

Wiskunde B

4 VWO

Deel 1, Antwoordenboek



Math4all



© 2020

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de recht-hebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaarden ze geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

1	Werken met formules	3
1.1	Formules gebruiken	4
1.2	Formules herschrijven	10
1.3	Formules en de grafische rekenmachine	21
1.4	Vergelijkingen	26
1.5	Ongelijkheden	36
1.6	Stelsels vergelijkingen	42
1.7	Totaalbeeld	48
2	Functies en grafieken	53
2.1	Het begrip functie	54
2.2	Domein en bereik	60
2.3	Bijzondere functies	66
2.4	Samengestelde functies	71
2.5	Transformaties	76
2.6	Totaalbeeld	82
3	Asymptoten en limieten	85
3.1	Karakteristieken	86
3.2	Asymptoten	93
3.3	Limieten	97
3.4	Continuïteit	101
3.5	Totaalbeeld	106
4	Exponentiële functies	109
4.1	Exponentiële groei	110
4.2	Reële exponenten	114
4.3	Exponenten en machten	118
4.4	Exponentiële functies	121
4.5	Meer exponentiële functies	124
4.6	Totaalbeeld	133

1

Werken met formules

1.1	Formules gebruiken	4
1.2	Formules herschrijven	10
1.3	Formules en de grafische rekenmachine	21
1.4	Vergelijkingen	26
1.5	Ongelijkheden	36
1.6	Stelsels vergelijkingen	42
1.7	Totaalbeeld	48

1.1 Formules gebruiken

V1 a Lengte en breedte. De omtrek en de oppervlakte weet je al.

b Neem voor de grootheid lengte de variabele l en voor de grootheid breedte de variabele b .

$$l \cdot b = 5000 \text{ en } 2l + 2b = 360.$$

c Er zijn verschillende mogelijkheden om deze vraag op te lossen. Bijvoorbeeld:

Mogelijkheid I (proberen):

De lengte en breedte van de rechthoek zijn samen de helft van de omtrek, dus 180 meter. Probeer nu bijvoorbeeld 90 bij 90 meter. Dan is de oppervlakte 8100 m^2 . Dat is te groot. Probeer nu 80 bij 100 meter. Ga door tot het ongeveer klopt en ga dan verder in stapjes van 2 meter. Uiteindelijk kom je op het antwoord.

Mogelijkheid II (tabellen):

Maak in beide formules l vrij. Dat geeft $l = \frac{5000}{b}$ en $l = 180 - b$. b en l kunnen niet groter worden dan 180 (waarom niet?). Maak nu bij elk verband een tabel en bekijk wat de oplossing is.

Mogelijkheid III (snijpunten van grafieken):

Doe hetzelfde als bij mogelijkheid II, maar teken twee grafieken in een assenstelsel en lees af waar het snijpunt ligt. Dat geeft het antwoord.

Mogelijkheid IV (nieuw: maak er een vergelijking van en los deze op):

Maak uit de formule $l \cdot b = 5000$ l vrij: $l = \frac{5000}{b}$. Vul deze formule in in de andere formule. Dat geeft

$\frac{2 \cdot 5000}{b} + 2b = 360$. Vermenigvuldig de vergelijking aan beide zijden met b en los de vergelijking op met de abc-formule.

Het antwoord: Het kan bij een rechthoek van ongeveer 34 bij 146 meter.

1 a $A = 6 \cdot b$

b $l \cdot b = 12$ of $l = \frac{12}{b}$.

c $A = l \cdot l = l^2$.

d Neem als oorsprong van het assenstelsel het roosterpunt linksonder.

Bij grafiek I hoort de formule uit b: $l = \frac{12}{b}$.

Neem b op de horizontale as. Elk roostervierkantje is 1 m bij 1 m.

Bij grafiek II hoort de formule uit a: $A = 6 \cdot b$.

Neem b op de horizontale as. Op de horizontale as is elk roostervierkantje 1 m, op de verticale as is elk roostervierkantje 5 m^2 .

Bij grafiek III hoort de formule uit c: $A = l^2$.

Neem l op de horizontale as. Op de horizontale as is elk roostervierkantje 1 m, op de verticale as is elk roostervierkantje 4 m^2 .

2 a $A = (b + 2) \cdot b$ of korter $A = b(b + 2)$.

b Zie de tabel.

b	0	1	2	3	4	5	6
K	0	3	8	15	24	35	48

De grafiek wordt een kromme door deze punten, een stuk van een parabool.

c $15 = b(b + 2)$

d $b = 3 \text{ m}$, zie tabel.

e Je kunt wel zeggen dat deze formule een vergelijking is, maar dan heeft hij oneindig veel oplossingen. Dit is namelijk waar voor elke waarde van b . Het is eigenlijk gewoon een rekenregel die zegt hoe je haakjes kunt wegwerken.

- 3 a** In het voorbeeld is het effect van de zwaartekracht op de snelheid van de steen weergegeven door $-9,8t$. Op een tennisbal is dat effect precies hetzelfde, dus met de beginsnelheid erbij opgeteld is de formule voor de snelheid $v = 5 - 9,8t$.
- b** De grafiek is een rechte lijn door $(0,5)$ en ongeveer $(0,5; 0)$ omdat hij evenwijdig is met de grafiek in het voorbeeld.
- c** Positieve snelheid: de bal gaat omhoog
Negatieve snelheid: de bal gaat omlaag
- d** Oplossing:
- $$5 - 9,8t = 0$$
- $$-9,8t = -5$$
- $$t = \frac{5}{9,8}$$
- $$t \approx 0,510$$
- Na ongeveer 0,510 is de bal op zijn hoogste punt.
- e** Gegeven is dat de bal na 2 seconden neerkomt, dus $v = 5 - 9,8 \cdot 2 = -14,6$.
De bal komt met een snelheid van $14,6 \text{ m/s} = 52,56 \text{ km/h}$ op de grond.
- 4 a** Een verband tussen twee variabelen. Je kunt er een grafiek bij tekenen.
- b** Een verband tussen vier variabelen. Je kunt er geen grafiek bij tekenen.
- c** Een rekenregel; Als je de haakjes aan de linkerkant wegwerkt, staat er links en rechts hetzelfde en zie je dat de formule voor alle waarden van a en b klopt.
- d** Een verband tussen twee variabelen. Je kunt er een grafiek bij tekenen.
- e** Een vergelijking met één variabele. Je kunt deze vergelijking oplossen.
- f** Een verband tussen twee variabelen. Je kunt er een grafiek bij tekenen.
- 5 a** De formule wordt: $K = 20 - 4b$.
De grafiek is een rechte lijn door $(0,20)$ en $(2,12)$.
- b** De formule wordt: $K = 2a + 1$.
De grafiek is een rechte lijn door $(0,1)$ en $(2,5)$.
- c** Dat gaat zo:
- $$20 - 4b = 10$$
- $$4b = 10$$
- $$b = \frac{10}{4} = 2,5$$
- 6 a** Een rekenregel; als je de haakjes aan de linkerkant wegwerkt, staat er links en rechts hetzelfde en dus klopt de formule voor alle waarden van x en y .
- b** Een vergelijking die je kunt oplossen.
- c** Een verband tussen twee variabelen. Je kunt er een grafiek bij maken.
- d** Een verband tussen drie variabelen.
- 7 a** De grafiek wordt een rechte lijn door $(0,1500)$ en $(2,700)$.
- b** Oplossing:
- $$1500 - 400t = 0$$
- $$400t = 1500$$
- $$t = \frac{1500}{400}$$
- $$t = 3\frac{3}{4}$$
- Na 3 minuten en $\frac{3}{4} \cdot 60 = 45$ seconden.
- c** $1500 - 400 \cdot 4,5 = -300$, dus 300 centimeter onder water.

- 8 a** K is de totale kosten in euro per belminuut. Als je de totale kosten wilt weten moet je K vermenigvuldigen met het aantal belminuten.

$$K \cdot a = a \left(0,08 + \frac{24}{a} \right)$$

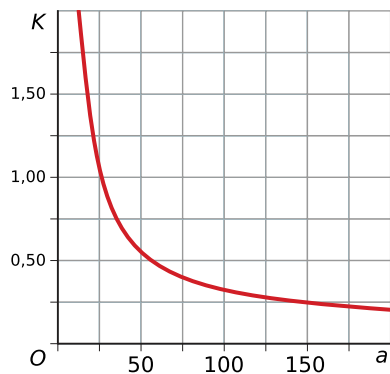
$$K \cdot a = 0,08a + 24$$

Hier is $K \cdot a$ de totale kosten.

Je kunt nu aflezen dat je € 0,08 per belminuut betaalt en € 24,00 de vaste kosten zijn.

- b** Zie de tabel.

a	25	50	100	200
K	1,04	0,56	0,32	0,2



- c** Oplossing:

$$0,08 + \frac{24}{a} = 0,12$$

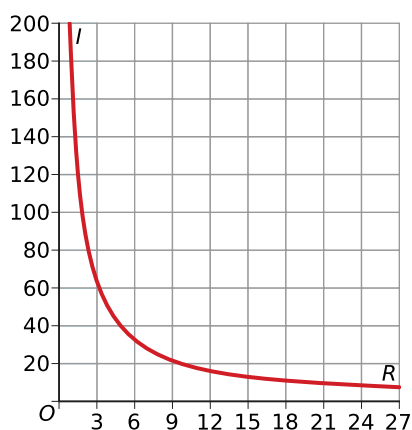
$$\frac{24}{a} = 0,04$$

$$a = \frac{24}{0,04}$$

$$a = 600$$

- 9 a** $I \cdot R = 200$ of $I = \frac{200}{R}$ of $R = \frac{200}{I}$, de eenheden zijn A (Ampère) en Ω (Ohm).

- b** Zie de figuur.



I	1	5	10	25
R	200	40	20	8

c Oplossing:

$$I \cdot 15 = 200$$

$$I = \frac{200}{15}$$

$$I \approx 13,3 \text{ A}$$

10 a In cm^3 .

b Lengte l , breedte b en inhoud I .

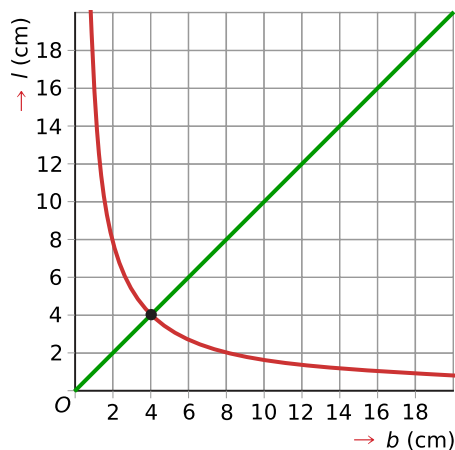
(Ook de hoogte is een grootte, maar die is hier niet variabel.)

c $l \cdot b = 16$ ofwel $l = \frac{16}{b}$ als je l op de verticale as wilt hebben.

l	1	2	4	8	16
b	16	8	4	2	1

Zie de figuur bij d.

d Zie de figuur.



Bij dit snijpunt is de breedte en de lengte 4 cm. Omdat de hoogte ook 4 cm is heb je een kubus.

11 a In cm^3 .

b Een diameter van 80 mm is het zelfde als een straal van 4 cm.

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 16 \approx 804 \text{ cm}^3.$$

c $V = 16\pi r^2$

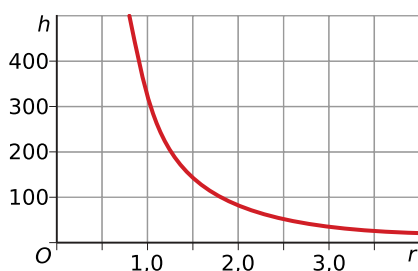
d Een (deel van een) parabool.

e 1 liter = 1000 cm^3

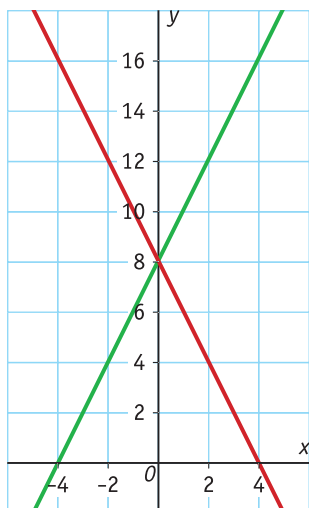
Vul de waarde 1000 in voor V in de formule $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Je vindt $1000 = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Dit kun je schrijven als $h = \frac{1000}{\pi \cdot r^2}$.

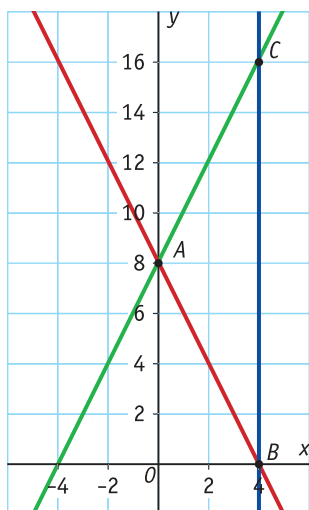
r	0	1	2	3
h	-	318,31	79,58	35,37



12 a Zie de figuur.



b Teken de verticale lijn en de punten A , B en C . Bepaal de coördinaten van de hoekpunten van de driehoek.



$A(0,8)$, $B(4,0)$ en $C(4,16)$

$$\text{oppervlakte } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4 = 32$$

c $D(a; -2a + 8)$ en $E(a; 2a + 8)$.

$$DE = 2a + 8 - (-2a + 8) = 4a$$

$$\text{oppervlakte } \triangle ADE = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4a = 2a^2$$

$$2a^2 = 18$$

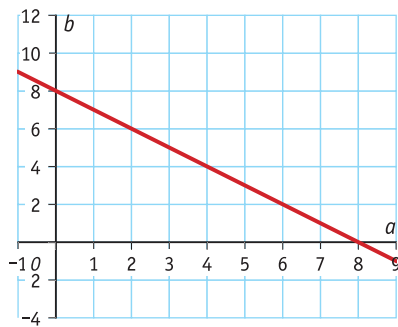
$$a^2 = 9$$

$$a = 3 \vee a = -3$$

13 a Herleid de uitdrukking bijvoorbeeld naar de vorm $b = 8 - a$.

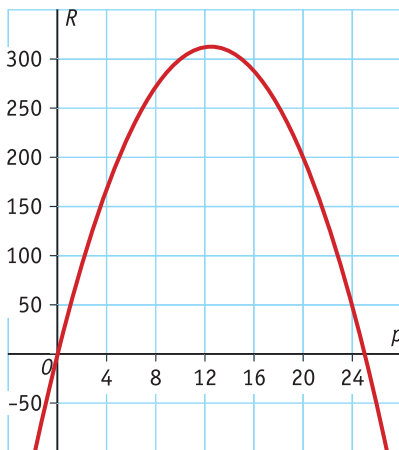
Voorbeeld tabel:

a	0	8
b	8	0



- b** Een rekenregel.
c Een vergelijking. Je kunt x oplossen: $x = \pm\sqrt{40}$.
d Zie de tabel.

p	-4	0	4	8	12	16	20	24	28
R	-232	0	168	272	312	288	200	48	-168



14 a $QI = \frac{78}{1,8^2} \approx 24,1$

b $20 = \frac{G}{l^2}$, dus $G = 20 \cdot l^2$

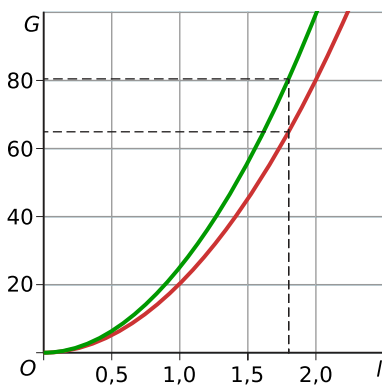
Bedenk dat de grafiek pas ongeveer vanaf lengte 1,5 meter betekenis heeft. De formule geldt niet voor kinderen.

Zie voor de grafiek de figuur bij d. Het is de rode grafiek.

c Zie voor de grafiek de figuur bij d. Het is de groene grafiek.

d Teken een verticale lijn bij $l = 1,8$.

Teken vanuit de snijpunten met de grafieken een horizontale lijn.



Je kunt nu aflezen dat het gezonde gewicht bij deze persoon tussen ongeveer 64 en 81 kilogram ligt.

1.2 Formules herschrijven

V1 a $2l + 2b = 360$ en $l \cdot b = 4500$.

b $l = 180 - b$ en $l = \frac{4500}{b}$.

c Bijvoorbeeld door twee grafieken van l afhankelijk van b te maken. Dat gaat nu gemakkelijk omdat je de formules al de juiste vorm hebt gegeven. Vervolgens kun je bij het snijpunt van de grafieken de oplossing voor l en b aflezen.

Maar je kunt dit ook algebraïsch oplossen...

1 a Oplossing:

$$2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot x - 6 \cdot y = 12$$

$$6x - 3y = 12$$

$$2x - y = 4$$

b Oplossing:

$$2 \cdot x \cdot y + x \cdot y = 18$$

$$3xy = 18$$

$$xy = 6$$

c Oplossing:

$$y = 4x^2 + x + 3y - 7x + 2x^2$$

$$-2y = 6x^2 - 6x$$

$$y = -3x^2 + 3x$$

d Oplossing:

$$2xy + xy - 3x = 18$$

$$3xy - 3x = 18$$

$$xy - x = 6$$

2 a Dat gaat zo:

$$2x - 4y = 10$$

$$-4y = 10 - 2x$$

$$y = 0,5x - 2,5$$

b Dat gaat zo:

$$-3x + 5 = 10 - 2y$$

$$2y = 3x + 5$$

$$y = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$

c Dat gaat zo:

$$5x + 10y = 20$$

$$10xy = 20 - 5x$$

$$xy = 2 - 0,5x$$

$$y = \frac{2-0,5x}{x}$$

d Dat gaat zo:

$$x \cdot (y + 2) = 6$$

$$y + 2 = \frac{6}{x}$$

$$y = \frac{6}{x} - 2$$

3 a $a^2 = c^2 - b^2$ en $b^2 = c^2 - a^2$.

b Oplossing:

$$(3x)^2 + (4x)^2 = c^2$$

$$9x^2 + 16x^2 = c^2$$

$$25x^2 = c^2$$

$$c = \pm\sqrt{25x^2}$$

$$c = \pm 5x$$

$$c = -5 \vee c = 5$$

Omdat a, b en c lengtes van een driehoek zijn moet gelden dat $x > 0$. Daarom geldt alleen $c = 5x$.

4 a Oplossing:

$$3x \cdot (x - 2y) =$$

$$3x \cdot x + 3x \cdot -2y =$$

$$3x^2 - 6xy$$

b Oplossing:

$$2a - (9a + 6) =$$

$$2a - 9a - 6 =$$

$$-7a - 6$$

c Oplossing:

$$0,5p \cdot 100p - p \cdot (20p + 100) =$$

$$50p^2 - p \cdot 20p - p \cdot 100 =$$

$$50p^2 - 20p^2 - 100p =$$

$$30p^2 - 100p$$

d Oplossing:

$$-5p^3(p^2 - 3p^3) =$$

$$-5p^3 \cdot p^2 - -5p^3 \cdot 3p^3 =$$

$$-5p^5 + 15p^6$$

e Oplossing:

$$\frac{2(x+2)+6}{2} =$$

$$\frac{2x+4+6}{2} =$$

$$\frac{2x+10}{2} =$$

$$\frac{2x}{2} + \frac{10}{2} = x + 5$$

f Oplossing:

$$\frac{3(x+2)+6}{x+2} =$$

$$\frac{3x+6+6}{x+2} =$$

$$\frac{3x+12}{x+2}$$

5 a Oplossing:

$$(x + 2) \cdot (x + 4) =$$

$$x \cdot x + x \cdot 4 + 2 \cdot x + 2 \cdot 4 =$$

$$x^2 + 6x + 8$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} 2(b+4)(b-2) &= \\ 2(b \cdot b + b \cdot -2 + 4 \cdot b + 4 \cdot -2) &= \\ 2(b^2 + 2b - 8) &= \\ 2b^2 + 4b - 16 & \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} (l+3)\left(\frac{1}{l}+6\right) &= \\ l \cdot \frac{1}{l} + l \cdot 6 + 3 \cdot \frac{1}{l} + 3 \cdot 6 &= \\ 1 + 6l + \frac{3}{l} + 18 &= \\ 19 + 6l + \frac{3}{l} & \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} (5c-4)^2 &= \\ (5c-4) \cdot (5c-4) &= \\ 5c \cdot 5c + 5c \cdot -4 - 4 \cdot 5c - 4 \cdot -4 &= \\ 25c^2 - 40c + 16 & \end{aligned}$$

6 a $2x^2 + 10x = 2x(x+5)$

b $3x^2 - 9x = 3x(x-3)$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 4 &= \\ x \cdot x + 1 \cdot x + 4 \cdot x + 1 \cdot 4 &= \\ (x+1)(x+4) & \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} b^2 - 9b + 8 &= \\ b \cdot b - 8 \cdot b - 1 \cdot b - 1 \cdot -8 &= \\ (b-8)(b-1) & \end{aligned}$$

e Oplossing:

$$\begin{aligned} 2k^2 - 34k + 32 &= \\ 2(k^2 - 17k + 16) &= \\ 2(k^2 - k - 16k - 1 \cdot -16) &= \\ 2(k-1)(k-16) & \end{aligned}$$

7 a Oplossing:

$$\begin{aligned} c^3 + 2c^2 + c &= \\ c(c^2 + 2c + 1) &= \\ c(c+1)(c+1) &= \\ c(c+1)^2 & \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} p^3 - p^5 &= \\ p^3(1 - p^2) &= \\ p^3(1 + p - p - p^2) &= \\ p^3(1 - p)(1 + p) & \end{aligned}$$

- c $2x^4 + 8x^{10} = 2x^4(1 + 4x^6)$
 d $3y^4 - 6y^5 + 2y^2 = y^2(3y^2 - 6y^3 + 2)$
 e Oplossing:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 12 &= \\ x^2 \cdot x^2 + 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x^2 + 4 \cdot -3 &= \\ (x^2 + 4)(x^2 - 3) \end{aligned}$$

8 a $\frac{2}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a}$

b $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2 \cdot b}{a \cdot b} - \frac{1 \cdot a}{b \cdot a} = \frac{2b-a}{ab}$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{4a}{3} \Big/ \frac{-3}{5a^2} &= \\ \frac{20a^3}{15a^2} \Big/ \frac{-9}{15a^2} &= \\ \frac{20a^3}{-9} &= \\ -\frac{20}{9}a^3 \end{aligned}$$

Mits $a \neq 0$.

d Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{21}{a^2-9} \Big/ \frac{7}{a+3} &= \\ \frac{21}{a^2-9} \cdot \frac{a+3}{7} &= \\ \frac{21(a+3)}{7(a-3)(a+3)} &= \\ \frac{3}{a-3} \end{aligned}$$

Mits $a \neq -3$.

9 a Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} &= \\ \frac{1 \cdot (x+1)}{x \cdot (x+1)} + \frac{2 \cdot x}{(x+1) \cdot x} &= \\ \frac{x+1+2x}{x(x+1)} &= \\ \frac{3x+1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

b De eerste breuk vereenvoudigen:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2-x} &= \\ \frac{2x}{x(x-1)} &= \\ \frac{2}{x-1} \end{aligned}$$

Mits $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} &= \\ \frac{2 \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} + \frac{1 \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)} &= \\ \frac{2x+2+x-1}{x^2+x-x-1} &= \\ \frac{3x+1}{x^2-1}\end{aligned}$$

Mits $x \neq 0$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{5}{x^2-1} - \frac{14}{2x+2} &= \\ \frac{5}{(x+1)(x-1)} - \frac{7}{x+1} &= \\ \frac{5}{(x+1)(x-1)} - \frac{7(x-1)}{(x+1)(x-1)} &= \\ \frac{12-7x}{x^2-1}\end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{5x+25}{x^2+3x-4} - \frac{5}{x^2+3x-4} &= \\ \frac{5x+20}{x^2+3x-4} &= \\ \frac{5(x+4)}{(x+4)(x-1)} &= \\ \frac{5}{x-1}\end{aligned}$$

Mits $x \neq -4$

10 a $\frac{35}{72}$

b $\frac{2}{7} \div \frac{1}{3} = \frac{6}{21} \div \frac{7}{21} = \frac{6}{7}$

c $\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{2 \cdot 1}{a \cdot b} = \frac{2}{ab}$

d $\frac{2}{a} \div \frac{6}{b} = \frac{2 \cdot b}{a \cdot b} \div \frac{a \cdot 6}{a \cdot b} = \frac{b}{3a}$

11 a Vereenvoudig eerst de linkerbreuk:

$$\begin{aligned}\frac{3x}{y^2} \cdot \frac{5y}{2x} &= \\ \frac{15xy}{2xy^2} &= \\ \frac{15}{2y}\end{aligned}$$

Daarna:

$$\begin{aligned}\frac{15}{2y} - \frac{6}{y} &= \\ \frac{15}{2y} - \frac{2 \cdot 6}{2 \cdot y} &= \\ \frac{15}{2y} - \frac{12}{2y} &= \frac{3}{2y}\end{aligned}$$

b Vereenvoudig eerst de linkerbreuk:

$$\frac{2}{x} \cdot \frac{2x}{3} =$$

$$\frac{4x}{3x} =$$

$$\frac{4}{3}$$

Daarna:

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{2x} =$$

$$\frac{4 \cdot 2x}{3 \cdot 2x} - \frac{1 \cdot 3}{2x \cdot 3} =$$

$$\frac{8x-3}{6x}$$

c Vereenvoudig eerst het rechterdeel:

$$\frac{2x}{5} - \frac{3}{x} =$$

$$\frac{2x \cdot x}{5 \cdot x} - \frac{3 \cdot 5}{x \cdot 5} =$$

$$\frac{2x^2-15}{5x}$$

Daarna:

$$\frac{3}{5x} \bigg/ \frac{2x^2-15}{5x} =$$

$$\frac{3}{2x^2-15}$$

d Vereenvoudig eerst het linkerdeel:

$$\frac{5}{x^2+4x+4} \bigg/ \frac{4}{x+2} =$$

$$\frac{5}{(x+2)(x+2)} \bigg/ \frac{4 \cdot (x+2)}{(x+2)(x+2)} =$$

$$\frac{5}{4(x+2)} = \frac{5}{4x+8}$$

Daarna:

$$\frac{5}{4x+8} + \frac{2x}{x-2} =$$

$$\frac{5 \cdot (x-2)}{(4x+8) \cdot (x-2)} + \frac{2x \cdot (4x+8)}{(x-2) \cdot (4x+8)} =$$

$$\frac{5x-10}{4x^2-16} + \frac{8x^2+16x}{4x^2-16} =$$

$$\frac{8x^2+21x-10}{4x^2-16}$$

12 a Oplossing:

$$4 \cdot x + 10 = 3 \cdot x - 2 \cdot y$$

$$x + 10 = -2y$$

$$-0,5x - 5 = y$$

$$y = -0,5x - 5$$

b Oplossing:

$$2 \cdot y + 2 \cdot x \cdot x + 4 \cdot x = 6 \cdot x^2$$

$$2y + 2x^2 + 4x = 6x^2$$

$$2y + 4x = 4x^2$$

$$2y = 4x^2 - 4x$$

$$y = 2x^2 - 2x$$

c Oplossing:

$$4 \cdot x \cdot h + 2 \cdot x^2 = 100$$

$$2xh + x^2 = 50$$

d Oplossing:

$$W = p \cdot (650 - 2 \cdot p) - 20 \cdot (650 - 2 \cdot p)$$

$$W = 650p - 2p^2 - 13000 + 40p$$

$$W = -2p^2 + 690p - 13000$$

13 a Oplossing:

$$0,5x + 1,5y = 12$$

$$x + 3y = 24$$

$$3y = 24 - x$$

$$y = 8 - \frac{1}{3}x$$

b Oplossing:

$$(x + y)^3 = 8$$

$$x + y = 2$$

$$y = 2 - x$$

c Oplossing:

$$x^2 - y^2 = 25$$

$$x^2 = 25 + y^2$$

$$x^2 - 25 = y^2$$

$$y^2 = x^2 - 25$$

$$y = \sqrt{x^2 - 25} \vee y = -\sqrt{x^2 - 25}$$

d Oplossing:

$$2x^2 + 4xy = 100$$

$$4xy = 100 - 2x^2$$

$$y = \frac{100}{4x} - \frac{2x^2}{4x}$$

$$y = \frac{25}{x} - \frac{1}{2}x$$

14 a $-2x(x^2 + 6x) = -2x^3 - 12x^2$

Let altijd op de mintekens!

b $-2x - (x^2 + 6x) = -2x - x^2 - 6x = -x^2 - 8x$

Als er staat $-(x^2 + 6x)$, zie dit als $-1 \cdot (x^2 + 6x)$ en werk dan de haakjes weg. Neem hierna gelijksoortige termen samen.

c $(t + 20)(t - 5) = t^2 - 5t + 20t - 100 = t^2 + 15t - 100$

Eerst haakjes wegwerken, daarna gelijksoortige termen samennemen.

d $(x^2 + 1)(3x - 2) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

Dit keer zijn er, na het wegwerken van de haakjes, geen gelijksoortige termen om samen te nemen.

e Oplossing:

$$(a - 3)(a + 3) =$$

$$a^2 + 3a - 3a - 9 =$$

$$a^2 - 9$$

Dit is een bijzonder product!

f Oplossing:

$$\begin{aligned}(6x - 3)^2 &= \\ (6x - 3)(6x - 3) &= \\ 36x^2 - 18x - 18x + 9 &= \\ 36x^2 - 36x + 9 &= \end{aligned}$$

g Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 &= \\ \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a - \frac{1}{a}\right) &= \\ a^2 - 1 - 1 + \frac{1}{a^2} &= \\ a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} &= \end{aligned}$$

h Oplossing:

$$\begin{aligned}(x - 2)^3 &= \\ (x - 2)(x - 2)(x - 2) &= \\ (x^2 - 4x + 4)(x - 2) &= \\ x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x + 4x - 8 &= \\ x^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= \end{aligned}$$

15 a $x^2 - 4x = x(x - 4)$

Gemeenschappelijke factor is x .

b $-2t^2 + 18t = -2t(t - 9)$

Gemeenschappelijke factor is $-2t$.

c $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$

Som-productmethode toepassen:

$$6 + -1 = 5 \text{ en } 6 \cdot -1 = -6$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned}12 - 4p - p^2 &= \\ -p^2 - 4p + 12 &= \\ -(p^2 + 4p - 12) &= \\ -(p + 6)(p - 2) &= \end{aligned}$$

Zet het eerst in de standaardvolgorde. Haal dan het minteken buiten haakjes, zodat de p^2 -term binnen de haakjes een factor 1 heeft. Gebruik daarna de som-productmethode binnen de haakjes.

e Oplossing:

$$\begin{aligned}4k^2 - 16 &= \\ 4(k^2 - 4) &= \\ 4(k + 2)(k - 2) &= \end{aligned}$$

Zet eerst de gemeenschappelijke factor 4 buiten haakjes. Denk er daarna aan dat $k^2 - 4$ een bijzonder product is.

f Oplossing:

$$\begin{aligned}2p^3 - 2p^2 - 24p &= \\ 2p(p^2 - p - 12) &= \\ 2p(p - 4)(p + 3) &= \end{aligned}$$

Zet eerst de gemeenschappelijke factor $2p$ buiten haakjes. Hierna binnen de haakjes de som-productmethode gebruiken.

g Oplossing:

$$\begin{aligned} 16 - p^2 &= \\ 16 + 4p - 4p - p^2 &= \\ (4 - p)(4 + p) \end{aligned}$$

Som-productmethode gebruiken. Dit is een bijzonder product.

h Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 9 &= \\ (x - 9)(x - 1) \end{aligned}$$

Som-productmethode gebruiken.

16 a Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} \cdot \frac{3}{y} + \frac{5}{x} &= \\ \frac{6}{xy} + \frac{5}{x} &= \\ \frac{6}{xy} + \frac{5y}{xy} &= \\ \frac{6+5y}{xy} \end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} &= \\ \frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{2x}{x^2-4} &= \\ \frac{3(x+2)}{x^2-4} - \frac{2x}{x^2-4} &= \\ \frac{3(x+2)-2x}{x^2-4} &= \\ \frac{3x+6-2x}{x^2-4} &= \\ \frac{x+6}{x^2-4} \end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} \Big/ \frac{3}{y} + \frac{5}{x} &= \\ \frac{2y}{xy} \Big/ \frac{3x}{xy} + \frac{5}{x} &= \\ \frac{2y}{3x} + \frac{5}{x} &= \\ \frac{2y}{3x} + \frac{15}{3x} &= \\ \frac{2y+15}{3x} \end{aligned}$$

d Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{2x} &= \\ \frac{4x^2}{2x} - \frac{1}{2x} &= \\ \frac{4x^2-1}{2x} \end{aligned}$$

e Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{12}{-x^2} \bigg/ -\frac{16}{x} &= \\ \frac{12}{-x^2} \bigg/ \frac{16 \cdot x}{-x^2} &= \\ \frac{12}{16x} &= \\ \frac{3}{4x}\end{aligned}$$

f Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{6}{x^2+x-12} \bigg/ \frac{3}{x+4} &= \\ \frac{6}{(x+4) \cdot (x-3)} \bigg/ \frac{3}{x+4} &= \\ \frac{6}{(x+4) \cdot (x-3)} \bigg/ \frac{3 \cdot (x-3)}{(x+4) \cdot (x-3)} &= \\ \frac{6}{3 \cdot (x-3)} &= \\ \frac{2}{x-3}\end{aligned}$$

Mits $x \neq 3$.

- 17 a** Van het rechthoekige stuk weiland is de lengte tweemaal zo groot als de breedte. Noem de breedte x meter; dan is de lengte natuurlijk $2x$ meter. Deze twee vermenigvuldigen geeft de oppervlakte $A = 2x^2$.

b Dat gaat zo:

$$\begin{aligned}(x-6)(2x-10) &= 2x^2 - 2690 \\ 2x^2 - 22x + 60 &= 2x^2 - 2690 \\ -22x &= -2750 \\ x &= 125\end{aligned}$$

De breedte is dus 125 meter.

- 18 a** $26 = 0,00013 \cdot v^3 \cdot 24^2$ geeft $0,07488 \cdot v^3 = 26$ hieruit volgt $v^3 = 347,22\dots$ en dus $v \approx 7,0$ m/s. Dat is ongeveer 25,3 km/h.

b Oplossing:

$$\begin{aligned}26 &= 0,00013 \cdot v^3 \cdot D^2 \\ v^3 \cdot D^2 &= \frac{26}{0,00013} = 200000 \\ D^2 &= \frac{200000}{v^3} \\ D &= \sqrt{\frac{200000}{v^3}}\end{aligned}$$

- c** 7,2 km/h = 2 m/s en 36 km/h = 10 m/s.

$$2 \text{ m/s: } D = \sqrt{\frac{200000}{2^3}} \approx 158,1$$

$$10 \text{ m/s: } D = \sqrt{\frac{200000}{10^3}} \approx 14,1$$

Je moet dan een diameter kiezen tussen 14,1 meter en 158,1 meter.

19 a Oplossing:

$$\begin{aligned}x \cdot x + 4 \cdot y &= 8 \cdot x^2 - 4 \cdot x \\x^2 + 4y &= 8x^2 - 4x \\4y &= -x^2 + 8x^2 - 4x \\4y &= 7x^2 - 4x \\y &= 1,75x^2 - x\end{aligned}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned}2xy &= 0,4x + 200 \\y &= \frac{0,4x+200}{2x} \\y &= \frac{0,4x}{2x} + \frac{200}{2x} \\y &= 0,2 + \frac{100}{x}\end{aligned}$$

c Oplossing:

$$\begin{aligned}x - 4y^2 &= 2 \\-4y^2 &= 2 - x \\y^2 &= 0,25x - 0,5 \\y &= \sqrt{0,25x - 0,5} \vee y = -\sqrt{0,25x - 0,5}\end{aligned}$$

20 a $2(x-2)(x+3) - 12 = 2x^2 + 2x - 24 = 2(x^2 + x - 12) = 2(x+4)(x-3)$

b Haakjes uitwerken:

$$(x+3)(x-2) + 4x - 8 = x^2 + 5x - 14 = (x+7)(x-2)$$

21 a Fout: $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

b Fout: $-x^2 - 4x + 12 = -(x^2 + 4x - 12) = -(x+6)(x-2)$

c Goed: $\frac{8x+100}{4x^2} = \frac{8x}{4x^2} + \frac{100}{4x^2} = \frac{2}{x} + \frac{25}{x^2}$.

d Fout: $\frac{8x}{x^2+3x} = \frac{8}{x+3}$, mits $x \neq 0$.

22 a $\frac{x}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x^2}{2x} + \frac{4}{2x} = \frac{x^2+4}{2x}$

b $\frac{3}{4x} \bigg/ \frac{5}{2x} - \frac{x}{x+1} = \frac{3}{10} - \frac{x}{x+1} = \frac{3(x+1)}{10(x+1)} - \frac{10x}{10(x+1)} = \frac{-7x+3}{10(x+1)}$, mits $x \neq 0$.

c $\frac{2}{x+3} - \frac{4}{x+5} = \frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)} - \frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)} =$
 $= \frac{2x+10}{(x+3)(x+5)} - \frac{4x+12}{(x+3)(x+5)} = \frac{-2x-2}{(x+3)(x+5)}$

d $\frac{x+1}{x^2+x} + \frac{1}{2x} = \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{2}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2x}$, mits $x \neq -1$.

1.3 Formules en de grafische rekenmachine

V1 Doen.

1 a Herleiden van de eerste formule geeft:

$$2x + y = 6$$

$$y = 6 - 2x$$

Herleiden van de tweede formule geeft:

$$x^2 + 2y = 12$$

$$2y = 12 - x^2$$

$$y = 6 - 0,5x^2$$

b Voer in: $Y1=6-2X$ en $Y2=-1/2X^2+6$

Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $-25 \leq y \leq 25$

c Zoom in op de snijpunten en loop met de cursor naar de snijpunten toe. Zet eventueel het rooster aan. Je vindt de snijpunten (0,6) en (4,-2).

Of maak een tabel met stapgrootte 1.

d Oplossing:

$$6 - 2x = 6 - 0,5x^2$$

$$-2x = -0,5x^2$$

$$-4x = -x^2$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0$$

Dus $x = 0 \vee x = 4$. Dit zijn de x -waarden van de coördinaten van de snijpunten. Vul in bij één van de functies om de y -coördinaten te vinden:

Voor $x = 0$ geldt $y = 6 - 2 \cdot 0 = 6$, dus snijpunt is (0,6).

Voor $x = 4$ geldt $y = 6 - 2 \cdot 4 = -2$, dus snijpunt is (4,-2).

2 a Oplossing:

$$9x - 3y = 12$$

$$-3y = 12 - 9x$$

$$y = 3x - 4$$

b Oplossing:

$$5(x + y) = 12$$

$$5x + 5y = 12$$

$$5y = -5x + 12$$

$$y = -x + \frac{12}{5}$$

$$y = -x + 2,4$$

c Oplossing:

$$5y^2 = 125x$$

$$y^2 = 25x$$

$$y = -\sqrt{25x} \vee y = \sqrt{25x}$$

$$y = -5\sqrt{x} \vee y = 5\sqrt{x}$$

d Oplossing:

$$2y^3 + x = 22$$

$$2y^3 = 22 - x$$

$$y^3 = 11 - 0,5x$$

$$y = \sqrt[3]{11 - 0,5x}$$

3 a Aan $180 - b$ kun je zien dat zowel l als b waarden kunnen hebben vanaf 0 tot 180. Het andere snijpunt is ongeveer (34,146). Je kunt hiertoe een tabel gebruiken, of over de grafiek lopen.

b $y = 9 - x$ en $y = x^3$.

Voer in: $Y1=9 - X$ en $Y2=X^3$

Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 15$ en $-5 \leq y \leq 15$

Je vindt: $x \approx 1,9$ (tabel met stapgrootte 0,01).

