

Wiskunde A

4 VWO

Deel 2, Antwoordenboek



Math4all



© 2020

Het auteursrecht op dit lesmateriaal berust bij Stichting Math4All. Math4All is derhalve de recht-hebbende zoals bedoeld in de hieronder vermelde creative commons licentie.

Het lesmateriaal is met zorg samengesteld en getest. Stichting Math4All aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module. Ook aanvaarden ze geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit (het gebruik van) dit lesmateriaal

Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding Niet Commercieel 3.0 Nederland Licentie. (zie <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0>).

Dit lesmateriaal is open, gratis en vrij toegankelijk lesmateriaal afkomstig van Stichting Math4All en is speciaal ontwikkeld voor het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs. Het lesmateriaal op de website www.math4all.nl is afgestemd op kerndoelen wiskunde, tussendoelen wiskunde en eindtermen voor de vakken wiskunde A, B en C. Dit lesmateriaal is mediumneutraal ontwikkeld en op diverse manieren te bekijken en te gebruiken. Voor informatie en vragen kunt u contact opnemen via info@math4all.nl. Ook houden we ons altijd aanbevolen voor suggesties, verbeteringen en/of aanvullingen.

5	Exponentiële functies	3
5.1	Exponentiële groei	4
5.2	Reële exponenten	8
5.3	Exponenten en machten	11
5.4	Exponentiële functies	15
5.5	Meer exponentiële functies	19
5.6	Totaalbeeld	23
6	Statistiek	27
6.1	Onderzoek	28
6.2	Data ordenen	32
6.3	Diagrammen gebruiken	38
6.4	Gegevens samenvatten	46
6.5	Uitspraken doen	56
6.6	Totaalbeeld	61
7	Machtsfuncties	65
7.1	Werken met machten	66
7.2	Eigenschappen van machtsfuncties	70
7.3	Kwadratische functies als machtsfuncties	75
7.4	De abc-formule	81
7.5	Veeltermen	86
7.6	Totaalbeeld	89
8	Kansrekenen	93
8.1	Kansen	94
8.2	Kansbomen	100
8.3	Kansen optellen/afrekken	106
8.4	Kansen vermenigvuldigen	113
8.5	Toevalsvariabelen	119
8.6	Totaalbeeld	126

5

Exponentiële functies

5.1	Exponentiële groei	4
5.2	Reële exponenten	8
5.3	Exponenten en machten	11
5.4	Exponentiële functies	15
5.5	Meer exponentiële functies	19
5.6	Totaalbeeld	23

5.1 Exponentiële groei

- PAGINA 4**

6 Zie de tabel.

procentuele toename per jaar	13	-6	0,3	15	-2	295	-99
groefactor per jaar	1,13	0,94	1,003	1,15	0,98	3,95	0,01

7 a $3^{83} \cdot (3^{40})^2 = 3^{83} \cdot 3^{80} = 3^{83+80} = 3^{163}$

b $\frac{2^{214} \cdot 2^{80}}{(2^{12})^{24}} = \frac{2^{214+80}}{2^{12 \cdot 24}} = \frac{2^{294}}{2^{288}} = 2^6$

c $\frac{(3^{21})^4 \cdot 3^{41}}{(3^3)^9} = \frac{3^{84} \cdot 3^{41}}{3^{27}} = \frac{3^{125}}{3^{27}} = 3^{125-27} = 3^{98}$

d $\frac{(2^2)^9 \cdot 2^4}{(2^4)^3} = \frac{2^{18} \cdot 2^4}{2^{12}} = \frac{2^{22}}{2^{12}} = 2^{10}$

8 a De oppervlakte wordt elk jaar drie keer zo groot, dus de groefactor is 3.
Het startgetal is 2 km^2 :

$$R = 2 \cdot 3^t$$

b Zie de tabel.

jaar	2014	2015	2016	2017	2018	2019
R	2	6	18	54	162	486

$R(t) = 2 \cdot 3^t$ invullen van $t = 0$ tot en met $t = 5$ en invullen in tabel.

c $R(5) = 2 \cdot 3^5 = 486 \text{ km}^2$ op 1 januari 2019.

$$R(6) = 2 \cdot 3^6 = 1458 \text{ km}^2 \text{ op 1 januari 2020.}$$

Het meer is 1000 km^2 , in het jaar 2019 is het hele meer voor het eerst helemaal begroeid met riet.

9 Zie de tabel.

p	17	0,7	105,1	-9	-0,15	-22	-93	2	296
g	1,17	1,007	2,051	0,91	0,9985	0,78	0,07	1,02	3,96

10 a $2^{41} \cdot 2^{39} = 2^{41+39} = 2^{80}$

b $\frac{2^4}{2} = \frac{2^4}{2^1} = 2^{4-1} = 2^3$

c $(5^3)^2 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$

d $\frac{2^{512}}{2^{509}} = 2^3$

e $5^8 \cdot 5^3 = 5^{11}$

11 a Het startgetal van 5000 daalt per jaar met 4%. Er blijft elk jaar dus $100 - 4 = 96\%$ over.

