx \left(\frac{l}{9{,}81}\right) \\ 0{,}897 &\approx l \end{aligned}$$

l is dus ongeveer 90 centimeter.

15 a Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{T}{2\pi} &= \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 &= \frac{l}{g} \\ \frac{T^2}{4\pi^2} &= \frac{l}{g} \\ l &= \frac{g \cdot T^2}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Bij een slingertijd van 2,5 seconden geldt $l \approx 1{,}55$.

b $T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot l$

T^2 is recht evenredig met l. De evenredigheidsconstante is $\frac{4\pi^2}{9{,}81} \approx 4{,}02$.

16 a $y = 5 \cdot (3x)^4 = 5 \cdot 3^4 \cdot x^4 = 405x^4$.

Dus de evenredigheidsconstante is 405.

b $405x^4 = 12000$

geeft $x = \pm\left(\frac{12000}{405}\right)^{\frac{1}{4}} \approx \pm 2{,}33$.

Oplossing: $x = -2{,}33 \vee x = 2{,}33$

c Vul voor x een keer het getal a in en een keer het getal $4a$.

$y = 5 \cdot (3a)^4 = 5 \cdot 3^4 \cdot a^4 = 405a^4$.

$y = 5 \cdot (3 \cdot 4a)^4 = 5 \cdot 3^4 \cdot 4^4 \cdot a^4 = 103680a^4$

Dus $\frac{103680}{405} = 256$ keer zo groot.

Sneller: als je goed kijkt is de tweede formule dus 4^4 keer zo groot geworden. Schrijf daarvoor de formule waarin je $3a$ invulde in de vorm $4^4\left(5 \cdot 3^4 \cdot a^4\right)$.

17 a Ga uit van de gegeven formule $V = \pi r^2 h$ en substitueer daar de formule $h = 2r$ in.

Je krijgt dan $V = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2 \cdot \pi \cdot r^3$.

b Ga uit van $V = 2\pi r^3$ en druk eerst r uit in V.

$2\pi r^3 = V$

$r^3 = \frac{V}{2\pi}$

$r^3 = \frac{1}{2\pi} \cdot V$

$r = \left(\frac{1}{2\pi} \cdot V\right)^{\frac{1}{3}}$

$r = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot V^{\frac{1}{3}}$

De evenredigheidsconstante is $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}54$. r is recht evenredig met $V^{\frac{1}{3}}$.

c De bovenkant en de onderkant van de cilinder zijn cirkels. De oppervlakte van een cirkel is gelijk aan πr^2. Van twee cirkels dus $2\pi r^2$.

De mantel van de cirkel is een rechthoek, met als lengte de omtrek van de cirkel ($2\pi r$) en de breedte(hier de hoogte van het blik) is $2r$, want de cilinder moet even hoog als breed zijn (zie opgave a).

De totale oppervlakte wordt dus $A = 2\pi r \cdot 2r + 2 \cdot \pi r^2 = 6\pi r^2$.

d Ga uit van de bij opgave c gevonden formule $A = 6\pi r^2$ en gebruik voor r de bij opgave b gevonden formule $r = V^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Substitutie levert $A = 6\pi \cdot \left(V^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 6\pi \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot V^{\frac{2}{3}} \approx 5{,}54V^{\frac{2}{3}}$, dus $c \approx 5{,}54$.

7.2 Eigenschappen van machtsfuncties

V1 a Als p een even positief getal is. Het minimum is dan $O(0,0)$.

b Ja, als p een oneven positief getal is.

Bijvoorbeeld $f(x) = 1 \cdot x^3$ of $f(x) = 1 \cdot x^5$.

c Neem voor p een negatief getal.

d Bij $p = \frac{1}{2}$ mag je alleen positieve waarden en 0 voor x toelaten.

Bij $p = \frac{1}{3}$ kan x alle waarden hebben.

e Er zit een knik bij $O(0,0)$.

f Alle waarden van x toelaten, kan alleen bij breuken met een oneven noemer en niet bij breuken met een even noemer.

Het gemakkelijkst is dan het nooit toelaten van negatieve x waarden bij niet gehele decimale getallen.

1 a $x^4 = x^3$ geeft $x^3(x-1) = 0$, dus $x = 0 \vee x = 1$

b $x^4 > x^3$ als $x < 0 \vee x > 1$

c $x^4 = x^2$ geeft $x^2\left(x^2 - 1\right) = 0$, dus als $x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$

d $x^4 > x^2$ als $x < -1 \vee x > 1$

e $x^4 = x$ geeft $x\left(x^3 - 1\right) = 0$, dus $x = 0 \vee x = 1$

f $x^4 > x$ als $x < 0 \vee x > 1$

g Zie de tabel.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$p < q$	$f(x) > g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$
$p > q$	$f(x) > g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$

2 a Kies bijvoorbeeld $[-2,2] \times [-2,14]$ als vensterinstelling.

b $x^6 = 10$ geeft $x = \sqrt[6]{10} \vee x = -\sqrt[6]{10}$ dus $x \approx -1{,}47 \vee x \approx 1{,}47$.

$x^6 < 10$ geeft $-1{,}47 < x < 1{,}47$.

c $x^5 = 10$ geeft $x = \sqrt[5]{10} \approx 1{,}58$.

$x^5 < 10$ geeft $x < 1{,}58$.

3 a De uitdrukking x^{-1} kun je schrijven als $\frac{1}{x}$

De uitdrukking x^{-2} kun je schrijven als $\frac{1}{x^2}$

Als je voor x een groot getal of heel klein getal in beide functievoorschriften invult dan nadert de functiewaarde in beide gevallen 0.

Horizontale asymptoot $y = 0$ want $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ en $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Je mag niet delen door nul.

Verticale asymptoot $x = 0$ want $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, terwijl $\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$ en $\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

b Als $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ dan moet $x = x^2$ en $x \neq 0$, dus $x = 1$.

c Als $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ dan moet $x = x^2$ en $x \neq 0$, dus $x = 1$.

Grafieken tekenen geeft $\frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$ als $x < 0 \vee 0 < x < 1$.

d $x^{-1} = 0{,}005$ geeft $x = 0{,}005^{-1} = 200$.

$x^{-2} = 0{,}005$ geeft $x = \pm(0{,}005)^{-\frac{1}{2}}$ en dus $x \approx 14{,}14 \vee x \approx -14{,}14$.

$x^{-1} = 5000$ geeft $x = 5000^{-1} = 0{,}0002$.

$x^{-2} = 5000$ geeft $x = \pm(5000)^{-\frac{1}{2}}$ en dus $x \approx 0{,}01414 \vee x \approx -0{,}01414$.

e Bekijk de grafiek (zie a).

$x < 0 \vee x > 200$

f Bekijk de grafiek (zie a).

$0 < x < 0{,}0002$

g Bekijk de grafiek (zie a).

$x < -14{,}14 \vee x > 14{,}14$

h Bekijk de grafiek (zie a).

$-0{,}01414 < x < 0 \vee 0 < x < 0{,}01414$

4 a Los op: $a(x) = b(x)$

$$\begin{aligned} x^{-\frac{1}{2}} &= x^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} &= \sqrt{x} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Voer in: Y1=X^(-1/2), Y2=X^(1/2), Y3=X^(-1/3) en Y4=X^(1/3)
Venster bijvoorbeeld: $[0,5] \times [0,5]$
Antwoord: $x > 1$

b Los op: $d(x) = b(x)$

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{3}} &= x^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[3]{x} &= \sqrt{x} \\ x^2 &= x^3 \\ x^2(1 - x) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Aflezen uit de grafiek geeft $x > 1$.

c Los op: $d(x) = c(x)$

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{3}} &= x^{-\frac{1}{3}} \\ \sqrt[3]{x} &= \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ x &= \frac{1}{x} \\ x^2 &= 1 \\ x &= 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Aflezen uit de grafiek geeft $0 < x < 1 \vee x < -1$.

d Voer bijvoorbeeld in Y5=X^(1/4) om je schets te controleren of gebruik de applet.

e Oplossing:

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{4}} &= 4 \\ \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^4 &= 4^4 \\ x &= 256 \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x > 256$.

5 a Oplossing:

$$\begin{aligned} -20x^{\frac{5}{4}} &= -7 \\ x^{\frac{5}{4}} &= \frac{7}{20} \\ \left(x^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{4}{5}} &= \left(\frac{7}{20}\right)^{\frac{4}{5}} \\ x &\approx 0{,}43 \end{aligned}$$

b Gebruik de eigenschap $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$.

Dan zie je dat $\left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{4}{5}} = a^1 = a$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} -180x^{\frac{7}{6}} &= -30 \\ x^{\frac{7}{6}} &= \frac{1}{6} \\ x &= \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{6}{7}} \approx 0{,}22 \end{aligned}$$

Voer in: Y1=-180X^(7/6) en Y2=-30
Met de grafiek vind je de oplossing: $0 \leq x < 0{,}22$

6 a $y = x^3$ geeft na translatie van 1 ten opzichte van de y-as $y = (x-1)^3$.

Daarna met $-\frac{1}{3}$ vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as geeft $y = -\frac{1}{3}(x-1)^3$.

Dan nog een translatie van -5 ten opzichte van de x-as geeft $f(x)$.

b Los op: $f(x) = -10$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}(x-1)^3 - 5 &= -10 \\ -\frac{1}{3}(x-1)^3 &= -5 \\ (x-1)^3 &= 15 \\ x - 1 &= \sqrt[3]{15} \approx 2{,}47 \\ x &= \sqrt[3]{15} + 1 \approx 3{,}47 \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x < 1 + \sqrt[3]{15}$.

7 a Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 &= \sqrt{x} \\ x^4 &= x \\ x^4 - x &= 0 \\ x\left(x^3 - 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \vee x^3 - 1 = 0 \\ x &= 0 \vee x^3 = 1 \\ x &= 0 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $0 < x < 1$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4} &= 81 \\ 81x^4 &= 1 \\ x^4 &= \frac{1}{81} \\ x^4 &= \frac{1}{3^4} \\ x^4 &= \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ x &= -\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3} &= 27 \\ 27x^3 &= 1 \\ x^3 &= \frac{1}{27} \\ x^3 &= \frac{1}{3^3} \\ x^3 &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x > \frac{1}{3}$ of $x < 0$.

d Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{5}{x^3} &= 30 \\ 30x^3 &= 5 \\ x^3 &= \frac{1}{6} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{1}{6}} \approx 0{,}55 \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x < 0 \vee x > \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$.

e Oplossing:

$$\begin{aligned} x^5 &= x^4 \\ x^5 - x^4 &= 0 \\ x^4(x-1) &= 0 \\ x^4 &= 0 \vee x - 1 = 0 \\ x &= 0 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x < 0 \vee 0 < x < 1$.

f Oplossing:

$$\begin{aligned} x^6 &= x^4 \\ x^6 - x^4 &= 0 \\ x^4\left(x^2 - 1\right) &= 0 \\ x^4 &= 0 \vee x^2 = 1 \\ x &= 0 \vee x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $-1 < x < 0 \vee 0 < x < 1$.

8 a Als je hele grote waarden of heel kleine waarden invult voor x, zal $f(x)$ naar 0 gaan. Als je hele kleine waarden (dicht bij 0) invult voor x zal $f(x)$ naar oneindig gaan, dus ook hier is een asymptoot.

Horizontale asymptoot $y = 0$ met $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ en $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Verticale asymptoot $x = 0$ met $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$.

b
1. Een translatie van -1 ten opzichte van de y-as.
2. Een vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x-as.
3. Een translatie van -4 ten opzichte van de x-as.

c $f(x)$ is ongedefinieerd voor $x = -1$, met $\lim_{x \downarrow -1} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \infty$.

$x = -1$ is dus de verticale asymptoot.

Tevens geldt $\lim_{x \to \pm\infty} = -4$, dus $y = -4$ is de horizontale asymptoot.

d Bij c heb je de asymptoten bepaald. Verder geldt $f(x) > -4$ voor alle waarden van x. Dus $D_f = \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle -1, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \langle -4, \rightarrow \rangle$.

e Los op: $f(x) = 10$

$$\begin{aligned}
2(x+1)^{-2} - 4 &= 10 \\
2(x+1)^{-2} &= 14 \\
(x+1)^{-2} &= 7 \\
\frac{1}{(x+1)^2} &= 7 \\
7(x+1)^2 &= 1 \\
(x+1)^2 &= \frac{1}{7} \\
x + 1 &= \sqrt{\frac{1}{7}} \vee x + 1 = -\sqrt{\frac{1}{7}} \\
x &= \sqrt{\frac{1}{7}} - 1 \approx -0{,}62 \vee x = -\sqrt{\frac{1}{7}} - 1 \approx -1{,}38
\end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing:

$x > \sqrt{\frac{1}{7}} - 1 \vee x < -\sqrt{\frac{1}{7}} - 1$.

9 a $a = 750p^{-1}$

b Voer in: Y1=750/X
Venster bijvoorbeeld: [1,5] × [0,750]

Als $p = 2{,}50$, dan $a = 300$ en als $p = 5{,}00$, dan $a = 150$.

Bij verdubbeling van de prijs wordt de afzet gehalveerd.

c Als $a = 550$, dan geldt:

$$\begin{aligned}
\frac{750}{p} &= 550 \\
550p &= 750 \\
p &= \frac{750}{550} \approx 1{,}36
\end{aligned}$$

Formule: $p = \frac{750}{a}$, met a de voorraad tomaten in kg.

d Bij € 0,01 hoort $a = 75000$ en bij € 100,00 hoort $a = 7{,}5$.

Dit zijn weinig realistische situaties. Sowieso heeft het bedrijf maar 550 kg tomaten op voorraad. Dus er moet gelden dat $a \leq 550$. Dus voor € 0,01 en € 100,00 is de formule niet bruikbaar.

$0{,}50 \leq p \leq 5$ zijn bijvoorbeeld wel bruikbare prijzen per kg voor de tomaten.

10 a Er geldt $y = \frac{24}{x}$, dus als x bijvoorbeeld twee keer zo groot wordt, wordt y twee keer zo klein.

b $y = \frac{24}{x} = 24 \cdot x^{-1}$, dus y is recht evenredig met x^{-1}.

c $\frac{24}{x} = 10$ geeft $x = \frac{24}{10} = 2{,}4$.

Voer in: Y1=24/X en Y2=10
Venster bijvoorbeeld: [0,10] × [0,10]

Met de grafiek vind je de oplossing: $0 < x \leq 2{,}4$.

11 a $f(x) = 3 \cdot (x-1)^{-\frac{1}{2}} + 5$

$$\begin{aligned} y &= x^{-\frac{1}{2}} \\ y &= (x-1)^{-\frac{1}{2}} \\ y &= 3(x-1)^{-\frac{1}{2}} \\ y &= 3(x-1)^{-\frac{1}{2}} + 5 \end{aligned}$$

een translatie van 1 ten opzichte van de y-as

een vermenigvuldiging met 3 ten opzichte van de x-as

een translatie van 5 ten opzichte van de x-as

b Onder het wortelteken moet gelden: $x - 1 \geq 0$. Dat geeft $x \geq 1$.
$x = 1$ valt af. De noemer is voor $x = 1$ gelijk aan nul. Dat mag niet.

Het domein is daarom $D_f = \langle 1, \rightarrow \rangle$.

Als je goed naar het functievoorschrift kijkt, dan zie je dat voor y altijd de waarde 5 plus $\frac{3}{\sqrt{x-1}}$ wordt gevonden.

Omdat $\frac{3}{\sqrt{x-1}} > 0$ is y altijd groter dan 5.

Dus geldt voor het bereik $B_f = \langle 5, \rightarrow \rangle$.

c Los op: $f(x) = 10$

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{x-1}} + 5 &= 10 \\ \frac{3}{\sqrt{x-1}} &= 5 \\ 5\sqrt{x-1} &= 3 \\ \sqrt{x-1} &= \frac{3}{5} \\ x - 1 &= \frac{9}{25} = 0{,}36 \\ x &= 1{,}36 \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x \geq 1{,}36$.

12 a Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} y &= x^{\frac{1}{2}} \\ y &= (x-3)^{\frac{1}{2}} \\ y &= 2(x-3)^{\frac{1}{2}} \\ y &= 2(x-3)^{\frac{1}{2}} - 5 \end{aligned}$$

een translatie van 3 ten opzichte van de y-as

een vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x-as

een translatie van -5 ten opzichte van de x-as

b Voor $g(x)$:
onder het wortelteken moet gelden: $x \geq 0$.
Dit betekent voor $g(x)$: het domein is $D_g = [0, \rightarrow \rangle$.

Voor elke x is $y \geq 0$; het bereik is dan $B_g = [0, \rightarrow \rangle$.

Voor $f(x)$:
$x - 3 \geq 0$ en dus $x \geq 3$. Het domein is $D_f = [3, \rightarrow\rangle$.

Voor het bereik geldt dat $y \geq -5$, want $2\sqrt{x-3}$ is voor elke $x \geq 3$ ook groter of gelijk aan nul. -5 is daarom het minimum. Dit vind je als je $x = 3$ invult.
Dit betekent voor het bereik $B_f = [-5, \rightarrow\rangle$.

c Los op: $f(x) = 100$

$$\begin{aligned} -5 + 2\sqrt{x-3} &= 100 \\ 2\sqrt{x-3} &= 105 \\ \sqrt{x-3} &= 52{,}5 \\ x - 3 &= 2756{,}25 \\ x &= 2759{,}25 \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x \geq 2759{,}25$.

13 a $f(x) = 100(x-10)^{-2} + 25$ ontstaat uit $y = x^{-2}$ door de volgende transformaties:

$$y = x^{-2}$$

translatie van 10 ten opzichte van de y-as

$$y = (x-10)^{-2}$$

vermenigvuldiging met 100 ten opzichte van de x-as

$$y = 100(x-10)^{-2}$$

translatie van 25 ten opzichte van de x-as

$$y = 100(x-10)^{-2} + 25$$

b Als $x = 10$ ontstaat de situatie dat er door 0 gedeeld zou moeten worden.
Verticale asymptoot $x = 10$.
Met $\lim\limits_{x \downarrow 10} f(x) = \infty$ en $\lim\limits_{x \uparrow 10} f(x) = \infty$.

Vul voor x grote getallen of hele kleine getallen in en y nadert dan de waarde 25.

Horizontale asymptoot $y = 25$.
Met $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 25$ en $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 25$.

c Let op de asymptoten, dat zijn de waarden die x en y juist *niet* kunnen bereiken. En $f(x) > 25$, want $\frac{100}{(x-10)^2} > 0$ voor elke x uit het domein.

$D_f = \langle \leftarrow, 10\rangle \cup \langle 10, \rightarrow\rangle$

$B_f = \langle 25, \rightarrow\rangle$

d Los op: $f(x) = 50$

$$\begin{aligned} \frac{100}{(x-10)^2} + 25 &= 50 \\ \frac{100}{(x-10)^2} &= 25 \\ 25(x-10)^2 &= 100 \\ (x-10)^2 &= 4 \\ x - 10 &= 2 \vee x - 10 = -2 \\ x &= 12 \vee x = 8 \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x \leq 8 \vee x \geq 12$.

14 a Een maximum of een minimum komt voor bij parabolen. Bij parabolen past de formule $y = a(x-p)^2 + q$. In deze formule geldt $(x-p)^2 \geq 0$ voor elke x. Daarom is q in deze formule het minimum (als $a > 0$) of het maximum (als $a < 0$). $(x-p)^c$ zal ook altijd groter of gelijk aan nul zijn als c een even exponent is. Daarom zal bij een even c de functie h ook d als minimum of als maximum hebben. De grafiek van deze functie met $c \neq 2$ is geen parabool (al lijkt het daarop).

b Voor de waarde van $h(x) = a(x - b)^c + d$ met c een even geheel positief getal geldt dat $h(x) \geq d$ of $h(x) \geq d$ is. Vergelijk dit met dal- en bergparabolen. Ook hier vind je dan dat voor $a < 0$ de functie h het maximum d heeft en als $a > 0$ het minimum d heeft.

c Je hebt al eerder gezien dat als de grafiek te schrijven is als een translatie van een standaardgrafiek met top (0,0), de top ook getransleerd wordt. In bovenstaande situatie wordt de top b ten opzichte van de y-as getransleerd (in de richting van de x-as) en d stappen ten opzichte van de x-as getransleerd (in de richting van de y-as). De top (0,0) krijgt dan de coördinaten (b,d).

15 a Deze machtsfunctie heeft de vorm $Z = c \cdot m^p$, waarin c en p nog te berekenen zijn.

Je hebt daartoe genoeg aan de gegevens van twee diersoorten, bijvoorbeeld:

- Paard: $Z = 85{,}4$ en $m = 605{,}0$ geeft: $85{,}4 = c \cdot 605{,}0^p$.
- Muis: $Z = 0{,}19$ en $m = 0{,}20$ geeft: $0{,}19 = c \cdot 0{,}20^p$.

Met de balansmethode vind je dan: $\frac{85{,}4}{0{,}19} = \frac{605{,}0^p}{0{,}20^p}$ en dus $449{,}47 \approx 3025^p$. Zo'n exponentiële vergelijking los je met de GR of m.b.v. logaritmen op: $p \approx 0{,}76$. En nu vind je door invullen ook $c \approx 0{,}66$. Het resultaat komt dicht bij de door Kleiber gevonden formule $Z = 0{,}7 \cdot m^{0{,}75}$.

b Rat: $Z = 0{,}75$ en $m = 1{,}10$ uit de tabel halen en invullen in $Z = c \cdot m^p$ geeft: $0{,}75 = c \cdot 1{,}10^p$.