4 a Oplossing:

$$R = 2p + 3(3p - 2)$$

$$R = 2p + 9p - 6$$

$$R = 11p - 6$$

b Oplossing:

$$K = -2(-v - 3) - 5v + 22$$

$$K = 2v + 6 - 5v + 22$$

$$K = -3v + 28$$

c Oplossing:

$$2z = 3x - 4y$$

$$2(2x + 1) = 3x - 4y$$

$$-4y = 2(2x + 1) - 3x$$

$$-4y = 4x + 2 - 3x$$

$$-4y = x + 2$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{4} \text{ en } b = -\frac{1}{2}$$

d Oplossing:

$$2 = \frac{12x+18}{3y}$$

$$6y = 12x + 18$$

$$y = 2x + 3$$

5 a $2b + l = 200$ geeft $l = 200 - 2b$.

b $A = l \cdot b$, dus $A = (200 - 2b) \cdot b$ en $A = 200b - 2b^2$.

c Voer in: $Y1=200X-2X^2$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 100$ en $0 \leq y \leq 5000$

d $b = 50$

6 a $V = 10\pi r^2$

Voer in: $Y1=10\pi X^2$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 1500$

Zoom in op het snijpunt. Je vindt $r \approx 5,64$ (een tabel met stapgrootte 0,001).

b $V = 2\pi r^3$ en 0,5 liter is 500 cm^3 .

Voer in: $Y1=2\pi X^3$ en $Y2=500$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 1000$

Zoom in op het snijpunt. Je vindt $r \approx 4,30$ (een tabel met stapgrootte 0,001).

c $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$

Invullen in de gegeven formule $1000 = \pi r^2 h$.

h vrij schrijven geeft: $\frac{1000}{\pi r^2} = h$.

Voer in: $Y1=1000/(\pi X^2)$

$x = 5$ geeft $y = 12,732...$

$$h \approx 12,7$$

- 7 a** Voer in: $Y1=250X - 4.9X^2$
Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 60$ en $-1000 \leq y \leq 3500$

- b** Voer in: $Y1=0.04 + 200/X$
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 50$ en $0 \leq y \leq 50$

- c** Dit moet je eerst herleiden tot $h = \frac{100-2x^2}{4x}$.

Voer in: $Y1=(100 - 2X^2)/(4X)$
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 20$

- d** Voer in: $Y1=60/(30 + 0.5X^2)$
Venster bijvoorbeeld: $-30 \leq x \leq 30$ en $-1 \leq y \leq 3$

- 8** $y = x^4 - 5$ en $y = x - 2$.

Voer in: $Y1=X^4-5$ en $Y2=X-2$
Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 5$ en $-10 \leq y \leq 10$

Je vindt: $x \approx -1,2$ en $y = -3,2$ of $x \approx 1,5$ en $y \approx -0,5$ (tabel met stapgrootte 0,01).

Dus de snijpunten zijn ongeveer: $(-1,2; -3,2)$ en $(1,5; -0,5)$.

- 9 a** $K = 200 + 0,04a$

- b** $I = 0,10a$

- c** Oplossing:

$$200 + 0,04a = 0,10a$$

$$0,06a = 200$$

$$a = \frac{200}{0,06} = 3333\frac{1}{3}$$

Minimaal 3334 kopieën.

- 10** $l \cdot b = 10000$, waarbij l de lengte in m is en b de breedte in m.

$$b + 20 = \frac{2}{3}l \text{ en dus } b = \frac{2}{3}l - 20$$

$$l\left(\frac{2}{3}l - 20\right) = 10000$$

Voer in: $Y1=X(2/3X-20)$ en $Y2=10000$
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 300$ en $0 \leq y \leq 15000$

Je vindt $x \approx 138$ (tabel met stapgrootte 0,1).

De afmetingen van het land zijn ongeveer 138 meter bij 72 meter.

- 11 a** l en b zijn de lengte en breedte van het bedrukte deel.

De lengte van het hele affiche is $l + 25$. De breedte van het hele affiche is $b + 20$.

Oppervlakte van het affiche is $1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$. Hieruit volgt $(l + 25)(b + 20) = 10000$.

- b** Oplossing:

$$(l + 25)(b + 20) = 10000$$

$$l + 25 = \frac{10000}{b+20}$$

$$l = \frac{10000}{b+20} - 25$$

Voer in: $Y1=10000/(X+20)-25$
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 400$ en $-10 \leq y \leq 600$

- c** Voer in: $Y1=10000/(X + 20) - 25$ en $Y2=X$
Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 400$ en $-10 \leq y \leq 600$

Zoek het snijpunt en je vindt $l \approx 77,5 \text{ cm}$ en $b \approx 77,5 \text{ cm}$.

De maten van het affiche moeten dan 97,5 bij 102,5 cm zijn.

- 12 a** Oppervlakte van een cirkel is πr^2 . Dus $G = \pi r^2$.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

- b** Oplossing:

$$1000 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$3000 = \pi r^2 h$$

$$\frac{3000}{\pi h} = r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{3000}{\pi h}}$$

- c** $r = \sqrt{\frac{3000}{10 \cdot \pi}} \approx 9,77 \text{ cm}$

- 13** Lengte van vierkant B is $30 - x$ en de lengte van vierkant C is $20 - (30 - x) = x - 10$.

oppervlakte $A = x^2$, opp $B = (30 - x)^2$ en oppervlakte $C = (x - 10)^2$.

oppervlakte $D = 600 - x^2 - (30 - x)^2 - (x - 10)^2$.

Dit kun je vereenvoudigen tot oppervlakte $D = -3x^2 + 80x - 400$.

Voer in: $Y1 = 600 - X^2 - (30 - X)^2 - (X - 10)^2$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 30$ en $0 \leq y \leq 200$

Je vindt een maximum bij $x \approx 13$ (stapgrootte 0,1).

- 14 a** De waarde van de breuk wordt kleiner als v groter wordt.

- b** $14 = 6,9 + \frac{298,5}{v}$ geeft $7,1 = \frac{298,5}{v}$ en dus $v \approx 42$.

De auto reed ongeveer 42 km/h.

- c** 30 km/h invullen geeft:

$$u_{\text{warm}} = 4,4 + \frac{196,0}{30} \approx 10,93$$

$$u_{\text{koud}} = 6,9 + \frac{298,5}{30} \approx 16,85$$

$$\frac{16,85 - 10,93}{10,93} \cdot 100\% \approx 54,2\%$$

- d** $v = \frac{L}{\frac{t}{3600}}$

$$u_{\text{tot}} = L \cdot \left(4,4 + \frac{196,0}{v} \right) = L \cdot \left(4,4 + \frac{\frac{196}{\frac{t}{3600}}}{\frac{t}{3600}} \right)$$

Apart: $\frac{\frac{196}{\frac{t}{3600}}}{\frac{t}{3600}}$ hier teller en noemer met $\frac{t}{3600}$ vermenigvuldigen, geeft

$$\frac{196 \cdot \frac{t}{3600}}{L} = \frac{\frac{196}{3600} \cdot t}{L} \approx \frac{0,054t}{L}$$

Terug naar de hele formule: $L \cdot \left(4,4 + \frac{0,054t}{L} \right) \approx 4,4L + 0,054t$

- 15 a** $y = -0,5x + 2,5$

Voer in: $Y1 = -0,5X + 2,5$.

Venster: $-10 \leq x \leq 20$ en $-5 \leq y \leq 10$.

- b** $y = \frac{2}{2x+5}$

Voer in: $Y1 = 2/(2X+5)$.

Venster: $-10 \leq x \leq 5$ en $-3 \leq y \leq 3$.

16 $y = 2x - \frac{10}{4x+2}$

Voer in: $Y1=2X-10/(4x+2)$.

Venster: $-10 \leq x \leq 10$ en $-20 \leq y \leq 20$.

17 a De tijd kan in dit experiment logischerwijs niet negatief zijn. Dus de uitdrukking $T - 2$ moet altijd groter zijn dan 0. Dus geldt $T > 2$.

b Voer in: $Y1=89/(X - 2)$. Venster: $0 \leq x \leq 100$ en $0 \leq y \leq 20$.

c De tijd t moet gelijk zijn aan 5 dagen. Dus in de formule $t = \frac{89}{T-2}$ vul je voor t de waarde 5 in. Je moet dus oplossen $5 = \frac{89}{T-2}$.

Voer nu in de GR: $Y1=89/(X - 2)$ en $Y2=5$ en zoek het snijpunt op. Je vindt $T = 19,8$ graden.

1.4 Vergelijkingen

V1 a Je hebt gewerkt met lineaire vergelijkingen en kwadratische vergelijkingen. Ook ben je vergelijkingen tegengekomen met exponentiële functies en met gebroken functies.

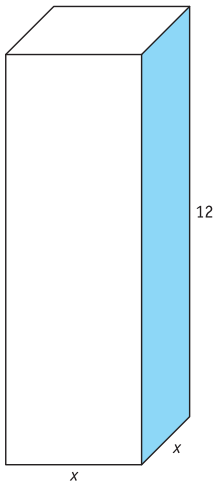
De oplossingsmethoden die je hebt leren gebruiken zijn:

- inklemmen;
- de balansmethode (aan beide zijden hetzelfde optellen/afrekken/vermenigvuldigen/delen);
- terugrekenen (met behulp van een rekenschema);
- ontbinden in factoren.

En misschien ook:

- kwadraat afsplitsen;
- de abc-formule.

b Oppervlakte van het doosje = de som van de oppervlakte van alle zijden



Oppervlakte van de vierkante bodem: $x \cdot x = x^2$. Oppervlakte van de vierkante deksel: $x \cdot x = x^2$. De oppervlakte van de bodem en deksel samen = $2x^2$.

Zijde: $x \cdot 12 = 12x$. In totaal zijn er vier zijden: $4 \cdot 12x = 48x$.

De buitenoppervlakte is dus $2x^2 + 48x$, deze is gelijk aan 512 cm^2 .

$512 = 2x^2 + 48x$ geeft $2x^2 + 48x - 512 = 0$ en dus $x^2 + 24x - 256 = 0$.

Deze vergelijking los je op met ontbinden in factoren: $(x - 8)(x + 32) = 0$ geeft $x = 8 \vee x = -32$.

Alleen $x = 8$ kan in dit geval.

1 a Dat gaat zo:

$$3t - 400 = 700 - 2t$$

$$5t = 1100$$

$$t = 220$$

b Dat gaat zo:

$$2300 - 0,15p = 1600 + 0,42p$$

$$-0,15p = 0,42p - 700$$

$$-0,57p = -700$$

$$p \approx 1228,07$$

c Dat gaat zo:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{1}{5}(10-2x)$$

$$\frac{1}{4}x - \frac{3}{4} = 2 - \frac{2}{5}x$$

$$\frac{13}{20}x = \frac{11}{4}$$

$$x \approx 4,23$$

d Dat gaat zo:

$$2 - 5(2x - 4) = -7 + 8(2 + x)$$

$$2 - 10x + 20 = -7 + 16 + 8x$$

$$13 = 18x$$

$$x \approx 0,72$$

2 a $t \xrightarrow{\times 5} \dots \xrightarrow{-20} 100$

Je vindt met terugrekenen:

$$t = \frac{100+20}{5} \text{ en dus } t = 24.$$

b $t \xrightarrow{\times 3} \dots \xrightarrow{-20} \dots \xrightarrow{(\dots)^2} 1600$

Je vindt met terugrekenen:

$$t = \frac{\pm\sqrt{1600+20}}{3} \text{ en dus } t = 20 \vee t = -6\frac{2}{3}.$$

c $p \xrightarrow{(\dots)^3} \dots \xrightarrow{\times 3} 81$

Je vindt met terugrekenen:

$$p = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} \text{ en dus } p = 3.$$

d $x \xrightarrow{\times 2} \dots \xrightarrow{-4} \dots \xrightarrow{\sqrt{\dots}} \dots \xrightarrow{\times 2} 12$

Je vindt met terugrekenen:

$$x = \frac{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + 4}{2} \text{ en dus } x = 20.$$

e $x \xrightarrow{\times 0,5} \dots \xrightarrow{-4} \dots \xrightarrow{\sqrt{\dots}} \dots \xrightarrow{\times 3} \dots \xrightarrow{-2} -3$

Je vindt met terugrekenen:

$$x = \frac{\left(\frac{-3+2}{3}\right)^2 + 4}{0,5} \text{ en dus } x = 8\frac{2}{9}.$$

$$\text{Controle: } 3 \cdot \sqrt{0,5 \cdot 8\frac{2}{9} - 4} - 2 = -1 \neq -3.$$

Deze vergelijking heeft geen oplossing, want de wortel uit een (reëel) getal kan niet negatief zijn. Door het kwadrateren is er een 'oplossing' gegenereerd die niet voldoet.

3 a Dat gaat zo:

$$0,5x^2 = 4x$$

$$0,5x^2 - 4x = 0$$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x - 8) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 8$$

b Dat gaat zo:

$$k^2 + 5k - 6 = 0$$

$$(k + 6)(k - 1) = 0$$

$$k + 6 = 0 \vee k - 1 = 0$$

$$k = -6 \vee k = 1$$

Elke afzonderlijke factor is 0.

c Dat gaat zo:

$$8p - p^2 = 0$$

$$8p - p^2 = 0$$

$$p(8 - p) = 0$$

$$p = 0 \vee p = 8$$

d Dat gaat zo:

$$x(x - 2) = 3x - 6$$

$$x^2 - 2x = 3x - 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 3$$

e Dat gaat zo:

$$x^2 = x + 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x + 3)(x - 4) = 0$$

$$x = -3 \vee x = 4$$

f Dat gaat zo:

$$x^3 = 4x$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 = 4$$

$$x = 0 \vee x = -\sqrt{4} \vee x = \sqrt{4}$$

$$x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$$

4 a Voer in: $Y1=X^3$ en $Y2=4 - x$

Venster: standaard

Je ziet dat er één snijpunt is. Daarna tabel bekijken tussen $x = 1,0$ en $x = 1,5$ en verder verfijnen, inklemmen dus.

$$x \approx 1,379$$

b Voer in: $Y1=600/X$ en $Y2=18 + 0.04X$

Venster bijvoorbeeld: $-500 \leq x \leq 50$ en $-50 \leq y \leq 50$

Je ziet dat er twee snijpunten zijn. Bekijk de tabel.

$$a \approx 31,174 \vee a \approx 481,174$$

5 a Voer in: $Y1=X^3+2X$ en $Y2=16$

Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 5$ en $-25 \leq y \leq 25$

$x \approx 2,26$ (een tabel met stapgrootte 0,001).

b Voer in: $Y1=X+\sqrt{X}$ en $Y2=10$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 15$ en $0 \leq y \leq 25$

$x \approx 7,30$ (een tabel met stapgrootte 0,001).

c Voer in: $Y1=X+10/X$ en $Y=10$

Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 15$ en $-25 \leq y \leq 25$

$l \approx 1,13 \vee l \approx 8,87$ (twee keer een tabel maken met stapgrootte 0,001).

d Voer in: $Y1=300/(X+4)$ en $Y2=20$

Venster bijvoorbeeld: $-20 \leq x \leq 20$ en $-50 \leq y \leq 50$

$p = 11$ (een tabel met stapgrootte 1).

6 a Algebraïsch:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x} &= \frac{1}{2} \\ \frac{x}{x(x+3)} + \frac{x+3}{x(x+3)} &= \frac{1}{2} \\ \frac{2x+3}{x(x+3)} &= \frac{1}{2} \\ 2(2x+3) &= x(x+3) \\ 4x+6 &= x^2+3x \\ x^2-x-6 &= 0 \\ (x-3)(x+2) &= 0 \\ x &= 3 \vee x = -2\end{aligned}$$

Op de GR:

Voer in: $Y1=1/(X+3)+1/X$ en $Y2=1/2$

Venster: standaard

Lees de snijpunten af.

b Algebraïsch:

$$\begin{aligned}\frac{20}{p^2+5} &= 2 \\ 20 &= 2(p^2+5) \\ 10 &= p^2+5 \\ p^2 &= 5 \\ p &= \sqrt{5} \vee p = -\sqrt{5}\end{aligned}$$

Op de GR:

Voer in: $Y1=20/(X^2+5)$ en $Y2=2$

Venster: standaard

c Algebraïsch:

$$\begin{aligned}\frac{10}{2x} + 1 &= \frac{x}{x+1} \\ \frac{10}{2x} + \frac{2x}{2x} &= \frac{x}{x+1} \\ \frac{10+2x}{2x} &= \frac{x}{x+1} \\ (10+2x)(x+1) &= 2x \cdot x \\ 10x + 10 + 2x^2 + 2x &= 2x^2 \\ 12x + 10 &= 0 \\ 12x &= -10 \\ x &= -\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Op de GR:

Voer in: $Y1=10/(2X)+1$ en $Y2=X/(X+1)$

Venster: standaard

d Algebraïsch:

$$\begin{aligned}\frac{5x}{x^2+2x} - \frac{6}{x} &= \frac{1}{x+2} \\ \frac{5x}{x^2+2x} &= \frac{1}{x+2} + \frac{6}{x} \\ \frac{5x}{x^2+2x} &= \frac{x}{x(x+2)} + \frac{6(x+2)}{x(x+2)} \\ \frac{5x}{x^2+2x} &= \frac{7x+12}{x^2+2x} \\ 5x &= 7x+12 \\ x &= -6\end{aligned}$$

Op de GR:

Voer in: $Y1=5X/(X^2+2X) - 6/X$ en $Y2=1/(X+2)$

Venster: standaard

7 a Oplossing:

$$2x - 3(x + 4) = 5x - 18$$

$$2x - 3x - 12 = 5x - 18$$

$$6 = 6x$$

$$x = 1$$

b Oplossing:

$$\sqrt{x+4} = 20$$

$$x + 4 = 400$$

$$x = 396$$

c Oplossing:

$$(2x - 5)^3 = 125$$

$$2x - 5 = 5$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

d Vergelijk met de aanpak bij c.

$$\sqrt{a^2 + 4} - 20 = 0$$

$$\sqrt{a^2 + 4} = 20$$

$$a^2 + 4 = 400$$

$$a^2 = 396$$

$$a = \sqrt{396} \vee a = -\sqrt{396}$$

e Oplossing:

$$2x^2 - 2 = 12x + 30$$

$$2x^2 - 12x - 32 = 0$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x + 2)(x - 8) = 0$$

$$x + 2 = 0 \vee x - 8 = 0$$

$$x = -2 \vee x = 8$$

f $(-x + 2)(2x + 3) = (3 - 4x)(2x + 3)$

Merk op dat er twee dezelfde factoren zijn.

$$2x + 3 = 0 \vee -x + 2 = 3 - 4x$$

$$2x = -3 \vee 3x = 1$$

$$x = -1,5 \vee x = \frac{1}{3}$$

8 a GR:

Voer in: $Y1=\sqrt{X}$ en $Y2=6-X$

Zoek het snijpunt. Je vindt dan $x = 4$.

Algebraïsch:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= 6 - x \\ x &= (6 - x)^2 \\ x &= 36 - 12x + x^2 \\ x^2 - 13x + 36 &= 0 \\ (x - 4)(x - 9) &= 0 \\ x &= 4\end{aligned}$$

De oplossing $x = 9$ vervalt.

- b** Voer in: $Y1 = X^4$ en $Y2 = 2 + X$

Zoek de twee snijpunten, deze vind je bij $x = -1$ en $x \approx 1,35$.

- 9 a** Neem eerst $p = 0$:

$$\begin{aligned}-3q &= 650 \\ q &= -216\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Neem $q = 0$:

$$\begin{aligned}2p &= 650 \\ p &= 325\end{aligned}$$

- b** Neem eerst $q = 0$:

$$\begin{aligned}W &= -0,25 \cdot 0(0,5 \cdot 0 - 100) \\ W &= 0 \cdot -100 = 0\end{aligned}$$

Indien $W = 0$:

$$\begin{aligned}0 &= -0,25q(0,5q - 100) \\ -0,25q &= 0 \vee 0,5q - 100 = 0 \\ q &= 0 \vee q = 200\end{aligned}$$

- c** Neem $l = 0$:

$$\begin{aligned}k^2 + 2^2 &= 100 \\ k^2 + 4 &= 100 \\ k^2 &= 96 \\ k &= \sqrt{96} \vee k = -\sqrt{96}\end{aligned}$$

Neem $k = 0$:

$$\begin{aligned}(l + 2)^2 &= 100 \\ l^2 + 4l + 4 &= 100 \\ (l - 8)(l + 12) &= 0 \\ l &= 8 \vee l = -12\end{aligned}$$

- d** neem $d = 0$:

$$\begin{aligned}a &= \frac{1200}{600} - 1 \\ a &= 1\end{aligned}$$

Neem $a = 0$:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1200}{600 + 0,2d^2} - 1 \\ 1 &= \frac{1200}{600 + 0,2d^2} \\ 600 + 0,2d^2 &= 1200 \\ d^2 &= 3000 \\ d &= \sqrt{3000} \vee d = -\sqrt{3000}\end{aligned}$$

e Neem $x = 0$:

$$-4(y^2 - 9) = -36$$

$$y^2 - 9 = 9$$

$$y = \sqrt{18} \vee y = -\sqrt{18}$$

Neem $y = 0$:

$$(x^2 - 4) \cdot -9 = -36$$

$$x^2 - 4 = 4$$

$$x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}$$

f Neem $x = 0$:

$$y^4 + 1 = 4$$

$$y^4 = 3$$

$$y^2 = \sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{\sqrt{3}} \vee y = -\sqrt{\sqrt{3}}$$

Neem $y = 0$:

$$1 = \frac{4}{1+x^2}$$

$$1 + x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

10 a Dat gaat zo:

$$\frac{12}{x+10} = 400$$

$$x + 10 = \frac{12}{400}$$

$$x = \frac{12}{400} - 10 \approx -9,97$$

b Dat gaat zo:

$$\frac{2}{x+2} + \frac{x}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$\frac{6}{3x+6} + \frac{x^2+2x}{3x+6} = -\frac{7}{3}$$

$$18 + 3x^2 + 6x = -21x - 42$$

$$60 + 3x^2 + 27x = 0$$

$$x^2 + 9x + 20 = 0$$

$$(x+5)(x+4) = 0$$

$$x = -5 \vee x = -4$$

c Dat gaat zo:

$$\frac{2a}{a-1} - \frac{3}{a} = 2$$

$$\frac{2a^2}{a(a-1)} - \frac{3a-3}{a(a-1)} = 2$$

$$2a^2 - 3a + 3 = 2a^2 - 2a$$

$$a = 3$$

d Dat gaat zo:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2-4x+2}{x^4+1} &= 0 \\ 2x^2 - 4x + 2 &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)(x-1) &= 0 \\ x &= 1\end{aligned}$$

e Dat gaat zo:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x^2+1} &= \frac{x+2}{2x+2} \\ (x+1)(2x+2) &= (x^2+1)(x+2) \\ 2x^2+2x+2x+2 &= x^3+x+2x^2+x \\ 3x &= x^3 \\ x^3-3x &= 0 \\ x(x^2-3) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

11 Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{5x^2-3}} &= \frac{1}{x} \\ 2x &= \sqrt{5x^2-3} \\ (2x)^2 &= 5x^2-3 \\ 4x^2 &= 5x^2-3 \\ 3 &= x^2 \\ x &= \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

12 a De hoogte van het Empire State Building is 381 meter. Voor wat betreft de hoogte hangt de afgelegde weg s af van de tijd volgens de formule $4,9t^2$. Het steentje verliest natuurlijk steeds hoogte, dus moet dit van de 381 m worden afgetrokken. De formule wordt dan $h = 381 - 4,9t^2$.

b Als het steentje op de grond komt dan betekent dit $h = 0$. Vul dit in bij de formule en los algebraïsch op:

$$\begin{aligned}381 - 4,9t^2 &= 0 \\ 4,9t^2 &= 381 \\ t^2 &= \frac{381}{4,9} \\ t &= \sqrt{\frac{381}{4,9}} \approx 8,8\end{aligned}$$

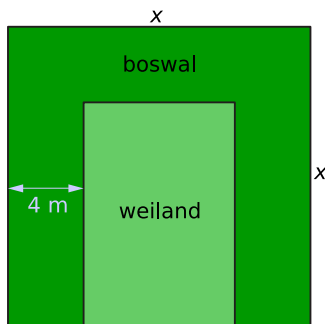
Dus na ongeveer 8,8 seconden.

c De formule voor de snelheid is $v = 9,8t$. Vul nu voor t de bij b gevonden waarde $t = \sqrt{\frac{381}{4,9}} \approx 8,8$ in.

Je vindt dan $v = 9,8 \cdot 8,8 \approx 86,4$ m/s.

86,4 m/s komt overeen met 311040 meter per 3600 s of wel 311,1 km/h.

13 Zie de figuur.



Noem de lengte van het land zonder boswal x .

De oppervlakte van het land zonder boswal is x^2 .

De lengte van het land met boswal is $x - 4$ en de breedte $x - 8$.

De oppervlakte van het land nadat een stuk is afgestaan voor de boswal is volgens de boer de helft van zijn oorspronkelijke land: $0,5x^2$.

Je krijgt de vergelijking $(x - 4)(x - 8) = 0,5x^2$.

Voer in: $Y1=(X-4)(X-8)$ en $Y2=0.5X^2$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 50$ en $0 \leq y \leq 800$

Je vindt $x \approx 20,94$ (een tabel met stapgrootte 0,001). ($x \approx 3,06$ kan niet).

De oppervlakte van het oorspronkelijk stuk land is ongeveer $20,94^2 \approx 438,5 \text{ m}^2$.

De boer houdt ongeveer 219 m^2 over.

14 a V staat voor de hoeveelheid kaarsvet en moet je zien als een inhoud. De inhoud van een cilinder kan worden berekend met de formule $I = \pi r^2 h$.

Bereken eerst de inhoud K van de hele kaars. De hoogte is gelijk aan 20 cm. De straal is 1,5 mm (voor de eerste onderdompeling is het alleen nog maar de lont) en wordt bij elke onderdompeling 0,5 mm groter. Dus de lengte r van de straal is afhankelijk van het aantal onderdompelingen volgens de formule $r = 1,5 + 0,5a$. Toegepast op de formule van de inhoud geeft dit $K = \pi \cdot (1,5 + 0,5a)^2 \cdot 200$, oftewel $K = 200\pi(1,5 + 0,5a)^2$. Maar de inhoud van de lont zelf moet er afgehaald worden. Deze lont heeft een diameter van 3 mm en dus een straal van 1,5 mm. Dit toegepast op de formule voor de inhoud geeft dit voor de inhoud L van de lont: $L = \pi \cdot (1,5)^2 \cdot 200 = 450\pi$.

De hoeveelheid kaarsvet V kan dan worden berekend door $V = K - L$ ofwel $V = 200\pi(1,5 + 0,5a)^2 - 450\pi$.

b Voer in: $Y1=200\pi(1.5+0.5a)^2 - 450\pi$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 1000$ en $0 \leq y \leq 160000000$

c GR:

$$106 \text{ cm}^3 = 106000 \text{ mm}^3$$

Voer in: $Y2=106000$

Na 23 onderdompelingen (zoom eventueel in op het snijpunt).

Algebraïsch:

$$200\pi(1,5 + 0,5a)^2 - 450\pi = 106000$$

$$200\pi(1,5 + 0,5a)^2 = 106000 + 450$$

$$1,5 + 0,5a = \sqrt{\frac{106000+450\pi}{200\pi}}$$

$$0,5a = \sqrt{\frac{106000+450\pi}{200\pi}} - 1,5$$

Na ongeveer 23 onderdompelingen.

15 a Oplossing:

$$1,25t + 5,50 = 1,85t$$

$$-0,6t = -5,5$$

$$t = 9\frac{1}{6}$$

b Oplossing:

$$0,15(p-2)^2 = 1,35$$

$$(p-2)^2 = 9$$

$$p-2 = 3 \vee p-2 = -3$$

$$p = 5 \vee p = -1$$

c Oplossing:

$$12 - \sqrt{4+x^2} = 0$$

$$12 = \sqrt{4+x^2}$$

$$144 = 4+x^2$$

$$140 = x^2$$

$$x = \sqrt{140} \vee x = -\sqrt{140}$$

d Oplossing:

$$3x - 12 = 0$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

e Oplossing:

$$\frac{1}{x-4} + \frac{x}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{5}{5(x-4)} + \frac{x(x-4)}{5(x-4)} = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{5}{5x-20} + \frac{x^2-4x}{5x-20} = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{x^2-4x+5}{5x-20} = -\frac{2}{5}$$

$$5(x^2-4x+5) = -2(5x-20)$$

$$5x^2-20x+25 = -10x+40$$

$$5x^2-10x-15 = 0$$

$$x^2-2x-3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \vee x = 3$$

16 Voer in: $Y1=0.25X^4$ en $Y2=5-X$.

Maak een tabel met steeds kleinere stappen. Je vindt $x \approx -2,33 \vee x \approx 1,88$.

1.5 Ongelijkheden

V1 a Daarbij hoort de ongelijkheid: $0,052v^3 > 20$.

b Eerst los je de bijbehorende vergelijking $0,052v^3 = 20$ op.

Vaak kan dat algebraïsch, vaak ook doe je dat met je grafische rekenmachine. Je maakt dan grafieken van $Y1=0.052X^3$ en $Y2=20$. Denk dan vooraf goed na over de instellingen van de assen. Bijvoorbeeld windsnelheden liggen in Nederland vaak tussen 0 en 20 m/s.

Kijk dan naar je grafieken voor de oplossing van de ongelijkheid.

1 a Dat gaat zo:

$$0,052v^3 = 20$$

$$v^3 \approx 384,6154$$

$$v \approx 7,27$$

b Die gaat bij deze vergelijking sneller en je kunt een exact antwoord geven.

2 a Venster bijvoorbeeld: $-30 \leq x \leq 30$ en $-30 \leq y \leq 30$

b Drie keer.

c Los eerst $0,01x(x^2 - 400) = x$ op.

Met de grafische rekenmachine vind je $x \approx -22,361$, $x = 0$ of $x \approx 22,361$.

De oplossing kun je uit de grafiek aflezen: $x < -22,36$ of $0 \leq x < 22,36$.

d Om de snijpunten te bepalen los je $y_1 = y_2$ op:

$$0,01x(x^2 - 400) = x$$

Voor $x = 0$ is deze vergelijking waar, dus $x = 0$ is een oplossing. Voor de eventuele andere oplossing geldt dan:

$$x^2 - 400 = \frac{x}{0,01x}$$

$$x^2 - 400 = 100$$

$$x^2 = 500$$

$$x = -\sqrt{500} \vee x = \sqrt{500}$$

3 a Dat gaat zo:

$$60 - x^2 = 4x$$

$$0 = x^2 + 4x - 60$$

$$0 = (x + 10)(x - 6)$$

$$x = -10 \vee x = 6$$

b Gebruik je grafische rekenmachine en maak de bijbehorende grafieken. Lees af: $x < -10$ of $x > 6$

4 a Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 15$ en $-50 \leq y \leq 200$.

b Met de grafische rekenmachine kun je bepalen dat de grafieken elkaar snijden voor $x = 0$ en $x = 8$.

De oplossing kun je in de grafiek aflezen: $x < 0$ of $0 < x < 8$.

5 De formule voor de totale kosten bestaat uit de kosten voor de mengmachine plus de kosten voor a liter verf: $TK = 3000 + 4,00 \cdot a$. De totale opbrengst is $TO = 8,25a$.

Los op $TO = TK$

$$8,25 \cdot a = 3000 + 4,00 \cdot a$$

$$4,25 \cdot a = 3000$$

$$a = 705,89$$

De verfhandelaar maakt winst vanaf 706 liter.

6 a $B = 0,125a$

b Per 10 kilometer betaal je € 0,80. Dat is dus € 0,08 per kilometer. Voor de totaalkosten het eerste jaar dat je op gas rijdt, tel je hier dan nog de prijs van de gastank bij op. De totaalkosten G worden dan gegeven door:

$$G = 1250 + 0,08a$$

c $1250 + 0,08a \leq 0,125a$

d Oplossing:

$$1250 + 0,08a \leq 0,125a$$

$$0,125a \geq 1250 + 0,08a$$

$$0,045a \geq 1250$$

$$a \geq 27777,77...$$

Dus je moet meer dan (afgerond) 27778 km rijden om de kosten van de gastank eruit te halen.

7 a Dat gaat zo:

$$x^3 = x$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$$

Voer in: $Y1 = X^3$ en $Y2 = X$

Venster bijvoorbeeld: $-2 \leq x \leq 2$ en $-2 \leq y \leq 2$

Met behulp van de grafiek vind je $-1 < x < 0 \vee x > 1$.

b Dat gaat zo:

$$x^3 = 80x - 2x^2$$

$$x^3 - 80x + 2x^2 = 0$$

$$x(x^2 - 80 + 2x) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 - 80 + 2x = 0$$

$$x = 0 \vee (x + 10)(x - 8) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -10 \vee x = 8$$

Voer in: $Y1 = X^3$ en $Y2 = 80X - 2X^2$

Venster bijvoorbeeld: $-12 < x < 10$ en $-1200 < y < 600$

Met behulp van de grafiek vind je $x \leq -10 \vee 0 \leq x \leq 8$.

c Oplossing:

$$\frac{8}{x^2} - x = 0$$

$$\frac{8}{x^2} - \frac{x \cdot x^2}{x^2} = 0$$

$$8 - x^3 = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

Voer in: $Y1 = 8/(X^2)$ en $Y2 = X$

Venster bijvoorbeeld: $-4 \leq x \leq 7$ en $-2 \leq y \leq 6$

Met behulp van de grafiek vind je $x < 0 \vee 0 < x \leq 2$.

d Oplossing:

$$x^2 - 4x = -3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1 \vee x = 3$$

Voer in: $Y1 = X^2 - 4X$ en $Y2 = -3$

Venster bijvoorbeeld: $-2 \leq x \leq 5$ en $-5 \leq y \leq 2$

Met behulp van de grafiek vind je $x < 1 \vee x > 3$.

- 8 a** Voer in: $Y1=100X^2(X-20)^2$ en $Y2=100000$

Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $-10^5 \leq y \leq 10^6$

Je vindt dan de oplossingen: $x \approx -1,473$, $x \approx 1,731$, $x \approx 18,269$ en $x \approx 21,473$.

Met behulp van een grafiek op je GR vind je de oplossing van de ongelijkheid:
 $-1,47 \leq x \leq 1,73 \vee 18,27 \leq x \leq 21,47$.

- b** Dat gaat zo:

$$100x^2(x-20)^2 = 100x^2$$

$$x = 0 \vee (x-20)^2 = 1$$

$$x = 0 \vee x = 21 \vee x = 19$$

Met behulp van een grafiek vind je de oplossing van de ongelijkheid: $x = 0 \vee 19 \leq x \leq 21$.

- 9 a** Oplossing:

$$125q > 6150$$

$$q > 49,2$$

q is het aantal verkochte fietsen per maand.

Dus de winkelier moet meer dan 49 fietsen verkopen.

- b** Oplossing:

$$425q > 300q + 950 + 5200$$

$$425q > 300 \cdot 200 + 950 + 5200$$

$$425q > 66150$$

$$q > \frac{66150}{425}$$

$$q > 155,647...$$

De winkelier moet minstens 156 fietsen verkopen.

- 10 a** Bestuurder A heeft dus een voorsprong van 24 kilometer op bestuurder B. Als je snelheid in km/h vermenigvuldigt met de tijd in uren krijg je de afgelegde afstand.

$$\text{Dus } a_A = 110t + 24 \text{ en } a_B = 120t.$$

- b** Stel in dat geval de vergelijking $a_B = a_A$ op en los deze algebraïsch op:

$$120t = 110t + 24$$

$$10t = 24$$

$$t = 2,4$$

Dus $t = 2,4$ uur ofwel 144 minuten. Dus na 144 minuten wordt auto A ingehaald door B.

- c** Op te lossen is $a_A - a_B = 4$ en $a_B - a_A = 4$

$$a_A - a_B < 4$$

$$110t + 24 - 120t < 4$$

$$-10t < -20$$

$$t > 2$$

$$a_A - a_B < 4$$

$$120t - (110t + 24) < 4$$

$$120t - 110t - 24 < 4$$

$$10t < 28$$

$$t < 2,8$$

Dus tussen 2 en 2,8 uur.

11 a Oplossing:

$$\begin{aligned} p &= (-p + 6)^2 \\ p &= p^2 - 12p + 36 \\ 0 &= p^2 - 13p + 36 \\ 0 &= (p - 4)(p - 9) \\ p - 4 &= 0 \vee p - 9 = 0 \\ p &= 4 \vee p = 9 \end{aligned}$$

Met een grafiek zie je dat $p = 9$ niet kan en dat het antwoord is: $p \geq 4$.

b Voer in: $Y1=X\sqrt{X}$ en $Y2=X(4X-1)$

Venster bijvoorbeeld: $-0,1 < x < 0,5$ en $-1 < y < 2$

Je vindt dat bij $x = 0$ en $x \approx 0,4101$ de grafieken elkaar snijden.

Met een grafiek lees je de oplossing vervolgens af: $0 < x \leq 0,41$

c Dit kan niet algebraïsch.

Voer in: $Y1=3(X-1)(X^2-4)$ en $Y2=X^2-3X-2$

Venster bijvoorbeeld: $-4 \leq x \leq 4$ en $-10 \leq y \leq 20$

Je vindt dat bij $m \approx -1,793$ de grafieken elkaar snijden. Met een grafiek vind je vervolgens de oplossing: $m < -1,79$.

d $(4a - 4)\frac{1}{a} < 2\left(a - \frac{1}{a}\right)$

Bij deze vergelijking geldt $a \neq 0$. Je lost hem bijvoorbeeld zo op:

$$\begin{aligned} 4 - \frac{4}{a} &= 2a - \frac{2}{a} \\ 4a - 4 &= 2a^2 - 2 \\ 2a^2 - 2 - 4a + 4 &= 0 \\ 2a^2 - 4a + 2 &= 0 \\ a^2 - 2a + 1 &= 0 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Na controle blijkt dat $a = 1$ de enige juiste oplossing is van de vergelijking.

Met een grafiek lees je de oplossing af: $a > 0$ met $a \neq 1$.

12 a Het gaat om het bedrag per kilometer voor de benzine en onderhoudskosten. De onderhoudskosten zijn het gemakkelijkst: dat is 2,5 eurocent per gereden kilometer. Daarbij komen nog de benzinekosten. Die bedragen 1,60 liter, waarbij je met 1 liter benzine 20 kilometer kunt rijden. Per kilometer heb je dus $\frac{1}{20}$ liter benzine nodig. 1 liter benzine kost € 1,60 en $\frac{1}{20}$ liter benzine dus $\frac{1}{20} \cdot 1,60 = € 0,08$.

In totaal kom je dus op $0,08 + 0,025 = 0,105$, dus 10,5 ct/km.

b De smart kost € 0,105 per gereden kilometer. Voor 16000 kilometer betaal je dus $16000 \cdot 0,105 = 1680$ euro.

Voor de Smart zelf betaal je € 4,00 per dag. In een jaar dus $365 \cdot 4 = 1460$

Opgeteld dus € 3140,00.

c Je hebt te maken met een vast bedrag van € 1460,00 dat je kwijt bent voor de Smart zelf. Per gereden kilometer ben je € 0,105 extra kwijt. Je vindt dan voor de kosten de formule $K = 1460 + 0,105a$, met K de kosten in euro en a het aantal gereden kilometers. De kosten moeten onder de € 5000,00 blijven, wat resulteert in de ongelijkheid $1460 + 0,105a < 5000$.

Eerst de bijbehorende vergelijking oplossen:

$$\begin{aligned} 1460 + 0,105a &= 5000 \\ 0,105a &= 3540 \\ a &= 33714,29 \end{aligned}$$

Dus de oplossing van de ongelijkheid is $a \leq 33714$.

- d** Maak onderscheid in twee gevallen: 1) je rijdt minder dan 20000 kilometer per jaar, en 2) je rijdt 20000 kilometer of meer per jaar.

Geval 1: minder dan 20000 kilometer per jaar.

Per kilometer betaal je dan € 0,08 cent (zie a). Voor minder dan 20000 km rijden betaal je alsof je 20000 km rijdt. Dus: $20000 \cdot 0,025 = 500$. Dus een vast bedrag van $500 + 1460 = 1960$ euro.