De groefactor is daarom $\frac{96}{100} = 0,96$. Dus:

$$N = 5000 \cdot 0,96^t$$

b In 2024 is $t = 10$

$$5000 \cdot 0,96^{10} \approx 3324$$

Er zijn dan 3324 herten in het natuurgebied.

c De groefactor per 10 jaar: $0,96^{10} \approx 0,6648$.

Groeipercantage: $66,48 - 100,00 = -33,52\%$.

d Het aantal herten is gehalveerd als $N = 2500$.

Functie invullen in GR.

Aflezen uit tabel wanneer N voor het eerst kleiner dan 2500 is.

$$N(16) \approx 2602$$

$$N(17) \approx 2498$$

In de loop van 2030 is het aantal herten gehalveerd.

$$12 \text{ a } \frac{(2^{30})^{12} \cdot 2^{60}}{2^{343} \cdot 2^{77}} = \frac{2^{360} \cdot 2^{60}}{2^{343} \cdot 2^{77}} = \frac{2^{420}}{2^{420}} = 1$$

$$b \quad \frac{64^{56}}{(2^7)^{12}} = \frac{(2^6)^{56}}{(2^7)^{12}} = \frac{2^{336}}{2^{84}} = 2^{252}$$

$$c \quad \frac{(3^{16})^{10}}{3^{10} \cdot (3^3)^{24}} = \frac{3^{160}}{3^{10} \cdot 3^{72}} = \frac{3^{160}}{3^{82}} = 3^{160-82} = 3^{78}$$

$$d \quad \frac{3^{214}}{3^{211}} \cdot 81^{25} = 3^3 \cdot (3^4)^{25} = 3^3 \cdot 3^{100} = 3^{103}$$

$$13 \text{ a } \frac{10850}{10415} \approx 1,04; \frac{11300}{10850} \approx 1,04; \frac{11760}{11300} \approx 1,04; \frac{12250}{11760} \approx 1,04; \frac{12760}{12250} \approx 1,04$$

Als je twee opvolgende kapitalen deelt, vind je telkens ongeveer 1,04. Een constante vermenigvuldigingsfactor duidt op een exponentiële toename.

b Nieuwe percentage per jaar: $1,04 \cdot 100 = 104\%$.

Groei is dus ongeveer $104 - 100 = 4\%$ per jaar en dat is het rendement.

c Groeipercantage 8, nieuwe percentage is $8 + 100 = 108\%$.

Groeifactor: $\frac{108}{100} = 1,08$.

Startgetal: 10000.

Dus: $K(t) = 10000 \cdot 1,08^t$.

Invullen in GR. Tabel van $t = 0$ tot $t = 10$ bekijken.

d Kaptiaal is verdubbeld als $K = 20000$.

Na 9 jaar: $K \approx 19990$

Na 10 jaar: $K \approx 21589$

Dus kapitaal is na tien jaar verdubbeld.

e Na vijf jaar:

Groeipercantage van 14.

Dus groeifactor is $\frac{14+100}{100} = 1,14$.

Startgetal is 10000.

$K(5) = 10000 \cdot 1,14^5 = 19254,15$ euro.

Na tien jaar:

Groeipercantage van 4.

Dus groeifactor is $\frac{4+100}{100} = 1,04$.

Startgetal is 19254,15.

$K(5) = 19254,15 \cdot 1,04^5 = 23425,61$ euro.

f $K = (10000 \cdot 1,14^5) \cdot 1,04^5 = 23425,61$

$K = (10000 \cdot 1,04^5) \cdot 1,14^5 = 23425,61$

Het maakt dus geen verschil.

14 Zie de tabel.

leeftijd	15	16	17	18	19	20	21	22
zakgeld Mark	10	20	40	80	160	320	640	1280
zakgeld Peter	105	205	305	405	505	605	705	805

Vanaf hun 22ste levensjaar krijgt Mark voor het eerst meer zakgeld dan Peter.

15 a Groeipercantage van 4%. Dus groeifactor is $\frac{4+100}{100} = 1,04$. Startgetal is € 950,00.

$H = 950 \cdot 1,04^t$, met H als huurbedrag in euro en t de tijd in jaren nadat de huur € 950,00 was.

b Zie de tabel.

<i>tijd (jaren)</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>huur (euro)</i>	950	988	1027,52	1068,62	1111,36	1155,82	1202,05	1250,13	1300,14

Tabel moet doorlopen tot $H > 1300$, dus tot $t = 8$.

c $1,04^4 \approx 1,17$

d 20 jaar is vijf periodes met groeifactor 1,17, dus:

$$1,17^5 \approx 2,19.$$

e Het groeipercentage is het percentage dat bovenop de 100% van het begin is gekomen. Die 100% is nu $100 \cdot 2,19 = 219\%$ geworden. Het groeipercentage is dus $219 - 100 = 119\%$.

f Verdubbeling bij $H(t) = 2 \cdot 950 = 1900,00$ euro. $H(t)$ invullen in GR, uitlezen in tabel wanneer H meer dan € 1900 is:

$$H(17) \approx 1851$$

$$H(18) \approx 1925$$

Na achttien jaar is de huur per maand dus meer dan verdubbeld.