Mens: $Z = 18{,}0$ en $m = 76{,}1$ uit de tabel halen en invullen geeft: $18{,}0 = c \cdot 76{,}1^p$.

Dit geeft: $24 \approx 69{,}18^p$ en dus $p \approx 0{,}75$. Hieruit vind je $c \approx 0{,}70$.

c $Z = 0{,}70 \cdot 1000^{0{,}75} \approx 124{,}5$ L.

16 a $P = c \cdot G^p$

$3{,}02 = c \cdot 1000^p$ en $5{,}08 = c \cdot 2000^p$

$\frac{5{,}08}{3{,}02} = 2^p$

Deze vergelijking kun je met behulp van de grafische rekenmachine oplossen. Je vindt $p \approx 0{,}75$.

$c \approx \frac{3{,}02}{1000^{0{,}75}} \approx 0{,}017$

Dus $P = 0{,}017 \cdot G^{0{,}75}$

b $P = 0{,}017 \cdot 70000^{0{,}75} \approx 73{,}16$ joule/minuut.

c Die wordt $2^{0{,}75} \approx 1{,}68$ keer zo groot.

17 a Voer in de grafische rekenmachine Y1=2X^(1/4) in, met het standaardvenster in en lees de antwoorden af:

D = [0, →⟩ en B = [0, →⟩.

b Er is een minimum van 0 voor $x = 0$.

c Er is geen asymptoot.

d $2x^{\frac{1}{4}} = 10$ geeft $x^{\frac{1}{4}} = 5$ en dus $x = 625$.

Uit de grafiek lees je af: $0 \leq x \leq 625$.

18 $f(x) = \text{-}2 + 15(x+2)^{\text{-}2}$. Ga nu uit van $y = x^{\text{-}2}$ en werk naar de uitdrukking van $f(x)$ toe.

$$\begin{aligned} y &= x^{-2} \\ y &= (x+2)^{-2} \\ y &= 15(x+2)^{-2} \\ f(x) &= -2 + 15(x+2)^{-2} \end{aligned}$$

Een translatie ten opzichte van de y-as met -2

Een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 15

19 a $(x+4)^4 = 255$ geeft $x = \text{-}4 + \sqrt[4]{255} \vee x = \text{-}4 - \sqrt[4]{255}$

b $10 - 2\sqrt{x-4} = 6$ geeft: $\sqrt{x-4} = 2$ en dus $x = 2^2 + 4 = 8$.

Voer in de grafische rekenmachine in Y1=10-2sqrt(X-4) en Y2=6 op het standaardscherm.

Oplossing ongelijkheid: $4 \leq x < 8$.

c $\sqrt[4]{x} = 20$ geeft $x = 20^4$. Oplossing ongelijkheid: $0 \leq x < 160000$.

Voer in de grafische rekenmachine in Y1=X^(1/4) en Y2=20 met venster

$[0{,}200000] \times [0{,}25]$.

d $2(x+1)^3 = 100$ geeft $(x+1)^3 = 50$ en dus $x = -1 + \sqrt[3]{50}$.

Voer in de grafische rekenmachine in Y1=2(X+1)^3 en Y2=20 met venster $[0{,}5] \times [0{,}25]$.

De oplossing van de ongelijkheid is $x > -1 + \sqrt[3]{50}$.

e $5 + 2\sqrt{x-3} = 20$ geeft $\sqrt{x-3} = 7{,}5$ en dus $x = 59{,}25$.

Voer in de grafische rekenmachine in Y1=5+2sqrt(X-3) en Y2=20 met venster $[0{,}80] \times [0{,}25]$. De oplossing van de ongelijkheid is $3 \leq x < 59{,}25$.

7.3 Kwadratische functies als machtsfuncties

V1 a $x = \sqrt{20}$ en $x = -\sqrt{20}$.

b Geen (reële) oplossingen.

c Alle reële getallen voldoen aan deze ongelijkheid.

d Nee, zie vraag b. Er kunnen maximaal twee oplossingen zijn.

e Dit is een goede oefening. Maak een overzicht in de vorm van een 'mindmap.'

1 a Oplossing:

$y = x^2$

een translatie van 4 ten opzichte van de y-as

$y = (x-4)^2$

een vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x-as

$y = \frac{1}{2}(x-4)^2$

een translatie van -4 ten opzichte van de x-as

$y = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 4$

b Bij een kwadratische functie mag je alle waarden voor x invullen. Dus $D_f = \mathbb{R}$.

De coördinaten van de top zijn $(4, -4)$.

De grafiek is een dalparabool en het bereik is dus $B_f = [-4, \rightarrow\rangle$.

c Zie b. De grafiek is een dalparabool en er is dus een minimum. Het getal waarmee het kwadraat wordt vermenigvuldigd is $\frac{1}{2}$ en dit is positief.

d Los op: $f(x) = 100$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(x-4)^4 - 4 &= 100\\ \tfrac{1}{2}(x-4)^2 &= 104\\ (x-4)^2 &= 208\\ x-4 &= \sqrt{208} \vee x-4 = -\sqrt{208}\\ x &= \sqrt{208}+4 \vee x = -\sqrt{208}+4\end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $4 - \sqrt{208} < x < 4 + \sqrt{208}$.

2 $f(x) = (x-2)^2 + 1$

$g(x) = -x^2 + 1$

$h(x) = a(x-1{,}5)^2 + 3$ en de grafiek van h gaat door het punt (4,0), dus $a \cdot 2{,}5^2 + 3 = 0$. Dat geeft $a = -0{,}48$. Dus $h(x) = -0{,}48(x-1{,}5)^2 + 3$.

3 a Ga uit van:

$y = x^2$

een translatie van -1 ten opzichte van de y-as

$y = (x+1)^2$

een vermenigvuldiging met 2 ten opzichte van de x-as

$y = 2(x+1)^2$

een translatie van -3 ten opzichte van de x-as

$y = 2(x+1)^2 - 3$

b $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$

In deze functie mag je alle getallen voor x gebruiken. Dus: $D_f = \mathbb{R}$.

Het is echter wel een dalparabool met top $(-1, -3)$. Voor het bereik geldt dus $B_f = [-3, \rightarrow\rangle$.

c De uiterste waarde kun je bij de top vinden. Bereken dus $f(-1) = 2(-1+1)^2 - 3 = -3$.

De uiterste waarde is dus -3.

d Los op: $f(x) = 100$

$$\begin{aligned} 2(x+1)^2 - 3 &= 100 \\ 2(x+1)^2 &= 103 \\ (x+1)^2 &= 51{,}5 \\ x+1 &= \sqrt{51{,}5} \vee x+1 = -\sqrt{51{,}5} \\ x &= \sqrt{51{,}5} - 1 \approx 6{,}2 \vee x = -\sqrt{51{,}5} - 1 \approx -8{,}2 \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $-8{,}2 < x < 6{,}2$.

4 a Als a positief is, dan is het een dalparabool en heeft de grafiek een minimum.

Als a negatief is, dan is het een bergparabool en heeft de grafiek een maximum.

b De x-coördinaat van de top is gelijk aan p, want de uitdrukking $a(x-p)^2$ is minimaal of maximaal als $x = p$, en dit heeft dan als uitkomst 0.

De y-coördinaat is dan gelijk aan $0 + q = q$.

c De coördinaten van de top van $f(x) = a(x-p)^2 + q$ zijn gelijk aan (p,q).
$x = p$, want de top zit bij de x-waarde waarbij het kwadraat 0 wordt.

d Het domein is $D_f = \mathbb{R}$.

Maak voor het opstellen van bereik even onderscheid in $a > 0$ en $a < 0$.

$a > 0$, het is een dalparabool.

Indien $x = p$ dan geldt dat $a(x-p)^2$ de waarde 0 aanneemt. Het houdt in dat q de laagste y-waarde is.

Voor het bereik geldt dan: $B_f = [q, \rightarrow\rangle$.

$a < 0$, het is een bergparabool.

Indien $x = p$ dan geldt dat $a(x-p)^2$ de waarde 0 aanneemt. Het houdt in dat q de hoogste y-waarde is.

Voor het bereik geldt dan: $B_f = \langle\leftarrow, q]$.

5 a $x = 10 \vee x = -10$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &= 64 \\ x-4 &= 8 \vee x-4 = -8 \\ x &= 12 \vee x = -4 \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} -3(x+1)^2 &= -75 \\ (x+1)^2 &= 25 \\ x+1 &= 5 \vee x+1 = -5 \\ x &= 4 \vee x = -6 \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} 3(x+2)^2 &= 30 \\ (x+2)^2 &= 10 \\ x+2 &= \pm\sqrt{10} \\ x &= -2 - \sqrt{10} \vee x = -2 + \sqrt{10} \end{aligned}$$

e Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 7 &= 0 \\ 2x^2 &= 7 \\ x^2 &= 3{,}5 \\ x &= \sqrt{3{,}5} \vee x = -\sqrt{3{,}5} \end{aligned}$$

6 a Los op: $(x-4)^2 = 10$

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &= 10 \\ x - 4 &= \sqrt{10} \vee x - 4 = -\sqrt{10} \\ x &= \sqrt{10} + 4 \vee x = -\sqrt{10} + 4 \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $4 - \sqrt{10} < x < 4 + \sqrt{10}$.

b Los op: $-2(x+3)^2 + 10 = 4$

$$\begin{aligned} -2(x+3)^2 + 10 &= 4 \\ -2(x+3)^2 &= -6 \\ (x+3)^2 &= 3 \\ x + 3 &= \sqrt{3} \vee x + 3 = -\sqrt{3} \\ x &= -3 - \sqrt{3} \vee x = -3 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x < -3 - \sqrt{3} \vee x > -3 + \sqrt{3}$

c Los op: $3(x-5)^2 - 2 = 10$

$$\begin{aligned} 3(x-5)^2 - 2 &= 10 \\ 3(x-5)^2 &= 12 \\ (x-5)^2 &= 4 \\ x - 5 &= 2 \vee x - 5 = -2 \\ x &= 7 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x \leq 3 \vee x \geq 7$.

7 Ga uit van de standaard kwadratische functie: $f(x) = a(x-p)^2 + q$.

De punten $(-2,0)$ en $(4,0)$ liggen op gelijke hoogte, dus de symmetrieas is $x = 1$.

Dit is dus ook de x-coördinaat van de top.

De top $(1,q)$ invullen geeft: $f(x) = a(x-1)^2 + q$.

$(0,2)$ invullen geeft $a(0-1)^2 + q = 2$ en dus $a + q = 2$

$(4,0)$ invullen geeft $a(4-1)^2 + q = 0$ en dus $9a + q = 0$.

Los dit stelsel op en dan volgt $8a = -2$ en dus $a = -0{,}25$.

Daaruit volgt $q = 2{,}25$.

Het gevraagde voorschrift is $f(x) = -0{,}25(x-1)^2 + 2{,}25$.

8 a Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= (x+8)^2 \\ y &= 2(x+8)^2 \\ f(x) &= 2(x+8)^2 - 8 \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= (x+8)^2 \\ y &= (x+8)^2 - 8 \\ f(x) &= 2\left((x+8)^2 - 8\right) \\ f(x) &= 2(x+8)^2 - 16 \end{aligned}$$

Het veranderen van de volgorde heeft invloed op het nieuwe functievoorschrift.

9 a Aangezien a negatief is, is het een bergparabool. De symmetrie-as is $x = \text{-}4$ en als je $x = \text{-}4$ invult is de uitdrukking $\text{-}2(x+4)^2$ gelijk aan 0. De y-coördinaat is dan 5.

Je hebt het dus over een maximum en de extreme waarde is gelijk aan 5.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{-}2(x+4)^2 + 5 &= \text{-}5 \\ \text{-}2(x+4)^2 &= \text{-}10 \\ (x+4)^2 &= 5 \\ x+4 &= \pm\sqrt{5} \\ x &= \text{-}4 \pm \sqrt{5} \\ x &= \text{-}4 - \sqrt{5} \vee x = \text{-}4 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{-}2(x+4)^2 + 5 &= 5 \\ (x+4)^2 &= 0 \\ x &= \text{-}4 \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{-}2(x+4)^2 + 5 &= \text{-}10 \\ \text{-}2(x+4)^2 &= \text{-}15 \\ (x+4)^2 &= 7{,}5 \\ x+4 &= \pm\sqrt{7{,}5} \\ x &= \text{-}4 \pm \sqrt{7{,}5} \\ x &= \text{-}4 - \sqrt{7{,}5} \vee x = \text{-}4 + \sqrt{7{,}5} \end{aligned}$$

e Los op: $f(x) = \text{-}3$

$$\begin{aligned} \text{-}2(x+4)^2 + 5 &= \text{-}3 \\ \text{-}2(x+4)^2 &= \text{-}8 \\ (x+4)^2 &= 4 \\ x+4 &= \pm 2 \\ x &= \text{-}2 \vee x = \text{-}6 \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $\text{-}6 < x < \text{-}2$.

f Los op: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} -2(x+4)^2+5 &= 0 \\ -2(x+4)^2 &= -5 \\ (x+4)^2 &= 2{,}5 \\ x+4 &= \pm\sqrt{2{,}5} \\ x &= -4 \pm \sqrt{2{,}5} \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x < -4 - \sqrt{2{,}5} \vee = "" \ x = "" > -4 + \sqrt{2{,}5}$.

g Los op: $f(x) = 20$

$$\begin{aligned} -2(x+4)^2+5 &= 20 \\ -2(x+4)^2 &= 15 \\ (x+4)^2 &= -7{,}5 \end{aligned}$$

Je kunt geen wortel nemen uit een negatief getal, dus er zijn geen oplossingen van deze vergelijking. Met de GR vind je: $f(x) < 20$ voor alle x.

10 a Bereken eerst de coördinaten van de top.

De symmetrieas is $x = -2$ en de top is dan $(-2,10)$.

Aangezien $a < 0$ geldt dat de grafiek van deze functie een bergparabool is. Daarom is de grafiek dus aan de linkerkant van de top stijgend.

Dus stijgend als $x < -2$ en dalend als $x > -2$.

b De functie is, zoals in a al aangegeven, stijgend als $x < -2$, maar niet in de top als $x = -2$. Alleen in dat punt is de grafiek niet stijgend of dalend. Je zou kunnen zeggen dat de grafiek alleen in dat punt horizontaal loopt.

c Los op: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} -3(x+2)^2+10 &= 0 \\ -3(x+2)^2 &= -10 \\ (x+2)^2 &= \tfrac{10}{3} \\ x+2 &= \sqrt{\tfrac{10}{3}} \vee x+2 = -\sqrt{\tfrac{10}{3}} \\ x &= \sqrt{\tfrac{10}{3}} - 2 \vee x = -\sqrt{\tfrac{10}{3}} - 2 \end{aligned}$$

11 a Los op: $5(x-1)^2 - 9 = 4$

$$\begin{aligned} 5(x-1)^2 - 9 &= 4 \\ 5(x-1)^2 &= 13 \\ (x-1)^2 &= \tfrac{13}{5} = 2{,}6 \\ x-1 &= \pm\sqrt{2{,}6} \\ x &= 1 \pm \sqrt{2{,}6} \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x < 1 - \sqrt{2{,}6} \vee x > 1 + \sqrt{2{,}6}$.

b Los op: $5 - x^2 = -21$

$$\begin{aligned} 5 - x^2 &= -21 \\ x^2 &= 26 \\ x &= \pm\sqrt{26} \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $-\sqrt{26} < x < \sqrt{26}$.

c Los op: $3(x-1)^2 = 40$

$$\begin{aligned} 3(x-1)^2 &= 40 \\ (x-1)^2 &= \tfrac{40}{3} \\ x-1 &= \pm\sqrt{\tfrac{40}{3}} \\ x &= 1 \pm \sqrt{\tfrac{40}{3}} \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $1 - \sqrt{\frac{40}{3}} < x < 1 + \sqrt{\frac{40}{3}}$.

d Los op: $-4(x+80)^2 - 40 = -100$

$$\begin{aligned} -4(x+80)^2 - 40 &= -100 \\ -4(x+80)^2 &= -60 \\ (x+80)^2 &= 15 \\ x+80 &= \pm\sqrt{15} \\ x &= -80 \pm \sqrt{15} \end{aligned}$$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x < -80 - \sqrt{15} \vee x > -80 + \sqrt{15}$.

12 a De symmetrieas is de lijn $x = 5$. De y-waarde die je dan uitrekent, heeft de waarde c. Dat is dus ook de extreme waarde die je zoekt.

b De grafiek van functie $g(x) = -\frac{1}{4}(x-5)^2$ is een bergparabool met de top op de x-as. Om twee snijpunten te krijgen, moet $c > 0$ zijn; dan ligt de top boven de x-as.

c Als $c = 1$ dan is er precies 1 snijpunt.
Bij $c > 1$ zijn er twee snijpunten en als $c < 1$ helemaal geen.

d Top $(5,c)$ op $y = 2x - 1$ geeft: $c = 5 \cdot 2 - 1 = 9$.

13 Het bijpassende functievoorschrift is $f(x) = a(x-4)^2 + b$.
$f(0) = 10$ geeft $16a + b = 10$.
$f(2) = 5$ geeft $4a + b = 5$.

Dit betekent: $a = \frac{5}{12}$ en $b = 3\frac{1}{3}$.

Dus: $f(x) = \frac{5}{12}(x-4)^2 + 3\frac{1}{3}$, zodat $f(5) = 3\frac{3}{4}$.

14 a Luchtweerstand en draaiing van de bal zijn van invloed op de baan.

b Luchtweerstand en draaiing van de bal zijn van invloed op de baan.

c Ga uit van de functie $h = a(x-10)^2 + 1{,}5$.
Vul het punt $(0; 0{,}5)$ in:

$$\begin{aligned} 0{,}5 &= a(-10)^2 + 1{,}5 \\ 0{,}5 &= 100a + 1{,}5 \\ a &= -0{,}01 \end{aligned}$$

d Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} -0{,}01(x-10)^2 + 1{,}5 &= 0 \\ (x-10)^2 &= 150 \\ x &= 10 \pm \sqrt{150} \end{aligned}$$

Omdat $10 + \sqrt{150} < 24$ is de bal in.

15 a Top (5,4) geeft: $h(x) = a(x-5)^2 + 4$.

Grafiek door (0; 2,5), invullen van dit punt geeft: $25a + 4 = 2{,}5$ en dus $a = -0{,}06$.

Conclusie: $h(x) = -0{,}06(x-5)^2 + 4$.

b Los op: $h(x) = 3{,}05$

$$\begin{aligned} -0{,}06(x-5)^2 + 4 &= 3{,}05 \\ -0{,}06(x-5)^2 &= -0{,}95 \\ (x-5)^2 &= \tfrac{95}{6} \\ x - 5 &= \pm\sqrt{\tfrac{95}{6}} \\ x &= 5 \pm \sqrt{\tfrac{95}{6}} \approx 5 \pm 3{,}98 \end{aligned}$$

Dit geeft $x \approx 1{,}02 \vee x \approx 8{,}98$. Omdat je weet dat het een driepunter is, vervalt de eerste oplossing. De speler staat ongeveer 8,98 meter voor de basket.

16 a De symmetrie-as vind je bij $x = 0$. Dit invullen in $f(x)$ geeft $y = -2$.

De coördinaten van de top zijn dus $(0, -2)$. Het betreft een bergparabool.

b De symmetrie-as vind je bij $x = 4$. Dit invullen in $f(x)$ geeft $y = 8$.

De top is dus (4,8). Het betreft een dalparabool want $a > 0$.

c De symmetrie-as vind je bij $x = -5$. Dit invullen in $f(x)$ geeft $y = 0$.

De top is dus (-5,0). Het betreft een bergparabool want $a < 0$.

17 a $3(x-5)^2 - 5 = -2$ geeft $(x-5)^2 = 1$ en dus $x = 4 \vee x = 6$.

b $3(x-5)^2 - 5 = -5$ geeft $(x-5)^2 = 0$ en dus $x = 5$.

c $-2(x+4)^2 + 3 = 1$ geeft $(x+4)^2 = 1$ en dus $x = -5 \vee x = -3$.

d $2(x+2)^2 = 10$ geeft $(x+2)^2 = 5$ en dus $x = -2 - \sqrt{5} \vee x = -2 + \sqrt{5}$.

Voer in de grafische rekenmachine in Y1=2(X+2)^2 en Y2=10 en los de ongelijkheid op.

De oplossing van de ongelijkheid is $x < -2 - \sqrt{5} \vee x > -2 + \sqrt{5}$.

e $-(x+4)^2 = -3$ geeft $(x+4)^2 = 3$ en dus $x = -4 - \sqrt{3} \vee x = -4 + \sqrt{3}$.

Voer in de grafische rekenmachine in Y1=-(X+4)^2 en Y2=-3 en los de ongelijkheid op.

De oplossing van de ongelijkheid is $x < -4 - \sqrt{3} \vee x > -4 + \sqrt{3}$.

f $(x+4)^2 - 5 = -3$ geeft $(x+4)^2 = 2$ en dus $x = -4 - \sqrt{2} \vee x = -4 + \sqrt{2}$.

Voer in de grafische rekenmachine in Y1=(X+4)^2-5 en Y2=-3.

De oplossing van de ongelijkheid is $-4 - \sqrt{2} < x < -4 + \sqrt{2}$.

18 De punten (10,0) en (20,0) liggen op gelijke hoogte dus vind je de symmetrie-as en de top bij $x = 15$. Ga uit van de standaardformule $f(x) = a(x-p)^2 + q$. Je kunt dus meteen $p = 15$ invullen: $f(x) = a(x-15)^2 + q$.