Je krijgt dan het functievoorschrift $K(a) = 1960 + 0,08a$.

Geval 2: 20000 kilometer per jaar of meer

Per kilometer betaal je dan € 0,105 cent (zie a). Je krijgt dan het functievoorschrift $K(a) = 1460 + 0,105a$.

- 13 a** Noem het aantal blikken eten dat Frits meeneemt b en het aantal flessen drinken f . We willen dat het opgetelde gewicht hooguit 10 kg is, met andere woorden: $1,5b + 0,5f \leq 10$

Tevens wil Frits dat het aantal flesjes minstens 5 is en het aantal blikken minstens 4:

$$f \geq 5$$

$$b \geq 4$$

- b** Schrijf $1,5b + 0,5f \leq 10$ als $1,5b + 0,5f = 10$. Schrijf daarna (bijvoorbeeld) f vrij:

$$f = 20 - 3b$$

De andere twee ongelijkheden worden:

$$f = 5$$

$$b = 4$$

Bij elkaar sluiten deze drie vergelijkingen een driehoekje in. Alle coördinaten met gehele getallen op of binnen deze driehoek voldoen aan de ongelijkheden.

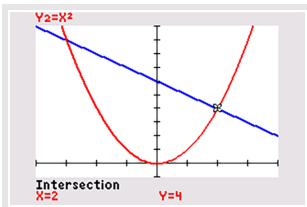
- c** Een tas die zo vol mogelijk ingepakt is betekent dat de vergelijking $1,5b + 0,5f = 10$ geldt. Op de tekening liggen de mogelijke samenstellingen dus op de schuine lijn. De twee coördinaten die voldoen aan $b \geq 4$ en $f \geq 5$ die op deze lijn liggen zijn (4,8) en (5,5).

Kortom, om z'n tas zo vol mogelijk in te pakken neemt Frits ofwel vier blikken eten en acht flessen drinken, ofwel vijf blikken eten en vijf flessen drinken mee.

- 14 a** Oplossing:

$$\begin{aligned} 12 - 2x &< 2x^2 \\ -2x^2 - 2x + 12 &= 0 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x + 3)(x - 2) &= 0 \\ x + 3 &= 0 \vee x - 2 = 0 \\ x &= -3 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Met een grafiek lees je de oplossing af: $x < -3 \vee x > 2$.

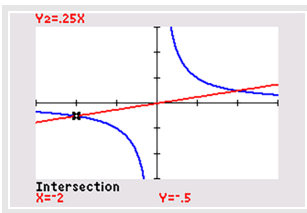


- b** Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &\geq 0,25x \\ 1 &= 0,25x^2 \\ x^2 &= 4 \\ x &= 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

Let op: $x \neq 0$

Met een grafiek lees je de oplossing af: $x \leq -2 \vee 0 < x \leq 2$.



- 15 Bij dit vraagstuk kun je de ongelijkheid $144 - 25t > 21t$ opstellen.

$$144 - 24t > 18t$$

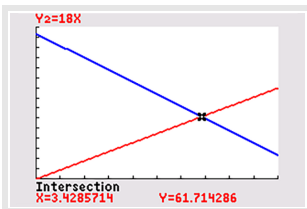
$$144 > 42t$$

$$42t < 144$$

$$t < \frac{144}{42}$$

$$t < 3,428\dots$$

Met een grafiek lees je de oplossing af: $t < 3,429$.



Dit komt neer op ongeveer 3 uur en 26 minuten.

1.6 Stelsels vergelijkingen

V1 Omdat er 300 bezoekers zijn is $x + y = 300$. De totale inkomsten zijn $2,5x + 4,5y$ en dat is samen 1110 euro, dus $2,5x + 4,5y = 1110$.

Je kunt nu dit probleem oplossen door beide vergelijkingen te herleiden naar de vorm $y = \dots$ en dan het snijpunt van beide functies te berekenen.

1 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 2,5x + 4,5y &= 1110 \\ 4,5y &= -2,5x + 1110 \\ y &= \frac{-2,5}{4,5}x + \frac{1110}{4,5} \\ y &= -\frac{5}{9}x + 246\frac{2}{3} \end{aligned}$$

b Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} x + y &= 300 \\ x + \left(-\frac{5}{9}x + 246\frac{2}{3}\right) &= 300 \\ x - \frac{5}{9}x + 246\frac{2}{3} &= 300 \\ \frac{4}{9}x + 246\frac{2}{3} &= 300 \\ \frac{4}{9}x &= 53\frac{1}{3} \\ x &= 120 \end{aligned}$$

c Je hoeft dan niet met breuken te rekenen.

2 a $y = -2x + 6$

b $x - 3(-2x + 6) = -4$

c Oplossing:

$$\begin{aligned} x - 3(-2x + 6) &= -4 \\ x + 6x - 18 &= -4 \\ 7x &= 14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

d $y = -2x \cdot 2 + 6 = 2$, dus de oplossing is $x = 2$ en $y = 2$.

Controle: $x = 2$ en $y = 2$ invullen in de andere vergelijking: $2 - 3 \cdot 2 = -4$.

e Dat gaat zo:

$$\begin{aligned} 2(3y - 4) + y &= 6 \\ 7y &= 14 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 3 \cdot 2 &= -4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

3 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 2,5x + 4,5y - (2,5x + 2,5y) &= 1110 - 750 \\ 2,5x + 4,5y - 2,5x - 2,5y &= 1110 - 750 \\ 2y &= 360 \\ y &= 180 \end{aligned}$$

b $\begin{cases} 4 & 5x + 4 & 5y & = & 1350 \\ 2 & 5x + 4 & 5y & = & 1110 \end{cases}$

Trek nu de onderste vergelijking van de bovenste af:

$$\begin{aligned} 4,5x + 4,5y - (2,5x + 4,5y) &= 1350 - 1110 \\ 4,5x + 4,5y - 2,5x - 4,5y &= 1350 - 1110 \\ 2x &= 240 \\ x &= 120 \end{aligned}$$

Uit $x + y = 300$ volgt $y = 180$.

c
$$\begin{cases} 5x + 5y = 1500 \\ -5x - 9y = -2220 \end{cases}$$

Tel de onderste vergelijking bij de bovenste op:

$$\begin{aligned} 5x + 5y + (-5x - 9y) &= 1500 + -2220 \\ 5x + 5y - 5x - 9y &= 1500 - 2220 \\ -4y &= -720 \\ y &= 180 \end{aligned}$$

Uit $x + y = 300$ volgt $y = 180$.

4 a De bovenste vergelijking met 3 vermenigvuldigen levert:

$$\begin{cases} 6x + 3y = 18 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$$

Beide zijden optellen:

$$\begin{aligned} 6x + 3y + (x - 3y) &= 18 + -4 \\ 7x &= 14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Invullen in een van beide vergelijkingen geeft $y = 2$.

b De onderste vergelijking met 2 vermenigvuldigen levert:

$$\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 4x - 4y = 6 \end{cases}$$

Beide zijden aftrekken:

$$\begin{aligned} 5x - 4y - (4x - 4y) &= 8 - 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Invullen in een van beide vergelijkingen geeft $y = 0,5$.

5 Eerst beide vergelijkingen schrijven als $y = \dots$

Voer in: $Y1 = -2X + 6$ en $Y2 = 1/3X + 4/3$

Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 10$

Je vindt $x = 2$ en $y = 2$.

6 a $12x + 5y = -14$ kun je schrijven als $y = -\frac{14}{5} - \frac{12}{5}x$ en $24x + 7y = 44$ kun je schrijven als $y = \frac{44}{7} - \frac{24}{7}x$.

Voer in: $Y1 = -14/5 - 12/5X$ en $Y2 = 44/7 - 24/7X$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 20$ en $-40 \leq y \leq 10$

Je vindt $x \approx 8,83$ en $y \approx -24$.

b $0,56x - 2y = 0,82$ kun je schrijven als $y = 0,28x - 0,41$ en $-0,33x + 3y = 9,12$ kun je schrijven als $y = 3,04 + 0,11x$.

Voer in: $Y1 = 0.28X - 0.41$ en $Y2 = 3.04 + 0.11X$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 30$ en $0 \leq y \leq 25$

Je vindt $x \approx 20,29$ en $y \approx 5,27$.

7 a Omdat de vergelijking $l \cdot b = 120$ een product van l en b bevat.

- b** Eerst de vergelijkingen herschrijven: $l = \frac{120}{b}$ en $l = 23 - b$.

Voer in: $Y1=120/X$ en $Y2=23-X$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 25$ en $0 \leq y \leq 25$

Dan snijpunt bepalen met intersect.

- 8 a** Dat lukt niet.

- b** Dat hangt af van de manier waarop je dit aanpakt. Je komt waarschijnlijk op een uitdrukking zonder x en y die niet waar kan zijn.

- c** Het zijn vergelijkingen van twee evenwijdige lijnen, deze hebben per definitie geen snijpunten.

- 9** Als je bijvoorbeeld de balansmethode gebruikt om het stelsel op te lossen kom je op een uitdrukking zonder x en y die niet waar kan zijn. Het stelsel heeft dus geen oplossingen.

- 10 a** Bovenste vergelijking met 2 vermenigvuldigen levert het stelsel:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

Onderste van de bovenste aftrekken:

$$5y = 12 \text{ en } y = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

Met $x + y = 6$ kom je op $x = 3\frac{3}{5}$.

- b** Vermenigvuldig de bovenste vergelijking met 3, en de onderste met 2:

$$\begin{cases} 6x + 12y = 21 \\ 6x + 10y = 16 \end{cases}$$

Onderste van de bovenste aftrekken:

$$2y = 5 \text{ en } y = 2,5.$$

Invullen in $2x + 4y = 7$ levert $x = -1,5$.

- c** Je kunt de bovenste vergelijking direct in de onderste substitueren:

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ x + x^2 &= 6 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x + 3)(x - 2) &= 0 \\ x + 3 &= 0 \vee x - 2 = 0 \\ x &= -3 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Met behulp van $y = x^2$ kun je zeggen:

Als $x = 2$ is $y = 4$.

Als $x = -3$ is $y = 9$.

- d** Schrijf de vergelijkingen eerst als functies van y , zodat je ze kunt invoeren in de GR:

$$\begin{cases} y = \frac{84}{x} \\ y = 29 - 2x \end{cases}$$

Voer in: $Y1=84/X$ en $Y2=29-2X$

Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 20$ en $-30 \leq y \leq 30$

Laat de rekenmachine de snijpunten bepalen.

Dat levert op: $x = 4$ en $y = 21$ of $x = 10,5$ en $y = 8$.

e Oplossing:

$$x^2 + y^2 = 50$$

$$x^2 + (2x + 5)^2 = 50$$

$$x^2 + 4x^2 + 20x + 25 = 50$$

$$5x^2 + 20x - 25 = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x + 5)(x - 1) = 0$$

$$x + 5 = 0 \vee x - 1 = 0$$

$$x = -5 \vee x = 1$$

$$y = 2 \cdot -5 + 5 = -5 \text{ of } y = 2 \cdot 1 + 5 = 7.$$

Oplossingen: $x = -5$ en $y = -5$ of $x = 1$ en $y = 7$.

11 Bekijk het stelsel

$$\begin{cases} l \cdot b = 300 \\ 2l + 2b = 80 \end{cases}$$

De onderste vergelijking kun je om schrijven naar $b = 40 - l$.

$$l \cdot b = 300$$

$$l(40 - l) = 300$$

$$-l^2 + 40l = 300$$

$$l^2 - 40l + 300 = 0$$

$$(l - 10)(l - 30) = 0$$

$$l - 10 = 0 \vee l - 30 = 0$$

$$l = 10 \vee l = 30$$

12 Noem de hoeveelheid kg kaas k en de hoeveelheid kilogram boter b .

Iedere kg kaas gebruikt 9,8 kg melk en iedere kg boter 22,5 kg melk. In totaal is er 1000 kg melk beschikbaar, dus:

$$9,8k + 22,5b = 1000$$

Tevens wordt er twee keer zo veel boter als kaas gemaakt: $b = 2k$.

Het op te lossen stelsel is dus:

$$\begin{cases} 9,8k + 22,5b = 1000 \\ b = 2k \end{cases}$$

De onderste vergelijking substitueren in de bovenste levert:

$$54,8k = 1000$$

$$k \approx 18,25$$

$$\text{Dus } b = 36,5.$$

13 Noem de prijs van een thuja t en de prijs van een jeneverbes j . Als er 20 thuja's en 12 jeneverbessen gekocht zijn voor € 267,00 valt dat om te schrijven naar $20t + 12j = 267$.

Twee jeneverbessen plus € 18,00 worden omgeruild voor vijf thuja's: $2j + 18 = 5t$, oftewel $-5t + 2j = -18$. Je stelsel is dus:

$$\begin{cases} 20t + 12j = 267 \\ -5t + 2j = -18 \end{cases}$$

Vermenigvuldig de onderste vergelijking met 4 en tel bij de bovenste vergelijking op:

$$20j = 195 \text{ geeft } j = 9,75.$$

Invullen in een van de vergelijkingen levert $t = 7,5$.

14 De tweede vergelijking van de eerste vergelijking aftrekken: $x + 4y = -20$.

De tweede vergelijking twee keer van de derde vergelijking aftrekken: $7x + 3y = 55$

Je hebt nu het stelsel:

$$\begin{cases} x + 4y = -20 \\ 7x + 3y = 55 \end{cases}$$

De eerste vergelijking met 3 vermenigvuldigen en de tweede vergelijking met 4 vermenigvuldigen geeft:

$$\begin{cases} 3x + 12y = -60 \\ 28x + 12y = 220 \end{cases}$$

De tweede vergelijking van de eerste vergelijking aftrekken geeft $-25x = -280$, dus $x = 11,2$.

Invullen leidt tot $y = -7,8$

De gevonden x en y invullen geeft: $z = -6,2$

- 15 a** Noem het aantal bestelde borden b , het aantal bestelde kommen k en het aantal bestelde sets bestek s .

Als een set van 5 borden € 7,50 kost, dan betekent dat dat ieder afzonderlijk bord € 1,50 kost. Volgens een zelfde redenering kost iedere kom € 1,20. Een set bestek kost gewoon € 6,00. Bij elkaar betekent dat:

$$1,5b + 1,2k + 6s = 1560$$

Zoals gezegd zijn borden en kommen 0,4 kg per stuk, en een set bestek weegt 2 kg:

$$0,4b + 0,4k + 2s = 500$$

Als laatste zijn er twee keer zoveel borden als kommen besteld, met andere woorden:

$$b = 2k \text{ ofwel } b - 2k = 0$$

Het stelsel wordt:

$$\begin{cases} 1,5b + 1,2k + 6s = 1560 \\ 0,4b + 0,4k + 2s = 500 \\ b - 2k = 0 \end{cases}$$

b
$$\begin{cases} 1,5b + 1,2k + 6s = 1560 \\ 0,4b + 0,4k + 2s = 500 \\ b - 2k = 0 \end{cases}$$

Vermenigvuldig de onderste vergelijking met 0,4, en trek die van de middelste af. Deel de onderste vergelijking daarna weer door 0,4, zodat je de oorspronkelijke onderste vergelijking terugkrijgt:

$$\begin{cases} 1,5b + 1,2k + 6s = 1560 \\ 1,2k + 2s = 500 \\ b - 2k = 0 \end{cases}$$

Vermenigvuldig de onderste vergelijking nu met 1,5, en trek die van de bovenste af, waarna je de onderste vergelijking weer terugschrijft naar het origineel:

$$\begin{cases} 4,2k + 6s = 1560 \\ 1,2k + 2s = 500 \\ b - 2k = 0 \end{cases}$$

Los nu de bovenste twee vergelijkingen op door de onderste daarvan (de middelste van de drie) te vermenigvuldigen met 3, en die van de bovenste af te trekken:

$$\begin{cases} 0,6k = 60 \\ 3,6k + 6s = 1500 \\ b - 2k = 0 \end{cases}$$

Uit de bovenste vergelijking zie je al gauw dat:

$$k = 100$$

Uit $3,6k + 6s = 1500$ en $b - 2k = 0$ kan je dan opmaken dat $b = 200$ en $s = 190$.

Omdat iedere set borden 5 borden bevat, zijn er $\frac{200}{5} = 40$ sets borden besteld. Voor hetzelfde geld zijn er 25 sets kommen besteld.

- 16 a** Vermenigvuldig de onderste vergelijking met 2:

$$\begin{cases} 3a + 4b = 10 \\ 2a - 4b = 8 \end{cases}$$

Tel de onderste vergelijking bij de bovenste op:

$$5a = 18 \text{ en dus } a = 3,6.$$

Hieruit volgt $b = -0,2$.

- b** Vermenigvuldig de bovenste vergelijking met 5:

$$\begin{cases} 10x - 5y = 25 \\ 3x + 5y = 15 \end{cases}$$

Tel de onderste vergelijking bij de bovenste op:

$$13x = 40 \text{ en } x = \frac{40}{13} \approx 3,08.$$

Hieruit volgt $y = \frac{15}{13} \approx 1,15$.

- c** Schrijf beide vergelijkingen als functie van q (van p kan ook, maar is onnodig werk):

$$\begin{cases} q = \frac{400}{p} \\ q = 200 - 0,5p \end{cases}$$

Voer in op de GR: $Y1=400/X$ en $Y2=200-0.5X$

Venster: $[0,450] \times [0,250]$

Je vindt $p \approx 2,01$ en $q \approx 198,99$ of $p \approx 397,99$ en $q \approx 1,01$.

- d** $2x + y = 3$ kun je schrijven als $y = 3 - 2x$. Substitutie in de eerste vergelijking geeft $-3x^2 + (3 - 2x)^2 = -27$. Dit kun je herleiden tot $x^2 - 12x + 36$, ontbinden in factoren levert $(x - 6)^2 = 0$ en dus $x = 6$.

$$y = 3 - 2 \cdot 6 = -9.$$

Oplossing: $x = 6$ en $y = -9$.

- 17** $12,50z + 15b = 1080$ en $z + b = 82$, oftewel $z = 82 - b$.

Substitutie geeft:

$$\begin{aligned} 12,50z + 15b &= 1080 \\ 12,50(82 - b) + 15b &= 1080 \\ 1025 - 12,50b + 15b &= 1080 \\ 1025 + 2,5b &= 1080 \\ 3,5b &= 1080 \\ b &= \frac{55}{2,5} \\ b &= 22 \end{aligned}$$

Invullen in de vergelijking geeft $z = 60$.

Er zaten dus 22 mensen op het balkon en 60 in de zaal.

1.7 Totaalbeeld

1 a Oplossing:

$$-0,15(x + 25)^2 + 15 = 0$$

$$(x + 25)^2 - 100 = 0$$

$$(x + 25)^2 - 100 = 0$$

$$x^2 + 50x + 525 = 0$$

$$(x + 15)(x + 35) = 0$$

$$x = -15 \text{ of } x = -35$$

b Oplossing:

$$4(t - 2)^3 = 16$$

$$(t - 2)^3 = 4$$

$$t - 2 = \sqrt[3]{4}$$

$$t = 2 + \sqrt[3]{4}$$

c Oplossing:

$$\frac{8x}{x-3} = x + 3$$

$$8x = (x + 3)(x - 3)$$

$$8x = x^2 - 9$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$(x + 1)(x - 9) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ of } x - 9 = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = 9$$

d Oplossing:

$$2k^2 - 2k = 180$$

$$k^2 - k = 90$$

$$k^2 - k - 90 = 0$$

$$(k - 10)(k + 9) = 0$$

$$k = 10 \text{ of } k = -9$$

e Oplossing:

$$\frac{1}{x} + x = 5,2$$

$$1 + x^2 = 5,2x$$

$$x^2 - 5,2x + 1 = 0$$

$$(x - 5)(x - 0,2) = 0$$

$$x = 5 \text{ of } x = 0,2$$

f Oplossing:

$$\begin{aligned}
 (2x - 9)(5x + 3) &= (2x - 4)(2x - 9) \\
 (2x - 9)(5x + 3) - (2x - 4)(2x - 9) &= 0 \\
 (2x - 9)(5x + 3 - (2x - 4)) &= 0 \\
 (2x - 9)(5x + 3 - 2x + 4) &= 0 \\
 (2x - 9)(3x + 7) &= 0 \\
 (2x - 9)(3x + 7) &= 0 \\
 2x - 9 &= 0 \vee 3x + 7 = 0 \\
 2x &= 9 \vee 3x = -7 \\
 x &= \frac{9}{2} \vee x = -\frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

2 Voer in: $Y1 = X^2 + \sqrt{2X}$ en $Y2 = 20$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 25$

Bepaal met inklemmen met behulp van de tabellen in de rekenmachine het snijpunt van beide grafieken met voldoende nauwkeurigheid. Je vindt dan $x \approx 4,138$.

3 a Oplossing:

$$\begin{aligned}
 4 - x^2 &= 3x \\
 -x^2 - 3x + 4 &= 0 \\
 x^2 + 3x - 4 &= 0 \\
 (x + 4)(x - 1) &= 0 \\
 x + 4 &= 0 \vee x - 1 = 0 \\
 x &= -4 \vee x = 1
 \end{aligned}$$

De oplossing lees je af uit de grafieken van $y_1 = 4 - x^2$ en $y_2 = 3x$: $-4 < x < 1$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned}
 20x(10 + x)^2 &= 80x \\
 (10 + x)^2 &= 4 \\
 10 + x &= -2 \vee 10 + x = 2 \\
 x &= -12 \vee x = -8
 \end{aligned}$$

Maak nu de grafieken op je GR, kies een venster waarbinnen alle drie de oplossingen zichtbaar zijn. De ongelijkheid heeft als oplossing: $x \leq -12 \vee -8 \leq x \leq 0$.

4 a De bovenste vergelijking met 3 vermenigvuldigen en de onderste met 4 geeft

$$\begin{cases} 9x - 12y = 36 \\ 16x + 12y = 48 \end{cases}$$

De onderste vergelijking bij de bovenste optellen geeft $25x = 84$ en dus $x = 3,36$.

Deze x -waarde invullen in één van beide gegeven vergelijkingen geeft $y = -0,48$.

b Oplossing:

$$\begin{aligned}
 40 + 0,16a &= 36 + 0,18a \\
 0,02a &= 4 \\
 a &= 200
 \end{aligned}$$

Invullen in één van beide gegeven vergelijkingen geeft $K = 72$.

c $2x + 2y = 6$ geeft $y = -x + 3$, substitueer dit in $2y^2 - x^2 = -2$ en je krijgt:

$$\begin{aligned}
 2y^2 - x^2 &= -2 \\
 2(-x + 3)^2 - x^2 &= -2 \\
 2(x^2 - 6x + 9) - x^2 &= -2 \\
 2x^2 - 12x + 18 - x^2 &= -2 \\
 x^2 - 12x + 20 &= 0 \\
 (x - 2)(x - 10) &= 0 \\
 x - 2 = 0 \vee x - 10 &= 0 \\
 x = 2 \vee x &= 10
 \end{aligned}$$

De oplossingen zijn: $x = 2$ en $y = 1$ $\vee$ $x = 10$ en $y = -7$.

- d** $l \cdot b = 12$ geeft $l = \frac{12}{b}$ en als je dit substitueert in $2l - 3b = 4$ krijg je de vergelijking $\frac{24}{b} - 3b = 6$.

$$\begin{aligned}
 2l - 3b &= 6 \\
 2\left(\frac{12}{b}\right) - 3b &= 6 \\
 \frac{24}{b} - 3b &= 6 \\
 24 - 3b^2 &= 6b \\
 3b^2 + 6b - 24 &= 0 \\
 b^2 + 2b - 8 &= 0 \\
 (b + 4)(b - 2) &= 0 \\
 b + 4 = 0 \vee b - 2 &= 0 \\
 b = -4 \vee b &= 2
 \end{aligned}$$

- 5 a** Voer in: $Y1=100+40X-5X^2$

Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 10$ en $-5 \leq y \leq 200$

- b** Het afschieten gebeurt op $t = 0$, dan is $h = 100$.

- c** Hij is weer op die hoogte als:

$$\begin{aligned}
 40t - 5t^2 &= 0 \\
 5t(8 - t) &= 0 \\
 t = 0 \vee t &= 8
 \end{aligned}$$

- d** Na 4 seconden.

- e** 180 meter

- f** Nu moet je $h = 0$, dus $100 + 40t - 5t^2 = 0$ oplossen.

Dit geeft $t^2 - 8t - 20 = 0$, ofwel $(t - 10)(t + 2) = 0$. Hiervan is alleen $t = 10$ een bruikbare oplossing.

$$\begin{aligned}
 100 + 40t - 5t^2 &= 0 \\
 20 + 8t - t^2 &= 0 \\
 t^2 - 8t - 20 &= 0 \\
 (t + 2)(t - 10) &= 0 \\
 t + 2 = 0 \vee t - 10 &= 0 \\
 t = -2 \vee t &= 10
 \end{aligned}$$

- g** Nee, je weet niet onder welke hoek de pijl is afgeschoten. In de formule wordt h uitgezet tegen de tijd, dus je weet alleen het verloop van de hoogte.

- 6 a** Grondvlak en bovenvlak hebben een oppervlakte van $x^2 \text{ cm}^2$.

De vier zijvlakken hebben elk een oppervlakte van $xh \text{ cm}^2$.

- b** Los op: $48x + 2x^2 = 800$.

Voer in: $Y1=48X + 2X^2$ en $Y2=800$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 100$

Bepaal het snijpunt door inklemmen. Je vindt $x \approx 11,3$ mm.

- 7 a euro in A en b euro in B beleggen geeft $a + b = 10000$ en $0,10a + 0,14b = 1180$.

De eerste vergelijking schrijf je als $b = 10000 - a$ en dit substitueer je in de tweede:

$$\begin{aligned} 0,10a + 0,14b &= 1180 \\ 0,10a + 0,14(10000 - a) &= 1180 \\ 0,10 + 1400 - 0,14a &= 1180 \\ -0,04a &= -220 \\ a &= \frac{-220}{-0,04} \\ a &= 5500 \end{aligned}$$

Dus er is € 5500,00 in fonds A belegd.

- 8 a $7,02 \text{ m/s} \approx 25,3 \text{ km/h}$

b $D = \sqrt{\frac{200000}{v^3}}$

- c Tussen 14,1 m en 158,1 m.

- 9 a $BMI = \frac{90}{1,73^2} \approx 30$.

b $BMI \approx 0,33G$

- c Vanaf 56 kg tot en met 75 kg.

d $G = 18,5l^2$

- e Doen. Bekijk eventueel hoe dergelijke grafieken er uit zien in het artikel [Wikipedia: Quetelet Index](#).

- f Je kunt dan heel snel zien in welke groep een volwassene valt als je zijn lengte en gewicht hebt bepaald. Het is wat minder nauwkeurig, maar die nauwkeurigheid is in de praktijk toch niet nodig.

- 10 a $0,75 \text{ m}^2$ per persoon

b $M = 0,65 \text{ m}^2$ per persoon.

c $M = 7 \text{ m}^2$ per persoon

d 140 mensen per minuut

e 71 voetgangers per minuut

- 11 a De breedte van de doos is $b - 2x$ en de hoogte van de doos is x . Er moet gelden dat $b - 2x > 0$, dus $x < \frac{1}{2}b$. Haakjes wegwerken geeft $I = 4x^3 - 4bx^2 + b^2x$.

b $I = 4x^3 - 160x^2 + 1296x (0 < x < 18)$

Voer in: $Y1=4X^3-144X^2+1296X$

Venster: $0 \leq x \leq 18$ en $0 \leq y \leq 5000$

Je vindt dat er bij $x = 6$ een maximum inhoud is van 3456 cm^2 .

$I = 4x^3 - 240x^2 + 3200x (0 < x < 18)$

Voer in: $Y1=4X^3-144X^2+3200X$

Venster: $0 \leq x \leq 40$ en $0 \leq y \leq 20000$

Je vindt dat er bij $x = 10$ een maximum inhoud is van 16000 cm^2 .

2

Functies en grafieken

2.1	Het begrip functie	54
2.2	Domein en bereik	60
2.3	Bijzondere functies	66
2.4	Samengestelde functies	71
2.5	Transformaties	76
2.6	Totaalbeeld	82

2.1 Het begrip functie

V1 a $P = 0,00013 \cdot 10^3 \cdot 40^2 \approx 52$ kiloWatt.

b $P = 0,052 \cdot v^3$

c Bijvoorbeeld op de horizontale as $0 \leq v \leq 20$ en op de verticale as $0 \leq P \leq 400$.

1 a A

b $P(6) = 0,052 \cdot 6^3 = 11,232$

c $P(0) = 0$

$P(15) = 0,052 \cdot 15^3 = 175,5$

d Je moet $0,052v^3 = 300$ oplossen.

$$0,052v^3 = 300$$

$$v^3 \approx 5769,23$$

$$v \approx 17,9$$

Ongeveer 17,9 m/s.

2 a Met een wielengte van 20 meter is de diameter 40 meter. Hiermee is de nieuwe uitdrukking:

$$P(v) = 0,00013 \cdot v^3 \cdot 40^2 \text{ en dus } P(v) = 0,208v^3.$$

b $P(10) = 0,208 \cdot 10^3 = 208$

c $P(0) = 0$ en $P(20) = 1664$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 1664$

d Oplossing:

$$0,208v^3 = 40$$

$$v^3 \approx 192,31$$

$$v \approx 5,77 \text{ m/s}$$

Dat is $3,6 \cdot 5,77 \approx 20,8$ km/h.

3 a Kies voor x een willekeurig getal kleiner dan 10, bijvoorbeeld 2. Je krijgt dan:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$2^2 + y^2 = 100$$

$$4 + y^2 = 100$$

$$y^2 = 96$$

$$y = \sqrt{96} \vee y = -\sqrt{96}$$

Dus bij één x zijn meerdere uitkomsten mogelijk. y is daarom geen functievoorschrift.

b Oplossing:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$y^2 = 100 - x^2$$

$$y = -\sqrt{100 - x^2} \vee y = \sqrt{100 - x^2}$$

c $y_1(x) = \sqrt{100 - x^2}$

$$y_2(x) = -\sqrt{100 - x^2}$$

d Voer in: $Y1 = \sqrt{100 - X^2}$ en $Y2 = -\sqrt{100 - X^2}$

Venster bijvoorbeeld: $-18 \leq x \leq 18$ en $-12 \leq y \leq 12$

e $y_1(5) = \sqrt{75}$

$$y_2(5) = -\sqrt{75}$$

4 a $T(15) = 0,64$

b Ja, bij elk gewicht hoort precies één tarief (boven 250 gram is het geen brief meer, maar een pakket).

- c Nee, je weet alleen in welke gewichtscategorie de brief zit.
- d $50 \leq G < 100$
- e Bij elke waarde van T horen meerdere waarden van G .

5 a Oplossing:

$$\begin{aligned} 0,5x^2 - 2x &= 0 \\ x^2 - 4x &= 0 \\ x(x - 4) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = 4 \end{aligned}$$

- b De nulpunten, de waarden van x waarvoor geldt $f(x) = 0$, die je al bij a hebt bepaald. De snijpunten zijn daarom $(0,0)$ en $(4,0)$.

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 0,5x^2 - 2x &= 6 \\ 0,5x^2 - 2x - 6 &= 0 \\ x^2 - 4x - 12 &= 0 \\ (x + 2)(x - 6) &= 0 \\ (x + 2) &= 0 \vee (x - 6) = 0 \\ x &= -2 \vee x = 6 \end{aligned}$$

- 6 Bij B zijn er voor bepaalde waarden van x meerdere waarden van y . Dit staat haaks op de definitie van een functie. Bij A, C en D is sprake van een functie.

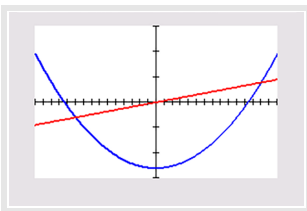
7 a Nee, deze vensterinstellingen zijn ongeschikt.

- b De nulpunten vind je door $f(x) = 0$ op te lossen.

$$\begin{aligned} x^2 - 130 &= 0 \\ x^2 &= 130 \\ x &= \pm\sqrt{130} \end{aligned}$$

De nulpunten zijn dus $x = \sqrt{130} \vee x = -\sqrt{130}$.

- c Omdat de grafiek symmetrisch is, kun je ook zeggen dat de x -coördinaat van de top precies tussen de x -waarden van de nulpunten ligt. Je kunt dus zeggen dat $f(x)$ minimaal is voor $x = 0$, met $f(0) = -130$. De top is $(0, -130)$.
- d Venster bijvoorbeeld: $-15 \leq x \leq 15$ en $-130 \leq y \leq 130$
- e Zie de figuur.



De grafieken hebben twee snijpunten.

- f De optie intersect geeft $x = -10$ en $y = -30$ of $x = 13$ en $y = 39$.

De snijpunten zijn: $(-10, -30)$ en $(13, 39)$.

Algebraïsch:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 - 130 &= 3x \\ x^2 - 3x - 130 &= 0 \\ (x - 13)(x + 10) &= 0 \\ x &= 13 \vee x = -10 \end{aligned}$$

$$f(13) = g(13) = 39 \text{ en } f(-10) = g(-10) = -30$$

De snijpunten zijn $(-10, -30)$ en $(13, 39)$.

8 a De nulpunten van y_1 zijn:

$$(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \vee x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 4 \vee x^2 = 9$$

$$x = 2 \vee x = -2 \vee x = 3 \vee x = -3$$

De nulpunten van y_2 zijn:

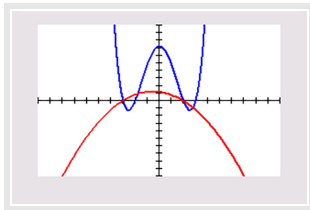
$$-x^2 - x + 6 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x = -3 \vee x = 2$$

b Zie de figuur.



Voer in: $Y1 = (X^2 - 4)(X^2 - 9)$ en $Y2 = -X^2 - X + 6$

Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $-50 \leq y \leq 50$

c $(-3, 0)$, $(-1, 79; 4, 58)$, $(2, 0)$ en $(2, 79; -4, 58)$.

d $-3 < x < -1,8 \vee 2 < x < 2,8$

9 a $f(3) = 8 - 4 \cdot 3 + 3^3 = 23$

b $f(x) = 8$ geeft:

$$8 - 4x + x^3 = 8$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 - 4 = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 = 4$$

$$x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$$

c Venster bijvoorbeeld: $-3 \leq x \leq 3$ en $-2 \leq y \leq 16$

d Ja. Er zijn geen tegenvoorbeelden.

e Nee, bijvoorbeeld voor $y = 8$ geldt $x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2$ (zie antwoord bij b).

10 a Bij elke waarde van a hoort precies één waarde van K .

b $K(100) = 35,00 + 0,77 \cdot 100 = 112$

c $K(a) = 35 + 0,77a$

d Oplossing:

$$35 + 0,77a = 500$$

$$0,77a = 500 - 35$$

$$0,77a = 465$$

$$a = \frac{465}{0,77}$$

Dus maximaal 603 m^3 .

11 a De top ligt op de symmetrie-as van de parabool. Deze symmetrie-as is $x = 0$. Invullen in de functie geeft $f(0) = 100$. De coördinaten van de top zijn dus $(0, 100)$.

$f(x) = 0$ geeft $100 - x^2 = 0$ en dus $x = \pm 10$. De nulpunten zijn $x = -10$ en $x = 10$.

- b** Venster bijvoorbeeld: $-15 \leq x \leq 15$ en $-100 \leq y \leq 200$
c De snijpunten bereken je door $f(x) = g(x)$ op te lossen.

$$\begin{aligned} 100 - x^2 &= x^2 \\ 2x^2 &= 100 \\ x^2 &= 50 \\ x &= \pm 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

De snijpunten zijn $(5\sqrt{2}, 50)$ en $(-5\sqrt{2}, 50)$, ofwel ongeveer $(-7,07; 50)$ en $(7,07; 50)$.

- 12 a** Van f_1 :

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 &= 0 \\ x^2(x^2 - 2) &= 0 \\ x^2 &= 0 \vee x^2 - 2 = 0 \\ x &= 0 \vee x^2 = 2 \\ x &= 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Nulpunten van f_1 : $x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

Van f_2 :

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x &= 0 \\ x(-x + 4) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = 4 \end{aligned}$$

Nulpunten van f_2 : $x = 0$ en $x = 4$

- b** Bij een goede vensterinstelling krijg je de snijpunten van de grafieken van de functies met de coördinaatassen en de snijpunten van de grafieken van de functies onderling in beeld.
 Venster bijvoorbeeld: $-2 \leq x \leq 5$ en $-2 \leq y \leq 6$.
c Met de GR vind je $(0,0)$ en $(1,8; 4,0)$.
d $0 < x < 1,8$

- 13 a** $f(x) = 0$ geeft $100x - x^2 = 0$

$$\begin{aligned} 100x - x^2 &= 0 \\ x(100 - x) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = 100 \end{aligned}$$

Nulpunten: $x = 0$ en $x = 100$

Venster bijvoorbeeld: $-20 \leq x \leq 120$ en $-3000 \leq y \leq 3000$

- b** $g(x) = 0$ geeft $10x(x - 50) = 0$

$$\begin{aligned} 10x(x - 50) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = 50 \end{aligned}$$

Nulpunten: $x = 0$ en $x = 50$

Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 60$ en $-7000 \leq y \leq 7000$

- c** $h(x) = 0$ geeft $(x - 10)^2 - 1600 = 0$

$$\begin{aligned} (x - 10)^2 - 1600 &= 0 \\ (x - 10)^2 &= 1600 \\ x - 10 &= 40 \vee x - 10 = -40 \\ x &= 50 \vee x = -30 \end{aligned}$$

Nulpunten: $x = -30$ en $x = 50$

Venster bijvoorbeeld: $-50 \leq x \leq 70$ en $-2000 \leq y \leq 2000$

d $l(x) = 0$ geeft $2\sqrt{x+3} - 5 = 0$

$$2\sqrt{x+3} - 5 = 0$$

$$2\sqrt{x+3} = 5$$

$$\sqrt{x+3} = \frac{5}{2}$$

$$x+3 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x = 3,25$$

Nulpunt: $x = 3,25$

Venster bijvoorbeeld: $-4 \leq x \leq 30$ en $-10 \leq y \leq 10$

14 a $h = \text{diameter} = 2 \cdot r$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r = 2\pi r^3$$

b $V(20) = 2 \cdot \pi \cdot 20^3 \approx 50000$

Voer in: $Y1=2\pi x^3$

Venster bijvoorbeeld: $-4 \leq x \leq 20$ en $-10000 \leq y \leq 55000$

c Voer in: $Y2=1000$

Met intersect vind je $r \approx 5,42$.

Je kunt dit ook algebraïsch oplossen:

$$V(r) = 2\pi r^3 = 1000 \text{ geeft } r^3 = \frac{1000}{2\pi} \text{ en } r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}} \approx 5,42 \text{ cm.}$$

15 a Los op: $h(x) = 0$

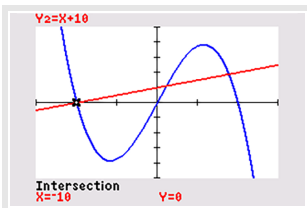
$$-0,01x(x - 4000) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 4000$$

Na 4000 meter komt de kogel weer op de grond.

b De top is $(2000, 40000)$ gebruik dit voor het bepalen van goede vensterinstellingen.

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 4000$ en $0 \leq y \leq 50000$



c 40000 meter

d Met de optie intersect vind je $x \approx 268$ en $x \approx 3732$.

Dus als $268 \leq x \leq 3732$, is de hoogte van de kogel hoger dan 10000 meter.

16 a $f(5) - g(2) = 147 - 1 = 146$

b $(2x - 3)(x^2 - 4) = 0$

$$(2x - 3) = 0 \vee (x^2 - 4) = 0$$

$$2x = 3 \vee x^2 = 4$$

$$x = 1,5 \vee x = 2 \vee x = -2$$

$$x = -2 \vee x = 1,5 \vee x = 2$$

c Voer in: $Y1=(2X-3)(X^2-4)$ en $Y2=4X-7$

Venster: $-3 \leq x \leq 5$ en $-20 \leq y \leq 20$

De grafieken snijden elkaar bij $x \approx -2,48$, $x \approx 1,65$ en $x \approx 2,32$.