16 a
$$\frac{17^{31} \cdot 17^{54}}{(17^3)^{21}} = \frac{17^{31+54}}{17^{3 \cdot 21}} = \frac{17^{85}}{17^{63}} = 17^{85-63} = 17^{22}$$

b
$$\frac{2^{45} \cdot 64^{22}}{8^{20}} = \frac{2^{45} \cdot (2^6)^{22}}{(2^3)^{20}} = \frac{2^{45} \cdot 2^{132}}{2^{60}} = \frac{2^{177}}{2^{60}} = 2^{117}$$

17 a Groeipercentage van -12. Dus groeifactor is $\frac{-12+100}{100} = 0,88$. Startgetal is € 5000,00.

$W(t) = 5000 \cdot 0,88^t$ met W als waarde in euro's en t de tijd in jaren.

b $W(t)$ invullen in GR. Tabel maken en uitlezen wanneer aandelen onder € 1000 komen.

$$W(12) \approx 1078$$

$$W(13) \approx 949$$

Dus na 13 jaar is de waarde minder dan € 1000,00 geworden.

c Groeifactor per 5 jaar: $0,88^5 \approx 0,528$.

Dat betekent dat er na 5 jaar nog 52,8% van de waarde over is. Het groeipercentage is dus $52,8 - 100 = -47,2\%$.

d Na 10 jaar is de waarde 2 keer met de groeifactor per 5 jaar vermenigvuldigd, dus: $5000 \cdot 0,528 \cdot 0,528 = € 1392,50$ is de waarde van de aandelen na 10 jaar.

Let op: Neem hiervoor wel de onafgeronde waarde van de groeifactor na 5 jaar, anders volgt een andere uitkomst.

e Groeifactor per 10 jaar: $(0,88^5)^2 \approx 0,279$.

Dat betekent dat er na 10 jaar nog 27,9% van de waarde over is. Het groeipercentage is dus $27,9 - 100 = -72,1\%$.

5.2 Reële exponenten

- V1 a** 11:00 is op $t = -1$ dus $B = 600 \cdot 2^{-1} = 300$.
- b** Vooruit in de tijd verdubbelt het aantal bacteriën zich elk uur. Terug in de tijd halveert het aantal bacteriën zich dus elk uur. Terug in de tijd is de groeifactor daarom $\frac{1}{2}$.
- c** Ja, door bijvoorbeeld de groeifactor per kwartier te gebruiken. Die is $2^{0,25} = \sqrt[4]{2} \approx 1,189$
- 1 a** Je wilt het aantal milligram bacteriën weten vier uur voor $t = 0$.
Je vult dus $t = -4$ in de formule in.
- b** $600 \cdot 2^{-4} = 37,5$ milligram
Vooruit in de tijd verdubbelt het aantal bacteriën zich elk uur. Terug in de tijd halveert het aantal bacteriën zich elk uur. Terug in de tijd is de groeifactor daarom $\frac{1}{2}$. Vier uur terug in de tijd geeft:
- $$600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 37,5$$
- 2 a** Je wilt $2\frac{1}{2}$ uur na $t = 0$ weten. Je vult daarom $t = 2\frac{1}{2}$ in in de formule.
- b** Groeifactor per uur is 2 en $t = 2\frac{1}{2}$.
- $$B\left(2\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot 2^{2\frac{1}{2}} \approx 3394.$$
- Groeifactor per half uur is $2^{0,5} = \sqrt{2}$.
Na $2\frac{1}{2}$ uur geldt dus: $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \approx 3394$.
- 3 a** In drie uur verdubbelt het aantal bacteriën zich drie keer, dus $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.
- b** De groeifactor per t uren is 2^t . De groeifactor per half uur is dus $2^{0,5} = \sqrt{2} \approx 1,41$.
- c** De groeifactor per t uren is 2^t . De groeifactor per kwartier is dus $2^{0,25} \approx 1,19$.
- d** Na vijf uur: $600 \cdot 2^5 = 19200$.
Na 5,5 uur: $600 \cdot 2^{5,5} = 272152$.
Na 5,75 uur: $600 \cdot 2^{5,75} = 32290$.
- e** Aantal na vijf uur: $B(5) = 6 \cdot 2^5 = 192$
Groeifactor na 0,5 uur: $2^{0,5}$
Groeifactor na 0,25 uur: $2^{0,25}$
Dus: $192 \cdot 2^{0,5} \cdot 2^{0,25} = 323$.
- 4 a** $720 \cdot 1,12^{-6} \approx 365$
- b** Voer in: $Y1=720*1.12^X$
Maak een tabel.
Je ziet dat bij $t = -11$ het aantal leden 207 was. Dus de vereniging is in 1998 opgericht.
- 5 a** Het kapitaal wordt per jaar 4,2% groter. Het nieuwe kapitaal is 104,2% van het oude. De groeifactor is dus $\frac{104,2}{100} = 1,042$. Het startbedrag was € 7500,00. Het kapitaal staat anderhalf jaar op de bank, dus $t = 1,5$.
- $$K(t) = 7500 \cdot 1,042^t = 7500 \cdot 1,042^{1,5} \approx 7977,43 \text{ euro}$$
- b** De groeifactor per half jaar is $1,042^{\frac{1}{2}} \approx 1,0208$.
Het startbedrag was € 7500,00.
Kapitaal staat drie halve jaren op de bank dus $t = 3$.
- $$N(t) = 7500 \cdot \left(1,042^{\frac{1}{2}}\right)^t = 7500 \cdot \left(1,042^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 7977,43 \text{ euro}$$
- c** De groeifactor per maand is $1,042^{\frac{1}{12}} \approx 1,0034$.