Gebruik nu de twee gegeven punten:

(0,30) invullen: $225a + q = 30$

(20,0) invullen: $25a + q = 0$

Dit levert op: $200a = 30$ en dus $a = 0{,}15$, zodat $q = -3{,}75$.

Conclusie: $f(x) = 0{,}15(x-15)^2 - 3{,}75$.

7.4 De abc-formule

V1 a $g(x) = 2(x+1)^2 + 7 = 2\left(x^2 + 2x + 1\right) + 7 = 2x^2 + 4x + 9$

b De grafieken (of tabellen) van beide functievoorschriften vergelijken.

c Dalparabool als $a > 0$, bergparabool als $a < 0$.

d De vorm $g(x) = 2(x+1)^2 + 7$ ontstaat uit de standaardfunctie $y = x^2$, door deze met -1 ten opzichte van de y-as te verschuiven.

Daarna met 2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as.

Ten slotte met 7 ten opzichte van de x-as verschuiven.

De top (0,0) van $y = x^2$ wordt dus verschoven naar (-1,7).

e Herleid f naar $f(x) = (x+3)^2 - 17$.

De nulpunten en de top kun je zo makkelijk achterhalen:

$(x+3)^2 - 17 = 0$ geeft $x = \pm\sqrt{17} - 3$.

De top is (-3,-17).

1 a $f(x) = x^2 - 6x + 1 = (x-3)^2 - 9 + 1 = (x-3)^2 - 8$

b $f(x) = (x-3)^2 - 8$ is een transformatie van $y = x^2$.

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= (x-3)^2 \\ y &= (x-3)^2 - 8 \end{aligned}$$

een translatie van 3 ten opzichte van de y-as

een translatie van -8 ten opzichte van de x-as

Top: (3,-8).

c Oplossing:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 - 8 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 8 \\ x - 3 &= \pm\sqrt{8} \\ x &= -\sqrt{8} + 3 \vee x = \sqrt{8} + 3 \end{aligned}$$

In twee decimalen nauwkeurig: $x \approx 0{,}17$ en $x \approx 5{,}83$.

2 a $f(x) = x^2 + 12x = (x+6)^2 - 36$

b $g(x) = x^2 - 8x + 15 = (x-4)^2 - 16 + 15 = (x-4)^2 - 1$

c $h(x) = 2x^2 - 12x - 12 = 2\left(x^2 - 6x - 6\right) = 2\left((x-3)^2 - 15\right) = 2(x-3)^2 - 30$

d $k(x) = -x^2 + 4x + 3 = -\left(x^2 - 4x - 3\right) = -\left((x-2)^2 - 7\right) = -(x-2)^2 + 7$

3 a $3x^2 + 17x = 45$ wordt $3x^2 + 17x - 45 = 0$
$a = 3$, $b = 17$ en $c = -45$

abc-formule: $x = \frac{-17+\sqrt{17^2-4 \cdot 3 \cdot -45}}{2 \cdot 3} \vee x = \frac{-17-\sqrt{17^2-4 \cdot 3 \cdot -45}}{2 \cdot 3}$.
Dit geeft $x \approx 1{,}97 \vee x \approx -7{,}63$.

b Je vindt nu $x = \frac{6+\sqrt{32}}{2} \vee x = \frac{6-\sqrt{32}}{2}$.

Ga na, dat dit hetzelfde is als $x = 3 + \sqrt{8} \vee x = 3 - \sqrt{8}$.

c Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 17x &= 45 \\ x^2 + \tfrac{17}{3}x &= 15 \\ \left(x + \tfrac{17}{6}\right)^2 - \left(\tfrac{17}{6}\right)^2 &= 15 \\ x &= -\tfrac{17}{6} - \sqrt{\left(\tfrac{17}{6}\right)^2 + 15} \vee -\tfrac{17}{6} + \sqrt{\left(\tfrac{17}{6}\right)^2 + 15} \end{aligned}$$

d Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{c}{a} = \tfrac{b^2-4ac}{4a^2} \\ x + \tfrac{b}{2a} &= -\sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}} \vee x + \tfrac{b}{2a} = \sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}} \\ x &= -\tfrac{b}{2a} - \sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}} \vee x = -\tfrac{b}{2a} + \sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}} \\ x &= \tfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \tfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

4 a Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 12x &= 30 \\ (x-6)^2 - 36 &= 30 \\ (x-6)^2 &= 66 \\ x &= 6 - \sqrt{66} \vee x = 6 + \sqrt{66} \end{aligned}$$

b Herleid eerst op 0.

Je hebt dan $x^2 - 12x - 30 = 0$.

Gebruik $a = 1$, $b = -12$ en $c = -30$.

De discriminant D is $(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 264$.

$x = \frac{12-\sqrt{264}}{2} \vee x = \frac{12+\sqrt{264}}{2}$

$x = \frac{12-2\sqrt{66}}{2} \vee x = \frac{12+2\sqrt{66}}{2} par$

$x = 6 - \sqrt{66} \vee x = 6 + \sqrt{66} par$

c Voer in: Y1=X^2-12X en Y2=30
Venster bijvoorbeeld: $[0,20] \times [-50,50]$

De oplossing is: $6 - \sqrt{66} \leq x \leq 6 + \sqrt{66}$.

5 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 8 &= 0 \\ x &= \tfrac{-5 \pm \sqrt{121}}{6} \\ x &= -2\tfrac{2}{3} \vee x = 1 \end{aligned}$$

b Voer in: Y1=3X^2+6x en Y2=X+8

Met de grafiek vind je de oplossing: $-2\frac{2}{3} < x < 1$

6 a abc-formule:

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 13$

$x = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

b abc-formule:
$D = 5^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-14) = -199$
Geen oplossingen.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 12x + 16 &= 0 \\ x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ (x-2)(x-4) &= 0 \\ x &= 2 \vee x = 4 \end{aligned}$$

$2 < x < 4$

d Eerst op 0 herleiden geeft $-5x^2 + x - 10 = 0$.

abc-formule:
$D = -199$
Geen oplossingen.

e Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 7x - 8 &= 0 \\ (x-8)(x+1) &= 0 \\ x &= 8 \vee x = -1 \\ x &< -1 \vee x > 8 \end{aligned}$$

7 a $f(x) = 2x^2 - 6x + 2 = 2(x-1{,}5)^2 - 2{,}5$

Top $(1{,}5; -2{,}5)$.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x + 2 &= 0 \\ 2(x-1{,}5)^2 - 2{,}5 &= 0 \\ (x-1{,}5)^2 &= 1{,}25 \\ x &= 1{,}5 - \sqrt{1{,}25} \vee x = 1{,}5 + \sqrt{1{,}25} \\ x &\approx 0{,}38 \vee x \approx 2{,}62 \end{aligned}$$

b $a = 2, b = 6$ en $c = 2$.

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 20$

c Ja, dat kun je zien. Je hebt dan $2x^2 - 6x + 2 = 0$ en hiervan had je bij b al de discriminant berekend. $D > 0$, dus twee nulpunten.

d $2x^2 - 6x + 2 = 0$ geeft $x = \frac{6-\sqrt{20}}{4} \vee x = \frac{6+\sqrt{20}}{4}$.

Pas de wortelvormen nog aan en je vindt hetzelfde antwoord als bij a.

Je kunt ook de oplossingen benaderen met de grafische rekenmachine en controleren of jouw antwoorden bij a en c hetzelfde zijn. Dit is het geval.

e Midden tussen beide nulpunten bevindt zich de symmetrieas: $x = 1{,}5$.

De nulpunten $x = \frac{6-\sqrt{20}}{4} \vee x = \frac{6+\sqrt{20}}{4}$ zijn te schrijven als $x = 1{,}5 - 0{,}25\sqrt{20} \vee x = 1{,}5 + 0{,}25\sqrt{20}$. Je kunt nu zien dat $x = 1{,}5$ de symmetrieas is. De x van de top is daarom 1,5.

Omdat $f(1{,}5) = -2{,}5$, vind je dezelfde top als bij a.

8 a $f_2(x) = x^2 + 2x + 3$ levert met kwadraat afsplitsen $f(x) = (x+1)^2 + 2$.

Dus top bij $x = -1$ en dit invullen geeft $y = 2$.

Top $(-1,2)$.

b $f_1(x) = x^2 + x + 3$ levert met kwadraat afsplitsen $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{3}{4}$.

De symmetrieas is dus bij $x = -\frac{1}{2}$ en dit invullen geeft $y = 2\frac{3}{4}$.

Top $\left(-\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}\right)$

c De discriminant van deze vergelijking is $D = k^2 - 12$.

$D = 0$ geeft $k^2 - 12 = 0$ en dus $k = -\sqrt{12} \vee k = \sqrt{12}$.

d Top $\left(-\frac{1}{2}k, -\frac{1}{4}k^2 + 3\right)$.

Dit punt ligt op $y = 1$ als $-\frac{1}{4}k^2 + 3 = 1$.

Dus $k = -\sqrt{8} \vee k = \sqrt{8}$.

e Voor de top geldt $x = -\frac{1}{2}k$, dus $k = -2x$.

Dit geeft $y = -\frac{1}{4}(-2x)^2 + 3 = -x^2 + 3$.

Dus de top doorloopt de parabool $y = -x^2 + 3$.

9 a Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= 0 \\ (x+1)(x-5) &= 0 \\ x &= -1 \vee x = 5 \end{aligned}$$

De symmetrieas ligt precies in het midden dus bij $x = 2$. Dit invullen geeft de top $(2,1)$.

b $f_0(x) = -4x + 5$ is het voorschrift van een lineaire functie.

c Gebruik het feit dat $D = 0$ in deze situatie.

$a = p$, $b = -4$ en $c = 5$.

$D = (-4)^2 - 4 \cdot p \cdot 5 = 0$ en $16 - 20p = 0$ levert $p = 0{,}8$.

d $f_p(x) = px^2 - 4x + 5 = p\left(x^2 - \frac{4}{p}x + \frac{5}{p}\right) = p\left(\left(x - \frac{2}{p}\right)^2 - \frac{4}{p^2} + \frac{5}{p}\right) = p\left(x - \frac{2}{p}\right)^2 - \frac{4}{p} + 5$

De top is dus $\left(\frac{2}{p}, -\frac{4}{p} + 5\right)$.

Voor deze top geldt $x = \frac{2}{p}$, dus $p = \frac{2}{x}$.

En daarom is $y = -\frac{4}{\frac{2}{x}} + 5 = -2x + 5$.

10 a $f(x) = x^2 - 2x - 8$ levert met kwadraat afsplitsen $f(x) = (x-1)^2 - 1 - 8$.

$f(x) = (x-1)^2 - 9$
Top: $(1,9)$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - 9 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 9 \\ x &= 1 - \sqrt{9} \vee x = 1 + \sqrt{9} \\ x &= -2 \vee x = 4 \end{aligned}$$

c $x^2 - 2x - 8 = 0$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -8 = 36$

$x = \frac{2-\sqrt{36}}{2} \vee x = \frac{2+\sqrt{36}}{2}$

$x = \frac{2-6}{2} \vee x = \frac{2+6}{2}$

$x = -2 \vee x = 4$

d Oplossing:

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x+2)(x-4) = 0$

$x = -2 \vee x = 4$

11 a Oplossing:

$2x^2 - x + 1 = 10 - 3x$

$2x^2 + 2x - 9 = 0$

$x = \frac{-2-\sqrt{76}}{4} \vee x = \frac{-2+\sqrt{76}}{4}$

b Voer in: Y1=2X^2-X+1 en Y2=10-3X
Met de grafiek vind je de oplossing: $x < -2{,}679 \vee x > 1{,}679$

12 a $x^2 - 3x - 13 = 0$

geeft $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -13 = 61$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{61}}{2}$.

b $\frac{1}{3}x^2 + 10x + 1 = 0$

$x^2 + 30x + 3 = 0$

$D = 30^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 888$

$x = \frac{-30 \pm \sqrt{888}}{2}$

c $2x^2 - 6x = 0$

geeft $2x(x-3) = 0$

en $x = 0 \vee x = 3$.

d $2x^2 - 12x + 18 = 0$

geeft $x^2 - 6x + 9 = 0$

en $(x-3)^2 = 0$

zodat $x = 3$.

e $x^2 - 5x + 10 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -15$ dan $D < 0$,

geen oplossingen.

13 a $-13x^2 + 10x + 8 = -8x^2 + 3x$ dus $-5x^2 + 7x + 8 = 0$.

$D = 7^2 - 4 \cdot -5 \cdot 8 = 49 + 160 = 209$

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{209}}{-10}$ geeft $x \approx -0{,}75 \vee x \approx 2{,}15$

Voer in: Y1=-13X^2+10X+8 en Y2=-8X^2+3X
Venster bijvoorbeeld: $[-5{,}5] \times [-80{,}20]$.
Met de grafiek vind je de oplossing: $-0{,}74 \leq x \leq 2{,}14$

b $-2x^2 - x = -6$ dus $-2x^2 - x + 6 = 0$.

$D = (-1)^2 - 4 \cdot -2 \cdot 6 = 1 + 48 = 49$

$x = \frac{1-\sqrt{49}}{2 \cdot -2} \lor x = \frac{1+\sqrt{49}}{2 \cdot -2}$

$x = \frac{1-7}{-4} \lor x = \frac{1+7}{-4}$

$x = -2 \lor x = 1{,}5$

Met de grafiek vind je de oplossing: $x < -2 \lor x > 1{,}5$

c Los op:

$$\begin{aligned} 0{,}5x - 4 &= 0{,}25x^2 + 3x - 8 \\ 0{,}25x^2 + 2{,}5x - 4 &= 0 \\ x^2 + 10x - 16 &= 0 \\ x &= \frac{-10 \pm \sqrt{164}}{2} \\ x &\approx -11{,}40 \lor x \approx 1{,}40 \end{aligned}$$

Voer in: Y1=X^2+10X-16

Met de grafiek vind je de oplossing: $-11{,}40 < x < 1{,}40$

14 a $f(x) = 2x^2 + 6x + 4$

$f(x) = 2\left(x^2 + 3x + 2\right)$

Met kwadraat afsplitsen:

$f(x) = 2\left(\left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)$

$f(x) = 2\left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$

Top: $\left(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Nulpunten:

$$\begin{aligned} 2\left(x + 1\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} &= 0 \\ 2\left(x + 1\tfrac{1}{2}\right)^2 &= \tfrac{1}{2} \\ \left(x + 1\tfrac{1}{2}\right)^2 &= \tfrac{1}{4} \\ x + 1\tfrac{1}{2} &= \sqrt{\tfrac{1}{4}} \lor x + 1\tfrac{1}{2} = -\sqrt{\tfrac{1}{4}} \\ x + 1\tfrac{1}{2} &= \tfrac{1}{2} \lor x + 1\tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2} \\ x &= -1 \lor x = -2 \end{aligned}$$

b $D = 36 - 8p^2 = 0$ geeft $p = \pm\sqrt{4{,}5}$.

Verder is de grafiek van f een rechte lijn als $p = 0$.

Ook dan is er één punt met de x-as gemeen.

c Dit geldt alleen als $D > 0$. Los de ongelijkheid $D = 36 - 8p^2 > 0$ op.

Dit geeft $p^2 < 4{,}5$.

Let op: $p = 0$ voldoet niet, want dan staat er $f(x) = 6x$ en de gafiek van deze functie snijdt de assen alleen in (0,0).

Je krijgt dus: $-\sqrt{4{,}5} < p < 0 \lor 0 < p < \sqrt{4{,}5}$

d $f(x) = g(x)$

$$\begin{aligned} px^2 + 6x + 2p &= 6 - x \\ px^2 + 7x + 2p - 6 &= 0 \end{aligned}$$

$a = p$, $b = 7$ en $c = 2p - 6$

$D = 0$ geeft $8p^2 - 24p - 49 = 0$ en dit geeft:

$p = \frac{24-\sqrt{2144}}{16} \vee p = \frac{24+\sqrt{2144}}{16}$

Er is ook één snijpunt als $p = 0$, want dan is $f(x)$ lineair met een andere helling dan die van $g(x)$.

15 Kwadraat afsplitsen geeft $f_p(x) = \frac{1}{8}\left(x^2 + 8px - 8\right) = \frac{1}{8}\left((x+4p)^2 - 16p^2 - 8\right) = \frac{1}{8}(x+4p)^2 - 2p^2 - 1$.

Top: $\left(-4p, -2p^2 - 1\right)$ geeft $x = -4p$ en dus $p = -0{,}25x$.

Hieruit volgt $y = -2(-0{,}25x)^2 - 1 = -0{,}125x^2 - 1$.

16 a Stel $x^2 = p$, dan wordt de vergelijking $p^2 - 6p + 4 = 0$.

Door kwadraat afsplitsen (of de abc-formule): $(p-3)^2 = 5$ geeft $p = 3 \pm \sqrt{5}$.

$x^2 = 3 - \sqrt{5}$ geeft $x = \pm\sqrt{3 - \sqrt{5}} \approx \pm 0{,}87$.

$x^2 = 3 + \sqrt{5}$ geeft $x = \pm\sqrt{3 + \sqrt{5}} \approx \pm 2{,}29$.

Er zijn dus vier oplossingen.

b Stel $x^3 = p$, dan wordt de vergelijking $p^2 + 4p - 12 = 0$.

Door ontbinden vind je $(p+6)(p-2) = 0$ en dus $p = 2 \vee p = -6$.

$x^3 = -6$ geeft $x = \sqrt[3]{-6} \approx -1{,}82$.

$x^3 = 2$ geeft $x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$.

c Stel $\sqrt{x} = p$, dan wordt de vergelijking $p^2 - 4p - 5 = 0$.

Door ontbinden vind je $(p-5)(p+1) = 0$ en dus $p = 5 \vee p = -1$.

$\sqrt{x} = -1$ kan niet, want een wortel is nooit negatief.

$\sqrt{x} = 5$ geeft $x = 5^2 = 25$.

Je kunt deze vergelijking ook oplossen door hem te schrijven als $4\sqrt{x} = x - 5$ en dan beide zijden te kwadrateren. Ga na, dat je dan hetzelfde krijgt.

17 a Stel $x^2 = u$, dan wordt de vergelijking: $3u^2 - 2u - 5 = 0$.

Dit geeft $u = \frac{2\pm\sqrt{64}}{6}$ en $u = \frac{10}{6} \vee u = -1$.

Terug naar de variabele x:

$x^2 = -1$ heeft geen reële oplossingen.

$x^2 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ geeft $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$.

b Stel $x^{1,5} = u$. Verder geldt $x \geq 0$.

$2u^2 - 5u - 4 = 0$ geeft met de abc-formule $u = \frac{5\pm\sqrt{57}}{4}$.

Dus $u = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{57} (< 0) \vee u = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{57}$.

De laatste leidt tot $x^{1,5} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{57}$.

Je vindt $x \approx 2{,}14$.

c Herleid tot $u^2 - 40u + 15 = 0$.

Dit geeft: $u = \frac{40\pm\sqrt{1540}}{2}$.

Beide oplossingen zijn positief, dus

$x^{50} = 20 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1540} \;\vee\; x^{50} = 20 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1540}$

$x = \pm\left(20 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1540}\right)^{\frac{1}{50}} \;\vee\; x = \pm\left(20 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1540}\right)^{\frac{1}{50}}$

$x \approx -0{,}98 \;\vee\; x \approx 0{,}98 \vee x \approx -1{,}08 \vee x \approx 1{,}08$

18 a $(x - 5)(x + 3) = 0$

dus $x = 5 \vee x = -3$.

b $x^2 + x + 1 = 0$ met $D = -3$, dus geen oplossingen.

c $x^2 = 9$ dus $x = -3 \vee x = 3$

d $x^2 + 2x - 14 = 0$ geeft $x = \frac{-2\pm\sqrt{60}}{2}$.

Los de ongelijkheid op en voer in de grafische rekenmachine in: Y1=X(X+2) en Y2=14

De oplossing van de ongelijkheid wordt: $\frac{-2-\sqrt{60}}{2} < x < \frac{-2+\sqrt{60}}{2}$.

e $x^2 - x + 7 = 0$ met $D = -27$, geen oplossingen.

Als je de grafieken van $y = x^2 - x + 10$ en $y = 3$ met de grafische rekenmachine tekent, dan zie je dat de ongelijkheid voor alle waarden van x geldt. Deze dalparabool met formule $x^2 - x + 10$ ligt geheel boven de lijn $y = 3$, want de top is $\left(\frac{1}{2}, 9\frac{3}{4}\right)$.

19 a Nulpunten: $p - x^2 = 0$, dus $p = x^2$. Geen oplossingen als $p < 0$.

b $4 - x^2 = x^2 - 3x$

geeft $2x^2 - 3x - 4 = 0$ en

$x = \frac{3\pm\sqrt{41}}{4}$.

De snijpunten zijn $(2{,}35; -1{,}53)$ en $(-0{,}85; 3{,}28)$.

c $g(x) = x^2 - 3x = (x - 1{,}5)^2 - 2{,}25$, dus de coördinaten van de top zijn $(1{,}5; -2{,}25)$.

d $p - x^2 = x^2 - 3x$

geeft $2x^2 - 3x - p = 0$.

$D = 0$ geeft $9 + 8p = 0$

en $p = -\frac{9}{8}$.

7.5 Meer machtsfuncties

V1 a Nulpunt berekenen:

$\frac{2}{x+4} + 5 = 0$, dus $\frac{2}{x+4} = -5$, ofwel $-\frac{2}{5} = x + 4$ en daarmee is $x = -4{,}4$.