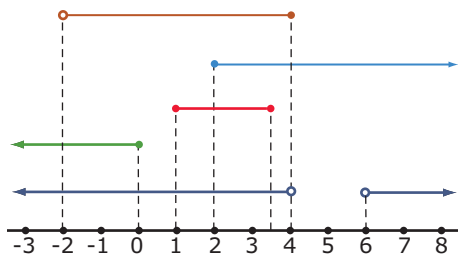
In de grafiek zie je dat $x \leq -2,5 \vee 1,7 \leq x \leq 2,3$.

- 17 a** Als bij elke waarde van x precies één corresponderende waarde van y hoort dan is het een functie. Dit is het geval bij de grafieken A en B.
- b** Het is wellicht het makkelijkst om de grafiek om te draaien, zodat de y -as horizontaal is. Dan is te zien dat bij de grafieken B en C elke y -waarde met precies één x -waarde correspondeert.

2.2 Domein en bereik

- V1 a** Nee, toppen kunnen ook lokale 'hoogtepunten' of 'dieptepunten' zijn.
- b** Ja, je mag bijvoorbeeld in de formule $y = \sqrt{x}$ geen negatieve getallen voor x nemen. En de functie kan ergens over gaan, bijvoorbeeld lengtes, breedtes, etc., moegen niet negatief zijn.
- c** Eigen antwoord, houd rekening met het feit dat er functies bestaan waarbij je sommige x -waarden niet mag gebruiken. Zoals bijvoorbeeld bij $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \sqrt{x}$.

1 Zie de figuur.



2 Van boven naar beneden:

$\langle -2, \rightarrow \rangle$

$\langle \leftarrow, 2 \rangle$

$[-2, 4)$

$\langle \leftarrow; 5, 5 \rangle$

$\langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 3, 5; \rightarrow \rangle$

3 a x kan alle reële waarden aannemen, dus $D_f = \mathbb{R}$.

b Los voor de snijpunten met de x -as de vergelijking $f(x) = 0$ op:

$$4 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \vee x = 2$$

Het snijpunt met de y -as ligt op $x = 0$ dus $f(0) = 4$.

De snijpunten zijn $(-2, 0)$, $(2, 0)$ en $(0, 4)$.

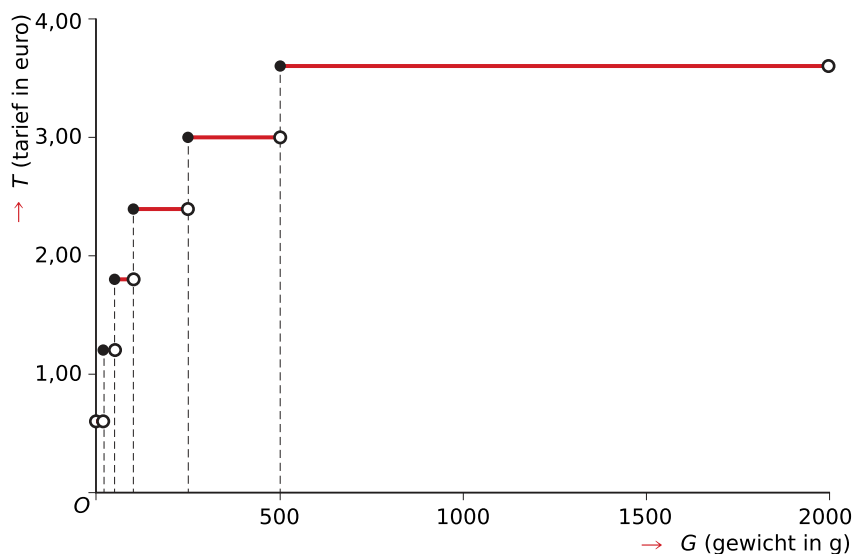
c De grafiek is een bergparabool met de top $(0, 4)$.

$$B_f = \langle \leftarrow, 4 \rangle$$

d Je weet dat de top van de parabool in het interval $[-1, 3]$ ligt, dus de bovengrens van het bereik is 4. Als ondergrens neem je de laagste waarde die de grafiek op $[-1, 3]$ aanneemt: $f(3) = -5$.

$$B_f = [-5, 4]$$

4 a Zie de figuur.



b $D_T = \langle 0, 2000 \rangle$

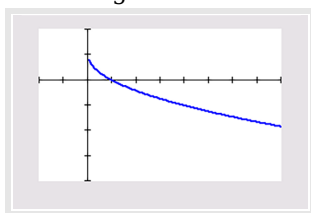
c $B_T = \{0,60; 1,20; 1,80; 2,40; 3,00; 3,60\}$

5 a $x \geq 0$ en $D_f = [0, \rightarrow)$.

b $f(0) = 1$, dus het snijpunt met de y-as is $(0,1)$.

$f(x) = 0$ geeft $\sqrt{x} = 1$ en dus $x = 1^2 = 1$. Het snijpunt met de x-as is $(1,0)$.

c Zie de figuur.



$B_f = \langle \leftarrow, 1 \rangle$

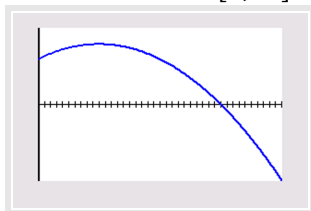
6 • $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = [-4, \rightarrow)$

• $D_g = \mathbb{R}$ en $B_g = \mathbb{R}$

• $D_h = \mathbb{R}$ en $B_h = [-8, \rightarrow)$

• $D_k = [-7, \rightarrow)$ en $B_k = [-6, \rightarrow)$

7 a Kies het venster $[0,40] \times [-500,500]$.



b $(10,400)$

c $f(0) = 400$ en $f(40) = -500$.

Het bereik is $[-500,400]$.

8 a Voer in $Y1 = -3.5X^2 + 14.7X + 0.8$ met venster $0 \leq x \leq 5$ en $0 \leq y \leq 20$.

Gebruik voor de nulpunten van het CALC-menu 2: zero. (Of een identieke functies als je een andere grafische rekenmachine hebt dan de TI-84, zie [Practicum](#).)

b Gebruik voor het maximum van het CALC-menu 4: maximum. (Of een identieke functies als je een andere grafische rekenmachine hebt dan de TI-84, zie [Practicum](#).)

Je vindt een maximum van $h = 16,235$ bij $t \approx 2,1$.

- c Los met je grafische rekenmachine op: $h(t) = -3,5t^2 + 14,7t + 0,8 = 10$.

Je vindt $t \approx 0,765$ v $t \approx 3,435$. De bal is dus ongeveer $3,435 - 0,765 \approx 2,67$ seconden meer dan 10 m boven de grond.

- d Er zijn nu geen beperkingen voor x .

Dus $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \langle -; 16,235 \rangle$.

- 9 a Als de kogel 14 meter ver komt, geldt: $h(14) = 0$.

$$h(14) = -0,0625(14 - 6)^2 + 4 = 0$$

- b De kogel is van 0 tot en met 14 m onderweg. Daarom geldt: $D_h = [0, 14]$.

- c Bij de top is $h(x)$ maximaal. $h(x)$ is maximaal als $-0,0625(x - 6)^2$ zo klein mogelijk is. Dat is het geval als $x - 6 = 0$, dus als $x = 6$.

Invullen geeft: $h(6) = -0,0625(6 - 6)^2 + 4 = 4$. De top zit dus bij $(6, 4)$, dus 4 meter boven de grond.

- d h is minimaal 0 en maximaal 4.

$$B_h = [0, 4]$$

- 10 a Er zijn geen getallen voor x die je niet mag gebruiken. Dus $D_f = \mathbb{R}$.

De grafiek van f is een dalparabool met top $(0, 5; -6, 25)$ en dus $B_f = [-6, 25; \rightarrow)$.

- b Met je GR vind je als kleinste minimum $\approx -1,62$.

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$B_g = [-1, 62; \rightarrow)$$

- c $D_h = \mathbb{R}$

$$B_h = \mathbb{R}$$

- d $2x - 3 \geq 0$, dus $x \geq 1,5$

$$2\sqrt{2x - 3} \geq 0 \text{ dus } 1 + 2\sqrt{2x - 3} \geq 1$$

$$D_f = [1, 5; \rightarrow)$$

$$B_f = [1, \rightarrow)$$

- 11 Voer in: $Y1 = -2(X - 10)^2 + 60$

Venster bijvoorbeeld: $[0, 40] \times [2000, 200]$

Optie maximum geeft $f(10) = 60$ en de kleinste functiewaarde is $f(40) = -1740$.

$$B_f = [-1740, 60]$$

- 12 a Los op: $f(x) = 0$

$$x^2 - 2x^4 = 0$$

$$x^2(1 - 2x^2) = 0$$

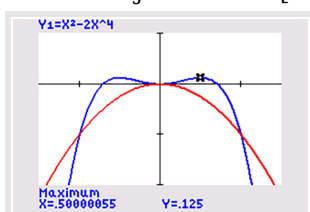
$$x^2 = 0 \vee 1 - 2x^2 = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

- b Bij een goede vensterinstelling moet je zorgen dat de snijpunten met de coördinaatassen en de toppen in beeld komen.

Venster bijvoorbeeld: $[-1, 5; 1, 5] \times [-2, 1]$



- c** Zet beide functies in je GR en bereken de toppen. Voor $f(x)$ vind je voor de coördinaten van de toppen $(0,5; 0,125)$ en $(-0,5; 0,125)$. 0,125 is de maximale y -waarde. Dus $B_f = \langle \leftarrow; 0,125 \rangle$.

Voor $g(x)$ vind je $(0,0)$ voor de top. Dus $B_g = \langle \leftarrow, 0 \rangle$.

- d** Stel de functievoorschriften aan elkaar gelijk, dus $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x^4 &= -x^2 \\ 2x^2 - 2x^4 &= 0 \\ 2x^2(1 - x^2) &= 0 \\ 2x^2 &= 0 \vee 1 - x^2 = 0 \\ x &= 0 \vee x^2 = 1 \\ x &= 0 \vee x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Snijpunten: $(-1, -1)$, $(0,0)$ en $(1, -1)$.

- 13 a** Je ziet in de grafiek dat de vuurpijl na 6 seconden niet meer op het hoogst punt is. Je moet dus de coördinaten van de top uitrekenen. Die zit bij $t = 4$.

Dan geldt voor de hoogte h : $h(4) = 40 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 80$. Dus het hoogste punt van de vuurpijl is 80 meter.

- b** De vuurpijl spat na zes seconden uit elkaar; het domein is $D_h = [0,6]$.

De vuurpijl komt maximaal 80 meter hoog en start vanaf de grond, dus het bereik is $B_f = [0,80]$.

- c** $h(6) = 60$, dus op een hoogte van 60 meter spat de vuurpijl uit elkaar.

- d** Voer in: $Y1=40X-5X^2$ en $Y2=40$
Venster bijvoorbeeld: $[0,6] \times [0,100]$

Er is één snijpunt (let op het domein). De optie intersect geeft $x \approx 1,17$.

De vuurpijl is ongeveer $6 - 1,17 = 4,83$ seconden boven 40 meter.

- e** h is tegen de tijd t uitgezet. Als de baan van de vuurpijl getekend zou zijn, zou op de horizontale as ook een afstandseenheid moeten staan.

- 14 a** De opbrengst van het product kun je berekenen door de prijs te vermenigvuldigen met het aantal verkochte exemplaren. Noem de opbrengst R , de prijs p en het aantal verkochte exemplaren q . Je krijgt dan $R = p \cdot q$. Er geldt ook $q = 400 - 0,5p$ en dus volgt uit substitutie $R = p(400 - 0,5p)$.

- b** $q \geq 0$ betekent $400 - 0,5p \geq 0$, hieruit volgt $0,5p \leq 400$ en dus $p \leq \frac{400}{0,5} = 800$.

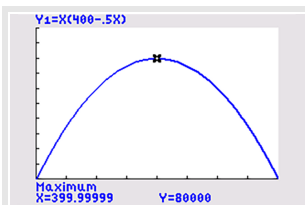
p kan alle waarden aannemen in het interval $[0,800]$.

- c** Voer in: $Y1=X(400-0,5X)$

Venster bijvoorbeeld: $[0,800] \times [0,100000]$

Je vindt max. $R = 80000$.

R kan alle waarden aannemen in het interval $[0,80000]$.



- 15 a** De nulpunten zijn -5 en 5. Omdat voor x -waarden hiertussen alleen maar positieve waarden voor $h(x)$ voorkomen, zijn -5 en 5 daarom de grenzen van het domein.

$D_h = [-5,5]$

- b** De top vind je door de x -waarde in te vullen die in het midden van het interval $[-5,5]$ zit, dus $x = 0$.

$$f(0) = \sqrt{25 - 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

$B_h = [0,5]$

- 16 a** Waarden tussen -20 en 20.

- b** De kortste tuidraad is 5 meter bij $x = 0$. De langste is 63,32 meter bij $x = 18$.

- c** Los op: $h(x) = 45,5$. Dat kan met de GR, maar sneller algebraïsch: $\frac{9}{50}x^2 + 5 = 45,5$ geeft $\frac{9}{50}x^2 = 40,5$ en dus $x^2 = 225$ en dus $x = -15 \vee x = 15$.

De twee tuidraden hangen 30 meter uit elkaar.

- 17 a** $I = \text{lengte} \cdot \text{breedte} \cdot \text{hoogte} = l \cdot b \cdot h$

$$l = 20 - 2 \cdot x$$

$$b = 12 - 2 \cdot x$$

$$h = x$$

$$I(x) = x(20 - 2x)(12 - 2x)$$

- b** Er gaat twee keer x cm van de breedte van 12 cm af. Voor x moet daarom gelden $x < 6$ om papier voor de zijkant over te houden. Dus: $D_I = \langle 0, 6 \rangle$.

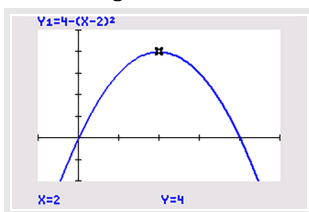
$I(x)$ invullen in GR. Maximum bepalen met GR: via de top (2,43; 262,68) vind je het maximum 262,68.

$$I(x) > 0 \text{ dus: } B_I = \langle 0; 262,68 \rangle.$$

- c** $I(x)$ invullen in GR. Maximum bepalen op domein $\langle 0, 6 \rangle$: het maximum is 262,68 voor $x = 2,43$.

Dus 2,43 cm bij 2,43 cm.

- 18 a** Zie de figuur.



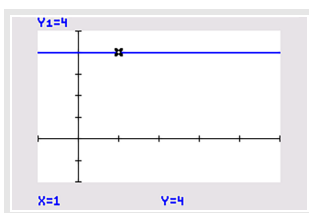
Voer in je GR in $Y1 = 4 - (x - 2)^2$ met standaardinstellingen.

Voor x zijn er geen getallen die je niet mag gebruiken. Dus geldt $D_f = \mathbb{R}$.

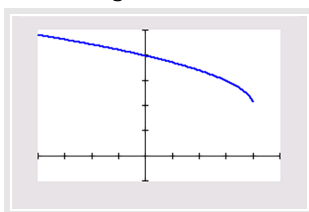
De top is (2,4) en dus is 4 de maximale y -waarde. Het bereik is daarom $B_f = \langle \leftarrow, 4 \rangle$.

- b** Er zijn geen waarden voor x die je niet mag gebruiken. Dus $D_g = \mathbb{R}$.

De grafiek is een horizontale lijn en dus is de uitkomst onafhankelijk van x . 4 is de enige waarde die y kan aannemen. Dus geldt $B_g = \{4\}$.



- c** Zie de figuur.



Onder het wortelteken mogen geen negatieve getallen staan. Dus 4 is het grootste getal dat je voor x kunt invullen. Er geldt $D_h = \langle \leftarrow, 4 \rangle$.

De functie begint bij het punt (4,2). Dit punt wordt ook wel een randpunt genoemd. De laagst mogelijke y -waarde is dan 2. Dus voor het bereik geldt $B_h = [2, \rightarrow)$.

- 19 a** $y(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 = 81 - 8 \cdot 9 = 81 - 72 = 9$

$$y(-3) = (-3)^4 - 8 \cdot (-3)^2 = 81 - 72 = 9$$

- b** Stel $y(x) = 0$, dan volgt

$$x^4 - 8x^2 = 0$$

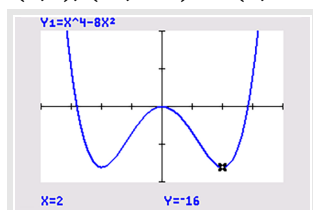
$$x^2(x^2 - 8) = 0$$

$$x^2 = 0 \vee x^2 - 8 = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 = 8$$

$$x = 0 \vee x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8}.$$

- c Voer in je GR: $Y1=X^4-8X^2$ met venster $[-4,4] \times [-20,20]$ en bepaal de toppen. Je vindt de punten $(0,0)$, $(-2,-16)$ en $(2,-16)$.



2.3 Bijzondere functies

V1 a Twee rechte lijnen, neem de afstand a in km en de tijd t in minuten.

Op $t = 0$ is de afstand van de eerste auto a_1 precies 0 km, en die afstand neemt met $90 \text{ km/h} = 1,5 \text{ km/min}$ toe. Hier geldt dus $a_1 = 1,5t$.

De afstand van de tweede auto a_2 is 0 km na 6 minuten, en neemt met 2 km/min toe. Hier geldt dus $a_2 = 2t + q$. Het punt $(6,0)$ invullen levert de waarde voor q op. $0 = 2 \cdot 6 + q$ geeft $q = -12$.

Dus $a_2 = 2t - 12$.

b $1,5t = 2t - 12$ geeft $0,5t = 12$ en dus is $t = 24$ min.

In de grafiek zie je dat na 24 minuten de tweede auto de eerste heeft ingehaald.

c Tot $t = 24$ ligt de eerste auto voor, daarna de tweede auto. De grafiek bestaat dus uit twee delen

- $a_1 - a_2 = -0,5t + 12$ voor $t \leq 24$
- $a_2 - a_1 = 0,5t - 12$ voor $t > 24$

1 a $a_I = 50 - 1,5t$ en $a_{II} = 2t$

b $50 - 1,5t = 2t$ geeft opnieuw $t \approx 14,3$.

c $a(t) = |50 - 3,5t|$

Dit wordt (natuurlijk) dezelfde grafiek als die in de uitleg.

d $|50 - 3,5t| = 20$ kun je als twee vergelijkingen schrijven, die op te lossen zijn.

$50 - 3,5t = 20$ en $50 - 3,5t = -20$

Oplossen levert op $t \approx 8,6 \vee t = 20$.

2 a Als beide fietsers met 18 km/h op elkaar af fietsen, betekent dat dat de onderlinge afstand verandert met de dubbele snelheid, dus 36 km/h . Nu is $36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$. Daarom wordt de onderlinge afstand gegeven door $a(t) = |10t|$.

b $|10t| = 90$ wil zeggen $10t = 90$ of $10t = -90$, ofwel $t = 9 \vee t = -9$.

3 a a is het hellinggetal, als je x met 1 verhoogt, wordt y met a verhoogd.

In de figuur is $a = 0,5$.

b $(0,b)$ is het snijpunt met de y -as. Hier geldt dus $b = 3$.

c Als x met 4 omhoog gaat (van 1 naar 5), gaat y met 1 omhoog (van 2 naar 3). De helling is dus $\frac{1}{4} = 0,25 = a$.

$y = 0,25x + b$

$2 = 0,25 \cdot 1 + b$ geeft $b = 2 - 0,25 = 1,75$.

4 a $3,20 + 10 \cdot 1,20 = 15,20$

b $R(a) = 3,20 + 1,20a$

c Voer in: $Y1=1.20X+3.20$ met venster bijvoorbeeld $[0,20] \times [0,30]$.

d $(0; 3,20)$ is het snijpunt met de y -as en $1,20$ is de richtingscoëfficiënt.

5 Lijn l (groen) gaat door de punten $(0, -1)$ en $(1,2)$. De richtingscoëfficiënt is $\frac{2-(-1)}{1-0} = 3$ en het snijpunt met de y -as is $(0, -1)$. Hieruit volgt dat $l: y = 3x - 1$.

Lijn m (rood) gaat door de punten $(0,5)$ en $(3,4)$. De richtingscoëfficiënt is $\frac{4-5}{3-0} = -\frac{1}{3}$, en het snijpunt met de y -as is $(0,5)$. Hieruit volgt dat $m: y = -\frac{1}{3}x + 5$.

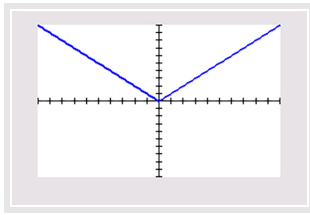
De x -coördinaat van het snijpunt kun je bepalen door op te lossen $3x - 1 = -\frac{1}{3}x + 5$.

Dit geeft $3\frac{1}{3}x = 6$ en dus $x = 1,8$.

De y -coördinaat bepaal je dan door substitutie in één van de vergelijkingen $y = 3 \cdot 1,8 - 1 = 4,4$.

Het snijpunt is $(1,8; 4,4)$.

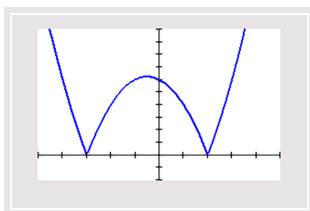
- 6 a** Voer in: $Y1=abs(X)$
Venster bijvoorbeeld: standaardvenster.



- b** $(0,0)$
c $x = -6 \vee x = 6$
d $f(x) = |x|$ is altijd groter of gelijk aan 0.
- 7 a** $y_1 = x - 2$ als $x \geq 0$
 $y_1 = -x - 2$ als $x < 0$
en
 $y_2 = x - 3$ als $x \geq 3$
 $y_2 = -x + 3$ als $x < 3$
- b** Je bekijkt drie gevallen.
- Als $x \leq 0$ los je op $-x - 2 = -x + 3$; deze vergelijking heeft geen oplossing.
 - Als $0 < x < 3$ los je op $x - 2 = -x + 3$. Dit geeft $x = 2\frac{1}{2}$.
 - Als $x \geq 3$ los je op $x - 2 = x - 3$; deze vergelijking heeft geen oplossing.

Het snijpunt is $(2\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

- c** $y_1 = 4$ geeft $x = -6 \vee x = 6$
 $y_2 = 4$ geeft $x = -1 \vee x = 7$
- 8 a** Zie de figuur.



Voer in: $Y1=abs(X^2+X-6)$
Venster bijvoorbeeld: $[-5,5] \times [-2,10]$

- b** Afstand is eigenlijk de kortste verbinding en dit is wel de kortste verbinding tussen twee punten die boven elkaar liggen, maar niet de kortste verbinding tussen de twee grafieken.
- c** Je kunt de vergelijking opsplitsen in delen voor $x < -3 \vee x > 2$ en $-3 \leq x \leq 2$ en vervolgens algebraïsch oplossen. Maar met de GR werken is hier sneller (en toegestaan). Als je op je GR $Y2=4$ invoert en de x-coördinaten van de snijpunten afleest, vind je $x \approx -3,70 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x \approx 2,70$.
- 9** $2 \leq x < 3$
- 10 a** $f(2,43) = 3$ en $f(-\pi) = -8$
- b** $D_f = \mathbb{R}$ en $B_f = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- c** $\text{int}(2x) - 1 = 4$ geeft $\int(2x) = 5$ en dus $5 \leq 2x < 6$. Hieruit volgt $2,5 \leq x < 3$.
- 11 a** $f(x) = ax + b$
 $a = \frac{140-80}{8-2} = \frac{60}{6} = 10$
 $f(2) = 80$ dus $10 \cdot 2 + b = 80$ en hieruit volgt $b = 60$.
Je krijgt de functie $f(x) = 10x + 60$.
- b** $g(x) = ax + b$

$$a = \frac{-25-15}{10-5} = \frac{-40}{5} = -8$$

$$g(-5) = 15, \text{ dus } b = 15 - 2\frac{2}{3} \cdot 5 = 1\frac{2}{3}.$$

Je krijgt de functie $g(x) = -2\frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}$.

c $h(x) = ax + b$

$$a = \frac{-19-8}{12-3} = \frac{-27}{9} = -3$$

$$h(3) = 8, \text{ dus } b = 8 + 3 \cdot 3 = 17.$$

Je krijgt de functie $h(x) = -3x + 17$.

12 Oplossing:

$$|x^2 - 4| = 2$$

$$x^2 - 4 = 2 \vee x^2 - 4 = -2$$

$$x^2 = 6 \vee x^2 = 2$$

$$x = -\sqrt{6} \vee x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

13 a Kaars I:

$$l_I = at + b$$

Op $t = 1$ geldt $l = 75$ en op $t = 3,5$ geldt $l = 62,5$. Ofwel de grafiek van deze lineaire functie gaat door de punten $(1,75)$ en $(3,5; 62,5)$.

$$a = \frac{62,5-75}{3,5-1} = -5.$$

$$l_I(1) = 75, \text{ dus } 75 = -5 \cdot 1 + b \text{ en hieruit volgt } b = 80.$$

Dus voor kaars I geldt de formule $l_I = -5t + 80$.

Kaars II:

De grafiek van de lineaire functie gaat bij deze kaars door de punten $(1,71)$ en $(3,5; 61)$.

$a = \frac{61-71}{3,5-1} = -4$. Gebruik nu bijvoorbeeld het punt $(1,71)$ om $b = 75$ te vinden. Je vindt voor kaars II de formule $l_{II} = -4t + 75$.

b Los op $L_I = L_{II}$.

$$-5t + 80 = -4t + 75$$

$$-t = -5$$

$$t = 5$$

Na 5 uur branden zijn de kaarsen even lang.

c De afstand tussen beide grafieken moet dan gelijk zijn aan 1.

Los dan op $|-5t + 80 - (-4t + 75)| = 1$. Dit geeft $-t + 5 = -1 \vee -t + 5 = 1$ en dus $t = 4 \vee t = 6$.

Dus na 4 uur en na 6 uur branden verschillen de kaarsen precies 1 cm in lengte.

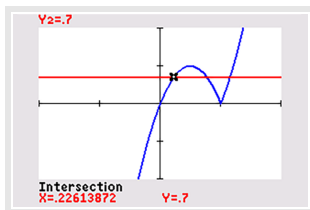
14 a Het knikpunt zit bij $x - 1 = 0$, dus als $x = 1$. Het knikpunt is het nulpunt $(1,0)$.

b $x = 1$ is het grensgeval. Maak onderscheid tussen de situaties $x < 1$ en $x \geq 1$.

- Als $x \geq 1$ is het functievoorschrift $y(x) = 4x(x - 1)$
- Als $x < 1$ krijg je de andere situatie: $y(x) = -4x(x - 1)$

c Voer in: $Y1=4X \text{ abs}(X-1)$ en $Y2=0,7$

Venster: standaard



$$x < 0,226 \vee 0,774 < x < 1,52$$

- 15** Maak een schets. Omdat de lijn van functie f symmetrisch is in een verticale lijn, kun je zien welke twee van de drie punten op één lijn liggen. Dit zijn de punten $(0,3)$ en $(1,1)$. De lijn door deze punten snijdt de positieve y -as en heeft dus een positieve waarde voor b .

Wanneer functie f positief is, geldt $f(x) = ax + b$ en wanneer functie f negatief is, geldt $f(x) = -ax - b$. Door bij beide situaties de punten $(0,3)$ en $(1,1)$ in te vullen, krijg je bij alleen de eerste situatie een positieve b . Zie het stelsel:

$$\begin{cases} b = 3 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Hieruit volgt ook $a = -2$ en dus $f(x) = -2x + 3$.

Het negatieve deel van de lijn $f(x) = -2x + 3$ wordt gespiegeld in de x -as en is daarom gelijk aan $f(x) = -1 \cdot (-2x + 3) = 2x - 3$. Dus $a = 2$ en $b = -3$.

- 16 a** $R(a) = 2,25 + 0,75a$

- b** De treintaxi kost in alle gevallen € 3,00 per persoon, dus voor twee personen € 6,00.

Als $R(a) > 6$, dan is de treintaxi voordeliger.

$$0,75a + 2,25 > 6 \text{ geeft } a > 5.$$

Als $a > 5$ is de treintaxi voordeliger.

- c** De reistijd met een gewone taxi is $\frac{5}{30} \cdot 60 = 10$ minuten. Dus de treintaxi is voordeliger.

- 17 a** Voer in: $Y1 = \text{abs}(\text{abs}(X-2)-2)$

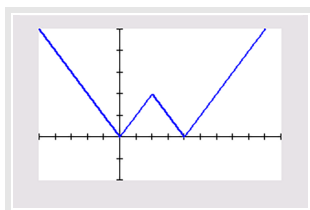
Je ziet dat er drie knikpunten zijn, bij $x = 0$, $x = 2$ en $x = 4$.

Absoluutstrepen maken een negatief getal positief. Je moet dus naar de grensgevallen kijken.

$|x - 2|$ wordt negatief als $x < 2$. Dus bij $x = 2$ is er een knikpunt.

Als $x = 4$ dan geldt dat $||x - 2| - 2| = 0$ dus dit is ook zo'n grensgeval. Hier bevindt zich dan ook een knikpunt.

Als $x = 0$ dan geldt dat $||x - 2| - 2| = 0$ dus ook dit is een grensgeval. Hier bevindt zich een derde knikpunt.



- b** Oplossing:

$$|x - 2| - 2 = 0$$

$$|x - 2| = 2$$

$$|x - 2| = -2 \vee |x - 2| = 2$$

$$x = 0 \vee x = 4$$

Dus $x = 0$ en $x = 4$ zijn de nulpunten.

- c** Voer in: $Y1 = \text{abs}(\text{abs}(X-2)-2)$ en $Y2 = 1$

Bereken de snijpunten. Je vindt dan $x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3 \vee x = 5$.

- d** De grafiek moet dan bijvoorbeeld een in de x -as gespiegelde letter W zijn. Dit is bijvoorbeeld het geval bij $y(x) = -|2 - |x||$, maar ook bijvoorbeeld bij $y(x) = -|3 - |2x||$.

- 18 a** Noem K de jaarlijkse kosten in duizenden euro's en a het aantal gereden km per jaar.

De rode grafiek gaat door de punten $(0,2900)$ en $(8000,3400)$. De richtingscoëfficiënt is $\frac{3400-2900}{8000-0} = 0,0625$. De formule voor auto A is $K_A = 0,0625a + 2900$.

De blauwe grafiek gaat door de punten $(0,2700)$ en $(10000,3500)$. De richtingscoëfficiënt is $\frac{3500-2700}{10000-0} = 0,08$. De formule voor auto B is $K_B = 0,08a + 2700$.

- b** Er moet gelden $K_B > K_A$, dus

$$0,08a + 2700 > 0,0625a + 2900$$

$$0,08a + 2700 = 0,0625a + 2900$$

$$0,0175a = 200$$

$$a = \frac{200}{0,0175} \approx 11426 \approx 11500 \text{ km.}$$

Dus vanaf 11500 kilometer rijden, is het voordeliger om auto A aan te schaffen.

- 19** Een lineaire functie wordt gegeven door $f(x) = ax + b$.

Het hellingsgetal a is $\frac{16-42}{30-24} = -0,48$. De functie gaat bijvoorbeeld door het punt $B(30,16)$. Dit punt vul je in.

$$16 = -0,48 \cdot 30 + b \text{ geeft } b = 30,4.$$

Het functievoorschrift is $f(x) = -0,48x + 30,4$.

- 20 a** In het functievoorschrift zie je de uitdrukkingen $|x - 1|$ en $|1 + 2x|$. De knikpunten zitten op de plekken waar zo'n uitdrukking de waarde 0 aanneemt. Dat is bij $x = 1$ en $x = -\frac{1}{2}$. Daar bevinden zich dus de twee knikpunten.

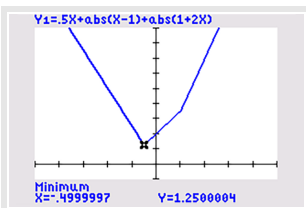
- b** De knikpunten $x = -\frac{1}{2}$ en $x = 1$ geven de volgende mogelijkheden.

- Als $x > 0$ krijg je $f(x) = \frac{1}{2}x - |x - 1| - |1 - 2x| = \frac{1}{2}x - x + 1 - 1 - 2x = -2,5x$

- Als $-0,5 \leq x < 1$ krijg je $f(x) = \frac{1}{2}x - |x - 1| + |1 + 2x| = \frac{1}{2}x - x + 1 + 1 + 2x = 1,5x + 2$

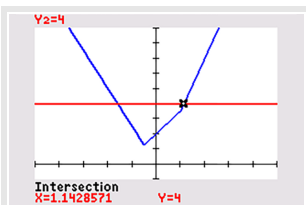
- Als $x \geq 1$ krijg je $f(x) = \frac{1}{2}x + |x - 1| + |1 + 2x| = \frac{1}{2}x + x - 1 + 1 + 2x = 3,5x$

- c** Voer in je GR in $Y1=1/2x+abs(x-1)+abs(1+2x)$ en lees de oplossing af.



$$B_f = [1,25; \rightarrow)$$

- d** Zie de figuur.



Ga uit van de drie gevallen bij deelvraag b.

$$-2,5x = 4 \text{ geeft } x = -\frac{8}{5} \text{ en } 3,5x = 4 \text{ geeft } x = \frac{8}{7}.$$

$$\text{Dus } x \leq -\frac{8}{5} \vee x \geq \frac{8}{7}$$

2.4 Samengestelde functies

V1 a $\frac{60}{10} = 6$, vervolgens $6^2 = 36$ en tenslotte $\frac{3}{4} \cdot 36 = 27$. De bijbehorende remweg is 27 m.

b $R = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$

c Door terug te rekenen.

$\frac{90}{\frac{3}{4}} = 120$ en dan $\sqrt{120} \approx 10,95$ en tenslotte dit antwoord maal 10 en je vindt 109,5 km/h.

d Oplossing:

$$\frac{3}{4} \left(\frac{v}{10}\right)^2 = R$$

$$\left(\frac{v}{10}\right)^2 = R \cdot \frac{4}{3}$$

$$\frac{v}{10} = \sqrt{\frac{R}{0,75}}$$

$$v = \sqrt{\frac{R}{0,75}} \cdot 10$$

1 a Voer in $Y1=3/4*(v/10)^2$ met venster bijvoorbeeld $[0,140] \times [0,160]$.

b $D_f = [0,140]$

$B_f = [0,147]$

c Door bij elke schakel van de gegeven functie het omgekeerde te doen en dit ook in de omgekeerde volgorde toe te passen.

d Voer in $Y2=10*\sqrt{(4/3*R)}$ met venster bijvoorbeeld $[0,160] \times [0,140]$.

De grafiek wordt het spiegelbeeld van die van f bij spiegeling in de lijn met punten waarvoor geldt $R = v$, omdat je beide assen omwisselt.

e $D_{f^{-1}} = [0,147]$

$B_{f^{-1}} = [0,140]$

2 a Zie de figuur.

$$x \xrightarrow{\sqrt{\dots}} \sqrt{x} \xrightarrow{+5} y = \sqrt{x} + 5$$

$$h(4) = \sqrt{4} + 5 = 2 + 5 = 7$$

b $h(x) = \sqrt{x} + 5$

c Zie de figuur.

$$x = (y - 5)^2 \xleftarrow{(\dots)^2} y - 5 \xleftarrow{-5} y$$

$$h^{-1}(x) = (y - 5)^2; \text{ het is gebruikelijk om dan toch } h^{-1}(x) = (x - 5)^2 \text{ te schrijven.}$$

d Zie de figuur.

$$x \xrightarrow{+5} x + 5 \xrightarrow{\sqrt{\dots}} y = \sqrt{x + 5}$$

$$k(4) = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$$

e $k(x) = \sqrt{x + 5}$

f Zie de figuur.

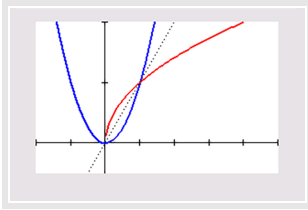
$$x = y^2 - 5 \xleftarrow{-5} y^2 \xleftarrow{(\dots)^2} y$$

$$k^{-1}(y) = y^2 - 5; \text{ het is gebruikelijk om dan toch } k^{-1}(x) = x^2 - 5 \text{ te schrijven.}$$

3 a $x = -3 \vee x = 3$

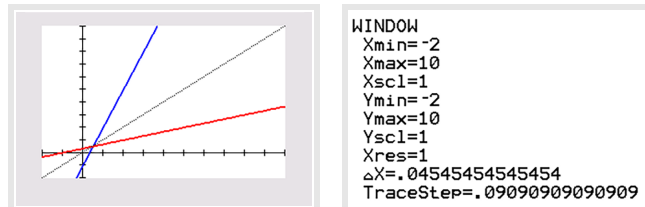
b $f^{-1}(9) = \sqrt{9} = 3$. Als je bij functie f terugrekent heb je meestal twee uitkomsten (alleen bij $y = 0$ niet) en de inverse functie kan nooit meer dan één uitkomst hebben (omdat het een functie is).

c Zie de figuur.

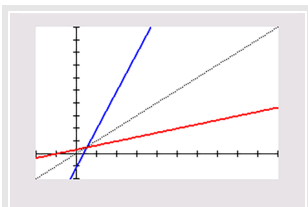


Alleen het gedeelte waarvoor $x \geq 0$.

- d Bij elke waarde van y in het bereik van de functie moet precies één waarde van x horen, anders kun je niet eenduidig terugrekenen.
 - e Als je eerst functie f toepast en daarna zijn inverse, krijg je de oorspronkelijke invoerwaarde weer terug.
 - f Ja, f en f^{inv} zijn elkaars inverse.
- 4 a Maak een rekenschema zoals in het voorbeeld. Je moet alleen de eerste en de derde schakel omwisselen. Je krijgt $g(x) = (\sqrt{x} + 9)^2$.
- b Ook nu ziet het terugrekenschema eruit als in het voorbeeld met de eerste en de derde schakel verwisseld. Je krijgt $g^{\text{inv}}(x) = (\sqrt{x} - 9)^2$.
- c Bedenk dat ook nu $[0, \rightarrow)$ het domein van a is.



- 5 a De terugrekenbewerking is delen door $\frac{1}{2}$ ofwel vermenigvuldigen met 2.
- b De inverse functie is (bijvoorbeeld) $f^{\text{inv}}(x) = 2x$.
- c De waarde van x wordt omgekeerd. 3 wordt $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{3}$ wordt 3, $\frac{2}{3}$ wordt $\frac{3}{2}$, enzovoort.
- d De inverse functie is 'opnieuw omkeren', dus $f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{x}$.
- e Bij terugrekenen vanuit een kwadraat krijg je meestal twee uitkomsten. Bij een inverse functie mag dat niet. Je moet daarom het domein van de functie die de rekenstap kwadrateren voorstelt, ($f(x) = x^2$) beperken, bijvoorbeeld tot $[0, \rightarrow)$.
- 6 a In beide gevallen vind je als uitkomst 6.
 $f(g(6)) = g(f(6)) = 6$
- b $f(g(x)) = 3\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) - 1 = x$ en $g(f(x)) = \frac{1}{3}(3x - 1) + \frac{1}{3} = x$
- c Zie de figuur.



Ja, ze zijn elkaars inverse.

- 7 a Nu moet je achtereenvolgens eerst met 3 vermenigvuldigen, dan door 10 delen en tenslotte 1 bij het resultaat optellen. Maak een rekenschema.
- b Terugrekenen gaat in stappen: eerst 1 aftrekken, dan met 10 vermenigvuldigen en tenslotte door 3 delen. Je vindt $p = \frac{(c-1) \cdot 10}{3}$.

c $\frac{p}{30} \cdot 9 + 1 = \frac{9p}{30} + 1 = 1 + \frac{3p}{10}$

d Dan vervang je c door X en p door Y . Je krijgt de grafiek van de functie $c(p)$ en zijn inverse in één figuur.

8 a $w = 1,21 \cdot k$

b De inverse functie van $w = 1,21 \cdot k$ is $k = \frac{w}{1,21} \approx 0,826 \cdot w$.

c Een factor 0,826 is hetzelfde als 82,6%.