Het startbedrag was € 7500,00.

Kapitaal staat $12 + 6 = 18$ maanden op de bank dus $t = 18$.

$$N(t) = 7500 \cdot \left(1,042^{\frac{1}{12}}\right)^t = 7500 \cdot \left(1,042^{\frac{1}{12}}\right)^{18} = 7977,43 \text{ euro}$$

- 6 a** De halveringstijd is 5736 jaar. Dus er moet gelden $g^{5736} = 0,5$. Bereken met je GR de waarde van g per jaar. Deze is gelijk aan ongeveer 0,999879. Per 100 jaar vind je dan $0,999879^{100} = 0,987972$. De groeifactor per eeuw is afgerond op drie decimalen 0,988.
- b** Na t eeuwen met groeifactor 0,988 is er nog 38% C14 over: $0,988^t = \frac{38}{100} = 0,38$.
Oplossen met GR: $t \approx 80,15$ eeuwen
Het gebruiksvoorwerp is ongeveer 8015 jaar oud.
- 7 a** 2015 is tien jaar na 2005, dus $t = 10$.
 $25000 \cdot 1,1^{10} \approx 64844$ inwoners.
- b** Van 1 januari 2005 naar 1 augustus 2015 is $10\frac{7}{12}$ jaar, $t = 10\frac{7}{12}$.
 $25000 \cdot 1,1^{10\frac{7}{12}} \approx 68551$ inwoners.
- c** Aflezen uit formule: 1,1.
- d** Maand is $\frac{1}{12}$ jaar dus $1,1^{\frac{1}{12}} \approx 1,008$ is de groeifactor per maand.
Na een maand is het nieuwe percentage dus 100,8%.
Het groeipercentage is dan $100,8 - 100 = 0,8\%$.
- e** 2000 is vijf jaar voor 2005, dus bij $t = -5$:
 $25000 \cdot 1,1^{-5} = 15523$ inwoners
1995 is tien jaar voor 2005, dus bij $t = -10$:
 $25000 \cdot 1,1^{-10} = 9639$ inwoners
- 8 a** $g_3 = \frac{3000}{1200} = 2,5$
- b** $g_1 = (g_3)^{\frac{1}{3}} = 2,5^{\frac{1}{3}} \approx 1,357$.
Dus per uur is de groei 35,7%.
- c** De groeifactor is 1,357. Het startgetal is 1200. Dus:
 $H(t) = 1200 \cdot 1,357^t$
- d** $H(t) = 1200 \cdot 1,357^t = 600$
Vergelijking met GR oplossen: $t = -2,27$. Dus 2,27 uur voor $t = 0$ waren er 600 bacteriën. Dat is dus ongeveer 2 uur en een kwartier voor $t = 0$.
- 9 a** 1500 - 1750: groeifactor per jaar ongeveer 1,00115, dus groei ongeveer 0,12% per jaar.
1750 - 1800: groeifactor per jaar ongeveer 1,00814, dus groei ongeveer 0,81% per jaar.
1986 - 1997: groeifactor per jaar ongeveer 1,01735, dus groei ongeveer 1,74% per jaar.
- b** In vier periodes:
Periode 0-1500.
Periode 1500-1800.
Periode 1800-1950.
Periode 1950-1986.
- c** 0 - 1500: groeifactor per jaar $2^{\frac{1}{1500}} \approx 1,00046$, dus groei ongeveer 0,05% per jaar.
1500 - 1800: groeifactor per jaar $2^{\frac{1}{300}} \approx 1,002313$, dus groei ongeveer 0,23% per jaar.
1800 - 1950: groeifactor per jaar $2^{\frac{1}{150}} \approx 1,00463$, dus groei ongeveer 0,46% per jaar.

1950 - 1986: groeifactor per jaar $2^{\frac{1}{36}} \approx 1,01944$, dus groei ongeveer 1,94% per jaar.

10 a Zes jaar voor $t = 0$, dus zes jaar voor 2012, dus in 2006.

b De groeifactor is $\frac{106}{100} = 1,06$.

Het startgetal is € 7969,24 en $t = 0$ op 1 januari 2012.