Snijpunt met de y-as:

$f(0) = \frac{2}{4} + 5 = 5{,}5$

Horizontale asymptoot:

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 5$

Verticale asymptoot ligt op $x = -4$, want daar is de hyperbolische breuk ongedefinieerd.

b $f(x)$ heeft een verticale asymptoot op $x = -4$, en is verder gedefinieerd voor alle x, dus $D_f = \langle \leftarrow, -4\rangle \cup \langle -4, \rightarrow\rangle$.

Er is een horizontale asymptoot op $y = 5$, en aan weerszijden van $x = -4$ vliegt $f(x)$ omhoog en omlaag, dus $B_f = \langle \leftarrow, 5\rangle \cup \langle 5, \rightarrow\rangle$.

c Je kunt de functie schrijven als $f(x) = 2 \cdot (x+4)^{-1} + 5$.

d Beginpunt berekenen:

Het beginpunt van $y = \sqrt{x}$ ligt op (0,0), en $g(x)$ is -4 in de x-richting en 5 in de y-richting verschoven, dus ligt hij op $(-4,5)$.

De vergelijking $g(x) = 0$ heeft geen oplossingen, dus er is geen nulpunt.

Het snijpunt met de y-as: $g(0) = 2 \cdot \sqrt{4} + 5 = 9$.

e $g(x)$ is gedefinieerd als $x + 4 > 0$, ofwel als $x > -4$, dus $D_g = [-4, \rightarrow\rangle$.

$g(-4) = 5$, en $g(x)$ is stijgend naarmate x hoger wordt, dus $B_g = [5, \rightarrow\rangle$.

f $g(x) = 2(x+4)^{\frac{1}{2}} + 5$

1 a $f(x) = 4 - x^{-2}$

b Dit is geen machtsfunctie.

c $h(x) = 2(x-3)^{-4} + 10$

d $k(x) = \frac{4}{x} - \frac{x}{x} = \frac{4}{x} - 1 = 4x^{-1} - 1$

2 a $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} + 3$

b Dit is geen machtsfunctie.

c $h(x) = -5(2x-8)^{\frac{1}{2}} + 6$

d $k(x) = 4x^{-\frac{1}{2}} + 3$

3 a $g(x) = 200 - \frac{50}{(x-4)^2}$

$g(x) = 200 - 50 \cdot \frac{1}{(x-4)^2}$

$g(x) = -50(x-4)^{-2} + 200$

b Uit $y = x^{-2}$

- translatie van 4 ten opzichte van de y-as;
- vermenigvuldiging met -50 ten opzichte van de x-as;
- ten slotte translatie van 200 ten opzichte van de x-as.

c Voor x mag je het getal 4 niet invullen (want dan deel je door 0).

Verder geldt: $\lim_{x\downarrow 4} f(x) = -\infty$ en $\lim_{x\uparrow 4} f(x) = -\infty$.

Dus $x = 4$ is de verticale asymptoot.

Als je voor x een groot (of een klein) getal invult, dan gaat $\lim_{x\to\infty} \frac{50}{(x-4)^2}$ naar 0.

Dus $y = 200$ is de horizontale asymptoot.

d Voor x mag je geen 4 invullen, alle andere getallen wel.

Dus geldt $D_f = \langle\leftarrow, 4\rangle \cup \langle 4, \rightarrow\rangle$.

Aangezien $y = 200$ de horizontale asymptoot is en de grafiek onder die lijn ligt, is $B_f = \langle\leftarrow, 200\rangle$.

e Snijpunt y-as:

$200 - \frac{50}{(0-4)^2} \approx 196{,}875$

Snijpunt x-as:

$$\begin{aligned} 200 - \frac{50}{(x-4)^2} &= 0 \\ (x-4)^2 &= \frac{50}{200} \\ x &= 4 \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ x &= 3{,}5 \vee x = 4{,}5 \end{aligned}$$

4 a Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{200}{x-40} &= 50 \\ x - 40 &= \frac{200}{50} = 4 \\ x &= 44 \end{aligned}$$

Voer in: Y1=200/(X-40) en Y2=50

De oplossing van de ongelijkheid is $40 < x \leq 44$. Er is namelijk een asymptoot bij $x = 40$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{25}{(2x+6)^2} - 100 &= 200 \\ \frac{25}{(2x+6)^2} &= 300 \\ (2x+6)^2 &= \frac{25}{300} = \frac{1}{12} \\ (2x+6) &= -\sqrt{\frac{1}{12}} \vee 2x+6 = \sqrt{\frac{1}{12}} \\ 2x &= -6 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \vee 2x = -6 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ x &= -3 - \frac{1}{4\sqrt{3}} \vee x = -3 + \frac{1}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Voer in: Y1=25/((2X+6)^2)-100 en Y2=200

Oplossing ongelijkheid: $x < -3 - \frac{1}{4\sqrt{3}} \vee x > -3 + \frac{1}{4\sqrt{3}}$

5 a $g(x) = 200 - 50\sqrt{x+4}$.

Gebruik $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

$g(x) = -50(x+4)^{\frac{1}{2}} + 200$

b Deze kan ontstaan uit $y = x^{0,5}$.

- translatie van -4 ten opzichte van de y-as;
- vermenigvuldiging met -50 ten opzichte van de x-as;
- ten slotte translatie van 200 ten opzichte van de x-as.

c Onder dit wortelteken mag je geen negatieve getallen invullen.

Uit $x + 4 \geq 0$ en dan $x \geq -4$ volgt voor het bereik: $D_f = [-4, \rightarrow\rangle$.

Breng de grafiek in beeld met de grafische rekenmachine.

Bij $x = -4$ vind je het randpunt (-4,200). Dit is de maximale waarde van y.

Dan volgt het bereik: $B_f = \langle\leftarrow, 200]$.

d Snijpunt met de y-as:

vul $x = 0$ in: $g(0) = 200 - 50\sqrt{4} = 100$

Dus snijpunt (0,100).

Snijpunt met de x-as: $200 - 50\sqrt{x+4} = 0$

$$\begin{aligned} 50\sqrt{x+4} &= 200 \\ \sqrt{x+4} &= 4 \\ x+4 &= 16 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Snijpunt (12,0)

6 a Machtsfuncties kun je schrijven in de vorm $y = a(x-p)^r + q$.

Dit lukt bij $f(x)$ maar niet bij $g(x)$.

b Voer in: Y1=2X√(X)+4 en Y2=2X√(X+4)
Venster bijvoorbeeld: $[-1,5] \times [-5,20]$

Los de ongelijkheid op.
Het snijpunt is $x \approx 1{,}905$.

Het domein van f is $[0, \rightarrow\rangle$ en het domein van g is $[-4, \rightarrow\rangle$.

Oplossing ongelijkheid: $0 \leq x < 1{,}91$

7 a Oplossing:

$$\begin{aligned} (x-40)^{\frac{1}{2}} &= \tfrac{1}{4} \\ x - 40 &= \tfrac{1}{16} \\ x &= 40\tfrac{1}{16} \end{aligned}$$

Voer in: Y1=200*√(X-40) en Y2=50

Oplossing ongelijkheid: $x > 40\frac{1}{16}$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 100 - 25(2x+6)^{\frac{1}{2}} &= 20 \\ (2x+6)^{\frac{1}{2}} &= 3{,}2 \\ 2x+6 &= 10{,}24 \\ 2x &= 4{,}24 \vee x = 2{,}12 \end{aligned}$$

Voer in: Y1=100-25√(2X+6) en Y2=20
Oplossing ongelijkheid: $x > 2{,}12$

8 a $f(x) = \frac{x+4-2}{x+4} = \frac{x+4}{x+4} - \frac{2}{x+4} = 1 - \frac{2}{x+4}$

b $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$

$f(x) = 1 - \frac{2}{x+4}$ (zie a)

$f(x) = 1 - 2 \cdot (x+4)^{-1}$ en is dus te schrijven in de vorm $y = a(x-p)^r + q$.

Hiermee is het een machtsfunctie.

c Je mag niet delen door 0 en dus geldt dat $x + 4 \neq 0$ en dus $x \neq -4$.

Verder geldt: $\lim_{x \downarrow -4} f(x) = -\infty$ en $\lim_{x \uparrow -4} f(x) = \infty$.

De verticale asymptoot is $x = -4$.

Vul voor x een groot of klein getal in, dan gaat $\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x+4}$ naar 0.

De horizontale asymptoot is $y = 1$.

d De verticale asymptoot is $x = -4$.

$D_f = \langle \leftarrow, -4 \rangle \cup \langle -4, \rightarrow \rangle$

De horizontale asymptoot is $y = 1$.

$B_f = \langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$

9 a Oplossing:

$$f(x) = 40 - \frac{100}{(x+10)^3}$$

$$f(x) = 40 - 100 \cdot \frac{1}{(x+10)^3}$$

$$f(x) = -100(x+10)^{-3} + 40$$

b Je mag niet delen door 0 dus $x + 10 \neq 0$ en dus $x \neq -10$.

Verder geldt: $\lim_{x \downarrow -10} f(x) = -\infty$ en $\lim_{x \uparrow -10} f(x) = \infty$.

De verticale asymptoot is $x = -10$.

Vul voor x een groot of een klein getal in.

Dan zie je $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x+10)^3} = 0$.

De horizontale asymptoot is $y = 40$.

c De verticale asymptoot is $x = -10$.

$D_f = \langle \leftarrow, -10 \rangle \cup \langle -10, \rightarrow \rangle$.

De horizontale asymptoot is $y = 40$.

$B_f = \langle \leftarrow, 40 \rangle \cup \langle 40, \rightarrow \rangle$.

d Oplossing:

$$\frac{100}{(x+10)^3} = 40$$

$$(x+10)^3 = 2\tfrac{1}{2}$$

$$x = -10 + \sqrt[3]{2\tfrac{1}{2}}$$

Het nulpunt is $x = -10 + \sqrt[3]{2\tfrac{1}{2}}$.

e Voer in: Y1=40-100/(X+10)^3 en Y2=X
Snijpunten bepalen met de grafische rekenmachine en dan de oplossing van de ongelijkheid aflezen:
$x < -10 \vee -8{,}729 < x < 39{,}999$.

10 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 16 &= \tfrac{1}{2}x^5 \\ x^5 &= 32 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Voer in: Y1=16/(X^4) en Y2=(1/2)X
Oplossing ongelijkheid: $x < 0 \vee 0 < x \leq 2$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} \tfrac{2x}{x-10} &= 80 \\ 2x &= 80x - 800 \\ x &= \tfrac{400}{39} \end{aligned}$$

Voer in: Y1=(2X)/(X-10)-20 en Y2=100
Denk aan de verticale asymptoot $x = 10$.

Oplossing ongelijkheid: $x < 10 \vee x > \frac{400}{39}$

11 a $g(x) = 20x^2 x^{\frac{1}{2}} - 100 = 20x^{2\frac{1}{2}} - 100$

b Onder dit wortelteken mag je nooit een negatief getal zetten. Dat heeft gevolgen voor het domein: $D_f = [0, \rightarrow\rangle$.

Aangezien er dus een randpunt $(0, -100)$ is heeft dit ook gevolgen voor het bereik $B_f = [-100, \rightarrow\rangle$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} x^{2\frac{1}{2}} &= 5 \\ x &= 5^{\frac{2}{5}} \\ x &= \sqrt[5]{25} \end{aligned}$$

d Voer in: Y1=20X^2√(X)-100 en Y2=X.
Oplossing ongelijkheid: $x \geq 1{,}92$.

12 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 16x^{\frac{1}{4}} &= \tfrac{1}{2}x \\ 16^4 \cdot x &= \tfrac{1}{16} \cdot x^4 \\ \tfrac{1}{16} \cdot x^4 - 16^4 \cdot x &= 0 \\ x\left(\tfrac{1}{16} \cdot x^3 - 16^4\right) &= 0 \\ x &= 0 \vee x^3 = 16^5 = 2^{20} \\ x &= 0 \vee x = 2^{\frac{20}{3}} \end{aligned}$$

Voer in: Y1=16*X^(1/4) en Y2=(1/2)X

Oplossing ongelijkheid: $0 \leq x \leq 2^6\sqrt[3]{4}$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} (2x - 40)^{\frac{1}{2}} &= 40 \\ 2x - 40 &= 1600 \\ x &= 820 \end{aligned}$$

Voer in: Y1=2√(2X-40)+20 en Y2=100
Oplossing ongelijkheid: $20 \leq x < 820$
Denk aan het domein!

13 a De functie f kun je herschrijven als $f(x) = 10x^{-1\frac{1}{2}} + 100$.

De exponent is negatief. Hoe groter x, des te kleiner $10x^{-1\frac{1}{2}}$.

Dus de grafiek van f daalt.

De functie g kun je herschrijven als $g(x) = 10x^{\frac{1}{2}}$

De exponent is positief. Dus de grafiek stijgt.

b Je mag niet delen door 0 en ook mag je onder deze worteltekens geen negatief getal gebruiken. $x = 0$ is daarom een verticale asymptoot van $f(x)$.

$g(x) = \frac{10x}{\sqrt{x}} = 10\sqrt{x}$ (als $x \neq 0$).

De grafiek van g heeft geen asymptoten.

c $\frac{10}{x\sqrt{x}} = \frac{10x}{\sqrt{x}}$ geeft $10 = 10x^2$ en $x = \pm 1$.

$x = -1$ voldoet niet.
Grafiek: $0 < x \leq 1$.

14 a f is niet gedefinieerd voor $x = 0$, met $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$.

Dus $x = 0$ is de verticale asymptoot.

b Voer in: Y1=1/(X^2)+X^2 met venster bijvoorbeeld: $[-5,5] \times [0,10]$.
Je ziet twee toppen aan weerszijden van de y-as.
Met de functie ‘minimum’ kun je ze vinden: $(-1,2)$ en $(1,2)$.

c Voor x naar $\pm\infty$ wordt de term $\frac{1}{x^2}$ verwaarloosbaar klein en dus is dan $f(x) \approx x^2$.

15 a $\frac{5}{x^4} = 40$

geeft $x^4 = \frac{1}{8}$

en $x = -\sqrt[4]{\frac{1}{8}} \vee x = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$.

b $\sqrt[3]{2x - 10} = 5$

geeft $2x - 10 = 5^3 = 125$

en $x = \frac{135}{2} = 67\frac{1}{2}$.

c $\frac{2\sqrt{x}+100}{\sqrt{x}} = 12$

$2\sqrt{x} + 100 = 12\sqrt{x}$

$10\sqrt{x} = 100$

$\sqrt{x} = 10$

$x = 100$

Voer in de grafische rekenmachine in Y1=(2√(X)+100)/√(X) en Y2=12 en lees af:

De oplossing van de ongelijkheid is $0 < x < 100$.

d $\frac{10}{(5-x)^4} = 0{,}016$

geeft $(5 - x)^4 = \frac{10}{0{,}016} = 625$

en dus $5 - x = -5 \vee 5 - x = 5$,

zodat $x = 10 \vee x = 0$.

Voer in de grafische rekenmachine in Y1=10/(5-X)^4 en Y2=0,016.

De oplossing van de ongelijkheid is $0 \leq x < 5 \vee 5 < x \leq 10$.

16 a Je kunt de functies schrijven als $f(x) = 4 \cdot (10 - x)^{-0,5}$ en $g(x) = (10 - x)^{0,5}$.

b Eerst $g(x)$:

Onder dit wortelteken mag je geen negatief getal hebben, dus geldt voor het domein $D_g = \langle \leftarrow, 10]$.

Als je de functie in beeld brengt met het randpunt (10,0) dan kun je het bereik ook inzien: $B_g = [0, \rightarrow\rangle$.

Dan $f(x)$:

De noemer van de breuk is dezelfde uitdrukking als $g(x)$.

Dus je hebt dan ook met ongeveer hetzelfde bereik te maken.

Nu komt er bij dat $f(x)$ een breuk is. Je mag niet delen door 0.

Dus het domein is iets anders: $D_f = \langle \leftarrow, 10\rangle$.

De 10 zelf doet nu niet meer mee.

Breng $f(x)$ in beeld voor het bereik: $B_f = \langle 0, \rightarrow\rangle$.

c $\frac{4}{\sqrt{10-x}} = \sqrt{10 - x}$

geeft $10 - x = 4$

en $x = 6$

dus het snijpunt is (6,2).

d Gebruik het antwoord bij b en voer in de grafische rekenmachine in

Y1=4/√(10-X) en Y2=√(10-X) en los de ongelijkheid op.

De oplossing van de ongelijkheid is $0 \leq x < 10$.

7.6 Totaalbeeld

1 a
- translatie van 1 ten opzichte van de y-as;
- vermenigvuldiging met -2 ten opzichte van de x-as;
- ten slotte translatie van 10 ten opzichte van de x-as.

b $f(0) = 12$, dus snijpunt met y-as is $(0,12)$.

$f(x) = 0$ geeft $(x-1)^5 = 5$ en dus $x = 1 + \sqrt[5]{5}$.

Dus het snijpunt met de x-as is $\left(1 + \sqrt[5]{5}, 0\right)$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 10 - 2(x-1)^5 &= 496 \\ (x-1)^5 &= -243 \\ x - 1 &= \sqrt[5]{-243} = -3 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} 10 - 2(x-1)^5 &> 8 \\ 10 - 2(x-1)^5 &= 8 \\ (x-1)^5 &= 1 \\ x - 1 &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Oplossing ongelijkheid: $x < 2$

2 a Oplossing:

$$\begin{aligned} -0{,}5(x-2)^4 + 45 &= 4{,}5 \\ -0{,}5(x-2)^4 &= -40{,}5 \\ (x-2)^4 &= 81 \\ x - 2 &= -3 \lor x - 2 = 3 \\ x &= -1 \lor x = 5 \end{aligned}$$

Oplossing ongelijkheid: $x \leq -1 \lor x \geq 5$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3x + 6 &= 0 \\ x^2 - 5x + 6 &= (x-2)(x-3) = 0 \\ x &= 2 \lor x = 3 \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 10x &= 0 \\ x\left(x^2 - 4x - 10\right) &= 0 \\ x &= 0 \lor x^2 - 4x - 10 = 0 \\ x &= 0 \lor x = \tfrac{4-\sqrt{56}}{2} \lor x = \tfrac{4+\sqrt{56}}{2} \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} 0{,}1(x-3)^{\frac{1}{3}} &= 1 \\ (x-3)^{\frac{1}{3}} &= 10 \\ x-3 &= 1000 \\ x &= 1003 \end{aligned}$$

e Oplossing:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x^2 &= x+5 \\ \tfrac{1}{4}x^2 - x - 5 &= 0 \\ x^2-4x-20 &= 0 \\ x &= \tfrac{4\pm\sqrt{96}}{2} \end{aligned}$$

Oplossing ongelijkheid: $x \leq \frac{4-\sqrt{96}}{2} \vee x \geq \frac{4+\sqrt{96}}{2}$

f Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{4}{(x-2)^3} &= 20 \\ (x-2)^3 &= 0{,}2 \\ x &= 2+\sqrt[3]{0{,}2} \end{aligned}$$

3 a Met $p = 1$ is $f(x) = 8+4x-x^2 = -(x-2)^2+12$.

- translatie van 2 ten opzichte van de y-as;
- vermenigvuldiging met -1 ten opzichte van de x-as;
- translatie van 12 ten opzichte van de x-as.

De top ligt dus op $(2,12)$.

De nulpunten vind je met behulp van de abc-formule:

$$x = \frac{-4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot-1\cdot8}}{2\cdot-1} = 2\pm\sqrt{12}$$

De snijpunten met de x-as zijn dan $\left(2-2\sqrt{3},0\right)$ en $\left(2+\sqrt{3},0\right)$.

Het snijpunt met de y-as is $f(0) = 8$, ofwel $(0,8)$.

b Eerst het geval met $p = 0$, want $p = 0$ geeft $f(x) = 8$ en de grafiek van deze functie heeft geen snijpunt met de x-as.

$-px^2+4px+8 = 0$ heeft $D < 0$.
$D = 0$ levert op: $16p^2+32p = 0$ en dus $p = 0 \vee p = -2$. Dus als $-2 < p < 0$.

c $f(x) = -p\left(x^2-4x\right)+8 = -p\left((x-2)^2-4\right)+8 = -p(x-2)^2+4p+8$

De top is $(2;4p+8)$.
Dit punt ligt op $y = 50-2x$ als $4p+8 = 46$, dus als $p = 9{,}5$.

4 a Als $g = 3$, dan $t = 11\cdot3^{\frac{2}{3}} \approx 22{,}9$ minuten.

Nee, als $g = 6$, dan $t = 11\cdot6^{\frac{2}{3}} \approx 36{,}3$ minuten.

b $T = 80+11\cdot g^{\frac{2}{3}}$. Nee, de totale braadtijd is niet recht evenredig met een macht van het gewicht.

c Aardappels worden in water gekookt. De kooktijd hangt af van de hoeveelheid water die wordt gebruikt.

5 a $y_2 = (x-2)^3$

b $v(x) = x^3 - (x-2)^3 = x^3 - \left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) = 6x^2 - 12x + 8$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 12x + 8 &< 8 \\ 6x^2 - 12x + 8 &= 8 \\ 6x^2 - 12x &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Als je de grafieken van $y = 6x^2 - 12x + 8$ en $y = 8$ op de grafische rekenmachine tekent, lees je de oplossing van de ongelijkheid af: $0 < x < 2$.

d v beschrijft een dalparabool. Deze heeft een minimum. Dit minimum is dan tevens de lengte van het kortste lijnstuk.

$v(x) = 6x^2 - 12x + 8 = 6(x-1)^2 + 2$, dus de top van v is (1,2).
v is minimaal 2.

6 a a kun je berekenen met de stelling van Pythagoras in ΔMPR. (Beredeneer eerst dat ΔMPR rechthoekig is!) Daarin is $MR = MQ$ gelijk aan de straal van de aarde, dus $\frac{40000}{2\pi} \approx 6366200$ m.