9 a $f(g(4)) = 4$, $g(h(4)) = 4$ en $h(f(4)) = 1$

b $f(g(x)) = \sqrt{x^2} = x$ (met $x \geq 0$)

$$g(h(x)) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2$$

$$h(f(x)) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

c $k(x) = f(h(g(x))) = \sqrt{\frac{1}{2}x^2}$

d $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2}$ geeft $y^2 = \frac{1}{2}x^2$ en $2y^2 = x^2$, zodat $\sqrt{2y^2} = x$

Als je x en y verwisselt krijg je de inverse k^{inv} , dus $k^{\text{inv}}(x) = \sqrt{2x^2}$.

e $k^{\text{inv}}(k(x)) = k^{\text{inv}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2}\right) = \sqrt{2\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}x^2} = x$

10 a Rekenschema: $x \rightarrow x - 4 \rightarrow \sqrt{x - 4} = y$

Terugrekenschema: $x = y^2 + 4 \leftarrow y^2 \leftarrow y$

Dus $(f_1)^{\text{inv}}(x) = x^2 + 4$ met domein $[0, \rightarrow)$.

b Rekenschema: $x \rightarrow \sqrt{x} \rightarrow y = \sqrt{x} - 4$

Terugrekenschema: $x = (y + 4)^2 \leftarrow y + 4 \leftarrow y$

Dus $(f_2)^{\text{inv}}(x) = (x + 4)^2$ met domein $[-4, \rightarrow)$.

c Rekenschema: $x \rightarrow x^2 \rightarrow \frac{1}{2}x^2 \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + 5$

Terugrekenschema: $x = \sqrt{2y - 10} \leftarrow 2y - 10 \leftarrow y - 5 \leftarrow y$

Dus is $(f_3)^{\text{inv}}(x) = \sqrt{2x - 10}$ met domein $[5, \rightarrow)$.

d Rekenschema: $x \rightarrow x + 5 \rightarrow (x + 5)^2 \rightarrow y = \frac{1}{2}(x + 5)^2$

Terugrekenschema: $x = \sqrt{2y} - 5 \leftarrow \sqrt{2y} \leftarrow 2y \leftarrow y$

Dus $(f_4)^{\text{inv}}(x) = \sqrt{2x} - 5$ met domein $[0, \rightarrow)$.

e Een rekenschema maken is niet goed mogelijk, de x moet twee keer worden ingevoerd. Terugrekenen gaat daarom niet (eenvoudig).

11 Stel twee willekeurige functies samen en controleer of er x uit komt. Bijvoorbeeld $f(h(x)) = \frac{1}{2}\left(2x + \frac{1}{2}\right) + 2 = x + 2\frac{1}{4}$ dus f en h zijn niet elkaars inverse.

Maar in $f(k(x)) = \frac{1}{2}(2x - 4) + 2 = x$, zijn f en k wel elkaars inverse.

f en k zijn dan natuurlijk niet ook de inverse van een van de andere gegeven functies.

f en k zijn elkaars inverse en g en l zijn elkaars inverse.

- 12** $f(g(x)) = 3(0,5x + b) + 8 = 1,5x + 3b + 8$
 $g(f(x)) = 0,5(3x + 8) + b = 1,5x + 4 + b$
 Dus $1,5x + 3b + 8 = 1,5x + 4 + b$ geeft $2b = -4$ en $b = -2$.
- 13** De grafieken van f en f^{inv} moeten elkaar snijden op de lijn $y = x$. De coördinaten van het snijpunt zijn dus $(7,7)$. Dus $f(7) = 7$.
 Dit betekent $3 \cdot 7 + b = 7$, dus $21 + b = 7$ en hieruit volgt $b = -14$.
- 14 a** $f(x) = \frac{3-x}{x} = \frac{3}{x} - \frac{x}{x} = \frac{3}{x} - 1$
 $y = \frac{3}{x} - 1$ wordt $x = \frac{3}{y} - 1$ en dit geeft $x + 1 = \frac{3}{y}$ en $y = \frac{3}{x+1}$.
 Dus $f^{\text{inv}}(x) = \frac{3}{x+1}$
- b** Spiegelning in de lijn $y = x$ levert de halve lijnen $y = \pm x$ voor $x \geq 0$. Omdat een functie voor iedere waarde van het domein maar één uitkomst mag hebben, bestaat er voor $g(x)$ geen inverse functie.
- c** Op $D_h = \langle -\infty, 4 \rangle$ is $h(x) = -(x - 4) + 2 = -x + 6$.
 $y = -x + 6$ wordt $x = -y + 6$ met $y < 4$. Dus de inverse is $y = -x + 6$ met $y < 4$.
 De inverse $h^{\text{inv}}(x) = -x + 6$ heeft dezelfde vorm als $h(x)$ op $x < 4$, alleen het domein is anders. Er geldt: $h^{\text{inv}}(x) < 4$, ofwel $x > 2$.
- 15 a** Het object gaat naar boven met een positieve snelheid. Dat wil zeggen dat wanneer de snelheid negatief wordt, het object begint te vallen. Je lost dus $v(t) = 0$ op.
 $v(t) = 20 - 9,81t = 0$ geeft $t \approx 2,04$ seconden.
- b** $t = \frac{v-20}{-9,81} \approx -0,10v + 2,04$
- c** Het object gaat naar boven met een positieve snelheid. Dat wil dus zeggen dat wanneer de snelheid negatief wordt, het object begint te vallen. Je lost dus de vergelijking $v = 0$ op.
 $v = 0$ geeft $t \approx 2,04$ seconden.
- 16 a** $t = 2\pi\sqrt{\frac{2}{9,81}} \approx 2,84$ seconden
- b** $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9,81}}$ geeft $\frac{t}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{9,81}}$ dus $\left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 = \frac{l}{9,81}$, zodat $9,81 \cdot \left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 = l$
- c** $l = 9,81\left(\frac{3,2}{2\pi}\right)^2 \approx 2,54$ meter.
- 17 a** $f(g(4)) = 20$, $g(f(4)) = 64$ en $h(f(4)) = 16$.
- b** $f(g(x)) = x^2 + 4$
 $g(f(x)) = (x + 4)^2$
 $h(f(x)) = 2(x + 4) = 2x + 8$
- c** $f(g(h(x))) = (2x)^2 + 4 = 4x^2 + 4$
- d** Omdat alleen dan eenduidig terugrekenen mogelijk is, alleen dan hoort er bij een mogelijke waarde van y precies één waarde van x .
- e** Op het domein $[0, \rightarrow)$ kun je $k(x)$ als volgt herleiden.
 $y = 4x^2 + 4$ geeft $y - 4 = 4x^2$ en $\frac{1}{4}(y - 4) = x^2$
 $= \sqrt{\frac{1}{4}(y - 4)} = x$, zodat $\frac{1}{2}\sqrt{y - 4} = x$, zodat $k^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - 4}$

18 a Oplossing:

$$h = 100 - 4,9t^2$$

$$\frac{h-100}{-4,9} = t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{h-100}{-4,9}}$$

b $h = 0$ geeft $t \approx 4,5$ seconden.

c $g(t) = h(2t) = 100 - 4,9(2t)^2 = 100 - 19,6t^2$

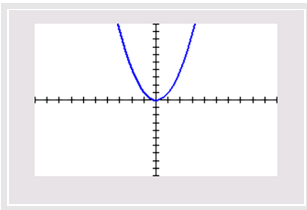
2.5 Transformaties

- V1 a** De grafiek van f wordt 4 eenheden naar rechts verschoven.
- b** De grafiek van f wordt 3 eenheden naar boven verschoven.
- c** De grafiek van f wordt met 1,5 vermenigvuldigd in de verticale richting.
- d** De grafiek van f wordt met $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigd in de horizontale richting. (In dit geval kun je ook zeggen dat hij in de verticale richting wordt vermenigvuldigd, maar dan met 9. Snap je waarom?)
- e** De grafiek van f wordt 4 eenheden naar rechts verschoven, dan met 1,5 vermenigvuldigd in de verticale richting en tenslotte 3 eenheden omhoog geschoven.
- 1 a** Met 0,5 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.
- b** Een translatie van 4 ten opzichte van de y -as en een translatie van 2 ten opzichte van de x -as.
- c** Met -1 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en dan een translatie van 2 ten opzichte van de x -as.
- d** Met $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as en dan een translatie van 2 ten opzichte van de x -as.
- 2 a** Met 3 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.
- b** Een translatie van -4 ten opzichte van de y -as en een translatie van 2 ten opzichte van de x -as.
- c** Met -2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en dan een translatie van 5 ten opzichte van de y -as.
- d** Met 2 vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as en dan een translatie van 1 ten opzichte van de y -as.
- 3 a** Door translatie van -2 ten opzichte van de y -as.
- b** Door translatie van 2 ten opzichte van de x -as.
- c** Overall waar in $f(x)$ de variabele x staat, vul je $x + 2$ in. Denk hierbij aan de haakjes.
Je krijgt dan $g_1(x) = (x + 2)^3 - 4(x + 2)$.
- d** $g_2(x) = x^3 - 4x + 2$
- 4 a** Voer in: $Y1=0.5X^3$
Venster bijvoorbeeld: $[-5,5] \times [-10,10]$
- b** $g_1(x) = 0,5x^3$
Voer in: $Y2=0.5(X+2)^3$
Translatie van -2 ten opzichte van de y -as.
- c** $g_2(x) = 0,5x^3 - 2$
Voer in: $Y3=0.5X^3-2$
Translatie van -2 ten opzichte van de x -as.
- 5 a** Met 0,5 ten opzichte van de y -as vermenigvuldigen.
- b** Met 2 ten opzichte van de x -as vermenigvuldigen.
- c** Overall waar in $f(x)$ de variabele x staat, vul je voor $2x$ in. Denk aan de haakjes. Je krijgt dan $g_1(x) = (2x)^3 - 4(2x) = 8x^3 - 8x$.
- d** $g_2(x) = 2(x^3 - 4x) = 2x^3 - 8x$
- e** Eigen antwoorden.
- 6 a** Voer in: $Y1=0.5X^3$
Venster bijvoorbeeld: $[-5,5] \times [-10,10]$
- b** $g_1(x) = 0,5 \cdot (2x)^3$
Voer in: $Y2=0.5*(2X)^3$
Vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met 0,5.
- c** $g_2(x) = x^3$

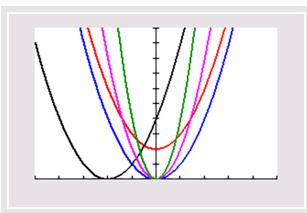
Voer in: $Y3=X^3$

Vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met 2.

- 7 a** Vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met 2 en dan translatie van 3 ten opzichte van de x -as.
- b** Translatie van 4 ten opzichte van de y -as en dan translatie van 2 ten opzichte van in de x -as.
- c** Vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met -1 en dan translatie van 2 ten opzichte van de x -as.
- d** Vermenigvuldigen met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y -as en dan translatie van 2 ten opzichte van de x -as.
- e** Eerst met $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as, dan translatie van 1 ten opzichte van de y -as, vervolgens met 2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en tenslotte translatie van 4 ten opzichte van de x -as.
- 8 a** $g(x) = -2 \cdot f(x) + 1$
- b** $g(x) = f(0,5x) - 3$
- c** $g(x) = f(x - 4) - 2$
- d** $g(x) = f(2(x - 4)) = f(2x - 8)$
- e** $g(x) = f(2x - 4) - 2$
- 9 a** $y = x^4$
- b** Eerst translatie van 5 ten opzichte van de y -as, dan met 0,25 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en tot slot -10 verschuiven ten opzichte van de x -as.
- c** De top van $y = x^4$ is (0,0) en de top van f is na de twee translaties, minimum van de grafiek: $f(5) = -10$.
- 10 a** Voer in: $Y1=X^2$



- b** y_2 ontstaat door de grafiek y_1 te transleren ten opzichte van de x -as met 2;
 y_3 ontstaat door de grafiek y_1 te transleren ten opzichte van de y -as met -2;
 y_4 ontstaat door de grafiek y_1 te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met 2;
 y_5 ontstaat door de grafiek y_1 te vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{2}$.



- c** Eerst een translatie van 3 ten opzichte van de y -as, dan met 0,5 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en dan een translatie van 4 ten opzichte van de x -as.
- d** Vermenigvuldigen met -1 ten opzichte van de x -as of spiegelen ten opzichte van de x -as.
- e** $y = a(b(x - c))^2 + d$
- f** Door uit te gaan van de functie $y = x^2$, waarvan (0,0) de top is en dan eerst translatie van 12 ten opzichte van de y -as toe te passen, dan met -2 te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en dan translatie van 315 ten opzichte van de x -as toe te passen. De top is (12,315).
- 11**
- a: translatie van -3 ten opzichte van de x -as, dus $y = x^2 - 3$
 - b: translatie van 3 ten opzichte van de y -as, dus $y = (x - 3)^2$
 - c: vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met 0,5, dus $y = 0,5x^2$
 - d: de functie is gespiegeld in de x -as, dus $y = -x^2$

- e: translatie van -4 ten opzichte van de x -as en 2 ten opzichte van de y -as, dus $y = (x - 2)^2 - 4$
- f: de functie is gespiegeld in de x -as, getransleerd met 5 ten opzichte van de x -as en met 3 ten opzichte van de y -as en tenslotte vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as met 0,5, dus $y = -0,5(x + 3)^2 + 5$

12 a Vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 0,5.

$$y_2 = x^2 - 1,5x$$

b Translatie van 4 ten opzichte van de y -as en 2 ten opzichte van de x -as.

$$y_3 = 2(x - 4)^2 - 3(x - 4) + 2 = 2x^2 - 19x + 46$$

c Vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met -1 en translatie van 2 ten opzichte van de x -as.

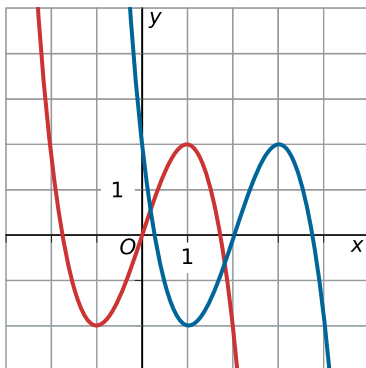
$$y_4 = -2x^2 + 3x + 2$$

d Vermenigvuldiging ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{3}$ en dan translatie van -4 ten opzichte van de x -as.

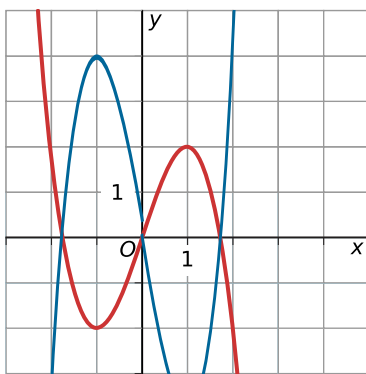
$$y_5 = 2 \cdot (3x)^2 - 3 \cdot 3x - 4 = 18x^2 - 9x - 4$$

- 13**
- a: Translatie ten opzichte van de x -as met 4 eenheden geeft $y_2 = x^3 + 4$
 - b: Translatie ten opzichte van de y -as met 4 eenheden geeft $y_3 = (x - 4)^3$
 - c: Vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met factor $-\frac{1}{4}$ geeft $y_4 = -0,25x^3$
 - d: Hier zijn twee translaties uitgevoerd. Eerst ten opzichte van de y -as met 2 eenheden, daarna ten opzichte van de x -as met -4 eenheden. Dus $y_4 = (x - 2)^3 - 4$.

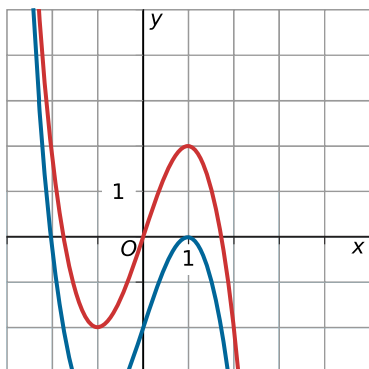
14 a Translatie van 2 ten opzichte van de y -as.



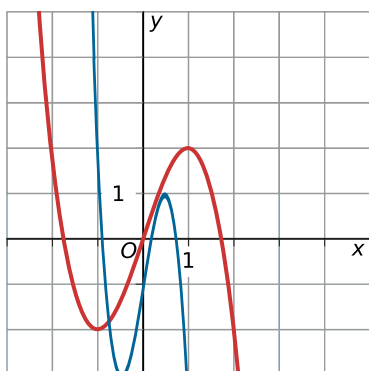
b Vermenigvuldiging van -2 ten opzichte van de x -as.



c Translatie van -2 ten opzichte van de x -as.



- d** Vermenigvuldiging van $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de y-as en daarna translatie ten opzichte van de x-as met -1.



15 a $y_1 = \sqrt{x-5} + 2$

$x - 5 \geq 0$, dus $x \geq 5$.

$\sqrt{x-5} \geq 0$, dus $\sqrt{x-5} + 2 \geq 2$.

$D_{y_1} = [5, \rightarrow)$ en $B_{y_1} = [2, \rightarrow)$.

b $y_2 = -\sqrt{x-3} - 4$; $x - 3 \geq 0$, dus $x \geq 3$ en $-\sqrt{x-3} \geq 0$

Dus $-\sqrt{x-3} - 4 \leq -4$ geeft $D_{y_2} = [3, \rightarrow)$ en $B_{y_2} = \langle \leftarrow, -4 \right]$.

c $y_3 = \sqrt{-2x+4} + 4$

$-2x + 4 \geq 0$, dus $x \leq 2$.

$\sqrt{-2x+4} \geq 0$, dus $\sqrt{-2x+4} \geq 4$.

$D_{y_3} = \langle \leftarrow, 2 \rangle$ en $B_{y_3} = [4, \rightarrow)$.

16 a $f(x) = -2 + (3x-3)^2 = -2 + 3^2(x-1)^2 = -2 + 9(x-1)^2$

- b** Bijvoorbeeld eerst translatie ten opzichte van de y-as met 1 eenheid. Daarna wordt ten opzichte van de x-as met de factor 9 vermenigvuldigd. Tot slot translatie ten opzichte van de x-as met -2 eenheden.

Een andere mogelijkheid is eerst translatie ten opzichte van de y-as met 3 eenheden, daarna ten opzichte van de y-as met de factor $\frac{1}{3}$ vermenigvuldigen en tot slot translatie ten opzichte van de x-as met -2 eenheden.

- 17** De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van $y = x^2$ door te vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met a en daarna 2 naar links te verschuiven en 4 omhoog.

Los op:

$$g(2) = a(2+2)^2 + 4 = 10$$

$$a(2+2)^2 + 4 = 10$$

$$16a = 6$$

$$a = 0,375$$

$$g(x) = 0,375(x+2)^2 + 4 = 0,375x^2 + 1,5x + 5,5$$

$$a = 0,375, b = 1,5 \text{ en } c = 5,5$$

18 a Venster bijvoorbeeld: $[0,25] \times [0,5]$.

b Oplossing:

$$-0,02(x-10)^2 + 4 = 0$$

$$(x-10)^2 = 200$$

$$x-10 = \sqrt{200}$$

$$x = 10 + \sqrt{200} \approx 24,14$$

De kogel komt ongeveer 24,14 meter ver.

c Oplossing:

$$-0,02(x-10)^2 + 4 = 2$$

$$(x-10)^2 = 100$$

$$x-10 = 10$$

$$x = 20$$

Na 20 meter.

19 Eigen antwoord.

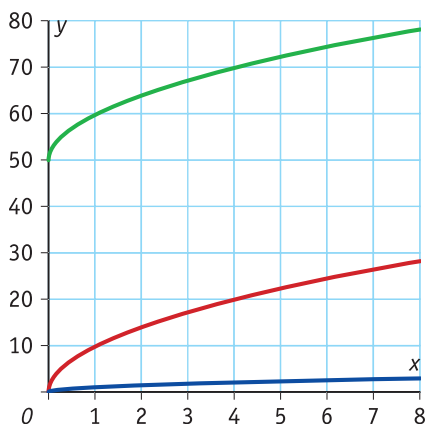
20 a Translatie van 3 ten opzichte van de y-as en translatie van 5 ten opzichte van de x-as.

b Met $\frac{1}{2}$ ten opzichte van de x-as vermenigvuldigen en dan translatie van 1 ten opzichte van de x-as.

c Met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de y-as vermenigvuldigen.

21 a $y = \sqrt{x}$ is de standaardfunctie. In $f(x)$ komt het wortelteken voor. Dat wijst op deze standaardfunctie. Dat er nog +50 bijkomt, doet voor de standaardfunctie niet ter zake.

b Eerst vermenigvuldig je met de factor 10 in de y-richting. Je krijgt de rode grafiek. Dan schuif je de grafiek nog 50 eenheden omhoog. Het eindresultaat is de groene grafiek.



c Het domein van deze functie is $B_f = [0, \infty)$. Dus voor x kies je als instelling bijvoorbeeld $[0,10]$.

De y-waarden worden met 10 vermenigvuldigd en daarna nog met 50 verhoogd. Kies daarom $[50,100]$ als vensterinstelling voor y.

22 Plot eerst op je GR de functie $f(x) = x^3$ en breng in kaart welke transformaties er zijn uitgevoerd.

- vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met $-a$
- translatie ten opzichte van de y -as van 5 eenheden
- translatie ten opzichte van de x -as van 10 eenheden

Een voorlopig functievoorschrift is $f(x) = -a(x - 5)^3 + 10$. Nu moet je alleen nog de waarde van a uitrekenen. Hiervoor gebruik je het gegeven dat de functie door het punt $(7,6)$ gaat, dus $6 = -a(7 - 5)^3 + 10$ geeft $6 = -a \cdot 8 + 10$ en $a = -0,5$.

Het functievoorschrift is $f(x) = -0,5(x - 5)^3 + 10$

2.6 Totaalbeeld

1 a Los op: $f(x) = 0$

$$5x^2(x + 20) = 0$$

$$5x^2 = 0 \vee x + 20 = 0$$

$$x = 0 \vee x = -20$$

Dus de grafiek van f heeft snijpunten $(0,0)$ en $(-20,0)$ met de x -as.

Los op $g(x) = 0$.

$$50x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Dus de grafiek van g heeft een snijpunt $(0,0)$ met de x -as.

b Gebruik bijvoorbeeld de 'Intersect'-functie op de GR, maar algebraïsch kan ook:

Los op: $f(x) = g(x)$

$$5x^2(x + 20) = 50x^2$$

$$5(x + 20) = 50 \vee x^2 = 0$$

$$x + 20 = 10 \vee x = 0$$

$$x = -10 \vee x = 0$$

De snijpunten zijn $(-10,5000)$ en $(0,0)$.

c Plot beide grafieken en lees af: $x \leq -10$.

2 a Los op: $f(x) = 0$

$$x^2(x^2 - 400) = 0$$

$$x^2 = 0 \vee x^2 - 400 = 0$$

$$x = 0 \vee x = \pm\sqrt{400} = \pm 20$$

De nulpunten zijn $x = -20 \vee x = 0 \vee x = 20$.

Deze functie is gedefinieerd voor alle x . Als je de grafiek van f plot, zie je dat deze twee minima heeft, beiden met $y = -40000$.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$B_f = [-40000, \rightarrow)$$

b Los op: $g(x) = 0$

$$\sqrt{20-x} - 40 = 0$$

$$\sqrt{20-x} = 40$$

$$20 - x = 1600$$

$$x = -1580$$

$g(x)$ bestaat als $20 - x \geq 0$, ofwel $x \leq 20$.

Plot de grafiek van g . Je ziet dat de grafiek daalt tot $x = 20$. Hier is de waarde van y minimaal, en die waarde is -40 .

$$D_g = \langle \leftarrow, 20] \rangle$$

$$B_g = [-40, \rightarrow)$$

3 a Oplossing:

$$|4x - 5| = 20$$

$$4x - 5 = -20 \vee 4x - 5 = 20$$

$$x = -3\frac{3}{4} \vee x = 6\frac{1}{4}$$

b Oplossing:

$$\begin{aligned} |x^2 - 5x| &= 6 \\ x^2 - 5x &= 6 \vee x^2 - 5x = -6 \\ (x-6)(x+1) &= 0 \vee (x-2)(x-3) = 0 \\ x &= -1 \vee x = 2 \vee x = 3 \vee x = 6 \end{aligned}$$

4 a $x \rightarrow 4x \rightarrow 4x - 12 \rightarrow y = \sqrt{4x - 12}$

of

$$x \rightarrow x - 3 \rightarrow 4(x - 3) = 4x - 12 \rightarrow y = \sqrt{4x - 12}$$

b $D_f = [3, \rightarrow)$

$B_f = [0, \rightarrow)$

c Eerst translatie van 12 ten opzichte van de y -as en dan vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{4}$, of eerst vermenigvuldigen ten opzichte van de y -as met $\frac{1}{4}$ en dan translatie van 3 ten opzichte van de y -as.

5 a Eerst translatie van 10 in de x -richting, dan vermenigvuldigen met 0,25 in de y -richting, dan translatie van -16 in de y -richting.

b Voer in: $Y1=0,25(x-10)^4-16$

Venster bijvoorbeeld: $[0,20] \times [-20,15]$

Bepaal de nulpunten en de toppen. (7,17,0) en (12,83,0), top (10, -16).

c Oplossing:

$$\begin{aligned} 0,25(x-10)^4 - 16 &= 10 \\ 0,25(x-10)^4 &= 26 \\ (x-10)^4 &= 104 \\ x &= 10 \pm \sqrt[4]{104} \end{aligned}$$

De grafiek laat zien dat $10 - \sqrt[4]{104} < x < 10 + \sqrt[4]{104}$.

6 Grafiek a geeft $y = \sqrt{x+5}$

Grafiek b geeft $y = 2\sqrt{x+3} - 6$

Grafiek c geeft $y = 8 - 4\sqrt{x+4}$

Grafiek d geeft $y = 2 - \sqrt{4-x}$

7 a $f(x) = ax + b$

$$a = \frac{80-8}{6-2} = \frac{72}{4} = 18$$

en

$$b = 8 + 18 \cdot 2 = 44$$

Dus $f(x) = 18x + 44$

b Oplossing:

$$9(ax+b)+26 = 2x+4$$

$$9ax+9b+26 = 2x+4$$

$$9a = 2 \text{ en } 9b+26 = 4$$

$$a = \frac{2}{9} \text{ en } b = -\frac{22}{9}$$

$$g(x) = \frac{2}{9}x - \frac{22}{9}$$

c $x \rightarrow 9x \rightarrow 9x + 26$

$$\frac{1}{9}y - 2\frac{8}{9} \leftarrow y - 26 \leftarrow y$$

$$f^{\text{inv}}(x) = \frac{1}{9}x - 2\frac{8}{9}$$

8 a $x \rightarrow \sqrt{x} \rightarrow -\frac{1}{2}\sqrt{x} \rightarrow y = -\frac{1}{2}\sqrt{x} + 4$

b $D_f = [0, \rightarrow)$

$B_f = \langle \leftarrow, 4 \rangle$

c Deze functie heeft een inverse functie op het domein $[0, \rightarrow)$ die je kunt vinden met terugrekenen.

$$y^{\text{inv}}(x) = (-2x + 8)^2$$

9 a $Z(0) = 200$, neem als venster voor je GR

b Gebruik de GR en bereken daarmee het minimum (150) en de bijbehorende $t = 10$.

c $t \leq 0$ omdat deze variabele het aantal minuten na het uitvallen van de airco voorstelt. Verder begint Z op 200 en gaat hij langzaam weer naar die waarde terug.

$$D_Z = [0, \rightarrow) \text{ en } B_Z = [150, 200].$$

d GR: 22,4 minuten.

10 a $T(0,5; 0)$ en $S(0,1)$

b $D_f = \langle \leftarrow; 0,5 \rangle$ en $B_f = [0, \rightarrow)$.

c Neem $A(p,0)$ (met $p > 0$). Dan is $B(p, \sqrt{1-2p})$. Omdat $OA = AB$ geldt: $\sqrt{1-2p} = p$. Dit levert twee waarden voor p op, waarvan alleen de positieve waarde voldoet. Je vindt: $B(-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$.

d Het gaat om het maximum van $H(p) = 0,5 \cdot p \cdot \sqrt{1-2p}$. Dit zit niet bij $p = -1 + \sqrt{2}$. Met de grafische rekenmachine kun je dit maximum en de bijbehorende p -waarde benaderen.

11 a Los op $0 < f(x) < 20$.

$$f(x) = 0 \text{ geeft } x = -2 \vee x = 2.$$

$$f(x) = 20 \text{ geeft } x = -\sqrt[4]{36} \vee x = \sqrt[4]{36}.$$

$$\text{Dus } 2 < x < \sqrt[4]{36} \vee -\sqrt[4]{36} < x < -2.$$

$$\text{Dit is hetzelfde als } 2 < x < \sqrt{6} \vee -\sqrt{6} < x < -2.$$

b Een verschuiving van c eenheden omlaag geeft de nieuwe grafiek van $f: f(x) = x^4 - 16 - c$. Bijvoorbeeld het punt $(3,0)$ ligt op de nieuwe grafiek en dus moet gelden $f(3) = 3^4 - 16 - c = 65 - c = 0$; hieruit volgt dat $c = 65$ dus de grafiek van f is 65 omlaag geschoven.

12 a Oplossing:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = 4(x-1)$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

b Voer in: $Y1=1/\sqrt{X}-1/X$

Venster bijvoorbeeld: $[0,10] \times [0,11]$

De optie maximum geeft $b = 4$, dus de maximale lengte is $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

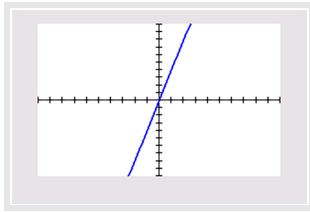
3

Asymptoten en limieten

3.1	Karakteristieken	86
3.2	Asymptoten	93
3.3	Limieten	97
3.4	Continuïteit	101
3.5	Totaalbeeld	106

3.1 Karakteristieken

V1 a Zie de figuur.



- b** Dat komt doordat bij deze vensterinstellingen een klein deel van de grafiek is te zien en dat deel van de grafiek is vrijwel een rechte lijn.
- c** Nu zie je dat de grafiek drie nulpunten heeft.
- d** Door de vergelijking $-0,01x^3 + 4x = 0$ op te lossen. Als je dit algebraïsch doet, dan vind je drie waarden voor x en daarom drie nulpunten.
- e** Als je alle nulpunten hebt, dan weet je zo ongeveer welke x -waarden van belang zijn. Je bekijkt dan in de tabel van de functie op de grafische rekenmachine welke y -waarden bij die x -waarden voorkomen.

1 a Oplossing:

$$\begin{aligned} -0,01x^3 + 4x &= 0 \\ -0,01x(x^2 - 400) &= 0 \\ 0,01x &= 0 \vee x^2 - 400 = 0 \\ x &= 0 \vee x = -20 \vee x = 20 \end{aligned}$$

- b** Venster bijvoorbeeld: $[-40,40] \times [-40,40]$
- c** Gebruik de opties maximum en minimum (in het CALC-menu). Je vindt als toppen $(11,55; 30,79)$ en $(-11,55; -30,79)$.
- d** $D_f = \mathbb{R}$
 $B_f = \mathbb{R}$
- e** Voer ook in: $Y2=X$
Gebruik de optie intersect.
De drie snijpunten van $y_1 = f(x)$ en $y_2 = x$ zijn $(-17,321; -17,321)$, $(0,0)$ en $(17,321; 17,321)$.
De oplossing van de ongelijkheid is: $-17,32 < x \leq 0 \vee x > 17,32$ (denk aan de afrondingen).

2 a Je ziet geen grafiek. Dat komt doordat dit een grafiek is die door translatie (40 ten opzichte van de y -as en 100 ten opzichte van de x -as) is ontstaan uit de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^4$.

- b** $f(x) = 0$ geeft $\frac{1}{2}(x - 40)^4 + 100 = 0$ en dus $(x - 40)^4 = -200$.
Deze vergelijking heeft geen reële oplossingen.
- c** Nulpunt en top zijn hetzelfde punt in dit geval, namelijk $(0,0)$. Dus één nulpunt dat tegelijk ook een top is.
- d** $[-10,10] \times [-10,10]$ transleer je 40 ten opzichte van de y -as en 100 ten opzichte van de x -as: $[30,50] \times [90,110]$.
- e** De top van $f(x)$ ligt 100 hoger dan die van $y = \frac{1}{2}x^4$ en gaat in de y -richting verder alleen omhoog.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$B_f = [100, \rightarrow)$$

3 a Oplossing:

$$0,1x^4 - 20x^2 = 0$$

$$x^4 - 200x^2 = 0$$

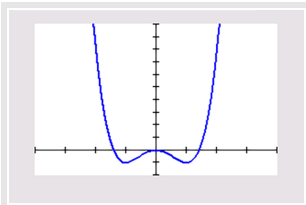
$$x^2(x^2 - 200) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 - 200 = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 = 200$$

$$x = 0 \vee x = -10\sqrt{2} \vee x = 10\sqrt{2}$$

b Venster bijvoorbeeld: $[-40,40] \times [-2000,10000]$



c Gebruik de opties maximum en minimum.

Je vindt als toppen $(-10, -1000)$, $(0,0)$ en $(10, -1000)$.

d $D_f = \mathbb{R}$

$$B_f = [-1000, \rightarrow)$$

e De drie snijpunten van $y_1 = f(x)$ en $y_2 = 100x$ zijn $(-10, -1000)$, $(-6,18; -618,03)$, $(0,0)$ en $(16,18; 1618,03)$.

De oplossing van de ongelijkheid is: $-10 \leq x < -6 \vee 0 \leq x \leq 16$ (denk aan de afrondingen).

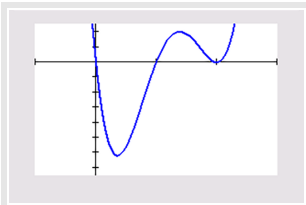
4 a Los op: $f(x) = 0$

$$100x(x-10)(x-20)^2 = 0$$

$$100x = 0 \vee x - 10 = 0 \vee (x - 20)^2 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 10 \vee x = 20$$

b Venster bijvoorbeeld: $[-10,30] \times [-750000,250000]$



c Voer in: $Y1=100X(X-10)(X-20)^2$

Minimum $f(3,6) \approx -619684$

Maximum $f(13,9) \approx 201716$

Minimum $f(20) = 0$

d Breng de grafiek van f in beeld.

$$B_f = [-619684, \rightarrow)$$

5 a Herleid $0,1x^4 - 20x^2 + 12000 = 0$:

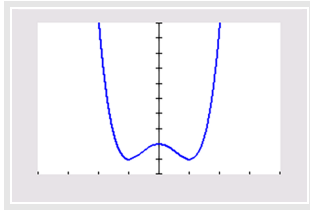
$$x^4 - 200x^2 + 120000 = 0$$

$$(x^2)^2 - 200x^2 + 10000 = -110000$$

$$(x^2 - 100)^2 = -110000$$

Deze vergelijking heeft geen reële oplossingen.

b Venster bijvoorbeeld: $[-40,40] \times [10000,20000]$



- c** Gebruik de opties maximum en minimum.
Je vindt als toppen $(-10, 11000)$, $(0, 12000)$ en $(10, 11000)$.

- d** Voer in: $Y2=1000X$
Gebruik de optie intersect.

De twee snijpunten van $y_1 = f(x)$ en $y_2 = 1000x$ zijn $(11,0; 11048,7)$ en $(20, 20000)$. De oplossing van de ongelijkheid is: $11 < x \leq 20$ (denk aan de afrondingen).

- 6 a** Oplossing:

$$\begin{aligned} 600 - 0,01(x - 20)^3 &= 0 \\ (x - 20)^3 &= 60000 \\ x - 20 &= \sqrt[3]{60000} \\ x &= 20 + \sqrt[3]{60000} \end{aligned}$$

- b** $x = 0$ invullen geeft $(0,680)$.

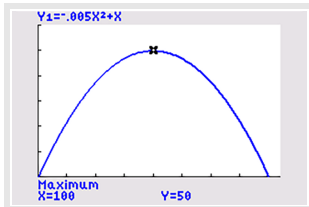
- c** Venster bijvoorbeeld: $[-10, 70] \times [-200, 800]$

- d** Deze grafiek kan door transformaties ontstaan uit die van $y = x^3$.
Eerst translatie van 20 ten opzichte van de y -as, dan vermenigvuldigen met $-0,1$ ten opzichte van de x -as en ten slotte een translatie 600 ten opzichte van de x -as.
De grafiek van $y = x^3$ heeft geen uiterste waarden, dus $g(x)$ ook niet.

- 7 a** Je krijgt dan de grafiek niet goed in beeld. Hij lijkt niet op een bergparabool.

- b** Om te bepalen welke instelling voor x geschikt is.

- c** Venster bijvoorbeeld: $[0, 200] \times [0, 55]$.



- 8 a** Oplossing:

$$\begin{aligned} 80x - 0,01x^4 &= 0 \\ x^4 - 8000x &= 0 \\ x(x^3 - 8000) &= 0 \\ x &= 0 \vee x = \sqrt[3]{8000} = 20 \end{aligned}$$

Voer in: $Y1=80X-0.01X^4$

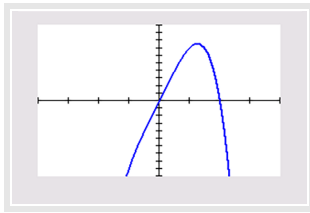
Venster bijvoorbeeld: $[-10, 30] \times [-500, 1000]$

Verder vind je met de GR dat het maximum ongeveer 756 is.

$D_f = \mathbb{R}$

$B_f = \langle \leftarrow, 756 \rangle$

Het bereik $B_f = \langle \leftarrow, 756 \rangle$ met rechts een open interval omdat 756 niet bereikt wordt als functiewaarde. Het maximum is ongeveer $755,95 < 756$.



b Oplossing:

$$40 - \sqrt{x + 20} = 0$$

$$\sqrt{x + 20} = 40$$

$$x + 20 = 1600$$

$$x = 1580$$

$$g(0) = 40 - \sqrt{20} \approx 36$$

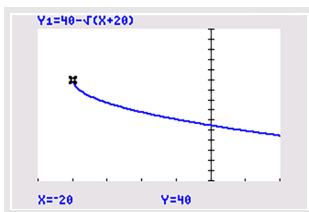
Voer in: $Y1=40-\sqrt{X+20}$

Venster bijvoorbeeld: $[-25,10] \times [30,45]$

De grafiek heeft geen toppen, maar wel een maximum van 40 voor $x = -20$.

$$D_f = [-20, \rightarrow)$$

$$B_f = \langle \leftarrow, 40] \text{ (Note: original text has } \langle \leftarrow, 40] \text{ but likely meant } \langle \leftarrow, 40])$$



c Er zijn geen nulpunten.

Voer in: $Y1=0.2(X-5)^4+120$

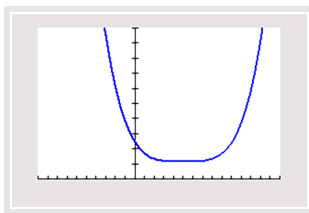
Venster bijvoorbeeld $[-10,15] \times [0,1000]$

Omdat de grafiek van h door transformaties ontstaat uit de grafiek van $y = x^4$ kun je dit ook berekenen met behulp van transformaties.

Met de GR vind je dat er een minimum is van 120.

$$D_h = \mathbb{R}$$

$$B_h = [120, \rightarrow)$$



9 a $g(x)$ heeft maar één nulpunt, namelijk $x = 0$. Voor $f(x)$ moet je de nulpunten berekenen:

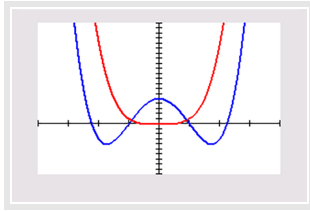
$$(x^2 - 100)(x^2 - 500) = 0$$

$$x^2 = 100 \vee x^2 = 500$$

$$x = -10 \vee x = 10 \vee x = -10\sqrt{5} \approx -22 \vee x \approx 22$$

Voer de functies in de GR in.