Dus: $K(t) = 7969,24 \cdot 1,06^t$.

1 januari 2011: $7969,24 \cdot 1,06^{-1} \approx 7518,15$ euro

1 januari 2010: $7969,24 \cdot 1,06^{-2} \approx 7092,60$ euro

1 januari 2009: $7969,24 \cdot 1,06^{-3} \approx 6691,13$ euro

c Voer in: $Y1=7969.24*1.06^X$

Maak een tabel: er is blijkbaar € 5000,00 ingelegd bij $t = -8$. Dus dat bedrag werd ingelegd op 1 januari 2004.

Hij heeft € 5000,00 ingelegd op 1 januari 2004.

11 a De groeifactor per twee jaar is 0,81, dus de groeifactor per jaar is $0,81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,81} = 0,9$.
Je beginhoeveelheid is 1000. Dus: $R = 1000 \cdot 0,90^t$.

b Los op $1000 \cdot 0,90^t = 800$.

De GR geeft $t \approx 2,118$, dus ongeveer twee jaar en twee maanden.

c Los op $0,90^t = 0,5$.

Met de GR vind je $t \approx 6,58$ jaar.

d Als 750 mg is omgezet, is er dus nog 250 mg over. De 1000 mg is dan dus twee keer gehalveerd. Dit kost twee keer de halveringstijd, dus $2 \cdot 6,58 = 13$ jaar.

12 a Het startgetal is 10 en per week is het groeipcentage 15. Het nieuwe percentage is dus steeds $100 + 15 = 115$ en de groeifactor is $\frac{115}{100} = 1,15$. Dus:

$A(t) = 10 \cdot 1,15^t$ met $A(t)$ in gram per liter en t in weken.

b Drie weken voor $t = 0$ is dus $t = -3$. Invullen: $A(-3) = 10 \cdot 1,15^{-3} \approx 6,6$ gram per liter.

c Twee dagen is $\frac{2}{7}$ week. $\frac{2}{7}$ week voor $t = 0$ is dus $t = -\frac{2}{7}$. Invullen: $A(-\frac{2}{7}) = 10 \cdot 1,15^{-\frac{2}{7}} \approx 9,6$ gram per liter.

d Verdubbeld als $1,15^t = 2$. Oplossen met GR: $t \approx 4,96$ weken. Dus na $4,96 \cdot 7 \approx 35$ dagen.

13 a Groeifactor per vier jaar is $\frac{4300}{6000}$.

Groeifactor per jaar is dus $\left(\frac{4300}{6000}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0,92$.

b De beginhoeveelheid is 6000. De groeifactor per jaar is 0,92:

$N(t) = 6000 \cdot 0,92^t$.

c Elk jaar blijft er $100 \cdot 0,92^1 = 92\%$ vlinders over.

Het aantal vlinders neemt dus met $100 - 92 = 8\%$ per jaar af.

d Bij halvering geldt $0,92^t = 0,5$.

Los dit op met de GR: $t \approx 8,31$.

De halveringstijd is ongeveer 8 jaar en 113 dagen.

e $6000 \cdot 0,92^t = 1000$

Los op met de GR. Maak een tabel. Aflezen na hoeveel jaar het aantal vlinders minder dan 1000 wordt:

Na 21 jaar ≈ 1042

Na 22 jaar ≈ 958

Na 22 jaar is het aantal vlinders voor het eerst minder dan 1000.

5.3 Exponenten en machten

$$\text{V1} \quad \frac{\sqrt[3]{14^{120}}}{14^{39}} = \frac{14^{\frac{120}{3}}}{14^{39}} = \frac{14^{40}}{14^{39}} = 14^1 = 14$$

1 a Met $\sqrt[n]{g} = g^{\frac{1}{n}}$ is de n-demachtswortel veranderd in een n-de macht, zodat er alleen machten overblijven, wat het rekenen gemakkelijker maakt.

b Met $(g^a)^b = g^{ab}$ zijn de machten in de teller samengetrokken om de breuk zo eenvoudiger te maken.

c Met $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ is de breuk weggewerkt zodat je een getal als antwoord overhoudt.

$$2 \quad \frac{31^{25} \cdot \sqrt[3]{31^{30}}}{(31^{12})^3} = \frac{31^{25} \cdot 31^{\frac{30}{3}}}{31^{12 \cdot 3}} = \frac{31^{25} \cdot 31^{10}}{31^{36}} = \frac{31^{35}}{31^{36}} = \frac{1}{31}$$

$$3 \text{ a} \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{b} \quad 8^{1\frac{2}{3}} = 8^1 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 8 \cdot (\sqrt[3]{8})^2 = 8 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32$$

$$\text{c} \quad 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

$$\text{d} \quad 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$$

$$\text{e} \quad 2^{-3} \cdot 2^7 = 2^{-3+7} = 2^4 = 16$$

$$\text{f} \quad \frac{5^2 \cdot 5^3}{25^{1,5}} = \frac{5^2 \cdot 5^3}{25^{1,5}} = \frac{5^2 \cdot 5^3}{25^1 \cdot 25^{\frac{1}{2}}} = \frac{5^2 \cdot 5^3}{5^3} = 5^2 = 25$$