En dus is: $a^2 = (6366200 + h)^2 - 6366200^2$. En dus is $a = \sqrt{(6366200 + h)^2 - 6366200^2}$.

Hieruit volgt: $a \approx \sqrt{12732400h + h^2}$

b Omdat h^2 heel veel kleiner is dan $12732400h$ kun je h^2 verwaarlozen.

c Dat heeft te maken met de afrondingen bij het berekenen van de straal van de Aarde.

d Eigen antwoord.

e En?

7 a Doen. Probeer een eerste idee te krijgen van de oplossing.

b Kies bijvoorbeeld $AE = x$.
Laat zien dat de oppervlakte K van de boekenkast dan $K(x) = 7{,}5x - 1{,}5x^2$ is.

c Bereken de top van de parabool die de grafiek is van $K(x) = 7{,}5x - 1{,}5x^2$. Je vindt dat dan $x = 2{,}5$ en dan kun je de gevraagde oppervlakte wel berekenen.

8 a Jamaica is ongeveer 1300 km^2 groot.
Volgens de theorie dus $S \approx 3 \cdot 1300^{0{,}30} \approx 26$.

b $10^{0{,}30} \approx 2$

c Grote reservaat zal ongeveer 18 soorten tellen.
Elk van de kleine reservaten zal ongeveer 15 soorten tellen, samen $2 \cdot 15 - 8 = 22$ soorten.
Men kiest oplossing 2.

9 a 280 km/h is $77\frac{7}{9}$ m/s.

$F = \left(\frac{77\frac{7}{9}}{6{,}3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2 \approx 3{,}34$, dus de intensiteit is 3.

b Neem voor F de waarde 3,5.

$$\begin{aligned} 3{,}5 &= \left(\tfrac{v}{6{,}3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2 \\ 5{,}5 &= \left(\tfrac{v}{6{,}3}\right)^{\frac{2}{3}} \\ v &= 6{,}3 \cdot 5{,}5^{\frac{3}{2}} \approx 81{,}3 \end{aligned}$$

De minimale waarde van v is ongeveer 81,3 m/s. Dat is ongeveer 293 km/h.

c $F = \left(\frac{2{,}39(T+4)^{\frac{3}{2}}}{6{,}3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$

Dus $F \approx 0{,}52T - 0{,}10$ en dus $a \approx 0{,}52$ en $b \approx 0{,}10$.

8

Analytische meetkunde

8.1 Coördinaten in het vlak

V1 De uitwerking wordt later gegeven. Puzzel nu eerst zelf.

1 a Omdat je alleen dan echte lengtes en hoeken kunt meten. Anders vervormt elk figuur waarvan de hoekpunten als coördinaten zijn gegeven.

b Doen.

c $|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$

d $M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(2\frac{1}{2}, 2\right)$

2 a $|AB| = \sqrt{(1 - \text{-}1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$.

b $M = \left(\frac{\text{-}1+1}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = \left(0, 3\frac{1}{2}\right)$.

3 a $|AB| = \sqrt{(20 - \text{-}10)^2 + (45-33)^2} = \sqrt{1044}$

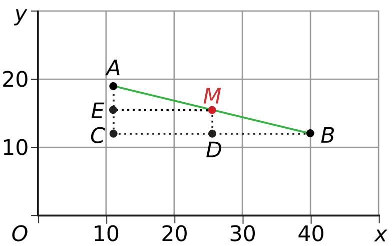
b $M = \left(\frac{\text{-}10+20}{2}, \frac{33+45}{2}\right) = (5, 39)$

4 a Het verschil van de twee x-coördinaten is $x_A - x_B$ en dat van de y-coördinaten is $y_A - y_B$. Met de stelling van Pythagoras vind je:

$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

b Je moet nu het gemiddelde van beide coördinaten nemen: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

5 a Zie de figuur.



Teken punt E op lijnstuk AC zo, dat $ME \parallel BC$. Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken AME en ABC volgt dat $|AE| = |MD| = \frac{1}{2}|AC|$.

$y_m = y_c + 0{,}5 \cdot |AC| = 12 + 3\frac{1}{2} = 15\frac{1}{2}$

b $|AC| = 7$, dus $y_m = y_c + 0{,}5|AC| = 12 + 3\frac{1}{2} = 15\frac{1}{2}$

6 $M = \left(\frac{6+\text{-}3}{2}, \frac{5+4}{2}\right) = \left(1\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$

7 a Pas de stelling van Pythagoras toe in de rechthoekige driehoek CBA.
Ga eerst na, dat $|CB| = 40 - 11 = 29$ en $|CA| = 19 - 12 = 7$.

Je vindt: $|AB| = \sqrt{29^2 + 7^2} = \sqrt{890}$

b Teken een rechthoekige driehoek CDE met $E(47, 32)$.
Dan is $|CE| = 15 + 47 = 62$ en $|ED| = 32 + 13 = 45$.

Pas in die driehoek de stelling van Pythagoras toe: $|CD| = \sqrt{(47 - \text{-}15)^2 + (\text{-}13 - 32)^2} = \sqrt{5869}$

$|CD| = \sqrt{62^2 + 45^2} = \sqrt{5869}$

8 a $|AB| = \sqrt{(\text{-}3 - 6)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{117}$

$|BC| = \sqrt{12^2 + 18^2} = \sqrt{468}$

$|AC| = \sqrt{21^2 + 12^2} = \sqrt{585}$

b Als in deze driehoek geldt dat $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ dan is de driehoek rechthoekig (omgekeerde stelling van Pythagoras).

Hier wordt dat: $\left(\sqrt{117}\right)^2 + \left(\sqrt{468}\right)^2 = 117 + 468 = 585 = \left(\sqrt{585}\right)^2$, dus de driehoek is rechthoekig.

c $D = \left(\frac{-3+6}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (1{,}5; 3)$

$E = \left(\frac{6+18}{2}, \frac{0+18}{2}\right) = (12{,}9)$

$F = \left(\frac{-3+18}{2}, \frac{6+18}{2}\right) = (7{,}5; 12)$

d Bereken eerst de lengtes van de drie zijden van deze driehoek:
$|DE| = \sqrt{146{,}25}$

$|DF| = \sqrt{117}$

$|EF| = \sqrt{29{,}25}$

$|DF|^2 + |EF|^2 = 117 + 29{,}25 = 146{,}25 = |DE|^2$

De driehoek is dus rechthoekig (omgekeerde stelling van Pythagoras).

9 a Ga na, dat $P(2{,}1)$ en $Q(4{,}1)$.

Het midden van EQ is dan $S = \left(\frac{-1+4}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = (1{,}5; 1{,}5)$.

b Neem $E(-x, y)$, dan is $|EA| = y$ en $|AZ_1| = x$.
En dus is ook $|Z_1B| = y$ en $|BP| = x$.

Probeer het eerst zelf en bekijk daarna eventueel het voorbeeld.

$|BZ_2| = 3 - y$. Ten slotte is $|Z_2C| = |BP| = x$ en $|CQ| = |BZ_2| = 3 - y$.

De coördinaten van Q zijn daarom $(3 + x, 3 - y)$. Het midden van EQ is dus

$S = \left(\frac{-x+3+x}{2}, \frac{y+3-y}{2}\right) = (1{,}5; 1{,}5)$ en is dus niet afhankelijk van de waarden x en y.

10 a $|AB| = \sqrt{(-11 - 106)^2 + (23 - 133)^2} = \sqrt{25789}$

$M = \left(\frac{-11+106}{2}, \frac{23+133}{2}\right) = (47{,}5; 78)$

b $\frac{-11+x_C}{2} = 106$ en $\frac{23+y_C}{2} = 133$ geeft $x_C = 223$ en $y_C = 243$.

De coördinaten van C zijn $(223{,}243)$.

11 a Je kunt laten zien of hoeken recht zijn door in een driehoek de stelling van Pythagoras te controleren. Neem bijvoorbeeld de hoek bij A, de hoek tussen AB en AD. Deze hoek zit in ΔABD.

$|AB| = \sqrt{(6 - 10)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{80}$

$|AD| = \sqrt{(2 - 6)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{20}$

$|BD| = \sqrt{(2 - 10)^2 + (2 - 8)^2} = \sqrt{100} = 10$

Dus klopt in ΔABD de stelling van Pythagoras en is hoek A recht.

Zo kun je bij alle hoeken nagaan of ze rechthoekig zijn.

b S is het midden van bijvoorbeeld AC. Dus $S = \left(\frac{6+6}{2}, \frac{0+10}{2}\right) = (6{,}5)$.

c Maak gebruik van de basis AS en als hoogte lijnstuk door B en loodrecht op het verlengde van AS.

Je krijgt dan: $\frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$.

12 a Een vlieger is een vierhoek die lijnsymmetrisch is. Dat betekent dat de diagonalen loodrecht op elkaar staan en de ene diagonaal de andere middendoor deelt.

b Omdat de diagonalen loodrecht op elkaar staan. De assen van een cartesisch coördinatenstelsel staan namelijk ook loodrecht op elkaar.

c $A\left(\frac{-3+0}{2}, \frac{0+-4}{2}\right) = (-1{,}5; -2)$

$B(1{,}5; -2)$
$C(1{,}5; 1)$
$D(-1{,}5; 1)$

d $\angle A$ zit in ΔABD. Er geldt:
$|AB| = 3$
$|AD| = 3$
$|BD| = 3\sqrt{2}$

Controleer nu met de omgekeerde stelling van Pythagoras of ΔABD rechthoekig is.

$$\begin{aligned} |AB|^2 + |AD|^2 &= |BD|^2 \\ 3^2 + 3^2 &= \left(3\sqrt{2}\right)^2 \\ 9 + 9 &= 18 \end{aligned}$$

Dat klopt. ΔABD is rechthoekig. Hoek A is dus recht.

Dit kun je voor alle vier de hoeken A, B, C en D doen. Als alle vier de hoeken recht zijn, is $ABCD$ dus een rechthoek.

13 a $|AB| = \sqrt{(3 - -2)^2 + (1 - -1)^2} = \sqrt{29}$

b De afstand tot A moet zijn $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{29}$.
De enige combinaties van gehele getallen die hieraan voldoen zijn $a = \pm 5$ en $b = \pm 2$ of $a = \pm 2$ en $b = \pm 5$.

De roosterpunten zijn dus $(-2 \pm 2, -1 \pm 5)$ of $(-2 \pm 5, -1 \pm 2)$.
Ofwel: $(-4,-6)$, $(-4{,}4)$, $(0,-6)$, $(0{,}4)$, $(-7,-3)$, $(3,-3)$, $(-7{,}1)$, $(3{,}1)$.

14 a Noem $PQ = x$.

$|AP| = \frac{1}{2} \cdot (2 - x) = 1 - \frac{1}{2}x$, dus $|AQ| = 1 - \frac{1}{2}x + x = 1 + \frac{1}{2}x$, $|RQ| = x$ en $|AR| = 2$ (straal van de cirkel).

ΔAQR is een rechthoekige driehoek, dus $\left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2 + x^2 = 2^2$ (stelling van Pythagoras).

Haakjes wegwerken geeft $1\frac{1}{4}x^2 + x - 3 = 0$, met de abc-formule vind je $x = \frac{6}{5} \vee x = 2$.

Alleen $x = \frac{6}{5}$ voldoet.

b T ligt op lijnstuk AB en is het snijpunt van de loodlijn op lijnstuk AB door M.

$|AM| = 2 - r, |MT| = \frac{6}{5} + r$ en $|AT| = 1$.

$(2 - r)^2 = \left(\frac{6}{5} + r\right)^2 + 1^2$ (stelling van Pythagoras).

Haakjes wegwerken geeft:

$$\begin{aligned} 4 - 4r + r^2 &= \frac{36}{25} + \frac{12}{5}r + r^2 + 1 \\ -\frac{32}{5}r &= -\frac{39}{25} \\ r &= \frac{39}{160} \end{aligned}$$

15 De afstand van het eerste schip ten opzichte van S is $a_1 = 80 - 20t$, met t in uren en a in km. Voor het tweede schip geldt zo $a_2 = 60 - 10t$. De koersen van de schepen liggen loodrecht op elkaar, dus de onderlinge afstand tussen beide schepen is:

$a = \sqrt{(80 - 20t)^2 + (60 - 10t)^2}$ km.

Gebruik de grafische rekenmachine.
Voer in: Y1=√((80-20X)^2+(60-10X)^2) met venster bijvoorbeeld: [0,10] × [0,50].

a is minimaal als $t \approx 4{,}4$ en een afstand van ongeveer 17,89 km.

16 a $|PQ| = \sqrt{(\text{-}120 - 0)^2 + (\text{-}35 - 12)^2} = \sqrt{16609} \approx 128{,}88$.

b Het midden is $M = \left(\frac{\text{-}120+0}{2}, \frac{\text{-}35+12}{2}\right) = (\text{-}60; \text{-}11{,}5)$ en $|OM| = \sqrt{(\text{-}60)^2 + (\text{-}11{,}5)^2} = \sqrt{3732{,}25} \approx 61{,}09$.

17 Neem $A(\text{-}3{,}0)$, $B(3{,}0)$ en $C(0{,}4)$.

Je krijgt dan $P = \left(\frac{\text{-}3+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (\text{-}1{,}5; 2)$ en $Q = \left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (1{,}5; 2)$.

Daaruit volgt dat PQ evenwijdig is met AB (zelfde y-waarde) en $|PQ| = 3 = \frac{1}{2}|AB|$.

Omdat $\Delta ABS \sim \Delta QPS$ is ook $|SQ| = \frac{1}{2}|AS|$ en $|PS| = \frac{1}{2}|BS|$.

En daarom is $AS : SQ = BS : BP = 2 : 1$.

8.2 Lijnen

V1 a $x+3y=10$ en vul (1,3) in, dus $x=1$ en $y=3$:
$1+3\cdot 3=10$ dus de coördinaten van A voldoen inderdaad aan deze vergelijking.

b $x+3y=10$ en vul (4,2) in, dus $x=4$ en $y=2$:
$4+3\cdot 2=10$ dus de coördinaten van B voldoen inderdaad aan deze vergelijking.

c Ga bijvoorbeeld uit van $y=mx+n$. De helling is $-\frac{1}{3}$ snijpunt met de y-as is $\left(0,3\frac{1}{3}\right)$.
Dan vind je $y=-\frac{1}{3}x+3\frac{1}{3}$.

d $x+2y=6$ en dus $y=-\frac{1}{2}x+3$. Breng deze in beeld met je GR en de lijn gaat door de roosterpunten (-4,5), (-2,4), (0,3), (2,2) en (4,1).

e $x-2y=6$ en dus $y=\frac{1}{2}x-3$. Breng deze in beeld met je GR en de lijn gaat door de roosterpunten (-4,-5), (-2,-4), (0,-3),(2,-2) en (4,-1).

f Je zoekt dus alle roosterpunten met $x=3$.
Dus (3,-3), (3,-2), (3,-1), (3,0), (3,1), (3,2) en (3,3).

1 a Je ziet in de uitleg hoe lijn AB de vergelijking $y=-\frac{1}{3}x+2\frac{1}{3}$ krijgt.
Je vermenigvuldigt deze vergelijking links en rechts met 3. Dit levert $3y=-x+7$ op en daarna tel je aan beide zijden x op. Je krijgt $x+3y=7$.

b Richtingscoëfficiënt is $-\frac{1}{3}$. Dit getal betekent dat elke toename van x met 1 een toename van y met $-\frac{1}{3}$ tot gevolg heeft.

2 $A(1,2)$ invullen: $2=a+b$.
$C(1,4)$ invullen: $4=a+b$.
Dit geeft $2=4$ en dat kan niet.

3 Beide punten voldoen aan deze vergelijking, want beide hebben x-coördinaat 1.

4 De eerste twee vergelijkingen kun je herleiden tot $y=-\frac{1}{2}x+3$:

- $2x+4y=12$ wordt $4y=-2x+12$ en dan beide zijden delen door 4.
- $x+2y=6$ wordt $2y=-x+6$ en dan beide zijden delen door 2.

5 a De vergelijking wordt dan $qy=r$, dus $y=\frac{r}{q}$, dus $\frac{r}{q}$ is een constante. Dit betekent dat alle punten van deze lijn dezelfde y-waarde hebben. De lijn loopt dus horizontaal en dus ook evenwijdig aan de x-as.

b De vergelijking wordt dan $px=r$, dus $x=\frac{r}{p}$, dus $\frac{r}{p}$ is een constante. Dit betekent dat alle punten van deze lijn dezelfde x-waarde hebben. De lijn loopt dus verticaal, evenwijdig aan de y-as.

c Er is geen richtingscoëfficiënt.

d De vergelijking wordt $qx+qy=r$ en dus $x+y=\frac{r}{q}$.
Dit kun je schrijven als $y=-x+\frac{r}{q}$ en dus is de richtingscoëfficiënt gelijk aan -1.

e Dan krijg je $px+qy=0$ en dus $y=-\frac{p}{q}x$; deze lijn gaat door de oorsprong $O(0,0)$. Dit heet ook wel een rechtevenredig verband.

6 a Herleid de vergelijking tot $y=3x-6{,}5$.
Dus de richtingscoëfficiënt is 3.

b Schrijf de lijn als $x=3{,}5$.
Dit is een verticale lijn en heeft dus geen richtingscoëfficiënt.

c Schrijf de vergelijking als $y=-1{,}5x+7{,}5$.

De richtingscoëfficiënt is dus $-1{,}5$.

d Schrijf de vergelijking als $2x + 4y = 10$ en herleid deze tot $y = -0{,}5x + 1{,}25$.

De richtingscoëfficiënt is dan $-0{,}5$.

e Schrijf de vergelijking als $y = 0x - 5$.

De richtingscoëfficiënt is dan 0.

f Schrijf de vergelijking als $y = -\frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$.

De richtingscoëfficiënt is dan $-0{,}2$.

7 Je berekent eerst de richtingscoëfficiënt:

$a = \frac{25 - -35}{12 - -22} = \frac{30}{17}$

De vergelijking wordt dan $y = \frac{30}{17}x + b$.

Daarin vul je (bijvoorbeeld) $S(12{,}25)$ in:

$$25 = \frac{30}{17} \cdot 12 + b$$

$$25 = \frac{360}{17} + b$$

$$b = \frac{65}{17}$$

Je krijgt: $y = \frac{30}{17}x + \frac{65}{17}$ ofwel $30x - 17y = -65$.

Neem je $x = 0$ dan krijg je $y = \frac{65}{17}$ en dus wordt het snijpunt met de y-as $\left(0,\frac{65}{17}\right)$.

Neem je $y = 0$ dan krijg je $x = -\frac{65}{30} = -\frac{13}{6}$ en dus wordt het snijpunt met de x-as $\left(-\frac{13}{6},0\right)$.

8 De lijn heeft een vergelijking van de vorm $y = -12x + b$. Vul $T(38,-15)$ in en je krijgt $b = 441$. De vergelijking wordt dus $y = -12x + 441$. Dat kun je omschrijven naar $12x + y = 441$

Neem je $x = 0$ dan krijg je $y = 441$ en dus $(0{,}441)$.

Neem je $y = 0$ dan krijg je $x = \frac{441}{12}$ en dus $\left(\frac{441}{12},0\right) = (36{,}75; 0)$.

9 Lijn m is evenwijdig aan lijn l en heeft dus dezelfde richtingscoëfficiënt, namelijk 2. Een vergelijking van lijn m is dus $y = 2x + b$. De waarde van b kun je berekenen door $P(0{,}10)$ in te vullen: $10 = 2 \cdot 0 + b$ en dit levert $b = 10$ op. Een vergelijking van lijn m is dus $y = 2x + 10$. Deze kan ook geschreven worden als $-2x + y = 10$ en dit is van de vorm $px + qy = r$:

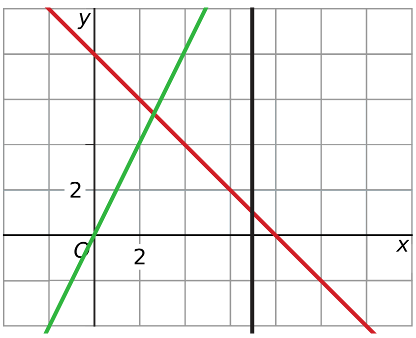
$p = -2$

$q = 1$

$r = 10$

10 a Begin met het zoeken van twee punten op de lijn. Kies om te beginnen punten waarin $x = 0$ of $y = 0$.

- $x + y = 6$ gaat door $(6{,}0)$ en $(0{,}6)$.
- $y = 2x$ gaat door $(0{,}0)$ en $(1{,}2)$.
- $x - 2y = 4$ gaat door $(4{,}0)$ en $(0,-2)$.
- $x = 5$ gaat door $(5{,}0)$ en $(5{,}3)$.



b Het snijpunt dat het dichtst bij de oorsprong ligt, is het snijpunt van de lijnen $y = 2x$ en $x - 2y = 4$.

$$\begin{aligned} 2x &= 0{,}5x - 2 \\ 1{,}5x &= -2 \\ x &= -1\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$y = 2x = 2 \cdot -1\frac{1}{3} = -2\frac{2}{3}$

Het snijpunt is $\left(-1\frac{1}{3}, -2\frac{2}{3}\right)$.

11 a Herleid eerst alle vergelijkingen:

- l wordt $y = -3{,}5x + 2$
- m wordt $x = -2{,}4$
- n wordt $y = -3{,}5x + 2$
- p wordt $y = -3{,}5x + 7{,}5$
- q wordt $y = \frac{7}{3}x + 5$
- r blijft $y = -3{,}5x + 3$

Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig of vallen samen (als ze dezelfde vergelijking opgeleverd hebben). Dus zijn l, n, p en r evenwijdig (of vallen ze samen).

b Zie de uitwerking bij a. l en n vallen samen.

c Geen enkele vergelijking hoort bij een roosterlijn (zie de uitwerking bij a).