Venster bijvoorbeeld: $[-40,40] \times [-100000,200000]$



- b** Met de GR vind je dat -40000 het minimum van f is.

$$B_f = [-40000, \rightarrow)$$

$$B_g = [0, \rightarrow)$$

- c** $f(x) = g(x)$ geeft na haakjes wegwerken:

$$x^4 - 600x^2 + 50000 = x^4$$

$$-600x^2 + 50000 = 0$$

$$x^2 = \frac{-50000}{-600}$$

$$x^2 = \frac{500}{6}$$

$$x = -\sqrt{\frac{500}{6}} \vee x = \sqrt{\frac{500}{6}}$$

$$x = -\sqrt{\frac{250}{3}} \vee x = \sqrt{\frac{250}{3}}$$

De oplossing van de ongelijkheid is:

$$-\sqrt{\frac{250}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{250}{3}}, \text{ ofwel } -5\sqrt{\frac{10}{3}} \leq x \leq 5\sqrt{\frac{10}{3}}.$$

- 10 a** $v(T) = 0$ als $1 + \frac{T}{273} = 0$, dus als $T = -273$ °C. Verder moet (vanwege de wortelvorm) $T \geq -273$.

Het snijpunt van $v(T)$ met de v -as is (0,331).

Voer in $Y1=331*\sqrt{1+X/273}$ met venster $[-300,50] \times [0,400]$.

- b** Waarschijnlijk alleen het deel met temperaturen van (bijvoorbeeld) -50 °C tot en met 50 °C.

- c** $v(T) = 320$ geeft $T = -17,84$, en $v(T) = 340$ geeft $T = 15,05$.

Dus de geluidssnelheid ligt tussen de 320 en 340 m/s bij temperaturen tussen de -17,8 en de 15,0 °C.

- 11 a** $f(0) = -0^2 + 27 \cdot 0 + 44 = 44$

Coördinaten zijn (0,44).

- b** Oplossing:

$$-x^3 + 27x = 0$$

$$-x(x^2 - 27) = 0$$

$$-x = 0 \vee x^2 - 27 = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 = 27$$

$$x = 0 \vee x = -\sqrt{27} \vee x = \sqrt{27}$$

- c** De grafiek van f ontstaat uit die van g door op deze laatste grafiek een translatie van 44 ten opzichte van de x -as toe te passen. Als je de tabel van f bekijkt voor de waarden van x waarbinnen de nulpunten van g liggen, dan krijg je een goede indruk van het verloop van de functiewaarden van f . Venster bijvoorbeeld: $[-10,10] \times [-20,120]$

- d** Gebruik je GR door met het menu de opties minimum en maximum te gebruiken. Je vindt: maximum $f(3) = 98$ en minimum $f(-3) = -10$.

- 12 a** Voer in: $Y1=(X+1)(X^2-16)$

Venster bijvoorbeeld: $[-10,10] \times [-50,25]$

Met behulp van de grafische rekenmachine vind je (2, -36).

- b** Voor punt P geldt: $f(0) = -16$.

Voor punt Q geldt: $f(x) = 0$ dus $(x+1)(x^2-16) = 0$ geeft $x+1 = 0$ of $x^2-16 = 0$.

Dit geeft als enige goede antwoord $x = 4$ omdat gegeven is dat de x -coördinaat van Q positief is.

De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{0-16}{4-0} = 4$.

Dus $k: y = 4x - 16$.

- 13 a** De lengte van AB moet gelijk zijn aan die van BC , dus $2p = \sqrt{400 - p^2}$. Dit kun je algebraïsch oplossen:

$$4p^2 = 400 - p^2$$

$$5p^2 = 400$$

$$p^2 = 80$$

$$p = \sqrt{80}$$

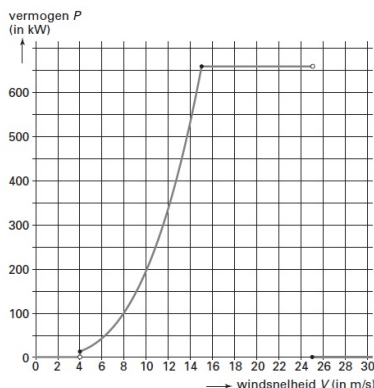
Dat geeft $C(\sqrt{80}, \sqrt{320})$.

- b** De oppervlakte van deze rechthoek is $O = 2p \cdot \sqrt{400 - p^2}$. Het maximum hiervan kun je op dit moment alleen vinden met behulp van de grafische rekenmachine.

Daartoe moet je eerst de grafiek van $O(p)$ in beeld brengen. Ga na dat $[0, 20] \times [0, 400]$ een geschikt venster is.

Het maximum van O vind je als $p \approx 14,142$. Dat geeft $C(14,14; 14,14)$.

- 14 a** Op $[0, 4)$ is $P = 0$
 Op $[4, 15)$ is $P = 0,195v^3$
 Op $[15, 25)$ is $P = P(15) = 658,125 \approx 658$
 Op $[25, 30]$ is $P = 0$



Bij windsnelheden van 4 en 25 m/s, is er sprake van een overgang in vermogen. Gezien de praktijk mag je de grafiek rond deze punten ook met een sterk stijgende/dalende lijn of verticale lijn tekenen.

- b** Voer in: $Y1 = 0,195X^3$ en $Y2 = 500$
 Bepaal het snijpunt.
 Het kan ook algebraïsch:

$$0,195v^3 = 500$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{500}{0,195}} \approx 13,69$$

Voor windsnelheden vanaf 13,69 m/s tot 25 m/s.

- 15 a** Oplossing:

$$(40 + 2x)^2(x - 10) = 0$$

$$(40 + 2x) = 0 \vee x - 10 = 0$$

$$x = -20 \vee x = 10$$

- b** Bijvoorbeeld $[-30, 20] \times [-20000, 20000]$.

- c** Bepaal met behulp van je GR de snijpunten van $y_1 = (40 + 2x)^2(x - 10)$ en $y_2 = -100x^2$.

Je vindt $(-9,36; -8764,62)$ en $(7,97; -6352,22)$.

De oplossing van de ongelijkheid is $-9,4 < x < 8,0$.

16 Oplossing:

$$-0,5(x + 20)^4 + 128 = 0$$

$$(x + 20)^4 = 256$$

$$x + 20 = \pm \sqrt[4]{256} = \pm 4$$

$$x = -24 \vee x = -16$$

Met geschikte vensterinstellingen kun je de top bepalen: $(-20, 128)$. Je kunt ook beredeneren dat de grafiek symmetrisch is en $f(-20)$ direct berekenen.

3.2 Asymptoten

- V1 a** De prijs per kopie P is sowieso de prijs die een kopie de school kost, plus de huurprijs verdeeld over het totale aantal kopieën a .
Dus $P = 0,06 + \frac{250}{a}$.
- b** Vul bijvoorbeeld in $a = 1000000$, dan zie je dat $\frac{250}{a}$ verwaarloosbaar klein wordt. Dus de waarde € 0,06 wordt benaderd.
- c** Theoretisch worden ze dan oneindig groot, maar $a = 0$ betekent hier dat de school alleen de volledige kosten van de machine moet betalen. Dus € 250,00. Let er op dat je $a = 0$ niet mag invullen in de formule (want je deelt dan door 0). En bijvoorbeeld $a = 0,1$ mag ook niet, omdat het om een aantal gaat.
- 1 a** $K(10000) = 0,095$
Dat is 9,5 eurocent per kopie.
- b** 7,5 eurocent per kopie.
- c** $K = 0,075$
- d** $K(1) = 200,08$ euro
- 2 a** Voer in: $Y1=4/X+2$.
- b** $x = 0$; bij $X=0$ staat ERROR of iets dergelijks.
- c** Vul voor x grote getallen in, je ziet dan dat de functiewaarden in de buurt van 2 komen.
- d** Vul voor x negatieve getallen in zoals in het voorbeeld, je ziet dan dat de functiewaarden in de buurt van 2 komen.
- e** $y = 2$
- f** $D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$
 $B_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$
- 3 a** De verticale asymptoot ligt daar waar de noemer gelijk aan 0 is en de teller niet gelijk aan 0 is, ofwel op $x = -2$.
- b** Vul voor x grote getallen in, je ziet dan dat de functiewaarden in de buurt van 0 komen.
- c** Vul voor x kleine getallen in, bijvoorbeeld -100000 je ziet dan dat de functiewaarden in de buurt van 0 komen.
- d** $y = 0$
- e** $D_f = \langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle -2, \rightarrow \rangle$
 $B_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$
- 4 a** $f(x) = 0$ betekent $x - 10 = 0$ en dus $x = 10$.
- b** Delen door 0 kan niet. $x^2 - 25 = 0$ als $x = -5 \vee x = 5$.
Door getallen vlak in de buurt van deze twee waarden in te vullen, ontdek je dat de functiewaarden heel erg groot of heel erg klein (erg negatief) worden.
De lijnen $x = -5$ en $x = 5$ zijn de verticale asymptoten.
- c** Neem je grote of kleine waarden, dan zie je dat de functiewaarden steeds dichter bij 0 uitkomen. De lijn $y = 0$ is de horizontale asymptoot. Controleer dit door het in te voeren in de GR en de tabel te raadplegen.
Je kunt het ook zo zien: als je grote waarden voor x invult, dan wordt $x^2 - 25$ sneller groter dan $x - 10$.
Dan moet gelden voor de uitdrukking $\frac{x-10}{x^2-25}$ dat dit dicht bij 0 moet liggen voor grote x -waarden.
- d** Venster bijvoorbeeld: $[-10,25] \times [-4,4]$
- e** Voer in: $Y1=(X-10)/(X^2-25)$
Bereken de extremen. Je vindt minimum $f(1,340) \approx 0,373$ en maximum $f(18,660) \approx 0,027$.
- f** $D_f = \langle \leftarrow, -5 \rangle \cup \langle -5,5 \rangle \cup \langle 5, \rightarrow \rangle$

$B_f = \langle \leftarrow; 0,027 \rangle \cup \langle 0,373; \rightarrow \rangle$ (denk om de afrondingen op drie decimalen)

- 5 a** Een verticale asymptoot ontstaat in een situatie waarbij je moet delen door 0. Bij dit functievoorschrift moet dan gelden dat $1 + x^2 = 0$. Die vergelijking heeft geen oplossingen. Er is dus geen verticale asymptoot.

b $g(x) = 0$ wil zeggen $4x = 0$, dus gewoon $x = 0$.

c Na grote positieve en erg negatieve waarden voor x in te vullen zie je dat $y = 0$ de horizontale asymptoot is.

d De functie $g(x)$ bestaat voor elke waarde van x . Als je de grafiek van $g(x)$ plot op het standaard-scherm, zie je dat er een maximum 2 en een minimum -2 is voor respectievelijk $x = 1$ en $x = -1$.

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$B_g = [-2, 2]$$

- 6 a** $f(x)$ bestaat niet voor $x = 0$, en aan weerszijden schieten de functiewaarden omhoog en omlaag, dus dat is de verticale asymptoot.

Voor waarden van x die heel ver van 0 liggen nadert $f(x)$ tot een waarde $y = 4$, dus dat is de horizontale asymptoot.

$$D_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$$

$$B_f = \langle \leftarrow, 4 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$$

- b** $g(x)$ bestaat niet voor $x = 0$ en aan weerszijden schieten de functiewaarden omhoog en omlaag, dus dat is de verticale asymptoot.

Voor waarden van x die heel ver van 0 liggen nadert $g(x)$ tot een waarde $y = -1$, dus dat is de horizontale asymptoot.

$$D_g = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$$

$$B_g = \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle -1, \rightarrow \rangle$$

- c** $h(x)$ bestaat niet voor $x = \pm 2$, en aan weerszijden van deze x -waarden schieten de functiewaarden omhoog en omlaag, dus dat zijn de verticale asymptoten.

Voor waarden van x die heel ver van 0 liggen nadert $h(x)$ tot een waarde $y = 0$, dus dat is de horizontale asymptoot.

$$D_h = \langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle -2, 2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$$

$$B_h = \mathbb{R}$$

- d** $k(x)$ bestaat voor alle waarden van x , dus er is geen verticale asymptoot.

Voor waarden van x die heel ver van 0 liggen nadert $k(x)$ tot een waarde $y = 1$, dus dat is de horizontale asymptoot.

$$D_k = \mathbb{R}$$

$$B_k = [0, 1)$$

- 7 a** $x = 0$ en $y = 5$.

b Translatie van -5 ten opzichte van de x -as.

- 8 a** $f(x) = 0$ oplossen geeft:

$$\frac{10x}{(x-20)^2} = 0$$

$$10x = 0$$

$$x = 0$$

- b** $f(x)$ is ongedefinieerd voor $(x - 20)^2 = 0$, dus als $x = 20$; dat is de verticale asymptoot. Voor waarden van x die heel ver van 0 liggen nadert $f(x)$ tot een waarde $y = 0$, dus dat is de horizontale asymptoot.

c Venster bijvoorbeeld: $[-200, 200] \times [-1, 1]$

d $f(x)$ heeft een top $(-20; -0,125)$. Het minimum is $-0,125$. Alle andere functiewaarden van f liggen daarboven.

$$B_f = [-0,125; \rightarrow)$$

9 a Los op: $f(x) = 0$

$$\frac{x^2}{x^4+10} = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

b $f(x)$ bestaat voor alle waarden van x , dus er is geen verticale asymptoot. Voor waarden van x die heel ver van 0 liggen nadert $f(x)$ tot de waarde $y = 0$, dus dat is de horizontale asymptoot.

c Venster bijvoorbeeld: $[-10,10] \times [-0,1; 0,2]$

d Het bereik ligt tussen het nulpunt en de toppen die je aan weerszijden daarvan ziet op de GR. Met de optie maximum vind je de top op $y = 0,16$.

$$B_f = [0; 0,16]$$

10 a $TK(120) = 1540$

De kosten per stuk zijn: $\frac{1540}{120} \approx 12,83$ euro

b Noem de gemiddelde kosten GK . De gemiddelde kosten van een artikel zijn de totale kosten gedeeld door het totale aantal artikelen, ofwel $GK = \frac{TK}{q}$. Het hellingsgetal van de lijn door $(0,0)$ en (q, TK)

$$\text{is } \frac{TK-0}{q-0} = \frac{TK}{q}.$$

c Oplossing:

$$GK = \frac{TK}{q}$$

$$GK = \frac{100+0,1q^2}{q}$$

$$GK = \frac{100}{q} + 0,1q$$

d GK bestaat niet als $q = 0$, dus daar is de verticale asymptoot.

Er is geen horizontale asymptoot.

Bedenk dat $q > 0$, dus $D_{GK} = \langle 0, \rightarrow \rangle$.

Als je de grafiek plot, kun je een minimum van 6,32 voor $q = 31,62$ vinden. Dus $B_{GK} = [6,32; \rightarrow)$.

11 a Voor $T = 10$ geldt: $R = 15 + \frac{7,2}{0,0785-0,0034 \cdot 10} \approx 177$

Voor $T = 20$ geldt: $R = 15 + \frac{7,2}{0,0785-0,0034 \cdot 20} \approx 701$

Dus de overlevingstijd is $\frac{701}{177} \approx 4$ keer zo groot

b 5 uur is 300 minuten dus:

$$300 = 15 + \frac{7,2}{0,0785-0,0034T}$$

$$285 = \frac{7,2}{0,0785-0,0034T}$$

$$0,0785 - 0,0034T = \frac{7,2}{285}$$

$$T = \frac{\frac{7,2}{285} - 0,0785}{-0,0034} \approx 16^\circ\text{C}$$

c Er is een verticale asymptoot bij de T -waarde waarvoor geldt: $0,0785 - 0,0034T = 0$

$$\text{Hieruit volgt: } T = \frac{0,0785}{0,0034} \approx 23^\circ\text{C}$$

Als de watertemperatuur (van onderaf) nadert tot 23°C wordt de overlevingstijd heel groot, dus voor een te water geraakte persoon wordt de situatie dan nooit levensbedreigend (hij raakt nooit onderkoeld).

12 a Ja.

b De waarden van W zijn strikt dalend naarmate f toeneemt.

$$W(15) = 22 \text{ en } W(30000) = 0,011.$$

$$B_W = [0,011; 22]$$

c Een hoog geluid.

d $W(120000) = 0,00275$, dus het is een hoog geluid met een golflengte van 0,00275 meter.

e $W(20) = 16,5$. Dus het gaat om een bas (lage toon) met een golflengte langer dan 16,5 meter.

f Vul voor f grote getallen in, dan zie je dat $\frac{330}{f}$ naar 0 nadert hoe groter f wordt.

13 a $f(100) \approx 2,0606$ en $f(-100) \approx 1,9406$.

b $f(x) = 0$ geeft:

$$\frac{4+2x}{x-1} = 0$$

$$4 + 2x = 0$$

$$x = -2$$

c Voer in: $Y1=(4+2X)/(X-1)$. Venster: Standaard.

d $f(x)$ bestaat niet voor $x = 1$, dus dat is de verticale asymptoot. Voor waarden van x die heel ver van 0 liggen nadert $f(x)$ tot de waarde $y = 2$, dus dat is de horizontale asymptoot.

e $D_f = \langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$ en $B_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$.

14 a Los op $K = 10$:

$$\frac{89}{T-2} = 10$$

$$T - 2 = \frac{89}{10}$$

$$T = 10,9$$

b De verticale asymptoot van K ligt op $T = 2$; voor kleinere waarden van T is K negatief en dat is natuurlijk onzinnig. Je kiest je domein dus boven $T = 2$: $\langle 2, \rightarrow \rangle$.

c Zoals in deelvraag b al duidelijk werd, ligt de verticale asymptoot op $T = 2$. Voor hoge waarden van T nadert K een waarde van 0, dus $K = 0$ is de horizontale asymptoot.

d Voor $T > 2$ is $K > 0$, dus het bereik is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

3.3 Limieten

- V1 a** Als je voor x steeds een groter getal invult, dan gaat $\frac{1}{x}$ steeds dichterbij 0 toe. Let er op dat de functiewaarde 0 nooit wordt bereikt.
- b** Als je voor x steeds een kleiner (dus sterk negatief) getal invult, dan gaat $\frac{1}{x}$ steeds dichterbij 0 toe. Let er op dat de functiewaarde 0 nooit wordt bereikt.
- c** Vul bijvoorbeeld voor x de getallen 0,1, 0,01 en 0,001 in.
 $f(0,1) = 10$
 $f(0,01) = 100$
 $f(0,001) = 1000$
 De functiewaarde wordt dus oneindig groot.
- d** Vul bijvoorbeeld voor x de getallen -0,1, -0,01 en -0,001 in.
 $f(-0,1) = -10$
 $f(-0,01) = -100$
 $f(-0,001) = -1000$
 De functiewaarde wordt dan oneindig klein.
- 1 a** Voer in: $Y1=1/X$
 Venster bijvoorbeeld: $[-5,5] \times [-5,5]$
 Er zijn geen nulpunten en geen toppen. Er zijn twee asymptoten, de lijn $y = 0$ is de horizontale asymptoot en de lijn $x = 0$ is de verticale asymptoot.
- b** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- c** $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$.
- d** Voor functie g geldt: $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ en $\lim_{x \downarrow 0} g(x) = \infty$ en $\lim_{x \uparrow 0} g(x) = -\infty$.
 Voor functie h geldt: $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ en $\lim_{x \downarrow 0} h(x) = \infty$ en $\lim_{x \uparrow 0} h(x) = \infty$.
- Het patroon is dat deze limieten gelden voor alle functies van de vorm $f(x) = \frac{1}{x^n}$ met $n = 1, 2, 3, 4, \dots$
 Alleen bij de laatste limiet heb je bij even n geen mintekens en bij oneven n wel.
- 2 a** Voer in: $Y1=2-1/(X-1)^2$
 Venster: standaard
- b** De functie bestaat niet voor $x = 1$
 Verticale asymptoot $x = 1$
 Limieten: $\lim_{x \downarrow 1} f(x) = -\infty$ en $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = -\infty$
- c** Horizontale asymptoot: $y = 2$
 Limieten: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$
- d** $D_f = \langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$
 $B_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle$
- 3 a** De functie bestaat niet voor $x = -1$
 Verticale asymptoot: $x = -1$
 Limieten: $\lim_{x \downarrow -1} f(x) = -\infty$ en $\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \infty$
- b** Horizontale asymptoot: $y = 4$
 Limieten: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$
- c** $D_f = \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle -1, \rightarrow \rangle$
 $B_f = \langle \leftarrow, 4 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$

- 4 a** Omdat $1 - 2x = 0$ als $x = \frac{1}{2}$ levert dit getal een probleem op bij het invullen in functie f . De verticale asymptoot is dus de lijn $x = \frac{1}{2}$.
- b** Ga na dat $\lim_{x \downarrow 0,5} f(x) = -\infty$ en $\lim_{x \uparrow 0,5} f(x) = \infty$.
- c** Los op: $f(x) = 0$
- $$\frac{3x}{1-2x} = 0$$
- $$3x = 0$$
- $$x = 0$$
- d** Breng de grafiek in beeld met de GR (standaardvenster kan).
De grafiek heeft een horizontale asymptoot: $y = -1,5$
- e** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{1-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\frac{1}{x}-2} = \frac{3}{0-2} = \frac{3}{-2} = -1,5$
- f** Dit gaat op dezelfde manier als bij d. Ook $-1,5$.
- 5 a** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x}-1}{2+\frac{1}{x}} = \frac{0-1}{2+0} = -\frac{1}{2}$
- b** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+6}{5x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+\frac{6}{x}}{5-\frac{1}{x}} = \frac{3}{5}$
- c** Voer in: $Y1=5X/(3X-6)$
Maak een tabel en lees de waarden af rondom $x = 2$
- $$\lim_{x \downarrow 2} \frac{5x}{3x-6} = \infty$$
- d** $\lim_{x \downarrow 2} \frac{x-2}{3x-6} = \lim_{x \downarrow 2} \frac{x-2}{3(x-2)} = \frac{1}{3}$
- 6 a** $x^2 - 100 = 0$ geeft $x = 10$ en $x = -10$
Verticale asymptoten: $x = 10$ en $x = -10$
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2-100} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x-\frac{100}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x-0} = 0$$
- Horizontale asymptoot: $y = 0$
- b** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2-100} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{100}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$
- 7 a** $x = 0$; controleer dit door de bijbehorende linker- en rechter limiet te bepalen met behulp van een tabel.
- b** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \frac{1}{x} \right) = 2x$
De limiet voor $x \rightarrow -\infty$ gaat op vergelijkbare wijze.
- 8 a** $x = -3$; controleer dit door de bijbehorende linker- en rechter limiet te bepalen met behulp van een tabel.
- b** Nu kun je het functievoorschrift maar lastig splitsen in twee breuken en teller en noemer delen door x of zelfs x^2 levert ook niet veel bruikbaars op. Maak dus een tabel met x -waarden als 1000, 10000, enzovoort. Je ziet dan dat ook de functiewaarden blijven oplopen als $x \rightarrow \infty$. En iets vergelijkbaars gebeurt met de limiet voor $x \rightarrow -\infty$.
- c** $f(x) = \frac{x^2-10}{x+3} = \frac{x^2-9}{x+3} - \frac{1}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} - \frac{1}{x+3} = x-3 - \frac{1}{x+3}$
- d** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+3} = 0$, dus de scheve asymptoot heeft de vergelijking $y = x - 3$.

9 a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{3x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{3+\frac{4}{x}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}$

b Je kunt $x = 2$ direct invullen.

$$\lim_{x \uparrow 2} \frac{x-3}{2x+4} = -\frac{1}{8}$$

c $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-3x}{x^3+9x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{9}{x^2}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

10 a Je ziet dat $f(x)$ niet bestaat op $x = 2$. De GR-tabel bevestigt dat dit de verticale asymptoot is: $\lim_{x \downarrow 2} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \uparrow 2} f(x) = -\infty$.

De horizontale asymptoot:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{3+0}{1-0} = 3$$

b De functie bestaat niet als $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$, dus als $x = 2$ en $x = -1$. De GR-tabel bevestigt dat dit de verticale asymptoten zijn. $\lim_{x \downarrow 2} g(x) = \infty$ en $\lim_{x \uparrow 2} g(x) = -\infty$ en $\lim_{x \downarrow -1} g(x) = \infty$ en $\lim_{x \uparrow -1} g(x) = -\infty$.

$$\lim_{x \uparrow -1} g(x) = -\infty.$$

De horizontale asymptoot:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1-0-0} = 0$$

11 $\lim_{x \downarrow 3} \frac{x^3-3x^2}{x^3-9x} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{x^2(x-3)}{x(x^2-9)} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{x^2(x-3)}{x(x-3)(x+3)} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{x^2}{x(x+3)} = \frac{3^2}{3(3+3)} = \frac{9}{18} = 0,5$

12 a Je ziet dat $f(x)$ niet bestaat als $x = 0$. De GR-tabel bevestigt dat dit de verticale asymptoot is: $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = -\infty$.

b Voer in $Y1=2X+1/(2X)$ met het standaardvenster.

Toppen: $(-1, -1)$ en $(1, 1)$. Er zijn geen nulpunten.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x + \frac{1}{2x} = 2x, \text{ dus er is een scheve asymptoot } y = 2x.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \frac{1}{2x} = 2x, \text{ dus er is een scheve asymptoot } y = 2x.$$

13 $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4} = \frac{x^2-4}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x-2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x-2)} = \frac{x+2}{2} + \frac{1}{2(x-2)} = \frac{x}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2(x-2)} = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2(x-2)}$

De scheve asymptoot heeft als vergelijking $y = \frac{1}{2}x + 1$ want $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2(x-2)} = 0$.

14 a Rechterkant gelijknamig maken:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2}{R_1 R_2} + \frac{R_1}{R_1 R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

Invullen: $\frac{1}{R_s} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$ ofwel $R_s = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

b $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{R_1}{\frac{R_1}{R_2} + 1} = R_1$

Als $R_2 \rightarrow \infty$ dan loopt door deze weerstand geen stroom meer en speelt dus alleen R_1 nog een rol.

c $\lim_{R_2 \downarrow 0} R_s = \lim_{R_2 \downarrow 0} \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 \cdot 0}{R_1 + 0} = 0$

Als $R_2 \downarrow 0$ dan is er geen sprake meer van een weerstand, ongeacht de waarde van R_1 .

15 a Bedenk dat de integerfunctie alleen de waarden $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ aanneemt.

Zodoende heeft f de algemene vorm $(-1)^n$, waarbij n een geheel (positief of negatief) getal is.

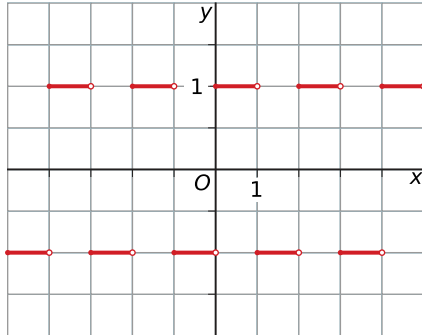
Als x afgerond op een geheel getal even is, dan is

$$(-1)^x = 1. \text{ Zo is } f(-1,5) = (-1)^{\text{int}(-1,5)} = (-1)^{-2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1.$$

Op een vergelijkbare manier geldt voor een afgeronde oneven x -waarde $f(x) = -1$.

De grafiek van f springt dus heen en weer tussen -1 en 1 .

Met een open rondje in de grafiek wordt aangegeven dat een punt er niet bij hoort.



- b** Nee, de limiet bestaat niet. De waarde van $f(x)$ blijft tot in de oneindigheid heen en weer springen en benadert dus niet een eenduidige waarde.

- 16 a** Je ziet dat $f(x)$ niet bestaat als $x = \frac{1}{2}$. De GR-tabel bevestigt dat dit de verticale asymptoot is:

$$\lim_{x \downarrow 0,5} f(x) = \infty \text{ en } \lim_{x \uparrow 0,5} f(x) = -\infty \text{ en de verticale asymptoot: } x = \frac{1}{2}.$$

- b** $f(x) = 0$ als $6 + x = 0$ ofwel $x = -6$.

c $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6+x}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{6}{x}+1}{2-\frac{1}{x}} = \frac{0+1}{2-0} = 0,5$, dus de horizontale asymptoot is $y = 0,5$.

d $D_f = \langle \leftarrow; 0,5 \rangle \cup \langle 0,5; \rightarrow \rangle$ en $B_f = \langle \leftarrow; 0,5 \rangle \cup \langle 0,5; \rightarrow \rangle$.

17 $\frac{3x^3-300}{2x^2} = \frac{3x^3}{2x^2} - \frac{300}{2x^2} = 1,5x - \frac{150}{x^2}$

Hierin wordt de term $-\frac{150}{x^2}$ verwaarloosbaar klein naarmate $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-300}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1,5x - \frac{150}{x^2} \right) = 1,5x$$

en

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3-300}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1,5x - \frac{150}{x^2} \right) = 1,5x.$$

De scheve asymptoot is $y = 1,5x$.

3.4 Continuïteit

V1 a Voer in: $Y1=(X^2-9)/(X-3)$, bijvoorbeeld met het standaardvenster.

b Bij $x = 3$.

c $\lim_{x \downarrow 3} f(x) = \lim_{x \uparrow 3} f(x) = 6$

d $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$ zolang $x \neq 3$.

1 a Neem $x = 3$ en je ziet dat $f(3) = \frac{0}{0}$ en daar kun je geen uitkomst aan toekennen.

b Voer in $Y1=(X^2-9)/(X-3)$ met (bijvoorbeeld) het standaardvenster.

Bekijk een tabel in de buurt van $x = 3$.

Je maakt de functie f continu door af te spreken dat $f(3) = 6$ en dat het gegeven functievoorschrift alleen geldig is voor $x \neq 3$.

c Voor functie g geldt: $\lim_{x \downarrow 3} g(x) = -\infty$ en $\lim_{x \uparrow 3} g(x) = \infty$.

2 a Voer in: $Y1=(X-3)/(X^2-9)$.

b $f(x)$ bestaat niet voor $x^2 - 9 = 0$, ofwel $x = \pm 3$.
 $x = -3 \vee x = 3$

c Verticale asymptoot: $x = -3$

Limieten: $\lim_{x \downarrow -3} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \uparrow -3} f(x) = -\infty$

d $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$ als $x \neq 3$.

e Je weet dat er een verticale asymptoot op $x = -3$ ligt en een perforatie op $x = 3$.

Daarbij heeft $f(x)$ een horizontale asymptoot: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} = 0$

$$D_f = \langle \leftarrow, -3 \rangle \cup \langle -3, 3 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$$

$$B_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \left\langle 0, \frac{1}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{6}, \rightarrow \right\rangle$$

f Afspreken dat $f(3) = \frac{1}{6}$ en dat het gegeven functievoorschrift alleen geldig is zolang $x \neq 3$.

3 a Ja, $f(0) = 0$, $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = 0$ en $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0$.

b Als $x < 0$ dan $g(x) = \frac{-x}{x} = -1$ met $x \neq 0$

Als $x > 0$ dan $g(x) = \frac{x}{x} = 1$ met $x \neq 0$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = -1 \text{ en } \lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1$$

Nee, $f(0)$ bestaat niet.

c Voer in: $Y1=\text{abs}(X)/X$

Als $x > 0$ is $g(x) = \frac{x}{x} = 1$.

Als $x < 0$ is $g(x) = \frac{-x}{x} = -1$.

d Nee, er zit een sprong in de grafiek.

4 a De limieten aan weerszijden van $x = -2$ bereken je door zowel getallen links als getallen rechts van -2 , maar wel steeds dichterbij -2 te bekijken en na te gaan wat er gebeurt. Doe dit op de GR-tabel, met een gepaste kleine stapgrootte. Op dezelfde manier bepaal je de limieten rondom $x = 0$.

Voor $x = -2$ geldt $\lim_{x \uparrow -2} f(x) = \lim_{x \downarrow -2} f(x) = 3$. Voor $x = 0$ geldt $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -\infty$

- b** Door af te spreken dat $f(-2) = 3$ en dat het gegeven functievoorschrift alleen geldt voor $x \neq -2$.
c We weten dat er een verticale asymptoot op $x = -2$ ligt en een perforatie op $x = 1$.

Daarbij heeft $f(x)$ een horizontale asymptoot:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+2)(x-4)}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-4}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{1} = \frac{1-0}{1} = 1.$$

$$D_f = \langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle -2, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$$

$$B_f = \langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 1, 3 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$$

- 5** Herleid $f(x)$:

$$\frac{(x^2-4)(x^2-9)}{x^2-2x} = \frac{(x+2)(x-2)(x^2-9)}{x(x-2)} = \frac{(x+2)(x^2-9)}{x}$$

Mits $x \neq 2$.

Voor de nulpunten geldt dus $(x+2)(x^2-9) = 0$, ofwel $x = -2$, $x = -3$ en $x = 3$.

Als je de tabel op de GR afleest voor $Y1 = ((X^2-4)(X^2-9))/(X^2-2X)$ zie je dat de limieten aan weerszijden van $x = 2$ een waarde van $y = -10$ naderen. Op $(2, -10)$ is dus een perforatie. Verder is er op $x = 0$ een asymptoot.

Als je de grafiek op het standaardscherm bekijkt, zie je ook een minimum. Dat kun je met de optie 'minimum' berekenen (afgerond) $f(-2,47) \approx -0,55$.

- 6 a** Uit beide limieten komt 0.

- b** Ja.

$$\mathbf{c} \quad \frac{x}{\sqrt{|x|}} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{voor } x > 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{voor } x < 0 \end{cases}$$

De vergelijking die je wilt oplossen, is dus: $\sqrt{x} \leq 3$.

Dit geeft $x \leq 9$. De oplossing van de ongelijkheid is dus $x \leq 9$, met $x \neq 0$.

$$\mathbf{7 a} \quad f(x) = \frac{|x|+1}{x} = \begin{cases} \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} & \text{voor } x > 0 \\ \frac{-x+1}{x} = -1 + \frac{1}{x} & \text{voor } x < 0 \end{cases}$$

- b** Ja, maar hij is niet zo goed zichtbaar omdat er bij $x = 0$ een verticale asymptoot optreedt.

$$\mathbf{c} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + \frac{1}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$$

- 8 a** Je hoeft nu alleen maar 0 in het juiste deel van het functievoorschrift in te vullen: $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = 0$ en

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -2.$$

- b** $\frac{2}{x-1}$ is ongedefinieerd voor $x = 1$.

Na inspectie van de limieten aan weerszijden van deze x -waarde zie je dat de verticale asymptoot $x = 1$ is.

De horizontale asymptoot vind je met: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x-1} = 0$.

- c** Op $x \leq 0$: $f(x) = 0$ als $x^2 + x = 0$, ofwel $x = 0$ of $x = -1$.

Er is een minimum van $-\frac{1}{4}$ voor $x = -\frac{1}{2}$, dus tot nu toe is $B_f = [-0,25; \rightarrow)$.

Op $x > 0$: er is een verticale asymptoot $x = 1$ en een horizontale asymptoot $x = 0$.

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{2}{x-1} = -2, \text{ dus is } B_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$$

Dus geldt $D_f = \langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$

$$B_f = \langle \leftarrow, -2 \rangle \cup [-0,25; \rightarrow)$$

- 9 a** $f(x)$ bestaat voor alle waarden van x behalve als $x^2 - 4 = 0$ ofwel als $x = -2 \vee x = 2$.

$$D_f = \langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle -2, 2 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$$

- b** $\lim_{x \uparrow -2} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \downarrow -2} f(x) = -\infty$, dus $x = -2$ is een verticale asymptoot.

$\lim_{x \uparrow 2} f(x) = 0$ en $\lim_{x \downarrow 2} f(x) = 0$, dus $x = 2$ is geen verticale asymptoot. Daar heeft de grafiek een perforatie.

- c** Eerst herleiden: $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Dus de horizontale asymptoot is $y = 1$.

- d** Voor $x < -2$ geldt $f(x) > 1$

$f(x)$ bestaat niet voor $x = 2$ (een perforatie).

Het punt $(2,0)$ is geen punt van de grafiek.

Voor $x > -2$ geldt $f(x) < 1$ behalve $f(x) = 0$.

$f(x) < 1$ splitsen in $f(x) < 0 \vee 0 < f(x) < 1$

$$B_f = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$$

- 10 a** Voor $x > 0$ geldt: $f(x) = \frac{2x+3x}{x} = 5$.

$$\text{Voor } x < 0 \text{ geldt: } f(x) = \frac{-2x+3x}{x} = 1.$$

$$f(x) = \frac{|2x|+3x}{x} = \begin{cases} 5 & \text{voor } x > 0 \\ 1 & \text{voor } x < 0 \end{cases}$$

- b** Als $x > 0$, dan levert $\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 5$ het punt $A(7,5)$ op.

$$\text{Als } x < 0, \text{ dan levert } \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 1 \text{ het punt } B(-1,1) \text{ op.}$$

De lengte van lijnstuk AB bereken je met de stelling van Pythagoras: $AB^2 = (7-(-1))^2 + (5-1)^2$.

$$\text{Je vindt } AB = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$$

- 11 a** De afzonderlijke delen van het functievoorschrift zijn op hun domein continu. Alleen voor $x = -2$ en $x = 2$ moet nader worden onderzocht of de aansluiting goed is.

Voor $x = 2$ geldt: $\lim_{x \uparrow 2} f(x) = 0,5$ en $\lim_{x \downarrow 2} f(x) = 0,5$. Dus daar is de aansluiting goed.

Voor $x = -2$ geldt: $\lim_{x \uparrow -2} f(x) = -0,5$ en $\lim_{x \downarrow -2} f(x) = -0,5$. Dus daar is de aansluiting ook goed.

- b** $f(x)$ bestaat voor alle waarden van x .

De functie heeft extreme waarden op $x = 2$ en $x = -2$:

$$f(2) = \frac{1}{2} \text{ en } f(-2) = -\frac{1}{2}.$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$B_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

- c** Voor x heeft $f(x) = 0,125$ geen oplossing. Voor $-2 \leq x \leq 2$: $\frac{1}{4}x = 0,125$, ofwel $x = 0,5$. Voor $x > 2$:

$$\frac{1}{x} = 0,125, \text{ ofwel } x = 8. \text{ Als je (een schets van) de grafiek bekijkt, zie je dat voor } f(x) > 0,125 \text{ geldt}$$

$$0,5 < x < 8$$

- 12** Omdat $f(1) = 2$ moet ook $1 + p + q = 2$ gelden.

Omdat $f(-1) = -2$ moet ook $1 - p + q = -2$ gelden.

Hieruit volgt: $p = 2$ en $q = -1$.

- 13** $2x^2 + 10x - 12$ kun je ontbinden als $2(x+6)(x-1)$.

De functie kun je schrijven als $f(x) = \frac{2(x+6)(x-1)}{x-a}$.

Nu kun je zien dat de grafiek van f een perforatie heeft als $a = 1$ of $a = -6$.

- 14 a** Voor kleinverbruik was het hoogst mogelijke bedrag $P = 20 + 0,13 \cdot 600 = 98$.

Voor grootverbruik was het laagst mogelijke bedrag $P = 40 + 0,08 \cdot 600 = 88$.

Er is dus een sprong; P is niet continu.

- b** $20 + 0,13x = 88$ geeft $x \approx 523,08$. Dus vanaf een verbruik van 523,08 was het grootverbruikerstarief gunstiger.

- 15 a** Oplossing:

$$\frac{(t')^2}{t^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{t'}{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- b** Er moet gelden: $1 - \frac{v^2}{c^2} > 0$. Omdat beide snelheden positief zijn en c constant, is het domein $[0, c)$.

- c** De snelheid v kan hoogstens gelijk zijn aan de lichtsnelheid c , dus je zoekt: $\lim_{v \uparrow c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \infty$.

- d** $f(0) = 1$ en dus $t' = t$. De waarnemers zien op hetzelfde moment het licht. Ze staan ook op dezelfde plek, immers als $v = 0$, dan blijft waarnemer B bij A staan.

- e** Er moet gelden dat $t' = 2t$.

Los op: $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2$

$$\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 4$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4}$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c \approx 0,866c$$

- 16 a** $f(x)$ is ongedefinieerd voor $x = \pm 1$. Om de limieten rondom $x = \pm 1$ te onderzoeken, herleid eerst $f(x)$ als volgt: $\frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 2} = \frac{(x+1)(x-3)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x-3}{2(x-1)}$. Zo is het makkelijk om te achterhalen dat:

$$\lim_{x \downarrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow -1} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \infty$$

Dus de enige verticale asymptoot zit op $x = 1$.

$$\mathbf{b} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$y = 0,5$$

- c** Zoals je al weet, bestaat $f(x)$ voor alle waarden van x , behalve $x = \pm 1$. Dus is $D_f = \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$.