$$4 \text{ a} \quad 2x^{2\frac{1}{3}} = 2x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 2x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$\text{b} \quad \frac{3x^{-1}}{2x} = \frac{3}{2x \cdot x} = \frac{3}{2x^2}$$

$$\text{c} \quad 4x^{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$\text{d} \quad 2x^{2\frac{1}{2}} = 2x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2x^2 \cdot \sqrt[2]{x^1} = 2x^2 \sqrt{x}$$

$$\text{e} \quad \frac{1}{3}x^{-4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot x^4} = \frac{1}{3x^4}$$

$$\text{f} \quad 3x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{3}{x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{3}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$5 \text{ a} \quad x^{-\frac{3}{4}}$$

$$\text{b} \quad \frac{2x}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} = 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{c} \quad 5(\sqrt[3]{x})^2 = 5(\sqrt[3]{x})^2 = 5x^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{d} \quad \frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{4\sqrt[3]{x}} = \frac{x^3 \cdot x^{\frac{2}{3}}}{4x^{\frac{1}{3}}} = \frac{x^{3\frac{2}{3}}}{4x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{4}x^{3\frac{1}{3}}$$

6 a In de exponent staat $2x + 1$. Voor exponentiële groei moet de formule de vorm $y = b \cdot g^x$ hebben.

b Oplossing:

$$y = 0,5^{2x+1}$$

$$y = 0,5^{2x} \cdot 0,5^1$$

$$y = 0,5 \cdot (0,5^2)^x$$

$$y = 0,5 \cdot 0,25^x$$

7 a $y = 2 \cdot 3^{2x+2}$

$$y = 2 \cdot 3^{2x} \cdot 3^2$$

$$y = 18 \cdot (3^2)^x$$

$$y = 18 \cdot 9^x$$

b $y = 5 \cdot 0,2^{3x-1}$

$$y = 5 \cdot 0,2^{3x} \cdot 0,2^{-1}$$

$$y = 25 \cdot 0,2^{3x}$$

$$y = 25 \cdot (0,2^3)^x$$

$$y = 25 \cdot 0,008^x$$

c $y = 0,4 \cdot 5^{-2x+3}$

$$y = 0,4 \cdot 5^{-2x} \cdot 5^3$$

$$y = 50 \cdot 5^{-2x}$$

$$y = 50 \cdot (5^{-2})^x$$

$$y = 50 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^x$$

8 a $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$

b $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

c $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^8 = 2^{\frac{1}{4} \cdot 8} = 2^2 = 4$

d $\sqrt[3]{1000} = 1000^{\frac{1}{3}} = (10^3)^{\frac{1}{3}} = 10^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 10^1 = 10$

9 a $\frac{1}{x^2 \sqrt{x}} = \frac{1}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = x^{-2\frac{1}{2}}$

b $\frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{-\frac{1}{4}}$

c $\sqrt{x} \cdot x^{-2} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-2} = x^{-1\frac{1}{2}}$

d $\frac{1}{x \sqrt{x}} = \frac{1}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{-1\frac{1}{2}}$

10 a $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$

b $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

c $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$

d $x^{1\frac{3}{4}} = x^1 \cdot x^{\frac{3}{4}} = x \cdot \sqrt[4]{x^3}$

$$\text{e } 3x^{-1,5} = \frac{3}{x^{1,5}} = \frac{3}{x\sqrt{x}}$$

$$\text{f } x^{-2,75} = \frac{1}{x^{2,75}} = \frac{1}{x^{2 \cdot \frac{3}{4}}} = \frac{1}{x^{2 \cdot \sqrt[4]{x^3}}} = \frac{1}{x^{2 \cdot \sqrt[4]{x^3}}}$$

$$\text{11 a } \frac{17^{105}}{17^{23}} \cdot 17^{-85} = 17^{82} \cdot 17^{-85} = 17^{82-85} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$$

$$\text{b } \left(\frac{1}{2}\right)^{219} \cdot 8^{72} = (2^{-1})^{219} \cdot (2^3)^{72} = 2^{-219} \cdot 2^{216} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\text{c } \left(\frac{3}{4}\right)^{231} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{230} \cdot 3^{233} = 3^{231} \cdot 4^{-231} \cdot 4^{230} \cdot 9^{-230} \cdot 3^{233} = 4^{-1} \cdot 3^{464} \cdot 3^{-460} = \frac{3^4}{4} = \frac{81}{4} = 20,25$$

$$\text{d } \frac{7^{102}}{(49^{10})^5} = \frac{7^{102}}{((7^2)^{10})^5} = \frac{7^{102}}{7^{2 \cdot 10 \cdot 5}} = \frac{7^{102}}{7^{100}} = 7^2 = 49$$

$$\text{e } \left(\frac{4}{9} \cdot \sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{4^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} \cdot 2 = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