12 a De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{3-0}{7-2} = \frac{3}{5}$

De lijn heeft als vergelijking $y = \frac{3}{5}x + b$.

Bijvoorbeeld punt A invullen geeft $b = -\frac{6}{5}$.

Dus vind je $y = \frac{3}{5}x - \frac{6}{5}$ en dit kun je herleiden tot $3x - 5y = 6$.

b Deze lijn heeft dezelfde richtingscoëfficiënt als die bij a.

De vergelijking is daarom $y = \frac{3}{5}x + b$.

Punt C invullen geeft $b = 5$ en dus $y = \frac{3}{5}x + 5$.

Dit herleid je tot $3x - 5y = -25$.

13 a Je kunt dit op verschillende manieren aanpakken.

Manier 1:

- Teken eerst de lijn door twee punten te bepalen: $(6{,}0)$ en $(0, -3)$.
- Spiegel die twee punten tot $(6{,}0)$ en $(0{,}3)$.
- Stel de vergelijking op van de nieuwe lijn: $y = -0{,}5x + 3$ ofwel $x + 2y = 6$.

Manier 2:

- Bedenk dat bij spiegelen in de x-as (x, y) overgaat in $(x, -y)$.
- Vervang in de gegeven vergelijking x door x en y door $-y$.
- Je vindt $x - 2(-y) = 6$ ofwel $x + 2y = 6$.

b Je kunt dit op verschillende manieren aanpakken.

Manier 1:

- Teken eerst de lijn door twee punten te bepalen: $(6{,}0)$ en $(0, -3)$.
- Spiegel die twee punten tot $(-6{,}0)$ en $(0, -3)$.
- Stel de vergelijking op van de nieuwe lijn: $y = -0{,}5x - 3$ ofwel $x + 2y = -6$.

Manier 2:

- Bedenk dat bij spiegelen in de y-as (x, y) overgaat in $(-x, y)$.
- Vervang in de gegeven vergelijking x door $-x$ en y door y.

- Je vindt $-x - 2y = 6$ ofwel $x + 2y = -6$.

c Je kunt dit op verschillende manieren aanpakken.

Manier 1:

- Teken eerst de lijn door twee punten te bepalen: $(6,0)$ en $(0,-3)$.
- Spiegel die twee punten tot $(0,6)$ en $(-3,0)$.
- Stel de vergelijking op van de nieuwe lijn: $y = 2x + 6$ ofwel $-2x + y = 6$.

Manier 2:

- Bedenk dat bij spiegelen in de lijn $y = x$ het punt (x,y) overgaat in (y,x).
- Vervang in de gegeven vergelijking x door y en y door x.
- Je vindt $y - 2x = 6$ ofwel $-2x + y = 6$.

14 a Snijpunt x-as betekent dat $y = 0$. Vul dit in de vergelijking van l in: $2x - 0 + 7 = 0$ dus $2x + 7 = 0$ en dan volgt $x = -3{,}5$. Het snijpunt is dus $(-3{,}5; 0)$.

Snijpunt y-as betekent dat $x = 0$. Vul dit in de vergelijking van l in: $2 \cdot 0 - y + 7 = 0$ dus $y = 7$. Het snijpunt is dus $(0,7)$.

b Bereken eerst de richtingscoëfficiënt van m. Dit kan door de vergelijking van k te herschrijven naar de vorm $y = ax + b$. Dit wordt $y = -1{,}5x + 3$. Lijn m heeft dus óók richtingscoëfficiënt $-1{,}5$ en gaat door $(0,10)$. Door deze gegevens in te vullen in de vergelijking $y = ax + b$ vind je $10 = -1{,}5 \cdot 0 + b$ en dus geldt dat $b = 10$. Een vergelijking van m is dus $y = -1{,}5x + 10$. In de vorm $ax + by = c$ wordt dit $1{,}5x + y = 10$.

c Dit kan op verschillende manieren. Herleid bijvoorbeeld de vergelijking van m naar $y = -1{,}5x + 10$ zoals je bij b hebt gedaan. Substitueer dit in de vergelijking van l: $2x - y + 7 = 0$ wordt dan $2x - (-1{,}5x + 10) + 7 = 0$. Dit wordt $2x + 1{,}5x - 10 + 7 = 0$ en dus $3{,}5x = 3$ zodat $x = \frac{6}{7}$. Dit levert ingevuld in l of m voor y de waarde $8\frac{5}{7}$ op. Dus $\left(\frac{6}{7}; 8\frac{5}{7}\right)$.

15 a Bereken eerst de snijpunten van de gegeven lijn met beide assen: $\left(\frac{4}{3},0\right)$ en $(0,4)$. Omdat deze lijn ook door D gaat (controleren door dit punt in te vullen) is de gegeven lijn de lijn door $D(1,1)$ en $E(0,4)$. Nu kun je alle andere hoekpunten van de ster vinden, omdat het spiegelbeelden zijn bij spiegeling in de x-as, de y-as of de lijn $y = x$. En daarmee stel je dan alle andere vergelijkingen op.

Je vindt:
DE: $3x + y = 4$
AH: $3x + y = -4$
EF: $-3x + y = 4$
AB: $-3x + y = -4$
CD: $x + 3y = 4$
GH: $x + 3y = -4$
BC: $x - 3y = 4$
FG: $x - 3y = -4$

b $|DE| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

De omtrek van de ster is dus $8 \cdot \sqrt{10} \approx 25{,}30$.

De oppervlakte is $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 + 4 = 16$.

16 Elke lijn die niet evenwijdig is met de y-as heeft een vergelijking van de vorm $y = ax + b$. Als zo'n lijn loodrecht staat op de lijn $y = nx$, is a afhankelijk van n.
Een richtingscoëfficiënt van n betekent: als je x met 1 verhoogt, wordt y met n verhoogd. Er past daarom een rechthoekig driehoekje van 1 horizontaal bij n verticaal tegen die lijn.
Bij een lijn die hier loodrecht op moet staan, wordt dit driehoekje n horizontaal bij -1 verticaal. En dat driehoekje is gelijkvormig met een driehoekje van 1 bij $-\frac{1}{n}$. Van zo'n lijn is de richtingscoëfficiënt dus $-\frac{1}{n}$.

De algemene vorm van een lijn loodrecht op $y = nx$ is daarom $y = -\frac{1}{n} \cdot x + b$.

17 a De rc van l is $\frac{-5-45}{15--10} = -2$, dus de vergelijking is $y = -2x+b$. Een gegeven punt invullen geeft $b = 25$.

Dus $y = -2x + 25$ ofwel $2x + y = 25$.

b Bij a heb je de rc al berekend: de rc is -2.

Het snijpunt met de x-as vind je door $y = 0$ te nemen. Dit geeft $(12{,}5; 0)$.

Het snijpunt met de y-as vind je door $x = 0$ te nemen. Dit geeft $(0{,}25)$.

18 a Herleid de vergelijking van l tot $y = \frac{4}{5}x - 4$.

De lijn door P heeft dezelfde richtingscoëfficiënt en is daarom $y = \frac{4}{5}x + b$.

Punt P invullen geeft $b = -\frac{2}{5}$. De vergelijking is dus $y = \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}$. Je kunt dit nog omschrijven naar $4x - 5y = 2$, maar dat hoeft niet.

b Manier 1:

- de richtingscoëfficiënt wordt nu $-\frac{4}{5}$ en het snijpunt met de y-as wordt $(0{,}4)$.
- de vergelijking wordt dus $y = -\frac{4}{5}x + 4$.

Manier 2:

- de vergelijking van l is $4x - 5y = 20$
- (x, y) wordt $(x, -y)$ dus de vergelijking wordt $m : 4x + 5y = 20$

c Manier 1:

- de richtingscoëfficiënt wordt nu $\frac{5}{4}$ en het snijpunt met de y-as wordt $(0{,}5)$.
- de vergelijking wordt dus $y = \frac{5}{4}x + 5$.

Manier 2:

- de vergelijking van l is $4x - 5y = 20$
- (x, y) wordt (y, x) dus de vergelijking wordt $4y - 5x = 20$ ofwel $n : 5x - 4y = -20$.

8.3 Cirkels

V1 a De punten die aan deze vergelijking voldoen liggen op een rechte lijn door (0,6) en (-3,0).

b Gebruik GeoGebra en voer deze formule in. Je ziet een cirkel ontstaan met straal 5 en middelpunt (0,0).

c Hier staat $x = -2 \vee x = 2$. Dit worden twee verticale roosterlijnen.

d Ook dit kun je in GeoGebra invoeren en kijken wat er ontstaat. Je zou eigenlijk moeten weten dat dit een formule van een parabool is.

1 a Vul de punten in de vergelijking in:

- (1,3) geeft $(1-4)^2 + (3-3)^2 = (-3)^2 = 9$ en dat klopt.
- (4,0) geeft $(4-4)^2 + (0-3)^2 = (-3)^2 = 9$ en dat klopt.
- (7,3) geeft $(7-4)^2 + (3-3)^2 = 3^2 = 9$ en dat klopt.
- (4,6) geeft $(4-4)^2 + (6-3)^2 = 3^2 = 9$ en dat klopt.

b Invullen geeft $(6{,}5-4)^2 + (1-3)^2 = 10{,}25 > 9$.

En dus is de afstand van dit punt tot $M(1,2)$ meer dan 3. Het punt ligt buiten de cirkel.

c De getallen die tussen de haakjes staan bij x en y veranderen als je het middelpunt verandert. Het getal dat rechts van het isteken staat veranderd als je de straal verandert.

2 a $x^2 + y^2 = 25$
Het middelpunt is (0,0) en alle punten van de cirkel bevinden zich op afstand 5 van het middelpunt.

b $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2 = 4$

c Middelpunt (-4,6) en straal $\sqrt{15}$.

d Met behulp van kwadraat afsplitsen kun je zo'n vergelijking weer herleiden tot $(x-4)^2+(y-3)^2 = 9$.

En daarvan is het middelpunt (4,3) en de straal $\sqrt{9} = 3$.

De afleiding met behulp van kwadraat afsplitsen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 &= 0 \\ x^2 - 8x + y^2 - 6y + 16 &= 0 \\ (x-4)^2 - 16 + (y-3)^2 - 9 + 16 &= 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 - 9 &= 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 &= 9 \end{aligned}$$

3 In dit geval kun je een roosterpunt op de cirkel vinden door in te zien dat $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{3^2+1^2}$. Alle punten die 3 rechts of links van M en tegelijk 1 onder of boven M liggen zijn roosterpunten van de cirkel. Bijvoorbeeld $(4+3, 2+1) = (7,3)$. Ook punten die 3 boven of onder M liggen en 1 links of rechts daarvan liggen op de cirkel.

Je vindt (3,-1), (5,-1), (3,5), (5,5), (1,1), (1,3), (7,1), (7,3).

4 De cirkel heeft middelpunt $M(1,-2)$ en straal $\sqrt{13}$.

Omdat $\sqrt{13} = \sqrt{9+4} = \sqrt{3^2+2^2}$, liggen de roosterpunten van de cirkel 3 rechts of links en 1 onder of boven M of 3 onder of boven en 1 links of rechts van M.

Je vindt (-1,-5), (3,-5), (-1,1), (3,1), (-2,0), (-2,-4), (4,0), (4,-4).

5 $\sqrt{7} = \sqrt{1+6} = \sqrt{2+5} = \sqrt{3+4}$, maar in al die gevallen heb je geen twee kwadraten.

6 De vergelijking wordt $(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ en P invullen geeft $(-1-3)^2 + (7-4)^2 = 4^2 + 3^2 = 25$.

De complete vergelijking wordt $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Om te controleren of deze cirkel door (0,0) gaat vul je dit punt in: $(0-3)^2+(0-4)^2=25$ en dat klopt.

7 Kwadraat afsplitsen geeft $(x+5)^2-25+(y-6)^2-36=0$ en dus $(x+5)^2+(y-6)^2=61$.

Middelpunt $O(-5{,}6)$ en straal $\sqrt{61}$.

8 Ga uit van $x^2+y^2+4x-10y+27=0$, en pas kwadraat afsplitsen toe: $(x+2)^2+(y-5)^2-29+27=0$ en $(x+2)^2+(y-5)^2=2$. De cirkel heeft dus als middelpunt $M(-2{,}5)$ en een straal van $\sqrt{2}$.

9 Ga uit van de vergelijking van cirkel $c:(x-1)^2+(y-1)^2=2$ en werk de haakjes weg, je vindt dan $x^2-2x+1+y^2-2y+1=2$ en dit gaat over in $x^2-2x+y^2-2y=0$, de vergelijking van cirkel d. Ze zijn dus hetzelfde. Je had natuurlijk ook kunnen beginnen met de vergelijking van cirkel d, en deze door middel van kwadraat afsplitsen kunnen herleiden. Maar dat was in dit geval minder snel geweest (maar wel goed!).

10 a De vergelijking wordt $(x+4)^2+(y+2)^2=20$

Middelpunt: $(-4,-2)$

Straal: $\sqrt{20}$

b De vergelijking wordt $(x+4)^2+(y+2)^2=-10$

Omdat $\sqrt{-10}$ geen reëel getal is, kun je geen straal bepalen. Deze figuur bestaat niet.

c De vergelijking wordt $(x+4)^2+(y+2)^2=0$

Omdat $\sqrt{0}=0$ is dit een cirkel met middelpunt $(-4,-2)$ en straal 0. Dus dit wordt alleen het punt $(-4,-2)$.

11 a De vergelijking is $(x-2)^2+(y-0)^2=r^2$.

Vul C in en je krijgt $(0-2)^2+(5-0)^2=29$. De vergelijking wordt $(x-2)^2+y^2=29$.

b Het middelpunt van de cirkel is het midden van lijnstuk BC, dus $\left(\frac{7+0}{2},\frac{3+5}{2}\right)=(3{,}5;4)$.

De cirkel is daarom $(x-3{,}5)^2+(y-4)^2=r^2$. Punt C invullen geeft $r^2=13{,}25$.

De gevraagde vergelijking is dus $(x-3{,}5)^2+(y-4)^2=13{,}25$.
Vul je hier punt A in, dan krijg je geen gelijkheid, dus A ligt niet op de cirkel.

12 a De vergelijking wordt $(x-4)^2+(y-6)^2=52$.

Middelpunt: $(4{,}6)$

Straal: $\sqrt{52}$

b De vergelijking wordt $(x-2{,}5)^2+y^2=6{,}25$.

Middelpunt: $(2{,}5;0)$
Straal 2,5

c De vergelijking wordt $(x-1)^2+(y+5)^2=-1$.

Geen cirkel, want $\sqrt{-1}$ bestaat niet.

d Deze vergelijking kun je niet in de vorm $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ brengen, dus geen cirkel.

13 a Deze drie punten liggen op de hoekpunten van een vierkant, dus het middelpunt M van de cirkel is het midden van lijnstuk PQ.
Daaruit volgt $M=(2{,}2)$.

b De cirkel heeft vergelijking $(x-2)^2+(y-2)^2=r^2$.
Punt $O(0{,}0)$ invullen geeft $r^2=8$.

Dus $(x-2)^2+(y-2)^2=8$

14 De snijpunten van de lijn met de assen zijn (3,0) en (0,2).

Het middelpunt van de cirkel is daarom $\left(\frac{3+0}{2},\frac{0+2}{2}\right)=\left(1\frac{1}{2},1\right)$.

De cirkel gaat door A en dus vind je $\left(x-1\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=3\frac{1}{4}$

15 Ga uit van de gegeven vergelijking: $c_1: x^2+y^2+px+12=0$

$$\begin{aligned} x^2+px+y^2+12 &= 0 \\ \left(x+\tfrac{1}{2}p\right)^2-\tfrac{1}{4}p^2+y^2+12 &= 0 \\ \left(x+\tfrac{1}{2}p\right)^2+y^2 &= \tfrac{1}{4}p^2-12 \end{aligned}$$

Dit stelt een cirkel voor met een straal groter dan 3 als $\frac{1}{4}p^2-12>3^2$. Los dus deze ongelijkheid op: $\frac{1}{4}p^2-12>9$, dan volgt $\frac{1}{4}p^2>21$ en $p^2>84$. Dus als $p<-\sqrt{84}$ en $p>\sqrt{84}$ dan is de straal van de cirkel groter dan 3.

16 Ga uit van de algemene vergelijking van een cirkel: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Vul hierin een keer punt A en een keer punt B in:

Punt A: $(0-a)^2+(0-b)^2=25$ dus $a^2+b^2=25$

Punt B: $(6-a)^2+(0-b)^2=25$ dus $36-12a+a^2+b^2=25$

Nu is het nog een kwestie van een stelsel oplossen van $a^2+b^2=25$ en $36-12a+a^2+b^2=25$. Trek de onderste van de bovenste af en je vindt $36-12a+25=25$ dus $a=3$.

Vul $a=3$ nu in bij $a^2+b^2=25$ en je vindt $9+b^2=25$ dus $b=-4 \vee b=4$.

Er zijn dus twee cirkels die aan het gevraagde voldoen: $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ en $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

17 a De diagonalen van een rechthoek zijn even lang en delen elkaar in gelijke delen. Elke rechthoekige driehoek is een halve rechthoek: de hypotenusa is een van de diagonalen. Het midden daarvan ligt daarom even ver van elk van de hoekpunten van de driehoek. En dus kun je met dat punt als middelpunt een cirkel door de drie hoekpunten tekenen.

b De rechthoekige driehoek heeft hoekpunten $O(0,0)$, $A(a,0)$ en $B(0,b)$. De schuine zijde (hypotenusa) is AB. Het midden van de schuine zijde is $M\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}b\right)$. De cirkel met dit punt als middelpunt en door $O(0,0)$ heeft vergelijking $\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}b\right)^2=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2$.

Ga nu na dat ook de punten A en B op deze cirkel liggen door hun coördinaten in te vullen in deze vergelijking.

18 a $|PF|=\sqrt{x^2+(y-2)^2}=y$, dus: $y^2=x^2+(y-2)^2$ en na uitwerken volgt $y^2=x^2+y^2-4y+4$ en dit herleid je tot $4y=x^2+4$.

b Voer in: Y1=(1/4)X^2+1

c De parabool is nu 90° gedraaid. Het idee is hetzelfde als bij a.
Noem het punt op de parabool Q, dan is:

$|QB|=\sqrt{y^2+(x-2)^2}=y$, en dus $4x=y^2+4$.

d Parabool wordt gespiegeld in de lijn met vergelijking $y=x$

19 a De algemene vergelijking van een cirkel is $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ waarin het middelpunt $M(a,b)$ en de straal r is. Dus is $M(2,-1)$ en $r^2=13$ zodat $r=\sqrt{13}$.

b (5,1) invullen geeft $(5-2)^2+(1+1)^2=13$ en die berekening klopt.

c $(1-2)^2+(3+1)^2>13$

20 De vergelijking van c is te herleiden tot $(x-3)^2+(y+2{,}5)^2=15{,}25$

Het middelpunt is $(3;-2{,}5)$. De straal is $\sqrt{15{,}25}$.

21 Maak een tekening. Het middelpunt $M(3{,}4)$ is het snijpunt van de lijn $y=4$ met de middelloodlijn van AB. De vergelijking wordt $(x-3)^2+(y-4)^2=r^2$. Het punt A moet er op liggen en kun je dus invullen. Dit geeft $r^2=20$.

De vergelijking wordt $(x-3)^2+(y-4)^2=20$.

Omdat $\sqrt{20}=\sqrt{4^2+2^2}$ liggen alle roosterpunten van de cirkel 4 links of rechts en 2 onder of boven het middelpunt, of 2 links of rechts en 4 onder of boven het middelpunt.

Je vindt dan de roosterpunten (1,0), (5,0), (1,8), (5,8), (-1,2), (-1,6), (7,2), (7,6).

8.4 Snijden en raken

V1 a Lijn door (0,5) en (10,0): $y = -0{,}5x + 5$.

Cirkel met middelpunt O en straal 5: $x^2 + y^2 = 25$.

b Snijpunten zijn (0,5) en (4,3).

De gevraagde afstand is $\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ cm.

c $\sqrt{20} \cdot 10 \approx 44{,}7$ km.

1 a $l : y = -\frac{1}{2}x + 4$ en $m : y = \frac{3}{4}x - 3$ geeft:

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x + 4 &= \tfrac{3}{4}x - 3 \\ -2x + 16 &= 3x - 12 \\ 5x &= 28 \\ x &= 5{,}6 \end{aligned}$$

Het snijpunt wordt $(5{,}6; 1{,}2)$

b $l : y = -\frac{1}{2}x + 4$ invullen in de andere vergelijking geeft

$$\begin{aligned} 3x - 4\left(-\tfrac{1}{2}x + 4\right) &= 12 \\ 3x + 2x - 16 &= 12 \\ 5x &= 28 \\ x &= 5{,}6 \end{aligned}$$

Weer krijg je $(5{,}6; 1{,}2)$

c $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases}$

geeft

$\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases}$

Nu beide vergelijkingen optellen (want dan valt y weg):

$5x = 28$

en dit geeft $x = 5{,}6$.

Weer vind je $(5{,}6; 1{,}2)$.

2 a Neem bijvoorbeeld de substitutiemethode.

Schrijf $m : x = -4y + 10$ en vul dit in de andere vergelijking in: $2(-4y + 10) - 3y = 6$.