$f(x)$ bestaat uit alle waarden van y , behalve die van de horizontale asymptoot (dus $y = 0,5$), en waar $x = -1$: $f(-1) = 1$. Zodoende is $B_f = \langle \leftarrow; 0,5 \rangle \cup \langle 0,5; 1 \rangle \cup \langle 1; \rightarrow \rangle$.

- d** Je kunt beter eerst het functievoorschrift vereenvoudigen (als je dat nog niet hebt gedaan) tot

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x^2-2} = \frac{(x+1)(x-3)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x-3}{2(x-1)} \text{ als } x \neq -1.$$

Wat je dan wilt doen, is $f(x) = -x$ oplossen:

$$\frac{x-3}{2(x-1)} = -x$$

$$-2(x-1) = x-3$$

$$-2x^2 + 2x = x - 3$$

$$-2x^2 + x + 3 = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} = 0$$

$$\left(x - 1\frac{1}{2}\right)(x + 1) = 0$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -1$$

Hiervan voldoet $x = -1$ niet vanwege de perforatie in de grafiek. Oplossing: $x < -1 \vee 1 < x \leq 1,5$.

- 17 a** Voor $x = 0$ bestaat $g(x) = \frac{|3x|}{x}$ niet.

$$\text{Voor } x > 0 \text{ geldt: } g(x) = \frac{3x}{x} = 3.$$

$$\text{Voor } x < 0 \text{ geldt: } g(x) = \frac{-3x}{x} = -3.$$

- b** $g(-1) = -3$ geeft $p + q = -3$

$$g(2) = 3 \text{ geeft } 4p + q = 3$$

$$\begin{cases} p + q = -3 \\ 4p + q = 3 \end{cases} \text{ oplossen geeft } p = 2 \text{ en } q = -5$$

3.5 Totaalbeeld

- 1 a** $(x+5)^2(x-10) = 0$ geeft $x = -5 \vee x = 10$.
Venster bijvoorbeeld: $[-20, 20] \times [-600, 200]$
- b** Maximum $f(-5) = 0$
Minimum $f(5) = -500$
- c** Oplossing:

$$(x+5)^2(x-10) = 16x - 160$$

$$(x+5)^2(x-10) = 16(x-10)$$

$$x-10 = 0 \vee (x+5)^2 = 16$$

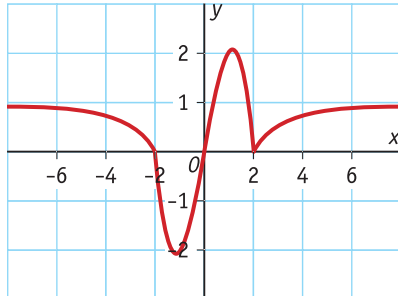
$$x = 10 \vee x = -9 \vee x = -1$$

 $f(10) = 0, f(-9) = -304$ en $f(-1) = -176$.
Dus de snijpunten zijn: $(-9, -304)$, $(-1, -176)$ en $(10, 0)$.
- d** $x < -9 \vee -1 < x < 10$
- 2 a** Verticale asymptoot: $x = -2$
Horizontale asymptoot: $y = -0,5$
 $D_f = \langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle -2, \rightarrow \rangle$
 $B_f = \langle \leftarrow; -0,5 \rangle \cup \langle -0,5; \rightarrow \rangle$
- b** Verticale asymptoot: $x = 1$
Horizontale asymptoot: $y = 3$
 $D_g = \langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$
 $B_g = \langle \leftarrow, 3 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$
- c** Geen verticale asymptoot.
Horizontale asymptoot: $y = 0$
 $D_h = \mathbb{R}$
 $B_h = [-1,85; 0,18]$
- 3 a** Nulpunt: $x = -5$
Verticale asymptoot: $x = -10$
- b** Minimum $f(5) = 0$
Maximum $f(-15) = -20$
- c** $f(x) = \frac{x^2+10x+25}{x+10} = \frac{x^2+10x}{x+10} + \frac{25}{x+10} = x + \frac{25}{x+10}$
Als $x \rightarrow \infty$ of $x \rightarrow -\infty$, dan gaat $\frac{25}{x+10}$ naar 0.
 $y = x$ is de scheve asymptoot.
- 4 a** Laat met behulp van tabellen zien dat $\lim_{x \uparrow -2} f(x) = \infty$ en dat $\lim_{x \downarrow -2} f(x) = -\infty$.
- b** $D_f = \langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle -2, 1 \rangle \cup \langle 1, \rightarrow \rangle$
- c** Het punt $(1, 0)$, want $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = 0$ en $\lim_{x \downarrow 1} f(x) = 0$ en $f(1)$ bestaat niet.
- d** De lijn $y = 1$, want $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.
- 5**
$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{voor } x < 0 \\ -x+2 & \text{voor } 0 \leq x \leq 2 \\ x-2 & \text{voor } x > 2 \end{cases}$$
- 6 a** $a + b = 2$ en $8a + 2b = 0$.
Dit geeft $a = -\frac{2}{3}$ en $b = 2\frac{2}{3}$.

- b** Het bereik van $\frac{x^2-4}{4}$ op het interval $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$ is $\langle 0, 1 \rangle$. Er is immers een horizontale asymptoot $y = 1$ en $f(0) = 0$.

Met de grafische rekenmachine vind je dat het bereik van $-\frac{2}{3}x^3 + 2\frac{2}{3}x$ op het interval $[-2, 2]$ is $[-2, 0,5; 2, 0,5]$.

Dus $B_f = [-2, 0,5; 2, 0,5]$.

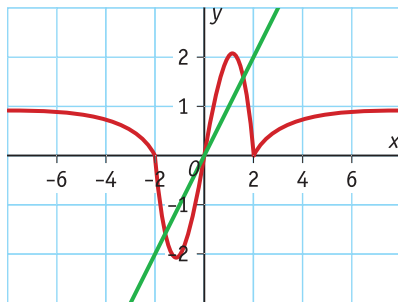


- c** Voor $x < -2$ geldt $f(x) > x$ en voor $x > 2$ geldt $f(x) < x$.

Voor het interval $[-2, 2]$ moet de ongelijkheid $-\frac{2}{3}x^3 + 2\frac{2}{3}x \leq x$ worden opgelost.

Met de grafische rekenmachine vind je dat $-\frac{2}{3}x^3 + 2\frac{2}{3}x = x$ geldt voor $x \approx -1,58$, $x = 0$ en $x \approx 1,58$.

In de grafiek zie je dat $-1,6 < x \leq 0$ of $x \geq 1,6$.



7 a $F = \frac{6,7}{r^2}$

- b** $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = 0$, dit betekent dat als beide massa's heel ver van elkaar zijn verwijderd hun onderlinge aantrekkingskracht ongeveer 0 wordt.
- c** $\lim_{r \downarrow 0} F(r) = \infty$, dit betekent dat als beide massa's heel dicht bij elkaar komen hun onderlinge aantrekkingskracht oneindig groot wordt.

- 8 a** Dan is $m = m_0$, dus de rustmassa is de massa van het deeltje als het niet beweegt.

- b** Met ongeveer 0,005%.

- c** Met ongeveer 0,5%.

- d** $0 \leq v < c$

- e** $\lim_{v \uparrow c} m(v) = \infty$ en dit betekent dat een deeltje nooit de lichtsnelheid kan bereiken.

$\lim_{v \uparrow c} m(v)$ heeft geen betekenis omdat $v > c$ de wortel uit een negatief getal oplevert en zo'n wortel heeft geen reële uitkomst.

9 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r+12}{2r+12} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{12}{r}}{2+\frac{12}{r}} = 0,5$.

Dus $\cos(\angle M_1 M_2 M_3) = 0,5$, zodat $\angle M_1 M_2 M_3 = 60^\circ$.

4

Exponentiële functies

- 4.1 Exponentiële groei 110
 - 4.2 Reële exponenten 114
 - 4.3 Exponenten en machten 118
 - 4.4 Exponentiële functies 121
 - 4.5 Meer exponentiële functies 124
 - 4.6 Totaalbeeld 133
-

4.1 Exponentiële groei

- V1 a** $2^{20} = 1048576$ lagen.
- b** De oppervlakte wordt al snel te klein om nog te kunnen vouwen en het wordt te dik.
- c** $0,15 \times 2^{20} = 157286,4$ mm dik, dat is meer dan 157 meter.
- d** $\frac{5}{1048576} \approx 4,8 \cdot 10^{-6}$ cm, dus ongeveer 0,00005 mm.
- 1 a** Het getal waarmee de hoeveelheid bacteriën elk uur wordt vermenigvuldigd.
- b** Per uur verdubbeld het aantal bacteriën. Het aantal bacteriën gaat dus van 100% naar 200%. Er komt dus 100% bij.
- c** Na 12 uur: $6 \cdot 2^{12} = 24576$ bacteriën.
- 2 a** $2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}$
- b** $\frac{5^9}{5^4} = 5^{9-4} = 5^5$
- c** $(6^3)^6 = 6^{3 \cdot 6} = 6^{18}$
- d** $5^0 \cdot 5^1 = 5^{0+1} = 5^1$
- 3 a** Ja, dat kan.
 $2^5 + 2^5 = 2 \cdot 2^5 = 2^6$
- b** $0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
- c** De uitkomst van 0^0 is niet te bepalen. Zowel de uitkomst 0 als de uitkomst 1 is te verdedigen. Dit spreekt elkaar dus tegen.
- 4 a** 1,06
- b** $800 \cdot 1,06^5 \approx 1070,58$ euro
- c** Hij begint met € 800,00 en heeft elk jaar een groeifactor van 1,06:
 $S(t) = 800 \cdot 1,06^t$
- d** $1,06^5 \approx 1,34$ is de groeifactor per vijf jaar.
Een groeifactor van 1,34 betekent een groei van 34%.
- e** Je vindt telkens ongeveer € 2565,71.
- $S(20) = 800 \cdot 1,06^{20} = 2565,71$
 - $1,06^4 = 1,2624$ dus $800 \cdot 1,2624^5 = 2565,71$
 - $1,06^5 = 1,3382$ dus $800 \cdot 1,3382^4 = 2565,71$
- 5** De groeifactor bij bank A per jaar is 1,03.
De groeifactor bij bank B per jaar is $1,0025^{12} \approx 1,0304$.
Bij bank B krijg je iets meer rente.
- 6 a** $\frac{941}{970} \approx 0,97$, $\frac{913}{941} \approx 0,97$, $\frac{885}{913} \approx 0,97$, $\frac{859}{885} \approx 0,97$ en $\frac{833}{859} \approx 0,97$
- b** In 2017 is het aantal jaarabonnements ongeveer gelijk aan 784000 (doorrekenen met groeifactor 0,97 vanaf het aantal abonnements in 2015): $A(t) = 784 \cdot 0,97^t$.
- c** In 2031 is $t = 14$, als je van $t = 0$ in 2017 uitgaat. $A(14) \approx 512$.
In 2032 is $t = 15$ als je van $t = 0$ in 2017 uitgaat. $A(15) \approx 496$.
Het aantal abonnees komt in 2022 voor het eerst onder de 500000.
- 7** Zie de tabel.

procentuele toename per jaar	13	-6	0,3	15	-2	295	-99
groeifactor per jaar	1,13	0,94	1,003	1,15	0,98	3,95	0,01

8 a $\frac{2^{214} \cdot 2^{80}}{(2^{12})^{24}} = \frac{2^{294}}{2^{288}} = 2^6$

$$\mathbf{b} \quad \frac{(4^3)^2 \cdot 64^4}{16^2} = \frac{4^6 \cdot (4^3)^4}{(4^2)^2} = \frac{4^6 \cdot 4^{12}}{4^4} = \frac{4^{18}}{4^4} = 4^{14}$$

$$\mathbf{c} \quad \frac{1296^2 \cdot 7776^3}{36} = \frac{(6^4)^2 \cdot (6^5)^3}{6^2} = \frac{6^8 \cdot 6^{15}}{6^2} = \frac{6^{23}}{6^2} = 6^{21}$$

$$\mathbf{d} \quad \frac{5^{112} \cdot 25^{224}}{125^{35} \cdot (5^{20})^3} = \frac{5^{112} \cdot (5^2)^{224}}{(5^3)^{35} \cdot 5^{60}} = \frac{5^{112} \cdot 5^{448}}{5^{105} \cdot 5^{60}} = \frac{5^{560}}{5^{165}} = 5^{395}$$

$$\mathbf{9 a} \quad 2^4 \cdot 2^3 = 2^7$$

$$\mathbf{b} \quad 2^4 \cdot (2^3)^4 = 2^4 \cdot 2^{12} = 2^{16}$$

$$\mathbf{c} \quad 2^3 + 7 \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^3 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6$$

$$\mathbf{d} \quad (2^3)^2 \cdot 2^4 + 2^3 \cdot 2^7 = 2^6 \cdot 2^4 + 2^3 \cdot 2^7 = 2^{10} + 2^{10} = 2 \cdot 2^{10} = 2^1 \cdot 2^{10} = 2^{11}$$

- 10 a** De oppervlakte wordt elk jaar drie keer zo groot, dus de groeifactor is 3.
Het startgetal is 2 km^2 :
 $R = 2 \cdot 3^t$

- b** Zie de tabel.

t	0	1	2	3	4	5
$R(t)$	2	6	18	54	162	486

- c** Er moet gelden $R(t) > 1000$.

$$R(5) = 486 \text{ (1 januari 2019) en } R(6) = 1458 \text{ (1 januari 2020).}$$

In het jaar 2019 is het hele meer voor het eerst helemaal begroeid met riet.

$$\mathbf{11 a} \quad \frac{3^{214}}{3^{211}} \cdot 81^{25} = 3^3 \cdot (3^4)^{25} = 3^3 \cdot 3^{100} = 3^{103}$$

$$\mathbf{b} \quad \frac{(49^8)^{10}}{7^{100} \cdot 343^{20}} = \frac{7^{160}}{7^{100} \cdot 7^{60}} = \frac{7^{160}}{7^{160}} = 7^0 = 1$$

$$\mathbf{c} \quad \frac{2^{631} \cdot 8^{112}}{2^{622} \cdot 4^{32}} = \frac{2^{631} \cdot (2^3)^{112}}{2^{622} \cdot (2^2)^{32}} = \frac{2^{631} \cdot 2^{336}}{2^{622} \cdot 2^{64}} = \frac{2^{967}}{2^{686}} = 2^{281}$$

$$\mathbf{d} \quad \frac{8^2 \cdot (64^3)^2}{32^4} = \frac{(2^3)^2 \cdot (2^6)^6}{(2^5)^4} = \frac{2^6 \cdot 2^{36}}{2^{20}} = 2^{22}$$

$$\mathbf{12 a} \quad N(t) = 5000 \cdot 0,96^t$$

$$\mathbf{b} \quad N(10) = 5000 \cdot 0,96^{10} \approx 3324$$

Er zijn dan 3324 herten in het natuurgebied.

$$\mathbf{c} \quad 0,96^{10} \approx 0,6648.$$

Dit betekent een groeipercentage van ongeveer -33,5%.

$$\mathbf{d} \quad N(16) \approx 2602; N(17) \approx 2498, \text{ dus op 1 januari 2031 zijn er 2498 herten en op 1 januari 2030 zijn er 2602 herten.}$$

In de loop van 2030 is het aantal herten gehalveerd.

$$\mathbf{13 a} \quad N_A = 350000 \cdot 1,035^t$$

- b** Stad B heeft op 1 januari 2012 416000 inwoners en er komen er elk jaar 8000 bij.
Dit is een lineair verband: $N_B = 416000 + 8000t$.

$$\mathbf{c} \quad \frac{N_B(2)}{N_A(2)} = \frac{432000}{350000 \cdot 1,035^2} \approx 1,15.$$

Stad B heeft op 1 januari 2014 15% meer inwoners.

d Zie de tabel.

t	9	10	11
N_A	477014	493710	510989
N_B	488000	496000	504000

In het jaar 2022 zal stad A meer inwoners krijgen dan stad B.

14 Bekijk de laatste vier cijfers van de eerste acht machten van 5.

$$5^1 = 0005$$

$$5^2 = 0025$$

$$5^3 = 0125$$

$$5^4 = 0625$$

$$5^5 = 3125$$

$$5^6 = 15625$$

$$5^7 = 78125$$

$$5^8 = 390625$$

Als je de laatste vier cijfers van een macht van 5 wilt weten, dan is het voldoende om de laatste vier cijfers van de vorige macht te weten en deze te vermenigvuldigen met 5 en dan te bekijken wat de laatste vier cijfers zijn.

Je ziet dat de laatste vier cijfers van 5^4 en 5^8 hetzelfde zijn en daarom zullen de laatste vier cijfers van de machten van 5 zich vanaf daar elke vier stappen herhalen.

De laatste vier cijfers van 5^{12} zijn hetzelfde als die van 5^8 , maar ook die van 5^{2000} en die van 5^{2012} .

De laatste vier cijfers van 5^{2013} zijn hetzelfde als die van 5^5 ($2013 = 5 + 2008 = 5 + 4 \cdot 502$), dus het antwoord is 3125.

15 a Verbruik per kilometer: $0,5 \cdot 1,1^2 = 0,605$.

Kosten benzine: $0,605 \cdot 100 \cdot 1,72 = 104,06$.

De rit duurt $\frac{100}{80} = 1,25$ uur, dus het arbeidsloon is $45 \cdot 1,25 = 56,25$.

De totale kosten zijn $104,06 + 56,25 = 160,31$ euro.

b Stel de snelheid is $60 + 10x$ km/h.

De brandstofkosten op het traject van 100 km zijn dan $0,5 \cdot 1,1^x \cdot 100 \cdot 1,72$.

Het arbeidsloon is $\frac{100}{60+10x} \cdot 45$.

De totale kosten zijn dus $TK = 86 \cdot 1,1^x + \frac{450}{6+x}$.

Met de grafische rekenmachine vind je dat er een minimum is bij $x \approx 1,05$.

Dus bij een snelheid van ongeveer 71 km/h zijn de totale vervoerskosten het laagst.

16 a $H(t) = 850 \cdot 1,032^t$

b $1,032^4 \approx 1,13$

c $1,032^{20} \approx 1,8776$, dit komt neer op een groeipercentage van ongeveer 88%.

d $H(22) \approx 1699,70$ en $H(23) \approx 1754,09$

Na 23 jaar is het bedrag voor het eerst hoger dan € 1700,00.

17 a 17^{33}

b 3^{85}

c 5^{29}

18 a Elk jaar een waardedaling van 12%. Je moet er niet aan denken.

Een procentuele afname van 12% komt neer op een groeifactor van 0,88. De beginwaarde is deze situatie is € 5000,00.

Dus dan krijg je de functie $W(t) = 5000 \cdot 0,88^t$.

- b** Maak een tabel en breng dit in een overzicht.

$t = 12$:

$$5000 \cdot 0,88^{12} \approx 1078,36$$

$t = 13$:

$$5000 \cdot 0,88^{13} \approx 948,95$$

Dus na 13 jaar.

- c** De groeifactor per jaar is 0,88. Per 5 jaar dus $0,88^5 \approx 0,528$.
Dit komt neer op $1 - 0,528 = 0,472$ Dus een afname van (ongeveer) 47,2%.
- d** Bij c heb je de groeifactor per 5 jaar berekend. Dus moet je ook vermenigvuldigen met 0,528.
 $5000 \cdot 0,528 \cdot 0,528 = 1393,92$
- e** De groeifactor per 10 jaar kun je vinden met $0,528^2 = 0,2787$.
 $1 - 0,2787 \approx 0,721$. Dus een afname van ongeveer 27,9%.

4.2 Reële exponenten

- V1 a** 11:00 is op $t = -1$ dus $B = 600 \cdot 2^{-1} = 300$.
- b** Vooruit in de tijd verdubbelt het aantal bacteriën zich elk uur. Terug in de tijd halveert het aantal bacteriën zich dus elk uur. Terug in de tijd is de groeifactor daarom $\frac{1}{2}$.
- c** Ja, door bijvoorbeeld de groeifactor per kwartier te gebruiken. Die is $2^{0,25} = \sqrt[4]{2} \approx 1,189$
- 1 a** Je wilt het aantal milligram bacteriën weten vier uur voor $t = 0$.
Je vult dus $t = -4$ in de formule in.
- b** $600 \cdot 2^{-4} = 37,5$ milligram
Vooruit in de tijd verdubbelt het aantal bacteriën zich elk uur. Terug in de tijd halveert het aantal bacteriën zich elk uur. Terug in de tijd is de groeifactor daarom $\frac{1}{2}$. Vier uur terug in de tijd geeft:
$$600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 37,5$$
- 2 a** Je wilt $2\frac{1}{2}$ uur na $t = 0$ weten. Je vult daarom $t = 2\frac{1}{2}$ in in de formule.
- b** Groeifactor per uur is 2 en $t = 2\frac{1}{2}$.
$$B\left(2\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot 2^{2\frac{1}{2}} \approx 3394.$$

Groeifactor per half uur is $2^{0,5} = \sqrt{2}$.
Na $2\frac{1}{2}$ uur geldt dus: $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \approx 3394$.
- 3 a** In drie uur verdubbelt het aantal bacteriën zich drie keer, dus $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.
- b** De groeifactor per t uren is 2^t . De groeifactor per half uur is dus $2^{0,5} = \sqrt{2} \approx 1,41$.
- c** De groeifactor per t uren is 2^t . De groeifactor per kwartier is dus $2^{0,25} \approx 1,19$.
- d** Na vijf uur: $600 \cdot 2^5 = 19200$.
Na 5,5 uur: $600 \cdot 2^{5,5} = 272152$.
Na 5,75 uur: $600 \cdot 2^{5,75} = 32290$.
- e** Aantal na vijf uur: $B(5) = 6 \cdot 2^5 = 192$
Groeifactor na 0,5 uur: $2^{0,5}$
Groeifactor na 0,25 uur: $2^{0,25}$
Dus: $192 \cdot 2^{0,5} \cdot 2^{0,25} = 323$.
- 4 a** In 1600: $1000 \cdot 1,102^{-10} \approx 379$ miljoen
In 2000: $1000 \cdot 1,102^{10} \approx 2641$ miljoen.
Er zijn verschillen, dat komt door het afronden.
- b** $1000 \cdot 1,005^{214} \approx 2908$ miljoen mensen.
- c** Voer in: $Y1=1629*1.005^X$
Maak een tabel, je vindt:
 $N(138) \approx 1990$
 $N(139) \approx 2000$
139 jaar later (in 2039) is het aantal mensen verdubbeld ten opzichte van het aantal in 1900.
- 5 a** Tussen 1 juli 2014 en 1 januari 2016 zit precies anderhalf jaar, dus $t = 1,5$:
 $7500 \cdot 1,042^{1,5} \approx 7977,43$ euro.
- b** Groeifactor per half jaar is $\sqrt{1,042} \approx 1,0208$:
$$7500 \cdot \left(\sqrt{1,042}\right)^3 \approx 7977,43$$
 euro
- c** Groeifactor per maand is $1,042^{\frac{1}{12}} \approx 1,0034$.

$$7500 \cdot \left(1,042^{\frac{1}{12}}\right)^{18} \approx 7977,43 \text{ euro}$$

- 6** De groeifactor heeft bij grote exponenten veel invloed op het antwoord. Vooral bij groeifactoren in de buurt van 1 kan een kleine afwijking van de groeifactor grote afwijkingen in het antwoord veroorzaken.

- 7 a** De halveringstijd is 5736 jaar. Dus er moet gelden $g^{5736} = 0,5$, zodat $g = 0,5^{\frac{1}{5736}} \approx 0,999879$. Per 100 jaar vind je dan $0,999879^{100} = 0,987972$.
De groeifactor per eeuw is afgerond op drie decimalen 0,988.

- b** $0,988^t = 0,28$
Los op met de GR: $t \approx 105,44$ eeuwen.
Het gebruiksvoorwerp is ongeveer 10544 jaar oud.

- 8 a** $A(10) = 25000 \cdot 1,1^{10} \approx 64844$ inwoners.

- b** $A\left(10^{\frac{7}{12}}\right) = 25000 \cdot 1,1^{10^{\frac{7}{12}}} = 25000 \cdot 1,1^{\frac{127}{12}} \approx 68551$ inwoners

- c** 1,1. Dit is gewoon de groeifactor uit de gegeven functie.

- d** $1,1^{\frac{1}{12}} \approx 1,008$ dus ongeveer 0,8% per maand.

- e** $A(-5) \approx 15523$, dus op 1 januari 2010 waren er 15523 inwoners.
 $A(-10) \approx 9639$, dus op 1 januari 2005 waren er 9639 inwoners.

- 9 a** 1 januari 2011: $7969,24 \cdot 1,06^{-1} \approx 7518,15$ euro
1 januari 2010: $7969,24 \cdot 1,06^{-2} \approx 7092,60$ euro
1 januari 2009: $7969,24 \cdot 1,06^{-3} \approx 6691,13$ euro

- b** $7969,24 \cdot 1,06^{-6} \approx 5618,00$
Dus in 2006.

X	Y1			
-10	4458			
-9	4717			
-8	5000			
-7	5300			
-6	5618			
-5	5955,1			
-4	6312,4			
-3	6691,1			
-2	7092,6			
-1	7518,2			
0	7969,2			

X = -10

- c** Hij heeft € 5000,00 ingelegd als $t = -8$ dus op 1 januari 2004.

- 10 a** $\frac{3000}{1200} = 2,5$

De groeifactor per drie uur is gelijk aan 2,5.

- b** $2,5^{\frac{1}{3}} \approx 1,357$
Het groeipercentage per uur is ongeveer 35,7%.

- c** Neem als beginwaarde nu 1200 bacteriën op $t = 0$ en als groeifactor per uur 1,357.
Je krijgt dan de functie $H(t) = 1200 \cdot 1,357^t$.

- d** Voer in: $Y1=1200*1.357^X$ en $Y2=600$.
Venster bijvoorbeeld: $[-5,5] \times [0,1200]$.

De optie intersect geeft $x \approx -2,27$.
Er waren om 7:44 uur 600 bacteriën aanwezig.

- 11 a** 1500 - 1750: groeifactor per jaar ongeveer 1,00115, dus groeipercentage ongeveer 0,12% per jaar.
1750 - 1800: groeifactor per jaar ongeveer 1,00814, dus groeipercentage ongeveer 0,81% per jaar.
1986 - 1997: groeifactor per jaar ongeveer 1,01735, dus groeipercentage ongeveer 1,74% per jaar.

- b** In vier periodes:
Periode 0-1500.
Periode 1500-1800.

Periode 1800-1950.

Periode 1950-1986.

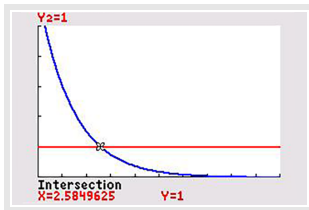
- c 0 - 1500: groeifactor per jaar $2^{\frac{1}{1500}} \approx 1,00046$, dus groeipercentage ongeveer 0,05% per jaar.
 1500 - 1800: groeifactor per jaar $2^{\frac{1}{300}} \approx 1,002313$, dus groeipercentage ongeveer 0,23% per jaar.
 1800 - 1950: groeifactor per jaar $2^{\frac{1}{150}} \approx 1,00463$, dus groeipercentage ongeveer 0,46% per jaar.
 1950 - 1986: groeifactor per jaar $2^{\frac{1}{36}} \approx 1,01944$, dus groeipercentage ongeveer 1,94% per jaar.

- 12** Noem de toegestane hoeveelheid A , na het ongeluk is de hoeveelheid $6A$.

Dan moet $\left(\frac{1}{2}\right)^t \cdot 6A = A$ en dit geeft $\left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{6}$.

Met de GR vind je $t \approx 2,58$, dus 2,58 perioden van acht dagen.

Dat is 20,68 dagen. Het hooi moet 21 dagen bewaard blijven.



- 13 a** De groeifactor per twee jaar is 0,81, dus de groeifactor per jaar is $0,81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,81} = 0,9$.
 Je beginhoeveelheid is 1000. Dus: $R = 1000 \cdot 0,90^t$.
b Los op $1000 \cdot 0,90^t = 800$.
 De GR geeft $t \approx 2,118$, dus ongeveer twee jaar en twee maanden.
c Los op $0,90^t = 0,5$.
 Met de GR vind je $t \approx 6,58$ jaar.
d Als 750 mg is omgezet, is er dus nog 250 mg over. De 1000 mg is dan dus twee keer gehalveerd. Dit kost twee keer de halveringstijd, dus $2 \cdot 6,58 = 13$ jaar.

- 14 a** De groeifactor per twee jaar is 0,5.

De groeifactor per jaar is $\sqrt{0,5} = 0,5^{\frac{1}{2}}$ en de groeifactor per drie jaar is $0,5^{1,5} \approx 0,354$.

Er is na drie jaar nog ongeveer 35,4% van de stof over.

- b** $(\sqrt{0,5})^t = 0,001$

Voer in: $Y1=(0.5^{(1/2)})^X$ en $Y2=0.001$

Venster: $[0,50] \times [0; 0,002]$

Met de optie intersect vind je $x \approx 19,93$.

Na ongeveer twintig jaar.

- 15 a** $A(t) = 10 \cdot 1,15^t$, met $A(t)$ in gram per liter.

- b** $A(-3) = 10 \cdot 1,15^{-3} \approx 6,6$ gram per liter.

- c** Twee dagen is $\frac{2}{7}$ deel van een week. Omdat je de concentratie twee dagen voor het begin van de week wil weten voer je voor t de waarde $-\frac{2}{7}$ in: $A\left(-\frac{2}{7}\right) = 10 \cdot 1,15^{-\frac{2}{7}} \approx 9,6$ gram per liter.

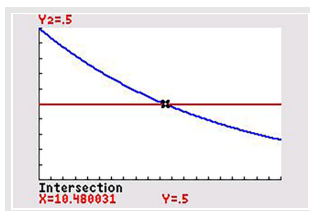
- d** Los de vergelijking $1,15^t = 2$ met de GR op. Je vindt $t \approx 5$. Dus na 35 dagen.

- 16 a** Per 5 jaar $g = \frac{4300}{6000} = 0,716$

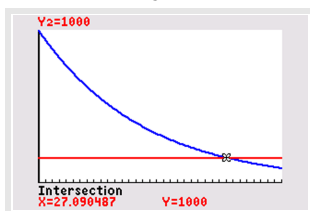
en per jaar $0,716^{\frac{1}{5}} = 0,936$

- b** Neem als beginwaarde 6000 en als groeifactor de bij vraag a gevonden groeifactor per jaar: $g = 0,936$. Je krijgt dan de formule $N(t) = 6000 \cdot 0,936^t$.

- c** Bereken bijvoorbeeld $N(0)$ en $N(1)$. Dus $N(0) = 6000$ en $N(1) = 5616$. Dus een afname van 6,4%.
Sneller: $1 - 0,936 = 0,064$ Dus ook aan afname van 6,4%.
- d** $0,936^t = 0,5$ oplossen met je GR geeft $t \approx 10,4$.



- e** Los op met je GR: $6000 \cdot 0,936^t = 1000$. Dit levert $t \approx 27,09$. Dus na 28 jaar.



4.3 Exponenten en machten

$$\mathbf{v1} \quad \frac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}} = \frac{19^{220 \cdot \frac{1}{4}}}{19^{54}} = \frac{19^{55}}{19^{54}} = 19^{55-54} = 19$$

$$\mathbf{1a} \quad \sqrt[n]{g} = g^{\frac{1}{n}}$$

$$\mathbf{b} \quad (g^a)^b = g^{ab}$$

$$\mathbf{c} \quad \frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$$

$$\mathbf{2a} \quad \frac{31^{25} \cdot \sqrt[3]{31^{30}}}{(31^{12})^3} = \frac{31^{25} \cdot (31^{30})^{\frac{1}{3}}}{31^{12 \cdot 3}} = \frac{31^{25+10}}{31^{36}} = \frac{1}{31}$$

$$\mathbf{b} \quad \frac{25^4 \cdot (5^5)^9}{\sqrt[4]{5^{40}} \cdot 125^{14}} = \frac{(5^2)^4 \cdot 5^{45}}{(5^{40})^{\frac{1}{4}} \cdot (5^3)^{14}} = \frac{5^8 \cdot 5^{45}}{5^{10} \cdot 5^{42}} = \frac{5^{53}}{5^{52}} = 5$$

$$\mathbf{3a} \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\mathbf{b} \quad 81^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3$$

$$\mathbf{c} \quad 8^{1\frac{2}{3}} = 8^{\frac{5}{3}} = 8 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 8 \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} = 32$$

$$\mathbf{d} \quad 2^{-3} \cdot 2^7 = 2^{-3+7} = 2^4 = 16$$

$$\mathbf{e} \quad (3 \cdot 12)^{\frac{1}{4}} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

$$\mathbf{f} \quad \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10} = 2^5 = 32$$

$$\mathbf{4a} \quad 2x^{2\frac{1}{3}} = 2x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 2x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$\mathbf{b} \quad \frac{3x^{-1}}{2x} = 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{3}{2x^2}$$

$$\mathbf{c} \quad 4x^{-\frac{3}{4}} = 4 \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\mathbf{d} \quad 2\sqrt{x}$$

$$\mathbf{5a} \quad \frac{3}{2x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} = 1,5x^{-1}$$

$$\mathbf{b} \quad \frac{3}{2x\sqrt{x}} = \frac{3}{2x^1\frac{1}{2}} = 1,5x^{-1\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{c} \quad (4\sqrt[3]{x})^2 = \left(4 \cdot x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4^2 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 16x^{\frac{2}{3}}$$

$$\mathbf{d} \quad 2x\sqrt{x} = 2x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2x^{1\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{e} \quad \frac{2}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} = 2 \cdot x^{-3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = 2x^{-3\frac{2}{3}}$$

$$\mathbf{f} \quad 3x^5 \cdot (2x^3)^2 = 3x^5 \cdot 2^2 \cdot x^6 = 12x^{11}$$

$$\mathbf{6} \quad 12 \cdot 3^{-0,5x+1} = 12 \cdot 3^{-0,5x} \cdot 3^1 = 12 \cdot 3 \cdot (3^{-0,5})^x = 36 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$$

$$b = 36 \text{ en } g = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7 a $(2^3)^2 = 2^6 = 64$

b $2^5 = 32$

c $2^2 = 4$

d $(10^3)^{\frac{1}{3}} = 10^1 = 10$

8 a $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

b Gebruik de standaardregel: $\sqrt[4]{x^3}$

c $3x^{-1,5} = 3 \cdot \frac{1}{x^{1,5}} = \frac{3}{x\sqrt{x}}$

d $\frac{1}{2}x^{-2,75} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{2,75}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{2 \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{4}}} = \frac{1}{2x^{2\frac{4}{4} \cdot \frac{3}{4}}}$

9 a $\frac{1}{x^{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{x^{2,5}} = x^{-2,5}$

b $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[4]{x}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{1}{4}}$

c $\frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2x^{1,5}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1\frac{1}{2}}$

d $(3x\sqrt{x})^3 = (3 \cdot x^{1,5})^3 = 3^3 \cdot x^{4\frac{1}{2}} = 27x^{4\frac{1}{2}}$

10 a $\frac{17^{105}}{17^{22}} \cdot 17^{-85} = 17^{83} \cdot 17^{-85} = 17^{-2} = \frac{1}{17^2} = \frac{1}{289}$

b $\left(\frac{1}{2}\right)^{219} \cdot 8^{72} = (2^{-1})^{219} \cdot (2^3)^{72} = 2^{-219} \cdot 2^{216} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

c $\left(\frac{3}{4}\right)^{231} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{230} \cdot 3^{233} = \frac{3^{231}}{4^{231}} \cdot \frac{4^{230}}{9^{230}} \cdot 3^{233} = \frac{4^{230}}{4^{231}} \cdot \frac{3^{231}}{3^{460}} \cdot 3^{233} = \frac{1}{4} \cdot 3^4 = 20\frac{1}{4}$

d $\frac{7^{102}}{(49^{10})^5} = \frac{7^{102}}{((7^2)^{10})^5} = \frac{7^{102}}{7^{100}} = 7^2 = 49$

e $\left(\frac{4}{9} \cdot \sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{9} \cdot \sqrt[3]{4^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{9} \cdot 4\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$

f $\frac{5^3 \cdot (3^5)^{15}}{25 \cdot \sqrt[3]{3^{225}}} = \frac{5^3 \cdot 3^{75}}{5^2 \cdot 3^{75}} = 5$

11 a $(2x^3)^4 \cdot -3x^5 = 2^4 \cdot x^{12} \cdot -3x^5 = -48x^{17}$

b $\frac{2x \cdot x^2}{x^4} = \frac{2x^3}{x^3} = 2x^{-1}$

c $\frac{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{9x^3 \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{3 \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}}}{3^2 \cdot x^3 \cdot x^{\frac{2}{3}}} = \frac{3 \cdot x^{\frac{7}{3}}}{3^2 \cdot x^{\frac{11}{3}}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

d $\frac{\left(2x^{1\frac{1}{2}}\right)^3}{x\sqrt{x}} = \frac{8 \cdot x^{4\frac{1}{2}}}{x^{1\frac{1}{2}}} = 8x^3$

e $\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{x} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{16}{12}} \cdot x^{\frac{3}{12}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{13}{12}}$

$$\mathbf{f} \quad \frac{12x^{1\frac{2}{5}}}{6x^{-\frac{3}{5}}} + 2x^2 = \frac{12x^{\frac{7}{5}}}{6x^{-\frac{3}{5}}} + 2x^2 = 2x^2 + 2x^2 = 4x^2$$

$$\mathbf{12 \ a} \quad f(x) = 3 \cdot 2^{0,5x} = 3 \cdot (2^{0,5})^x = 3 \cdot (\sqrt{2})^x$$

$$\mathbf{b} \quad f(x) = 0,5^{-x+2} = 0,5^{-1 \cdot x} \cdot 0,5^2 = (0,5^{-1})^x \cdot 0,25 = 0,25 \cdot 2^x$$

$$\mathbf{c} \quad f(x) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-2x} = 3^2 \cdot (3^{-1})^4 \cdot \left((3^{-1})^{-2}\right)^x = \frac{1}{9} \cdot 9^x$$

$$\mathbf{d} \quad f(x) = 7 \cdot 5^{2x+1} + 2 \cdot (\sqrt{5})^{4x} = 7 \cdot (5^2)^x \cdot 5 + 2 \cdot \left((\sqrt{5})^4\right)^x = 35 \cdot 25^x + 2 \cdot 25^x = 37 \cdot 25^x.$$

$$\mathbf{13 \ a} \quad \begin{aligned} 26 &= 2 \cdot 13 \\ 25 &= 5^2 \\ 144 &= 2^4 \cdot 3^2 \\ 127 &= 127 \\ 202 &= 2 \cdot 101 \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} \quad \bullet \quad \frac{(126)^2 \cdot (3773)}{\sqrt{81 \cdot 343 \cdot 693}} = \frac{(2 \cdot 3^2 \cdot 7)^2 \cdot 7^3 \cdot 11}{3^2 \cdot 7^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^5 \cdot 11}{3^4 \cdot 7^4 \cdot 11} = 28$$

$$\bullet \quad \frac{(5)^{-2} \cdot (19600)^{\frac{1}{2}}}{91} = \frac{(5)^{-2} \cdot (2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2)^{\frac{1}{2}}}{7 \cdot 13} = \frac{2^2 \cdot 5^{-1} \cdot 7}{7 \cdot 13} = \frac{4}{5 \cdot 13} = \frac{4}{65}$$

$$\bullet \quad \frac{(1080)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{5^{\frac{4}{3}}}}{(1296)^{\frac{1}{4}}} = \frac{(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{(2^4 \cdot 3^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 3} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 5$$

$$\mathbf{14 \ a} \quad 3^{-5} \cdot 9^2 = 3^{-5} \cdot (3^2)^2 = 3^{-5} \cdot 3^4 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{b} \quad 2^{-10} \cdot (2^3)^5 = 2^{-10} \cdot 2^{15} = 2^5 = 32$$

$$\mathbf{c} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = (2^{-1})^{-4} = 2^4 = 16$$

$$\mathbf{d} \quad 81^{-\frac{1}{4}} = (3^4)^{-\frac{1}{4}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{15 \ a} \quad \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\mathbf{b} \quad x \cdot \sqrt[10]{x^3}$$

$$\mathbf{16 \ a} \quad \frac{x^2 \cdot 3x^4}{10x^7} = \frac{3x^6}{10x^7} = 0,3x^6 \cdot x^{-7} = 0,3x^{-1}$$

$$\mathbf{b} \quad \frac{1}{4}x^{1,5}$$

$$\mathbf{c} \quad 1,5x^{-1\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{17} \quad f(x) = 12 \cdot (\sqrt{3})^{2x+1} = 12 \cdot \left(\sqrt{3}^2\right)^x \cdot \sqrt{3}^1 = 12\sqrt{3} \cdot 3^x$$

4.4 Exponentiële functies

- V1 a** f is positief voor alle x , dus de grafiek van f snijdt de x -as nergens.
 $f(0) = 6$, dus de grafiek van f snijdt de y -as in het punt $(0,6)$.
- b** Nee.
- c** Ja, de x -as, dus $y = 0$.
 $\lim_{t \rightarrow -\infty} 6 \cdot 2^t = 0$
- d** De grafiek van f snijdt de y -as in het punt $(0,b)$ en $y = 0$ is een horizontale asymptoot.
- 1 a** Nee, zelfs voor hele kleine waarden van x (zoals $x = -10000$) is $f(x) > 0$.
- b** $y = 0$
- c** Toenemende stijging.
- 2** Er geldt:
- als $g > 1$ is de grafiek voortdurend toenemend dalend;
 - als $g = 1$ is de grafiek constant;
 - als $0 < g < 1$ is de grafiek voortdurend afnemend stijgend;
 - er zijn geen nulpunten, de x -as is een horizontale asymptoot;
 - er zijn geen extremen.
- 3 a** Als er dagelijks 20% minder is, blijft er 80% over. Dus de groeifactor is 0,8
- b** Voer in: $Y1=40 \cdot 0.8^X$
 Venster bijvoorbeeld: $[0,50] \times [0,40]$
- c** Voer in: $Y2=1$
 De optie intersect geeft $x \approx 16,531$.
 Als $t > 16,53$, dan is de concentratie niet meer meetbaar.
- 4 a** De groeifactor van A is gelijk aan 1,025 en van B is deze 1,031. Groeifactor van B is dus groter dan die van A. Conclusie: de bevolking bij B groeit harder dan die van A.
- b** Voer in: $Y1=750000 \cdot 1.025^X$ en $Y2=620000 \cdot 1.031^X$
 Venster bijvoorbeeld: $[0,50] \times [0,2400000]$
- c** $B(8) \approx 791,518$, dus op 1 januari 2021 heeft stad C 791518 inwoners. Op 1 januari 2013 hadden ze $791518 \cdot 1,083^{-8} \approx 418247$ inwoners.
 Noem C het aantal inwoners in duizendtallen van stad C, dan is $C(t) = 418,247 \cdot 1,083^t$, met $t = 0$ op 1 januari 2013.
 Voer in: $Y1=750 \cdot 1.025^X$ en $Y2=418.247 \cdot 1.083^X$
 Venster bijvoorbeeld: $[0,20] \times [0,1500]$
 De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 10,6$.
 Dus in het jaar 2023 zijn de steden even groot.
- 5 a** Voer in: $Y1=2 \cdot 8^X$ en $Y2=40$
 Venster bijvoorbeeld: $[0,5] \times [0,50]$
 De optie intersect geeft $x = 1,440....$ In de grafiek zie je dat $x \leq 1,44$.
- b** Voer in: $Y1=1/3 \cdot 4^X$ en $Y2=124$
 Venster bijvoorbeeld: $[0,10] \times [0,150]$
 De optie intersect geeft $x = 4,269....$ In de grafiek zie je dat $x \geq 4,27$.
- c** Voer in: $Y1=55 \cdot (1/2)^X$ en $Y2=100$
 Venster bijvoorbeeld: $[-10,10] \times [0,150]$
 De optie intersect geeft $x = -0,862....$ In de grafiek zie je dat $x \geq -0,86$.
- 6** $f(x) = b \cdot g^t$
 $g^4 = \frac{350}{200} = 1,75$, dus $g = \sqrt[4]{1,75} \approx 1,15$.

$$b \cdot (\sqrt[4]{1,75})^{10} = 200 \text{ geeft } b \approx 49.$$

$$f(x) \approx 49 \cdot 1,15^x$$

- 7 a** Het startgetal is 1 en het groeipercentage is 5, dus het nieuwe percentage is $5 + 100 = 105$ en de groeifactor is $\frac{105}{100} = 1,05$. Dus: $S(t) = 1 \cdot 1,05^t = 4000$.