$$\text{f } \frac{5^3 \cdot (3^5)^{15}}{25 \cdot \sqrt[3]{3^{225}}} = \frac{5^3 \cdot 3^{75}}{5^2 \cdot 3^{75}} = 5$$

$$\text{12 a } y = (2x^3)^4 \cdot -3x^5 = 2^4 \cdot x^{3 \cdot 4} \cdot -3x^5 = 16x^{12} \cdot -3x^5 = 16 \cdot -3 \cdot x^{12+5} = -48x^{17}$$

$$\text{b } y = \frac{2x \cdot x^2}{x^6} = \frac{2x^{1+2}}{x^6} = \frac{2x^3}{x^6} = 2x^{3-6} = 2x^{-3}$$

$$\text{c } y = 4x^2 \cdot \sqrt[3]{x} = 4x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 4x^{2+\frac{1}{3}} = 4x^{2\frac{1}{3}}$$

$$\text{d } y = \frac{2}{x\sqrt{x}} = \frac{2}{x^{1 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{2}{x^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{2}{x^{1\frac{1}{2}}} = 2x^{-1\frac{1}{2}}$$

$$\text{13 a } y = 3 \cdot 2^{0,5x} = 3 \cdot (2^{0,5})^x = 3 \cdot (\sqrt{2})^x$$

$$\text{b } y = 0,5^{-x+2} = 0,5^2 \cdot 0,5^{-x} = 0,25 \cdot (0,5^{-1})^x = 0,25 \cdot 2^x$$

$$\text{c } y = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-2x} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x} = \frac{1}{27} \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^x = \frac{1}{27} \cdot 9^x$$

$$\text{d } y = 6 \cdot 2^{4x-2} = 6 \cdot 2^{-2} \cdot 2^{4x} = 1,5 \cdot (2^4)^x = 1,5 \cdot 16^x$$

14 a In de exponent staat $2x + 1$. Voor exponentiële groei moet de formule de vorm $y = b \cdot g^x$ hebben.

$$\text{b } y = 4^{-2x+1} = (4^{-2})^x \cdot 4^1 = 4 \cdot 0,0625^x$$

$$\text{c } y = 4^{-2x} + 1 = (4^{-2})^x + 1 = 0,0625^x + 1$$

Deze formule heeft niet de standaardvorm $y = b \cdot g^x$.

$$\text{15 a } 5^{-5} \cdot 25^2 = 5^{-5} \cdot (5^2)^2 = 5^{-5} \cdot 5^{2 \cdot 2} = 5^{-5} \cdot 5^4 = 5^{-5+4} = 5^{-1}$$

$$\text{b } 7^{-10} \cdot (7^3)^5 = 7^{-10} \cdot 7^{3 \cdot 5} = 7^{-10} \cdot 7^{15} = 7^{-10+15} = 7^5$$

$$\text{c } \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1 \cdot 4} = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right)^4 = 5^4$$

$$\text{d } 125^{-\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3} \cdot -1} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = (\sqrt[3]{125})^{-1} = 5^{-1}$$

$$\text{16 a } 2x^4 \cdot (3x^3)^2 = 2 \cdot x^4 \cdot 3^2 \cdot (x^3)^2 = 2 \cdot 9 \cdot x^4 \cdot x^{3 \cdot 2} = 18 \cdot x^4 \cdot x^6 = 18 \cdot x^{4+6} = 18x^{10}$$

$$\mathbf{b} \quad \frac{x^3 \cdot 5x^4}{x^8} = \frac{5 \cdot x^{3+4}}{x^8} = \frac{5 \cdot x^7}{x^8} = 5x^{7-8} = 5x^{-1}$$

$$\mathbf{c} \quad \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} = 3x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{d} \quad 5x \cdot \sqrt[5]{x^2} = 5x \cdot x^{\frac{2}{5}} = 5 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{2}{5}} = 5 \cdot x^{1+\frac{2}{5}} = 5x^{1\frac{2}{5}}$$

$$\mathbf{17 \ a} \quad x^{1\frac{1}{4}} = x^{1+\frac{1}{4}} = x \cdot x^{\frac{1}{4}} = x \cdot \sqrt[4]{x}$$

$$\mathbf{b} \quad \frac{x^2 \cdot x^{-4}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{-2}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$$