Dit geeft: $-8y + 20 - 3y = 6$ en dus $-11y = -14$ zodat $y = \frac{14}{11}$.

Dan is $x = -4 \cdot \frac{14}{11} + 10 = \frac{54}{11}$. Het snijpunt wordt $\left(4\frac{10}{11}, 1\frac{3}{11}\right)$.

b De vergelijking van l levert meteen op $x = -3$.

Dit vul je in de andere vergelijking in: $-15 + 2y = 20$ geeft $y = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$.

Het snijpunt wordt $\left(-3, 17\frac{1}{2}\right)$.

3 Gebruik de balansmethode als je veel gereken met breuken wilt vermijden.

$\begin{cases} 5x - 3y = 15 \\ 2x - 6y = 11 \end{cases}$

wordt:

$$\begin{cases}10x - 6y = 30\\ 2x - 6y = 11\end{cases}$$

Beide vergelijkingen van elkaar aftrekken: $8x = 19$ geeft $x = 2\frac{3}{8}$.

Dit moet je nog wel in een van beide vergelijkingen invullen: $2 \cdot 2\frac{3}{8} - 6y = 11$ geeft $y = -1\frac{1}{24}$. Het snijpunt wordt $\left(2\frac{3}{8}, -1\frac{1}{24}\right)$.

4 De vergelijking van m kun je meteen invullen in die van l: $2x + 3\left(4 - \frac{2}{3}x\right) = 6$ geeft $12 = 6$.

Dat is onmogelijk, dus je kunt geen x en ook geen snijpunt berekenen.

Je kunt de vergelijking van l herleiden tot $y = -\frac{2}{3}x + 2$ en die van m tot $y = -\frac{2}{3}x + 4$. Beide lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, dus ze zijn evenwijdig.

5 a Lijnen niet evenwijdig: één oplossing.

Lijnen vallen samen: oneindig veel oplossingen.

Lijnen evenwijdig en niet samenvallend: geen oplossing.

b Probeer de snijpunten te berekenen en je zult zien dat het niet lukt.

Als je beide vergelijkingen omschrijft naar $y = ...$, dan zie je dat beide lijnen dezelfde rc hebben en dus evenwijdig zijn (zonder samen te vallen omdat de vergelijkingen toch verschillend zijn; de snijpunten met de y-as zijn verschillend).
Het aantal snijpunten is 0.

c Probeer de snijpunten te berekenen en je zult zien dat het niet lukt, maar er ontstaat wel iets dat altijd waar is.

Als je de vergelijkingen omschrijft naar $y = ...$, dan zie je dat beide lijnen dezelfde rc hebben en dezelfde constante hebben; dus hetzelfde snijpunt met de y-as. Beide lijnen vallen dus samen, beide vergelijkingen beschrijven dezelfde lijn.

Er zijn oneindig veel snijpunten, omdat elk punt van de lijn voldoet aan beide vergelijkingen.

6 $m: y = 2x - 4$ invullen in de cirkelvergelijking geeft $x^2 + (2x - 4)^2 = 25$.

Dit levert op: $5x^2 - 16x - 9 = 0$ en dus $x \approx -0{,}49 \vee x \approx 3{,}69$.

De snijpunten zijn $(-0{,}49; -4{,}98)$ en $(3{,}69; 3{,}38)$.

7 0,1, of 2.

8 Vul de vergelijking van k in die van c in: $x^2 + (-0{,}75x + 6{,}25)^2 = 25$

Dit levert op: $1{,}5625x^2 - 9{,}375x + 14{,}0625 = 0$ en met de abc-formule: $x = 3$.

Er is maar één snijpunt, namelijk (3,4).

9 $m: y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ invullen in de vergelijking van l geeft $2x - \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) = 2$ en dus $\frac{7}{3}x = \frac{10}{3}$, zodat $x = \frac{10}{7}$

10
$$\begin{cases}2x - y = 2\\ x + 3y = 4\end{cases}$$

omschrijven naar

$$\begin{cases}2x - y = 2\\ 2x + 6y = 8\end{cases}$$

Beide vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft: $-7y = -6$ en dus $y = \frac{6}{7}$.

Dit moet je nog invullen in één van beide gegeven vergelijkingen.

Snijpunt $\left(\frac{10}{7},\frac{6}{7}\right)$.

11 a $m: x = 10-4y$ invullen in de vergelijking van l geeft $2(10-4y)-3y = 6$ en dus $y = \frac{14}{11}$. Dit invullen geeft $x = 10-4\cdot\frac{14}{11} = 4\frac{10}{11}$. Dus je krijgt $\left(4\frac{10}{11},1\frac{3}{11}\right)$.

b l herleiden naar $y = -3$ en invullen in de vergelijking van m geeft $x = 5\frac{1}{5}$.

Dus je krijgt $\left(5\frac{1}{5},-3\right)$.

c $y = 4-\frac{2}{3}x$ invullen in de vergelijking van l geeft $2x-3\left(4-\frac{2}{3}x\right) = 6$.

Hieruit volgt: $4x = 18$ en dus $x = 4\frac{1}{2}$. Hierbij vind je $y = 1$.

Dus het snijpunt is $\left(4\frac{1}{2},1\right)$.

12 a Nu wil je p berekenen als l en m_p geen snijpunt hebben. Weer schrijf je de vergelijking van l als $y = 2x-2$. Vul dit in de vergelijking van m_p in: $x+p(2x-2) = 4$. Dit geeft: $(1+2p)x = 4+2p$. Deze laatste vergelijking heeft geen oplossingen als $1+2p = 0$ en $4+2p \neq 0$. Dus alleen voor $p = -0{,}5$ hebben l en m_p geen oplossing.

b $l: x = 12-5y$ invullen in de vergelijking van m_p geeft: $p(12-5y)-y = 4$.

Dus je vindt: $12p-5py-y = 4$.

Er is geen oplossing als de y wegvalt, dus als $-5p = 1$. Dat geeft $p = -\frac{1}{5}$.

13 Het beste kun je nu in de vergelijking van c_2 de haakjes wegwerken: $x^2+y^2-4x-6y = -4$.

Vervolgens pas je de balansmethode toe op het stelsel:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-6y = -4 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases}$$

Je ziet dat door de beide linkerzijden en de beide rechterzijden van elkaar af te trekken er een lineaire uitdrukking overblijft: $-4x-6y = -29$ ofwel: $x = -1{,}5y+7{,}25$.

Dit vul je in een van beide cirkelvergelijkingen in: $(-1{,}5y+7{,}25)^2+y^2 = 25$.

Hieruit bereken je de twee y-waarden van de snijpunten. De twee y-waarden vind je dan weer met $x = -1{,}5y+7{,}25$.

$(-1{,}5y+7{,}25)^2+y^2 = 25$ oplossen geeft $y = 1{,}7$ en $y = 5{,}0$.

Dit invullen in $x = -1{,}5y+7{,}25$ geeft $x = 4{,}7$ en $x = -0{,}25$;

je vindt $(4{,}7;1{,}7)$ en $(-0{,}25;5{,}0)$.

14 a De x-as heeft vergelijking $y = 0$.

Dit geeft $(x-3)^2+5^2 = 25$ en dus $x = 3$. Het enige snijpunt is $(3,0)$.

b De y-as heeft vergelijking $x = 0$.

Dit geeft $(-3)^2+(y+5)^2 = 25$ ofwel $(y+5)^2 = 16$ zodat $y = -9 \vee y = -1$.

De snijpunten worden $(0,-1)$ en $(0,-9)$.

c $k: y = 1-x$ invullen in de cirkelvergelijking: $(x-3)^2+(6-x)^2 = 25$.

Hieruit volgt: $2x^2-18x+20 = 0$ en dus $x^2-9x+10 = 0$.

Dit geeft met de abc-formule $x \approx 7{,}70 \vee x \approx 1{,}30$. En deze waarden vul je in $y = 1-x$ in.

De snijpunten worden $(1{,}30;-0{,}30),(7{,}70;-6{,}70)$.

15 a Bij beide vergelijkingen haakjes uitwerken geeft:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 5 \\ x^2 + y^2 - 4x = 5 \end{cases}$$

Beide vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft $-4y + 4x = 0$ ofwel $y = x$.

Dit invullen in de vergelijking van (bijvoorbeeld) c_1 geeft $x^2 + (x-2)^2 = 9$ en dus $2x^2 - 4x - 5 = 0$. Met de abc-formule levert dit $x \approx -0{,}87 \vee x \approx 2{,}87$ op.

De snijpunten zijn daarom $(-0{,}87; -0{,}87)$ en $(2{,}87; 2{,}87)$.

b Voor de x-as geldt $y = 0$, dus $x^2 + 4 = 9$ zodat $x = -\sqrt{5} \vee x = \sqrt{5}$. Dit levert op $\left(-\sqrt{5}, 0\right)$ en $\left(\sqrt{5}, 0\right)$.

Voor de y-as geldt $x = 0$, dus $(y-2)^2 = 9$ zodat $y = 5 \vee y = -1$. Dit levert op $(0,5)$ en $(0,-1)$.

c l gaat door $M_1(0,2)$ en $M_2(2,0)$ en heeft dus vergelijking $y = -x + 2$.

Dit invullen in de vergelijking van c_1 geeft $x^2 + (-x)^2 = 9$ en dus $x^2 = 4{,}5$. Dus $x = -\sqrt{4{,}5} \vee x = \sqrt{4{,}5}$. Je vindt $(2{,}12; -0{,}12)$ en $(-2{,}12; 4{,}12)$.

d De vier snijpunten zijn (die van c_2 en l moet je nog uitrekenen): $(2{,}12; -0{,}12)$ en $(-2{,}12; 4{,}12)$ en $(-0{,}12; 2{,}12)$ en $(4{,}12; -2{,}12)$.

De grootste afstand is die tussen $(-2{,}12; 4{,}12)$ en $(4{,}12; -2{,}12)$. Die is ongeveer 8,8. Maak eventueel een schets.

16 a Schrijf de vergelijking van de lijn als $x = 4 - py$. Substitueer dit voor de x in de cirkelvergelijking: $(4-py)^2 + y^2 = 4$.

Haakjes uitwerken: $\left(1 + p^2\right)y^2 - 8py + 12 = 0$. Een dergelijke vergelijking los je op met de abc-formule. Je vindt dan slechts één antwoord als de discriminant 0 is. Hier betekent dit dat: $(8p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot \left(1 + p^2\right) = 0$. Ga na dat daaruit volgt: $p^2 = 3$. Je vindt dus twee waarden van p waarbij de lijn slechts één punt met de cirkel gemeen heeft en dus een raaklijn aan de cirkel is, namelijk: $p = \sqrt{3}$ en $p = -\sqrt{3}$.

b $y = ax + 3$ invullen in de cirkelvergelijking geeft $x^2 + (ax+3)^2 = 4$ en dus $\left(1 + a^2\right)x^2 + 6ax + 5 = 0$.

$D = 0$ geeft $36a^2 - 20\left(1 + a^2\right) = 0$ en dus $a^2 = \frac{5}{4}$.

Dus $a = -\frac{1}{2}\sqrt{5} \vee a = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

17 Bereken de snijpunten van de cirkel met de lijn m. Dit kun je doen door middel van substitutie: $x^2 + (4x + p)^2 = 25$. Werk hier de haakjes weg: $x^2 + 16x^2 + 8px + p^2 = 25$. Herleid vervolgens op 0: $x^2 + 16x^2 + 8px + p^2 - 25 = 0$ en schrijf in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ want dan kun je de abc-formule toepassen: $17x^2 + 8px + p^2 - 25 = 0$.
Dus dan geldt $a = 17$; $b = 8p$; $c = p^2 - 25$. Omdat cirkel en lijn elkaar moeten raken, mag er maar één oplossing voor x zijn, en dit betekent dat de waarde van de discriminant gelijk moet zijn aan 0. Dus $b^2 - 4ac = 0$ en dan volgt $(8p)^2 - 4 \cdot 17 \cdot \left(p^2 - 25\right) = 0$. Dit is nu een kwadratische vergelijking waarin je p moet oplossen:

$$\begin{aligned} 64p^2 - 68p^2 + 1700 &= 0 \\ 4p^2 &= 1700 \\ p = -\sqrt{425} \ &\vee \ p = \sqrt{425} \end{aligned}$$

18 a $l: y = 6 - x$ geeft $(x-1)^2 + (5-x)^2 = 10$ en dus $x^2 - 6x + 8 = 0$ zodat $x = 2 \vee x = 4$.

Je krijgt daarmee de snijpunten $(2,4)$ en $(4,2)$.

b $k: x = 6 - 1{,}5y$ invullen geeft $5(6 - 1{,}5y) - 2y = 10$ en dus $y = \frac{40}{19}$.

Het snijpunt is $\left(\frac{54}{19}, \frac{40}{19}\right)$, dus ongeveer $(2{,}84; 2{,}11)$.

c $\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x^2+y^2-2x-2y=8 \end{cases}$ geeft $2x+2y=-2$ ofwel $y=-x-1$.

Dit invullen in $x^2+y^2=6$ geeft $x^2+(x+1)^2=6$ en dus $x\approx 1{,}16 \vee x\approx -2{,}16$.

De snijpunten zijn $(1{,}16;-2{,}16)$ en $(-2{,}16;1{,}16)$.

19 $2x=y+6$ kun je herleiden tot $y=2x-6$.

Dit geeft $ax+4(2x-6)=10$ ofwel $ax+8x=34$. Er zijn geen oplossingen als $a=-8$ want dan verdwijnt de variabele x uit deze vergelijking.

20 $c:(x-2)^2+(y-1)^2=16$ en $l: y=-0{,}6x+3$.

Snijden:

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(-0{,}6x+2)^2 &= 16\\ 1{,}36x^2-6{,}4x-8 &= 0\\ x &\approx -1{,}03 \vee x\approx 5{,}73\end{aligned}$$

Dus de snijpunten zijn $(-1{,}03;3{,}62)$ en $(5{,}73;-0{,}44)$.

Hun onderlinge afstand is ongeveer 7,9.

21 a $c:(x-3)^2+y^2=4$

Middelpunt: $M(3{,}0)$
Straal: 2

b Oplossing:

$$\begin{aligned}x^2+a^2x^2-6x+5 &= 0\\ \left(1+a^2\right)x^2-6x+5 &= 0\end{aligned}$$

Uit $D=0$ volgt $36-20\left(1+a^2\right)=0$ en dus $a=-\sqrt{0{,}8} \vee a=\sqrt{0{,}8}$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned}x^2+(x+b)^2-6x+5 &= 0\\ 2x^2+(2b-6)x+b^2+5 &= 0\end{aligned}$$

Uit $D=0$ volgt $(2b-6)^2-8\left(b^2+5\right)=0$ en dus $b^2+6b+1=0$ en $b=-3-\sqrt{8} \vee b=-3+\sqrt{8}$.

22 De vergelijking van de cirkel heeft de vorm: $c:(x-7)^2+(y-4)^2=r^2$.

De lijn $x+y=2$ kun je omschrijven naar $y=-x+2$.

Invullen in de cirkelvergelijking $(x-7)^2+(-x-2)^2=r^2$ en dus $2x^2-10x+53-r^2=0$.

De discriminant ven deze vergelijking moet 0 zijn, dus $100-8\left(53-r^2\right)=0$.
Dit geeft $r^2=40{,}5$.

De gevraagde cirkel wordt $c:(x-7)^2+(y-4)^2=40{,}5$.

23 Schrijf de vergelijking van l als $y=-\frac{4}{3}$.

De raaklijn heeft vergelijking $r: y=-\frac{4}{3}x+q$.

Snijden met de cirkel geeft $x^2+\left(-\frac{4}{3}x+q\right)^2-25=0$ en dus $25x^2-24qx+9q^2-225=0$.

$D=(-24q)^2-4\cdot 25\cdot\left(9q^2-225\right)=0$ geeft $q=-8\frac{1}{3} \vee q=8\frac{1}{3}$.

De gevraagde vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y=-\frac{4}{3}x+8\frac{1}{3}$ en $y=-\frac{4}{3}x-8\frac{1}{3}$.

24 Met de x-as als A1 en $M(0{,}15)$ als mast wordt de grens van het bereik gegeven door de cirkel: $x^2+(y-15)^2=900$. De cirkel snijden met x-as: $y=0$ geeft $x^2+225=900$ en dus $x=-\sqrt{675} \vee x=\sqrt{675}$. De gevraagde afstand is $2\cdot\sqrt{675}\approx 52{,}0$ km.

25 a De straal van c_1 is $2a$ en het middelpunt $A(-a,0)$.

Dus $c_1 : (x+a)^2 + y^2 = 4a^2$.

b De straal van c_2 is $2a$ en het middelpunt $B(a,0)$.

Dus $c_2 : (x-a)^2 + y^2 = 4a^2$.

c $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax = 3a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax = 3a^2 \end{cases}$

geeft $4ax = 0$ en dus $x = 0$.

Dit betekent $a^2 + y^2 = 4a^2$ zodat $y = -\sqrt{3a^2} = -a\sqrt{3} \vee y = a\sqrt{3}$. Dus zijn de snijpunten $\left(0,a\sqrt{3}\right)$ en $\left(0,-a\sqrt{3}\right)$.

d Neem $C\left(0,a\sqrt{3}\right)$.

Dan is $|AC| = \sqrt{4a^2} = 2a$ en $|BC| = \sqrt{4a^2} = 2a$. Ook $|AB| = 2a$.

26 a $l : x = 12 - 4y$ geeft $2(12-4y) - 3y = -20$ en dus $y = 4$. Snijpunt $(-4,4)$.

b $l : x = 12 - 4y$ geeft $(5-4y)^2 + (y+3)^2 = 34$ geeft $17y^2 - 34y = 0$ en dus $y = 0 \vee y = 2$. De snijpunten zijn daarom $(4,2)$ en $(12,0)$.

c $\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x + 6y = -24 \\ \qquad x^2 + y^2 + 6y = 4 \end{cases}$

geeft $-14x = -28$ en dus $x = 2$.

De snijpunten zijn $(2,0)$ en $(2,-6)$.

27 $px - y = 15$ herleid je tot $y = px - 15$.

$2x + 7(px - 15) = 28$ geeft $2x + 7px - 105 = 28$.

Er zijn geen oplossingen als $7p = -2$ dus $p = -\frac{2}{7}$.

28 a $c : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$ en $l : y = -0{,}6x + 3$.

Snijden: $(x-2)^2 + (-0{,}6x+2)^2 = 16$ geeft $1{,}36x^2 - 6{,}4x - 8 = 0$ en dus $x \approx -1{,}03 \vee x \approx 5{,}73$. Dus de snijpunten zijn $(-1{,}03; 3{,}62)$ en $(5{,}73; -0{,}44)$.

Hun onderlinge afstand is ongeveer 7,9.

b $c : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$ en $l : y = ax + 6$.

Snijden: $(x-2)^2 + (ax+5)^2 = 16$ geeft $\left(1+a^2\right)x^2 + (10a-4)x + 13 = 0$.

$D = 0$ geeft $(10a-4)^2 - 52\left(1+a^2\right) = 0$ en dus $12a^2 - 20a - 9 = 0$. Dus $a = \frac{20 \pm \sqrt{832}}{24} = \frac{5}{6} \pm \frac{1}{3}\sqrt{13}$. De twee raaklijnen zijn $y = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\sqrt{13}\right)x + 6$ en $y = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\sqrt{13}\right)x + 6$.

8.5 Loodrechte stand

V1 a Teken dit. Je ziet dan dat de vergelijking van de lijn $y = 2x$ is.

b Het product van de richtingscoëfficiënten is -1.

1 De richtingscoëfficiënt van p is 0,25 en de richtingscoëfficiënt van q is -4.
Als je beide getallen vermenigvuldigt, krijg je $0{,}25 \cdot -4 = -1$.

2 De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{2}{5}$. Om dit in te zien herleid je $2x - 5y = 10$ naar $y = \frac{2}{5}x - 2$.

Een lijn die daar loodrecht op staat moet een richtingscoëfficiënt hebben waarvoor geldt: $\frac{2}{5} \cdot r = -1$.

Hieruit volgt dat de richtingscoëfficiënt van die loodlijn $-\frac{5}{2} = -2{,}5$ moet zijn.

3 a Ja.

b Vul het punt P met de coördinaten (3,5) in de cirkelvergelijking $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$ in.

Dit levert $(3-1)^2 + (5-2)^2 = 13$ ofwel $2^2 + 3^2 = 13$ en dit klopt. P ligt dus op de cirkel.

c De richtingscoëfficiënt van lijn MP is $\frac{3}{2}$. De richtingscoëfficiënt van een loodlijn daarop is $-\frac{2}{3}$ want $\frac{3}{2} \cdot -\frac{2}{3} = -1$. De raaklijn heeft dus een vergelijking van de vorm $y = -\frac{2}{3}x + b$. Vul daarin de coördinaten van P in en je vindt $b = 7$. De raaklijn in P aan c heeft dus vergelijking $y = -\frac{2}{3}x + 7$.

4 Punt A ligt op de cirkel (vul de coördinaten ervan maar in). Schrijf de vergelijking van de cirkel als $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13$ en je ziet dat het middelpunt $M(2,-3)$ is. De lijn OM heeft een richtingscoëfficiënt van $-\frac{3}{2}$, dus de raaklijn heeft een richtingscoëfficiënt van $\frac{2}{3}$. De raaklijn is een lijn met rc $\frac{2}{3}$ en door $O(0,0)$, dus heeft vergelijking $y = \frac{2}{3}x$.