$S(t)$ en $y = 4000$ invullen in GR. Snijpunt bepalen: (170,4000).

De € 1,00 moet dus 170 jaar geleden op de rekening zijn gezet.

- b** Ja. Dan neem je het moment dat hij € 4000,00 op zijn rekening had staan als $t = 0$. $S(t) = 1$ bij $t \approx -170$, dus kies dan bijvoorbeeld $-175 \leq t \leq -165$.
- c** Nee, want $1,05^t$ kan geen 0 worden. De functiewaarden benaderen 0 echter wel als t hele kleine waarden aanneemt. Er is dus een horizontale asymptoot $S = 0$.

- 8 a** Voer in: $Y1=50 \cdot 1,5^X$ en $Y2=200$
Venster bijvoorbeeld: $[0,10] \times [0,300]$.

De optie intersect geeft $x = 3,419 \dots$. Aan de grafiek zie je dat $x \leq 3,41$.

- b** Voer in: $Y1=25 \cdot 1,8^X$ en $Y2=250 \cdot 0,75^X$
Venster bijvoorbeeld: $[0,10] \times [0,300]$.

De optie intersect geeft $x = 2,630 \dots$. Aan de grafiek zie je dat $x > 2,63$.

- 9 a** Groeifactor per vier maanden: $\frac{1630}{2000} = 0,815$, dus groeifactor per jaar: $0,815^3 \approx 0,541$.

Op 6 januari 2014 was de straling 2000 Bq, dus een jaar eerder was het $2000 \cdot 0,541^{-1} \approx 3695$ Bq.

- b** $2000 \cdot 0,541^{2,5} \approx 431$ Bq.
- c** Het startgetal is $b = 2000$ Bq. De groeifactor per jaar is $g = 0,541$. Dus:
 $S = b \cdot g^t = 2000 \cdot 0,541^t$ met $t = 0$ als 6 januari 2014.
- d** Bij 1000 Bq is de straling gehalveerd, dus groeifactor van 0,5. Dus: $0,541^t = 0,5$

$y = 0,541^t$ en $y = 0,5$ invullen in GR. Snijpunt bepalen: (1,13; 0,5).

Dus na 1,13 jaar is de straling gehalveerd, dus na 1 jaar en $0,13 \cdot 365 = 47,45$ dagen.

47 dagen na 6 januari is $47 + 6 - 31 = 22$ februari.

De straling was dus minder dan 1000 Bq vanaf 22 februari 2015.

- 10** Beide grafieken gaan door (0,10), dus $b = 10$.

Bij $x = 0$ heeft $f(x)$ de waarde 10 en bij $x = 1$ de waarde 20, dus $g = \frac{20}{10} = 2$. Dus:
 $f(x) = b \cdot g^x = 10 \cdot 2^x$.

Bij $x = -1$ heeft $g(x)$ de waarde 30 en bij $x = 0$ de waarde 10, dus $g = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Dus: $g(x) = b \cdot g^x = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

- 11** Bij lineaire groei geldt voor de beginhoeveelheid: € 650,00. Er komt jaarlijks € 50,00 bij, dus $H(t) = 650 + 50t$.

Bij exponentiële groei geldt voor beginhoeveelheid b : € 650,00. Er komt jaarlijks 5,5% bij, dus de groeifactor is $g = \frac{105,5}{100} = 1,055$, zodat $I(t) = b \cdot g^t = 650 \cdot 1,055^t$.

$H(t)$ en $I(t)$ invullen in GR. Snijpunt bepalen: (12,8; 1290). Het levert de huurder dus na dertien jaar voordeel op.

- 12 a** Voor beiden $y = 0$ (de x -as).

- b** Voer in: $Y1=12 \cdot 1,5^X$ en $Y2=25 \cdot (1/3)^X$
Venster bijvoorbeeld: $[-5,10] \times [-10,25]$

De optie intersect geeft $x = 0,4879 \dots$; in de grafiek zie je dat $x \leq 0,48$.

- c** $g(0) = 25$ en $f(3) = 40,5$;

$$AB = \sqrt{3^2 + (40,5 - 25)^2} = \sqrt{249,25} \approx 15,8.$$

- d** $f(0) = 12$, dit geeft $b = 12$;

$$g(2) = 2^{\frac{7}{9}};$$

$$a^2 = \left(2^{\frac{7}{9}}\right) / 12 = \frac{25}{108} \text{ geeft } a = \left(\frac{25}{108}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0,481.$$

Hieruit volgt dat $h(x) = 12 \cdot 0,481^x$.

- 13** De groeifactor per dag is 0,8.

Je moet de ongelijkheid $40 \cdot 0,8^t < 1$ oplossen.

Eerst los je met de grafische rekenmachine de vergelijking $40 \cdot 0,8^t = 1$ op. Je vindt $t \approx 16,53$. Hoe groter t hoe minder de concentratie wordt. Dus na ongeveer 16 dagen en 13 uur is de stof verdwenen.

- 14 a** Het aantal transistoren A is dan $A = 120000 + 117750t$ met 1982 als $t = 0$.

Los nu op: $120000 + 117750t = 3100000$.

$$3100000 - 120000 = 2980000 = 117750t$$

$$t = \frac{2980000}{117750} \approx 25,3$$

Het aantal van 3100000 transistoren wordt dus 25 jaar na 1982 bereikt, dus in het jaar 2007.

- b** 1971 - 2000 is een periode van 29 jaar. Groeifactor per 29 jaar = $\frac{42000000}{2250} \approx 18667$, dus groeifactor

$$\text{per jaar} = \left(\frac{42000000}{2250}\right)^{\frac{1}{29}} = 1,4037.$$

- c** 1971 - 2014 is een periode van 43 jaar.

$A = 2250 \cdot 1,404^{43} \approx 4886165278$ transistoren volgens Moore.

$\frac{4310000000}{4886165278} \cdot 100 \approx 88\%$, het werkelijke aantal wijkt dus 12% af van de voorspelling van Moore.

- d** $A = 2250 \cdot 1,404^t = 10^{10}$.

A en $y = 10^{10}$ invullen in GR. Snijpunt bepalen: $(45,1; 10^{10})$.

Dit is dus het geval 45 jaar na 1971, dus in het jaar 2016.

- 15 a** Als de groeifactor $g > 1$ dan is er altijd sprake van een toename. In dit geval is g gelijk aan 1,03 dus bij dit functievoorschrift is er een toename.

- b** Een toename van 200% betekent dus dat de hoeveelheid $200 + 400 = 600$ is. $H(t) = 600$ geeft $t \approx 37,167$, dus als $t > 37,167$.

- c** Los op met je GR: $200 \cdot 1,03^t < 0,01$. Je vindt dan $t < -335,043$.

- 16 a** De beginwaarde is 850 en de de huurverhoging is 5,5% per jaar. Dit komt neer op een groeifactor van 1,055. Samen leidt dit tot een het functievoorschrift $H(t) = 850 \cdot 1,055^t$.

- b** Los op met je GR: $850 \cdot 1,055^t > 1000$. Dit levert $t \approx 3,035$, dus na 4 jaar, vanaf 1 januari 2014.

- 17** Ga uit van de standaardfunctie $f(x) = b \cdot g^x$ en vul de coördinaten (2,80) en (8,200). Dit levert het stelsel $\begin{cases} 80 = b \cdot g^2 \\ 200 = b \cdot g^8 \end{cases}$ op. Dit stelsel heeft als oplossing $b = 59$ en $g = 1,165$. Dus dan heb je het functievoorschrift $f(x) = 59 \cdot 1,165^x$.

4.5 Meer exponentiële functies

V1 a $y_1 = -3 \cdot 0,5^x + 1$

Hier is dus $b = -3$, $g = 0,5$ en $d = 1$.

b $y_2 = -3 \cdot (0,5^2)^x = -3 \cdot 0,25^x - 4 = -3 \cdot 0,25^x - 4$

$y_2 = -3 \cdot 0,25^x - 4$

Hier is dus $b = -3$, $g = 0,5^2 = 0,25$ en $d = -4$.

1 a $f_1(x) = 3 \cdot 2^x + 1$. Door vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 3 en translatie van 1 ten opzichte van de x -as.

b $f_2(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$. Hij ontstaat uit de grafiek van $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ door vermenigvuldiging ten opzichte van de x -as met 3 en translatie van -1 ten opzichte van de x -as.

c $f_3(x) = -10 \cdot 1,5^x + 100$. Geschikte vensterinstellingen bijvoorbeeld $[-15, 15] \times [-175, 125]$.

2 a $f(x) = 6 \cdot 2^{-2x-1} - 12 = 6 \cdot (2^{-2})^x \cdot 2^{-1} - 12 = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 12$

b $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c De grafiek van f ontstaat uit die van $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ door een vermenigvuldiging in de y -richting met 3 en verschuiven met -12 in de y -richting.

d $x = -1$

e $3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 12 = 0$ geeft $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ en dus $x = -1$

3 a Met 0,5 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en dan translatie van -5 eenheden ten opzichte van de y -as.

b $h(x)$ zal nooit de waarde -5 kunnen halen. Controleer maar door de functie in te voeren in je GR en het in beeld te brengen. De horizontale asymptoot is $y = -5$.

c $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5$. Breng de functie in beeld met je GR.

Voor x mag je alle waarden invullen. Dus $D_h = \mathbb{R}$. Verder is er een horizontale asymptoot $y = -5$. Dit heeft natuurlijk gevolgen voor het bereik: $B_h = \langle -5, \rightarrow \rangle$.

d Voer in: $Y1 = 1/2 \cdot (1/3)^X$ en $Y2 = 0$

Venster bijvoorbeeld: $[-10, 0] \times [-5, 5]$

Gebruik de Intersect-functie om te vinden dat $x \geq -2,09$.

e De vergelijking is te schrijven als $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2100$.

Voer in: $Y1 = (1/3)^X$ en $Y2 = 2100$

Venster bijvoorbeeld: $[-10, 0] \times [0, 2500]$

Gebruik de optie intersect: $x \approx -6,963$.

f Gebruik je GR. Je vindt $x < -6,963$.

4 a Translatie van -1 ten opzichte van de y -as, dan met 2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en tenslotte translatie van -1 ten opzichte van de x -as.

b $f(x) = 2 \cdot 2^{x+1} - 1 = 2 \cdot 2^x \cdot 2^1 - 1 = 4 \cdot 2^x - 1$

c Met 4 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en dan translatie van -1 ten opzichte van de x -as.

d Aangezien er alleen veranderingen plaatsvinden ten opzichte van de x -as blijft de x -coördinaat ongewijzigd.

De y -coördinaat wordt eerst met 4 vermenigvuldigd en daarna met -1 verschoven. Je vindt dus $1 \cdot 4 - 1 = 3$.

Het nieuwe punt is dan $(0, 3)$.

e De waarde $y = -1$ wordt nooit gehaald en dus geldt $B_f = \langle -1, \rightarrow \rangle$.

Voor x mag je alle getallen invullen en dus $D_f = \mathbb{R}$.

- 5 a** Aan beide zijden $2\sqrt{2}$ optellen.

Beide zijden delen door 4 om de macht vrij te maken.

Beide zijden als macht van 2 schrijven in twee stappen.

Omdat de grondtallen gelijk zijn, de exponenten gelijk stellen.

Met de balansmethode de vergelijking verder oplossen.

- b** Oplossing:

$$4 \cdot 3^x + 6 = 330$$

$$4 \cdot 3^x = 324$$

$$3^x = 81$$

$$3^x = 3^4$$

$$x = 4$$

- c** Oplossing:

$$\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 27\sqrt{6}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 27\sqrt{3}$$

$$(3^{-1})^{x+1} = 3^{3\frac{1}{2}}$$

$$3^{-x-1} = 3^{3\frac{1}{2}}$$

$$-x-1 = 3\frac{1}{2}$$

$$-x = 4\frac{1}{2}$$

$$x = -4\frac{1}{2}$$

- 6** De vergelijking wordt: $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{4}$.

Voer in: $Y1 = (1/3)^X$ en $Y2 = 1/4$.

De grafieken snijden elkaar bij $x = 1,2618\dots$

De oplossing van de ongelijkheid (zie grafiek) wordt $x \leq 1,261$.

- 7 a** De groeifactor 0,998 is kleiner dan 1, dus als t groter wordt neemt K af.

- b** $K = 20$ is de horizontale asymptoot.

De temperatuur van de koffie nadert de omgevingstemperatuur van 20°C .

- c** Voer in: $Y1 = 60 \cdot (0.998)^X + 20$ en $Y2 = 70$

Venster bijvoorbeeld: $[1, 150] \times [50, 100]$

Met intersect vind je $x \approx 91,07$, dus na ongeveer 91 seconden is de temperatuur 70°C .

- 8 a** Voer in: $Y = 21 + 60 \cdot 0.83^X$ en $Y2 = 50$

Venster bijvoorbeeld: $[0, 20] \times [0, 100]$

$x \approx 3,902$, dus na ongeveer 3 uur en 54 minuten.

Dus de koffie is tot 11:54 te drinken.

- b** Als $t = 0$, dan geldt $T = 21 + 60 = 81$.

- c** Met 60 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en daarna een translatie van 21 ten opzichte van de x -as.

- d** Voer in: $Y = 21 + 60 \cdot 0.83^X$ en $Y2 = 22$

Venster bijvoorbeeld: $[0, 40] \times [0, 100]$

$x \approx 21,97$, dus ongeveer 22 uur. Dat is tot de volgende dag 's morgens 6:00 uur.

- e** Vul bijvoorbeeld voor t heel grote getallen in, T nadert dan 21. De asymptoot is dus $y = 21$.
- f** De temperatuur in de woonkamer is $21\text{ }^{\circ}\text{C}$; de constante 21 die steeds meer wordt benaderd is de omgevingstemperatuur.

9 a Voer in op de grafische rekenmachine: $Y1=5^X$ en $Y2=10$ en gebruik intersect: $x \approx 1,43$.

b Voer in op de grafische rekenmachine: $Y1=5^X$ en $Y2=10$ en gebruik intersect: $x \approx 1,43$. Lees vervolgens af waar de grafiek van $Y1$ onder de grafiek van $Y2$ ligt: $x \leq 1,43$.

c $3 \cdot 5^x + 5 = 10$ geeft $5^x = \frac{5}{3}$.

Voer in op de grafische rekenmachine: $Y1=5^x$ en $Y2=5/3$. Gebruik intersect om het snijpunt te vinden: $x \approx 0,32$

d Voer in op de grafische rekenmachine: $Y1=5^x$ en $Y2=5/3$. Gebruik intersect om het snijpunt te vinden: $x \approx 0,32$

Lees nu af waar de grafiek van $Y1$ boven de grafiek van $Y2$ ligt: $x > 0,32$.

10 a $2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

b $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$

$$8^{x+2} = (2^3)^{x+2} = 2^{3(x+2)}$$

$$2^{2x} = 2^{3(x+2)}$$

$$2x = 3x + 6$$

$$x = -6$$

c $9^{2x} = (3^2)^{2x} = 3^{4x}$

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{4x} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$4x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{8}$$

d $32 = 2^5$

$$2^{2x-1} = 2^5$$

$$2x - 1 = 5$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

e $4\sqrt{2} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2\frac{1}{2}}$

$$2^{\frac{1}{2}x+1} = 2^{2\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}x + 1 = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{2}$$

$$x = 3$$

11 a Dat gaat zo:

$$2 \cdot 10^x = 2000$$

$$10^x = 1000$$

$$x = 3$$

b Dat gaat zo:

$$3 \cdot 2^x - 2 = 46$$

$$3 \cdot 2^x = 48$$

$$2^x = 16$$

$$x = 4$$

c Dat gaat zo:

$$6(5^x + 5) = 180$$

$$5^x + 5 = 30$$

$$5^x = 25$$

$$x = 2$$

d $162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > 2$

Eerst vergelijking oplossen:

$$162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{2}{162} = \frac{1}{81}$$

$$x = 4$$

Plotten in je GR en aflezen geeft $x < 4$.

e Eerst vergelijking oplossen:

$$7 + 16 \cdot 1,5^x = 43$$

$$16 \cdot 1,5^x = 36$$

$$1,5^x = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$x = 2$$

Grafiek plotten en aflezen geeft $x \leq 2$.

f Eerst de vergelijking oplossen:

$$10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 160$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$$

$$x = -4$$

Grafiek plotten en aflezen geeft $x \leq -4$.

12 a $f(x) = 2^{x-2} - 3 = 2^x \cdot 2^{-2} - 3 = \frac{1}{4} \cdot 2^x - 3$:

$a(x) = 2^x$ met $\frac{1}{4}$ vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as en translatie van -3 ten opzichte van de x-as

$$g(x) = 4 \cdot 0,5^{x-3} - 1 = 4 \cdot 0,5^x \cdot 0,5^{-3} - 1 = 32 \cdot 0,5^x - 1$$

$b(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ met 32 vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as en translatie van -1 ten opzichte van de x-as

b Oplossing:

$$f(x) = -2\frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 2^x - 3 = -2\frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 2^x = \frac{1}{8}$$

$$2^x = \frac{1}{2}$$

$$x = -1$$

c Voer in: $Y1=4(1/2)^{(X-3)}-1$ en $Y2=1.5$

Gebruik de optie intersect: $x \approx 3,68$.

Aflezen uit de grafiek geeft $x \leq 3,67$.

d $g(4) = 32 \cdot 0,5^4 - 1 = 32 \cdot \left(\frac{1}{16}\right) - 1 = 1$

Plot de grafiek van g en lees af: als $x \leq 4$, dan $g(x) \geq 1$.

e Bekijk de grafieken op de grafische rekenmachine en lees af welke waarde de grafiek van f wel kan hebben en welke waarden de grafiek van g niet kan hebben.

Je vindt $-3 < p \leq -1$.

f Bereken de twee bijbehorende y -waarden om het verschil hiertussen uit te rekenen. Het verschil is de gevraagde lengte.

Je vindt $A = \left(-1, -2\frac{7}{8}\right)$ en $B = (-1, 63)$.

Dus AB is $63 - -2\frac{7}{8} = 65\frac{7}{8}$ lang.

g Los op $f(x) = 5$ en $g(x) = 5$.

$\frac{1}{4} \cdot 2^x - 3 = 5$ geeft $2^x = 32$ en dus $x = 5$.

$32 \cdot 0,5^x - 1 = 5$ los je op met de GR. Je vindt $x \approx 2,4150$.

Dus $C = (5, 5)$ en $D \approx (2,4150; 5)$. Dus is $CD \approx 5 - 2,4150 = 2,585$.

13 a Dat gaat zo:

$$4 \cdot 0,5^x - 1 = 0$$

$$4 \cdot 0,5^x = 1$$

$$0,5^x = 0,25$$

$$x = 2$$

Grafieken plotten en aflezen geeft $x > 2$.

b Dat gaat zo:

$$2 \cdot 2^{-x+1} - 1 = 0$$

$$2 \cdot 2^{-x+1} = 1$$

$$2^{-x+1} = \frac{1}{2}$$

$$2^{-x+1} = < \text{not enough right fences} : 1 >$$

$$-x + 1 = -1$$

$$-x = -2$$

$$x = 2$$

Grafieken plotten en aflezen geeft $x < 2$

c Dat gaat zo:

$$6 \cdot 0,25^x - 4 = 0,75$$

$$6 \cdot 0,25^x = 4,75$$

$$0,25^x = \frac{4,75}{6}$$

Los deze vergelijking op met de GR. Je vindt $x \approx 0,169$.

Aflezen uit de grafiek geeft $x < 0,17$.

d Dat gaat zo:

$$3 \cdot 0,5^{2x-1} - 4 = -3,25$$

$$3 \cdot 0,5^{2x-1} = 0,75$$

$$0,5^{2x-1} = 0,25$$

$$0,5^{2x-1} = 0,5^2$$

$$2x - 1 = 2$$

$$2x = 3$$

$$x = 1,5$$

Plotten en aflezen uit de grafiek geeft $x > 1,5$.

e Dat gaat zo:

$$3,5^{x+50} - 0,5 = 3$$

$$3,5^{x+50} = 3,5$$

$$3,5^{x+50} = 3,5^1$$

$$x + 50 = 1$$

$$x = -49$$

Plotten en aflezen uit de grafiek geeft $x > -49$.

f Dat gaat zo:

$$-2^x + 1 = -7$$

$$-2^x = -8$$

$$2^x = 8$$

$$x = 3$$

Plotten en aflezen uit de grafiek geeft $x \leq 3$

14 a $540 \cdot 0,95^t$ is dalend, dus $540 - 540 \cdot 0,95^t$ is stijgend.

b $y = 540$

c 75% van 540 is 405.

Los de vergelijking $405 = 540 - 540 \cdot 0,95^t$ met de GR op. Je vindt $t \approx 27,03$.

Dus na ongeveer 27 minuten.

15 a Dat gaat zo:

$$2 \cdot 4^{x-1} + 4^x = 96$$

$$2 \cdot 4^{-1} \cdot 4^x + 4^x = 96$$

$$0,5 \cdot 4^x + 4^x = 96$$

$$1,5 \cdot 4^x = 96$$

$$4^x = 64 = 4^3$$

$$x = 3$$

b Dat gaat zo:

$$25^{3x-6} = (5^2)^{3x-6} = 5^{2(3x-6)}$$

$$x - 4 = 2(3x - 6)$$

$$x - 4 = 6x - 12$$

$$-5x = -8$$

$$5x = 8$$

$$x = \frac{8}{5} = 1,6$$

c Dat gaat zo:

$$(\sqrt{2})^{x^2} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{x^2} = 2^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$4^{x-1} = (2^2)^{x-1} = 2^{2(x-1)}$$

$$2^{\frac{1}{2}x^2} = 2^{2(x-1)}$$

$$\frac{1}{2}x^2 = 2(x-1)$$

$$\frac{1}{2}x^2 = 2x - 2$$

$$x^2 = 4x - 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

d $9^{\frac{1}{2}x-1} = (3^2)^{\frac{1}{2}x-1} = 3^{2(\frac{1}{2}x-1)} = 3^{x-2}$

$$3^{x+2} - 3^{x-2} = 2\frac{26}{27}$$

$$3^x \cdot 3^2 - 3^x \cdot 3^{-2} = 2\frac{26}{27}$$

$$3^x \cdot 9 - 3^x \cdot \frac{1}{9} = 2\frac{26}{27}$$

$$3^x \cdot 8\frac{8}{9} = 2\frac{26}{27}$$

$$3^x = 2\frac{26}{27} / 8\frac{8}{9} = \frac{1}{3}$$

$$x = -1$$

16 a Los eerst de vergelijking op:

$$-4^{2(x+1)} - 2 = 2^{4x+4} - 10$$

$$-(2^2)^{2(x+1)} - 2 = 2^{4x+4} - 10$$

$$-2^{2(2(x+1))} - 2 = 2^{4x+4} - 10$$

$$-2^{4x+4} - 2 = 2^{4x+4} - 10$$

$$2 \cdot 2^{4x+4} = 8$$

$$2^1 \cdot 2^{4x+4} = 8$$

$$2^{4x+5} = 2^3$$

$$4x + 5 = 3$$

$$4x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Plotten en aflezen van de grafiek geeft $x \geq -\frac{1}{2}$

b Dat gaat zo:

$$\frac{4}{9 \cdot 2^x} = 324 \cdot 27^{\frac{1}{3}x^2}$$

$$324 \cdot 27^{\frac{1}{3}x^2} \cdot 9 \cdot 2^x = 4$$

$$(4 \cdot 3^4) \cdot (3^3)^{\frac{1}{3}x^2} \cdot (3^2)^{-2x} = 4$$

$$4 \cdot 3^4 \cdot 3^{x^2} \cdot 3^{-4x} = 4$$

$$3^4 \cdot 3^{x^2} \cdot 3^{-4x} = 1 = 3^0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

c Dat gaat zo:

$$\frac{60}{12} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 5 \geq 5^{-x} + 25$$

$$5 \cdot (5^{-1})^x + 5 = 5^{-x} + 25$$

$$5 \cdot 5^{-x} + 5 = 5^{-x} + 25$$

$$5 \cdot 5^{-x} - 5^{-x} = 25 - 5$$

$$4 \cdot 5^{-x} = 20$$

$$5^{-x} = 5$$

$$x = -1$$

Plotten en aflezen uit de grafiek geeft $x \leq -1$

17 a $f(x) = y = 2^x$

$y = 3 \cdot 2^x$ ontstaat door met 3 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as.

$y = 3 \cdot 2^x - 7 = g(x)$ ontstaat daarna uit translatie van -7 ten opzichte van de x -as.

b Hoe klein x is ook is, de term $3 \cdot 2^x$ zal altijd iets boven de 0 blijven. De uitdrukking $3 \cdot 2^x - 7$ zal daarom nooit de waarde -7 halen en dus is de gevraagde horizontale asymptoot $y = -7$.

Het bereik is daarom $B_g = \langle -7, \rightarrow \rangle$. Voor de x mag je alle getallen invullen, dus $D_g = \mathbb{R}$.

c Los de vergelijking $3 \cdot 2^x - 7 = 100$ met de GR op. Je vindt $x \approx 5,157$.

Aan de grafiek van g zie je dat moet gelden $x \geq 5,16$.

18 a $f(x) = -1,5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 5 = -1,5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5 = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$

De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ door met -3 te vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en daarna de translatie van 5 ten opzichte van de x -as.

b Grondtal is $\frac{1}{2}$ geeft een dalende grafiek. Vervolgens met -3 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as, dus een stijgende grafiek.

c f heeft een stijgende grafiek.

Hoe groot x ook is, de term $-3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ zal altijd negatief zijn, hoe klein ook. Daarom zal de grafiek de y -waarde 5 nooit bereiken en is de lijn $y = 5$ de horizontale asymptoot. Het bereik is dan $B_g = \langle \leftarrow, 5 \rangle$.

d Bepaal met je GR het snijpunt van de grafiek van f met de x -as. Je vindt $(-0,74; 0)$.

e Omdat de grafiek van f stijgt, is de oplossing $x \leq -0,74$.

19 a $x < 2$

b $x < 1,5$

20 a Houd er rekening mee dat beide functies een asymptoot hebben. Voor $f(x)$ is deze asymptoot de lijn $y = -2$ en voor $g(x)$ is dit de lijn $y = 2$.

Hieruit volgt het gevraagde bereik: $B_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$ en $B_g = \langle 2, \rightarrow \rangle$.

- b** Los eerst de vergelijking op:

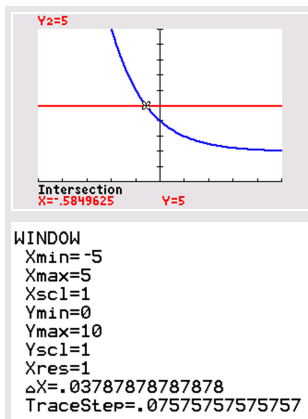
$$g(x) = 5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2 = 5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 3$$

Los deze vergelijking op met de GR. Je vindt $x \approx -0,585$.

Aflezen van de grafiek geeft $x \geq -0,58$.



- c** Probeer met je GR enkele waarden voor p uit. Voor y -waarden lager of gelijk aan -2 ($y = -2$ is de horizontale asymptoot) zijn er geen oplossingen.

- d** Bereken de y -waarden bij $x = -3$ voor zowel $f(x)$ als $g(x)$

$A = \left(-3, -1\frac{7}{8}\right)$ en $B = (-3, 18)$. De lengte die je zoekt is het verschil tussen beide y -waarden. AB heeft een lengte van $18 - -1\frac{7}{8} = 19\frac{7}{8}$.

- e** Los op: $f(x) = 7$ en $g(x) = 7$.

$$2^x - 2 = 7$$

$$2^x = 9$$

Los deze vergelijking op met de GR. Je vindt $x \approx 3,170$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2 = 7$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 5$$

Los deze vergelijking op met de GR. Je vindt $x \approx -1,322$.

$C \approx (3,170; 7)$ en $D \approx (-1,322; 7)$, dus CD heeft een lengte van ongeveer 4,49.

4.6 Totaalbeeld

1 a Oplossing:

$$\begin{aligned} -35 + 5 \cdot 3^{x-5} &= 100 \\ 5 \cdot 3^{x-5} &= 135 \\ 3^{x-5} &= 27 = 3^3 \\ x - 5 &= 3 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

b Los de vergelijking $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 75$ met de GR op. Je vindt $x \approx -6,229$.

Aan de grafieken van $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 50$ en $y_2 = 25$ zie je dat moet gelden $x \geq -6,22$.

c Los de vergelijking $500 \cdot 1,5^x = 300 \cdot 2^x$ met de GR op. Je vindt $x \approx 1,776$.

Aan de grafieken van $y_1 = 500 \cdot 1,5^x$ en $y_2 = 300 \cdot 2^x$ zie je dat moet gelden $x < 1,78$.

d Oplossing:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} &= 4^{-x-2} \cdot 2^4 \\ (2^{-1})^{x-4} &= (2^2)^{-x-2} \cdot 2^4 \\ 2^{-x+4} &= 2^{2(-x-2)} \cdot 2^4 \\ 2^{-x+4} &= 2^{-2x-4+4} = 2^{-2x} \\ -x + 4 &= -2x \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Plotten en aflezen uit de grafiek geeft $x \leq -4$

2 a $g = 1,02$

b $p(t) = 43000 \cdot 1,02^t$

c Los de vergelijking $1,02^t = 2$ met de GR op. Je vindt $t \approx 35,003$, dus 35 jaar.

d $p(-3) = 43000 \cdot 1,02^{-3} \approx 40519,86$ dus 40520 passagiers

e $1,02^{10} \approx 1,2190$

f $1,02^{\frac{1}{4}} \approx 1,00496$

3 a Factor 0,802

b $100 \cdot 0,802^2,5 \approx 57,6$

Er wordt ongeveer 57,6% doorgelaten, dus ongeveer 42,4% wordt geabsorbeerd.

c Los op $100 \cdot 0,802^d = 10$, dit geeft $0,802^d = 0,1$.

Los deze vergelijking op met de GR. Je vindt $d \approx 10,44$.

Dus de laag moet ongeveer 10,44 cm dik zijn.

d De groeifactor per mm is $0,802^{0,1} \approx 0,978$.

4 a Voer in: $Y1=19-13 \cdot 0,78^X$ en $Y2=6+13 \cdot 0,78^X$

Venster bijvoorbeeld: $[0,25] \times [0,20]$

b Als $t = 0$ dan $T_1 = 6$ en $T_2 = 19$. Dus T_1 hoort bij de melk en T_2 hoort bij de cola.

c $\lim_{t \rightarrow \infty} T_1 = 6$, dus $T = 6$ is de horizontale asymptoot.

d $\lim_{t \rightarrow \infty} T_2 = 19$, dus $T = 19$ is de asymptoot.

e Cola had kamertemperatuur, dus kamertemperatuur is 19°C . Voor hetzelfde geld kan je zeggen dat de fles melk op kamertemperatuur komt, en dat is de asymptoot van T_2 (ofwel $T = 19$).

f Met GR snijpunt bepalen geeft $t \approx 2,79$, dus na ongeveer 2 minuten en 49 seconden.

5 a $f(x) = -128 \cdot 4^{2x-3} + 12 = -128 \cdot (4^2)^x \cdot 4^{-3} + 12 = -2 \cdot 16^x + 12$

- b** De standaardfunctie $y = 16^x$.

Eerst met -2 vermenigvuldigen ten opzichte van de x -as en daarna translatie van 12 ten opzichte van de x -as.

- c** f is gedefinieerd voor alle waarden van x , dus $D_f = \mathbb{R}$.

Gezien $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 12$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, is $y = 12$ de horizontale asymptoot, en $B_f = \langle \leftarrow, 12 \rangle$.

- d** $f(-1) = 11\frac{7}{8}$, dus de grafiek gaat door de punten $A(-1; 11\frac{7}{8})$ en $B(2,5)$.

$$g^3 = \frac{5}{11\frac{7}{8}}, \text{ dus } g = \left(\frac{8}{19}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0,750.$$

$$h(2) = b \cdot 0,750^2 = 5 \text{ geeft } b \approx 8,9.$$

$$\text{Dus } h(x) = 8,9 \cdot 0,750^x$$

- 6 a** $R = 1000 \cdot 0,90^t$

- b** Los op $1000 \cdot 0,90^t = 800$, dus $0,90^t = 0,8$. De GR geeft $t \approx 2,118$, dus 2 jaar en 1 maand.

- c** Los op $0,90^t = 0,5$. De GR geeft $t \approx 6,58$ jaar.

- d** 750 ligt midden tussen 500 en 1000, schatting 2,8 jaar.

- 7 a** 1,021

- b** 1971: 3,68 mld; 1988: 5,23 mld; 1900: 0,84 mld; 0: $5,96 \cdot 10^{-9}$ mld, hetgeen nogal ongeloofwaardig is. De aanname, dat de groeifactor constant is, is dus onjuist.

- c** $B = 3,6 \cdot 1,021^t$ mld.

- d** $B(80) \approx 18,98$ mld. Dus de 9 mld volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 zit daar ver onder.

- e** Uit het voorgaande resultaat volgt dat de groei van de wereldbevolking zal afremmen. En dat moet ook wel want onze planeet heeft te weinig grondstoffen om een exponentieel groeiend aantal mensen op den duur van voedsel en woonruimte te voorzien.

- 8 a** Het aantal volwassen vissen in een bepaald jaar bereken je zo:

$$200.000 + \frac{2}{3} \cdot \text{aantal volwassen vissen van het voorgaande jaar} + 0,10 \cdot 5.000.000$$

- b** Doen, gebruik je GR.

- c** Begin met $N(t) = 2100000 - b \cdot g^t$. Uit $N(0) = 200000$ volgt $b = 1900000$. Gebruik bijvoorbeeld $N(5)$ om g te berekenen.

- d** De groei wordt op den duur steeds langzamer.

- 9 a** Elke nacht wordt 3% van het water ververst, 97% niet, dus er blijft $0,97 \cdot 500 = 485$ g ureum over. De tweede dag komt er weer 500 g ureum bij, samen 985 g. Aan het begin van de derde dag is daar nog 97% van over: $0,97 \cdot 985 = 955,45$ g.

- b** Begin dag 3: 955,45 g en eind dag 3: 1455,45 g. Begin dag 4: 1411,79 g en eind dag 3: 1911,79 g. Begin dag 5: 1854,43 g en eind dag 3: 2354,43 g. Dus in de loop van de vijfde dag.

- c** Nu wordt 20% van het totaal ververst. Er blijft dus 80% van $U + 500$ over, dat is $0,8(U + 500) = 0,8U + 400$

- d** $500 \cdot 0,8^n > 0$ voor elke n , dus $2000 - 500 \cdot 0,8^n < 2000$ voor elke n .

- e** Eigen antwoord.

- 10 a** $1,035^t = 2$ oplossen met de GR geeft $t \approx 20,15$. Na 21 jaar is het bedrag verdubbeld.

- b** $G = 10000 \cdot 1,035^{10} \approx 14105,99$. Dit betekent een rente van $\frac{4105,99}{10} \approx 410,60$ per jaar en dat is ongeveer 4,1%.

- c** $\frac{2615-2130}{10000} = 0,0485$, dus 4,85%.

- d** $10000 \cdot g^{10} = 14475$ en dus is $g = 1,4475^{\frac{1}{10}} \approx 1,0377$. De groeirekening moet een rentepercentage hebben van 3,77%.