5 De lijn $p : y = \frac{3}{4}x - 3$ heeft een richtingscoëfficiënt van $\frac{3}{4}$.

De lijn q daar loodrecht op heeft een richtingscoëfficiënt r waarvoor geldt $\frac{3}{4} \cdot r = -1$, dus $r = -\frac{4}{3}$.

Lijn q moet door $O(0,0)$ en heeft als vergelijking $y = -\frac{4}{3}x$.

6 De richtingscoëfficiënt van lijn l is 2,5, dus $l : y = 2{,}5x$.
De richtingscoëfficiënt van lijn m is $\frac{3-5}{7-4} = -0{,}4$ dus $m : y = -0{,}4x + 5{,}8$.
Het product van beide richtingscoëfficiënten is $2{,}5 \cdot -0{,}4 = -1$ en daarom staan beide lijnen loodrecht op elkaar.

7 a De lijn AB heeft vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 4$ en dus een richtingscoëfficiënt van $-\frac{1}{2}$.

Een lijn daar loodrecht op heeft een richtingscoëfficiënt r waarvoor geldt $-\frac{1}{2} \cdot r = -1$, dus $r = 2$.

De lijn door C loodrecht op AB heeft dus als vergelijking $y = 2x + 5$.

b De lijn AB heeft vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 4$ en dus een richtingscoëfficiënt van $-\frac{1}{2}$.

Een lijn daar loodrecht op heeft een richtingscoëfficiënt r waarvoor geldt $-\frac{1}{2} \cdot r = -1$, dus $r = 2$.

De lijn door het midden $(3; 2{,}5)$ van AB en loodrecht op AB heeft dus als vergelijking $y = 2x - 3{,}5$.

8 a c heeft middelpunt $M(2,-3)$, dus de helling van MQ is $\frac{-3--6}{2-6} = -\frac{3}{4}$. De helling van de raaklijn door Q is dus $\frac{4}{3}$.

De raaklijn is dus van de vorm $y = \frac{4}{3}x + b$. Invullen van $Q(6,-6)$:

$-6 = \frac{4}{3} \cdot 6 + b$

$b = -14$

b Eigen antwoorden.

9 a M moet even ver van A als van B liggen en moet dus op de middelloodlijn van AB liggen. M moet ook even ver van B als van C liggen en dus op de middelloodlijn van BC liggen.

b De middelloodlijn van AB heeft vergelijking $y = -2x + 7$. De middelloodlijn van BC heeft vergelijking $y = 0{,}5x - 0{,}5$. Het middelpunt van de cirkel is het snijpunt van deze twee lijnen en dus $M(3{,}1)$. De straal van de cirkel is $\sqrt{10}$.

De cirkel c heeft vergelijking $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$.

c De richtingscoëfficiënt van MA is $\frac{2-1}{0-3} = -\frac{1}{3}$. De raaklijn aan c in A heeft dus een richtingscoëfficiënt 3, want $-\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$.

De raaklijn heeft dus de vorm $y = 3x + b$. Nu $A(0{,}2)$ invullen geeft:

$2 = 3 \cdot 0 + b$, ofwel $y = 3x + 2$.

10 a De straal van die cirkel is 1, dus de vergelijking is $x^2 + y^2 = 1$.

b De snijpunten met de x-as ($y = 0$) zijn $B(1{,}0)$ en $A(-1{,}0)$.

De snijpunten met $y = ax$ vind je uit $x^2 + (ax)^2 = 1$, dus uit $\left(1 + a^2\right)x^2 = 1$ zodat $x^2 = \frac{1}{1+a^2}$ en

$x = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \vee x = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

Dit levert de snijpunten $C\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$ en $D\left(-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$ op.

c In $\triangle ABC$ geldt:

$|BC|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} - 1\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2$

$|AC|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + 1\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2$

$|AB|^2 = 2^2 = 4$

Er geldt: $|AC|^2 + |BC|^2 = 4 = |AB|^2$. Pythagoras klopt, zodat $\triangle ABC$ rechthoekig is, waardoor $AC \perp BC$. Net zo bij andere zijden, dus het is een rechthoek. En dus is ook $\angle C$ recht.

Je kunt in plaats hiervan ook laten zien dat het product van de richtingscoëfficiënten van de lijnen AC en BC gelijk is aan -1.

d In $\triangle ABD$ geldt:

$|BD|^2 = \left(\frac{x-1}{\sqrt{1+a^2}} - 1\right)^2 + \left(\frac{-a}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2$

$|AD|^2 = \left(\frac{x-1}{\sqrt{1+a^2}} + 1\right)^2 + \left(\frac{-a}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2$

$|AB|^2 = 2^2 = 4$

Er geldt: $|AD|^2 + |BD|^2 = 4 = |AB|^2$. Pythagoras klopt, zodat $\triangle ABD$ rechthoekig is, waardoor $AD \perp BD$. Net zo bij andere zijden, dus het is een rechthoek. En dus is ook $\angle D$ recht.

Je kunt in plaats hiervan ook laten zien dat het product van de richtingscoëfficiënten van de lijnen AD en BD gelijk is aan -1.

e AB en CD zijn beide diameters van een cirkel en dus even lang. Ook delen ze elkaar middendoor.

Een vierhoek met even lange diagonalen die elkaar middendoor delen, is een rechthoek.

11 a Als een rechthoekige ΔABC een rechte hoek heeft bij C dan is AB de middellijn van een cirkel door alle drie de hoekpunten van ΔABC.

b Dat het midden M van lijnstuk AB even ver van C als van A en B af ligt.

c Neem $A(a,0)$, $B(0,b)$ en $C(0,0)$, dan is $M\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}b\right)$.

Laat zien, dat $|MC| = |MA| = |MB| = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2}$

12 a De gevraagde lijn moet door punt $P(120,31)$ gaan en loodrecht staan op lijn l.

Bereken dan eerst de richtingscoëfficiënt van lijn l. Deze is gelijk aan $\frac{5}{8}$. Dus de gevraagde lijn heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{8}{5}$. Gebruik vervolgens de coördinaten van punt P in $y = -1{,}6x + b$ om de waarden van a en b uit te rekenen. Je vindt dan $y = -1{,}6x + 223$.

b Punt S is $\left(102\frac{9}{89},59\frac{284}{445}\right)$.

Dus $PS = \sqrt{\left(17\frac{80}{89}\right)^2 + \left(28\frac{284}{445}\right)^2} \approx 33{,}77$

c Bepaal eerst het midden van PQ. Dit is het punt met de coördinaten $(122,34)$. Dit is dus een punt op de gevraagde middelloodlijn. De richtingscoëfficiënt van de lijn PQ is gelijk aan $\frac{3}{2}$. Die van de loodlijn dus $-\frac{2}{3}$. Gebruik de coördinaten $(122,34)$ en de gevonden richtingscoëfficiënt voor de middelloodlijn in $y = ax + b$ en je vindt $y = -\frac{2}{3}x + 115\frac{1}{3}$.

13 a De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{2}{5}$, dus die van elke loodlijn daarop is $-\frac{5}{2} = -2{,}5$.

$y = -2{,}5x + b$ door C geeft $b = 10$, dus de gevraagde vergelijking wordt $p: y = -2{,}5x + 10$.

b Los op $0{,}4x + 2 = -2{,}5x + 10$ en je vindt $x = \frac{80}{29}$.

Het snijpunt is $D\left(2\frac{22}{29},3\frac{3}{29}\right) \approx D(2{,}76;3{,}10)$.

c $|AB| = \sqrt{(5-0)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{29}$

$|CD| = \sqrt{\left(2-2\frac{22}{29}\right)^2 + \left(5-3\frac{3}{29}\right)^2} = \frac{11}{29}\sqrt{29}$

De gevraagde oppervlakte is $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{11}{29}\sqrt{29} = 5{,}5$.

14 a De coördinaten van A voldoen aan de gegeven vergelijking en dus ligt dit punt op c. Om na te gaan dat B buiten de cirkel ligt, herleid je de cirkelvergelijking tot $(x-4)^2+(y-2)^2 = 25$. Het middelpunt van de cirkel is $M(4,2)$ en de straal is 5. Nu moet je alleen nog nagaan dat $|BM| > 5$. Dat kan met de stelling van Pythagoras. Je vindt dan dat $|BM| = 5\sqrt{2}$

b Lijn AM heeft een richtingscoëfficiënt van $\frac{3}{4}$, dus de raaklijn heeft een richtingscoëfficiënt van $-\frac{4}{3}$.

De raaklijn gaat door $A(8,5)$ en heeft dus vergelijking $y = -\frac{4}{3}x + 15\frac{2}{3}$.

c De richtingscoëfficiënt is onbekend, dus (bijvoorbeeld) a. Je krijgt dan $y = ax + b$ en omdat beide lijnen door $B(-3,3)$ moeten gaan, geldt $b = 3 + 3a$.

d Vul $y = ax + 3 + 3a$ in de cirkelvergelijking in en werk de haakjes weg. Je vindt dan $y = \frac{3}{4}x + 5\frac{1}{4}$ en $y = -\frac{4}{3}x - 1$.

15 a De zwaartelijn door C gaat door de oorsprong, dus $y = \frac{c}{b}x$.

b Het midden M van BC is $M\left(\frac{a-b}{2},\frac{c}{2}\right)$.

Richtingscoëfficiënt $AM = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)-0}{\frac{a+b}{2}+a} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{3a+b}{2}} = \frac{c}{3a+b}$.

Invullen van bijvoorbeeld $A(-a,0)$ levert $y = \frac{c}{3a+b}x + \frac{ac}{3a+b}$.

c $\frac{c}{3a+b}x + \frac{ac}{3a+b} = \frac{c}{b}x$ geeft $\left(\frac{c}{b} - \frac{c}{3a+b}\right)x = \frac{ac}{3a+b}$ en hieruit volgt $x = \frac{1}{3}b$. Je krijgt zo $Z\left(\frac{1}{3}b, \frac{1}{3}c\right)$.

d Voor de derde zwaartelijn geldt $y = \frac{c}{-3a+b}x - \frac{ac}{-3a+b}$. Het punt Z voldoet aan deze vergelijking.

16 a Neem OA als middellijn van een cirkel. Omdat OP en AQ hoogtelijnen zijn, zij de hoeken bij P en Q recht. De stelling van Thales zegt dat als de schuine zijde van een rechthoekige driehoek de middellijn van een cirkel is, dat het hoekpunt bij de rechte hoek dan op die cirkel ligt. Dat is het geval bij zowel P als Q. O, A, P en Q liggen dus alle vier op dezelfde cirkel.

b Stel vergelijkingen op van de lijnen waarmee je de coördinaten van P en Q kunt uitrekenen.

Lijn OP wordt $-x + 2y = 0$ en lijn AB wordt $-2x - y = -10$. Deze snijden levert het punt $P(4,2)$.

Lijn AQ wordt $-x - 3y = -5$ en lijn OB wordt $-3x + y = 0$. Deze snijden levert het punt $Q(0{,}5; 1{,}5)$.

c Middelpunt van de gevraagde cirkel is het midden van OA. Je vindt het middelpunt $M(2{,}5; 0)$. Je hebt dan $(x - 2{,}5)^2 + y^2 = r^2$. Vul dan één van de vier punten in om de cirkelvergelijking te vinden: $(x - 2{,}5)^2 + y^2 = 6{,}25$.

d Raaklijn in P: $y = -0{,}75x + 5$. Raaklijn in Q: $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{6}$. Snijpunt $S(2; 3{,}5)$.

17 Neem ΔABC met $A(-a,0)$, $B(b,0)$ en $C(0,c)$ (a, b en c zijn positief). De hoogtelijn door C is dan $x = 0$, die uit A is $y = \frac{b}{c}x + \frac{ab}{c}$ en die uit B is $y = -\frac{a}{c}x + \frac{ab}{c}$. Alle drie de hoogtelijnen gaan door $H\left(0, \frac{ab}{c}\right)$.

18 Maak zo nodig een schets voor het overzicht.

Je ziet dat $r_m \cdot r_n = -1$, dus m en n staan loodrecht op elkaar. ABC is dus een rechthoekige driehoek, met AC als schuine zijde. De stelling van Thales zegt dat het middelpunt van de omschreven cirkel van ABC midden op de lijn AC ligt, en deze dus een straal $\frac{1}{2}|AC|$ heeft.

Nu is het een kwestie van de coördinaten van A en C bepalen:

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}x + 2 &= -\tfrac{1}{2}x + 7 \\ \tfrac{5}{4}x &= 5 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Dat geeft $y = 5$, en A ligt dus op $(4,5)$. Punt C:

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}x + 2 &= 2x - 13 \\ \tfrac{5}{4}x &= 15 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Dat geeft $y = 11$, en C ligt dus op $(12,11)$.

Noem het middelpunt van de omschreven cirkel M. Dan ligt M dus op $(8,8)$. Verder is $|AC| = \sqrt{(12-4)^2 + (11-5)^2} = 10$, dus de straal van de omschreven cirkel is 5.

De vergelijking van de omschreven cirkel is dus $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 = 25$.

19 a $x = 0$

b $y = \frac{a-b}{c}x + \frac{a^2-b^2-1}{2c}$

c $M\left(0, \frac{a^2-b^2-1}{2c}\right)$

d Voor de derde middelloodlijn geldt $y = -\frac{a+b}{c}x + \frac{a^2-b^2-1}{2c}$. Het punt M voldoet aan deze vergelijking.

20 a Schrijf l om naar $y = \frac{1}{3}x - 20$. Noem de op te stellen lijn m. Nu weten we dat de helling van m gelijk -3 is, omdat die loodrecht staat op l. Dus:

$m: y = -3x + b$

P substitueren:

$44 = -3 \cdot 12 + b$

$b = 80$

Dus $m: y = -3x + 80$

b Punt S is het snijpunt tussen de zojuist opgestelde lijn m met l:

$-3x + 80 = \frac{1}{3}x - 20$

$\frac{10}{3}x = 100$

$x = 30$

Waaruit volgt $y = -10$. Dus S is $(30, -10)$, en $|PS| = \sqrt{(30-12)^2 + (-10-44)^2} = \sqrt{3240} \approx 56{,}92$

21 a $4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17$ en $6 \cdot 4 + 6 \cdot 1 - 13 = 24 + 6 - 13 = 17$. Dus de coördinaten van A voldoen aan de gegeven vergelijking en dus ligt dit punt op c.

b Schrijf de vergelijking van de cirkel om naar $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 5$. Het middelpunt M ligt dus in $(3{,}3)$, en de helling van $AM = \frac{1-3}{4-3} = -2$. De helling van de raaklijn is dus 0,5, en heeft de vorm $y = 0{,}5x + b$. Punt A invullen geeft:

$1 = 0{,}5 \cdot 4 + b$

$b = -1$

En de raaklijn door A is $y = 0{,}5x - 1$.

c Deze raaklijnen hebben de vorm $y = ax$. Invullen in de cirkelvergelijking en vervolgens de discriminant gelijkstellen aan 0 geeft $a \approx 0{,}23 \vee a \approx 4{,}27$

8.6 Totaalbeeld

1 a De richtingscoëfficiënt van AB is $\frac{-2-3}{2-12} = 0{,}5$. De lijn heeft dus vergelijking $y = 0{,}5x + b$ en gaat door $A(12,3)$, zodat $b = -3$. De vergelijking van AB wordt $y = 0{,}5x - 3$.

Het snijpunt van l en m vind je uit $5x - 4(0{,}5x - 3) = 40$. Dit geeft $x = 9\frac{1}{3}$ en $y = 1\frac{2}{3}$. Het snijpunt is dus $\left(9\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}\right)$.

b Het midden M van lijnstuk AB is $\left(\frac{12+2}{2}, \frac{3+-2}{2}\right) = \left(7, \frac{1}{2}\right)$.

Een lijn loodrecht op AB heeft als rc $\frac{-1}{0{,}5} = -2$.

De lijn p door M met een richtingscoëfficiënt van -2 heeft vergelijking $y = -2x + 14{,}5$.

c Het snijpunt van l en p kun je berekenen met $5x - 4(-2x + 14{,}5) = 40$. Dit geeft $x = \frac{98}{13}$ en $y = -\frac{15}{26}$.

Dus $C\left(\frac{98}{13}, -\frac{15}{26}\right)$.

2 a De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{105-65}{-22-58} = -0{,}5$.

Lijn l gaat door $A(-22,105)$ en heeft dus vergelijking $y = -0{,}5x + 94$.

b Lijn m heeft een richtingscoëfficiënt van $\frac{-1}{-0{,}5} = 2$.

Lijn m gaat door $C(24,0)$ en heeft dus vergelijking $y = 2x - 48$.

c $c_1 : (x-20)^2 + (y-3)^2 = r^2$ door $C(24,0)$ geeft $r^2 = 25$.

De vergelijking is dus $c_1 : (x-20)^2 + (y-3)^2 = 25$.

d Herleid beide cirkelvergelijkingen:

$c_1 : x^2 + y^2 - 40x - 6y = -384$

$c_2 : x^2 + y^2 - 48x = -574$

Trek beide vergelijkingen van elkaar af: $8x - 6y = 190$, ofwel $4x - 3y = 95$. En dit is meteen de vergelijking van de lijn n.

3 Maak een tekening met daarin de punten O en A. Omdat het middelpunt M van de cirkel even ver van zowel O als A af moet liggen is ΔOMA gelijkbenig en de y-waarde van punt M dus 3. Er zijn twee punten M mogelijk, die symmetrisch liggen ten opzichte van de y-as. Met de stelling van Pythagoras bereken je hun x-waarden: $x = -2 \vee x = 2$.

Bij $M_1(2,3)$ hoort $c_1 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$

Bij $M_2(-2,3)$ hoort $c_1 : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 13$

4 a Vul de coördinaten van A in de vergelijking van c in. Ze voldoen.

b $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 8$ omschrijven naar $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 13$ geeft $M(1,2)$.

Richtingscoëfficiënt $MA = -\frac{2}{3}$

Richtingscoëfficiënt raaklijn $= \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = 1{,}5$

$y = 1{,}5x + b$, A invullen geeft $y = 1{,}5x - 6$

c De richtingscoëfficiënt van deze lijnen moet $-\frac{2}{3}$ zijn. $y = -\frac{2}{3}x + b$ invullen in de cirkelvergelijking en dan werken met de discriminant. Je vindt $b = -\frac{5}{3} \vee b = 7$, dus $m : y = -\frac{2}{3}x + 7$ en $n : y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

5 a De richtingscoëfficiënt van l is $\frac{4}{15}$, dus die van m is $-\frac{15}{4} = -3{,}75$. Dus $m : y = -3{,}75x + 12$.

b $4x - 15(-3{,}75x + 12) = 61$ geeft $x = 4$. Hieruit volgt $S(4,-3)$.

c De afstand van P tot lijn l is de lengte van lijnstuk PS en $|PS| = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-12)^2} = \sqrt{241}$

d De straal van die cirkel is $|PS| = \sqrt{241}$.

Dus de vergelijking ervan is $x^2 + (y - 12)^2 = 241$.

e De lijn staat loodrecht op een straal (namelijk lijnstuk PS) van de cirkel en ligt even ver van het middelpunt af als die straal lang is. Je kunt dit nog verder nagaan door de snijpunten van l en c uit te rekenen. Je vindt dan alleen punt S.

6 Lijn door P en loodrecht op l heeft vergelijking $y = -0{,}5x + 10$. Deze lijn snijden met $y = x$ geeft het middelpunt van de cirkel. Je vindt $M\left(6\frac{2}{3}, 6\frac{2}{3}\right)$. Dus de vergelijking van deze cirkel is $\left(x - 6\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - 6\frac{2}{3}\right)^2 = 27\frac{2}{9}$.

7 a De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{b}{a}$ dus heeft l de vergelijking $y = -\frac{b}{a}x + b$. Dit kun je herleiden tot $bx + ay = ab$ en tot $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

b De lijn m door O en loodrecht op l heeft vergelijking $y = \frac{a}{b}x$. Deze lijn snijdt l in het punt $S\left(\frac{a^2b}{a^2+b^2}, \frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)$. Dus is $|OS| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ en is $|OPOP| = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Verder is $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$. De gevraagde oppervlakte is daarom $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = 2ab$.

8 a $A(a,0)$, $B(b,0)$

b $c_a : (x - a)^2 + y^2 = r^2$, $c_b : (x - b)^2 + y^2 = r^2$

c Lijn door snijpunten van beide cirkels: $x = a + b^2$

9 Middelloodlijnen tekenen, het middelpunt is het snijpunt van die middelloodlijnen. De gevraagde cirkel wordt: $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 10$

10 Lijn loodrecht op l en door O is $m : y = \frac{b}{a}x$. Het snijpunt van l en m is $S\left(\frac{ac}{a^2+b^2}, \frac{bc}{a^2+b^2}\right)$. De gevraagde afstand is $|OS| = \sqrt{\left(\frac{ac}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a^2+b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

11 a $k : y = ax + 4$ invullen in $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ geeft $\left(1 + a^2\right)x^2 + (-4 + 8a)x + 16 = 0$. Raken, dus $D = 0$, geeft: $(-4 + 8a)^2 - 64\left(1 + a^2\right) = 0$ en dus $a = -\frac{3}{4}$. Dus $k : y = -\frac{3}{4}x + 4$. S is het snijpunt van k met de x-as, dus $S\left(5\frac{1}{3}, 0\right)$.

b $A(x, px)$ snijden met de cirkel geeft $(x - 2)^2 + (px)^2 = 4$. Verder is $|OA| = \sqrt{x^2 + p^2x^2} = 3$, dus $x^2 + p^2x^2 = 9$. Deze twee vergelijkingen met twee onbekenden oplossen geeft $a = \frac{9}{4}$ en $p = \frac{1}{3}\sqrt{7}$.