5.4 Exponentiële functies

- V1 a** Uit de grafiek is af te lezen dat de grafiek nooit de x -as raakt. De y -as wordt uiteraard bij $x = 0$ gesneden, dus: $B = 600 \cdot 2^0 = 600 \cdot 1 = 600$.
Het enige snijpunt is dus $(0, 600)$.
- b** De grafiek stijgt eigenlijk alleen maar, er zijn dus geen extremen.
- c** Als je hele lage waarden voor x gaat invullen, benaderen de y -waarden het getal 0. De x -as is dus een asymptoot.
- 1 a** $f(x) = 1 \cdot 2^x = 2^x$.
Grafiek heeft geen nulpunten, want 2^x wordt nooit 0 of negatief.
Bij hele kleine waarden van x benaderen de functiewaarden het getal 0, dus de grafiek komt steeds dichterbij $y = 0$.
De grafiek is stijgend.
- b** $f(x) = 1 \cdot 3^x = 3^x$.
Grafiek heeft geen nulpunten, want 3^x wordt nooit 0 of negatief.
Bij hele kleine waarden van x benaderen de functiewaarden het getal 0, dus de grafiek komt steeds dichterbij $y = 0$.
De grafiek is stijgend.
- c** $f(x) = 1 \cdot 1^x = 1^x = 1$.
 $f(x)$ is dus altijd 1. Dus geen lijn waar de grafiek van $f(x)$ naar toe loopt en ook nergens een snijpunt met de x -as.
- d** $f(x) = 1 \cdot 0,5^x = 0,5^x$.
Grafiek heeft geen nulpunten, want $0,5^x$ wordt nooit 0 of negatief.
Bij hele grote waarden van x benaderen de functiewaarden het getal 0, dus de grafiek komt steeds dichterbij $y = 0$.
De grafiek is dalend.
- e** $f(x) = 2 \cdot 1,5^x$.
Grafiek heeft geen nulpunten, want $1,5^x$ wordt nooit 0 of negatief.
Bij hele kleine waarden van x benaderen de functiewaarden het getal 0, dus de grafiek komt steeds dichterbij $y = 0$.
De grafiek is stijgend.
- f** $f(x) = -2 \cdot 1,5^x$.
Grafiek heeft geen nulpunten, want $1,5^x$ wordt nooit 0 of negatief, dus de hele functie wordt nooit 0 of positief.
Bij hele kleine waarden van x benaderen de functiewaarden het getal 0, dus de grafiek komt steeds dichterbij $y = 0$.
De grafiek is dalend.
- 2**
- Als $g > 1$ is de grafiek voortdurend dalend, want de uitkomst wordt een groter negatief getal.
 - Als $g = 1$ is de grafiek constant, want 1^x geeft altijd 1.
 - Als $0 < g < 1$ is de grafiek voortdurend stijgend, want de uitkomst wordt een steeds kleiner negatief getal.
 - Er zijn geen nulpunten, want g^x kan geen 0 worden.
 - De x -as is een horizontale asymptoot, want bij extreme waarden van x benaderen de functiewaarden $y = 0$.
 - Er zijn geen extremen, want de grafiek is óf dalend, óf stijgend, óf constant.
- 3 a** Los eerst de vergelijking $40 \cdot 0,8^t = 10$ op met de GR. Je vindt $t \approx 6,21$.
Hoe groter t hoe kleiner de functiewaarden, dus de oplossing is $t \geq 6,3$.
- b** Nee, de grafiek van C snijdt de x -as niet.

- 4 a** Voer in: $Y1=2 \cdot 8^X$ en $Y2=40$
 Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 5$ en $0 \leq y \leq 50$
 De optie intersect geeft $x = 1,440\dots$. In de grafiek zie je dat $x \leq 1,44$.
- b** Voer in: $Y1=1/3 \cdot 4^X$ en $Y2=124$
 Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 150$
 De optie intersect geeft $x = 4,269\dots$. Aan de grafiek zie je dat $x \geq 4,27$.
- c** Voer in: $Y1=55 \cdot 0.5^X$ en $Y2=100$
 Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 150$
 De optie intersect geeft $x = -0,862\dots$. Aan de grafiek zie je dat $x \geq -0,86$.
- 5 a** De groeifactor van A is gelijk aan 1,025 en van B is deze 1,031. Groeifactor van B is dus groter dan die van A. Conclusie: de bevolking bij B groeit harder dan die van A.
- b** Voer in: $Y1=750000 \cdot 1.025^X$ en $Y2=620000 \cdot 1.031^X$
 Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 50$ en $0 \leq y \leq 2400000$
- c** $B(8) \approx 791,518$, dus op 1 januari 2021 heeft stad C 791518 inwoners. Op 1 januari 2013 hadden ze $791518 \cdot 1,083^{-8} \approx 418247$ inwoners.
 Noem C het aantal inwoners in duizendtallen van stad C, dan is $C(t) = 418,247 \cdot 1,083^t$, met $t = 0$ op 1 januari 2013.
 Voer in: $Y1=750 \cdot 1.025^X$ en $Y2=418.247 \cdot 1.083^X$
 Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 20$ en $0 \leq y \leq 1500$
 De grafieken snijden elkaar bij $x \approx 10,6$.
 Dus in het jaar 2023 zijn de steden even groot.
- 6** Als x van 10 naar 14 gaat, wordt $f(x)$ vermenigvuldigd met $\frac{350}{200} = 1,75$. Voor g geldt daarom $g^4 = 1,75$ en dus $g = \sqrt[4]{1,75} \approx 1,15$.
 Invullen: $f(x) = b \cdot g^x = b \cdot 1,15^x$.
 Coördinaat invullen: $f(10) = b \cdot 1,15^{10} = 200$
 $4,05 \cdot b = 200$
 $b = \frac{200}{4,05} \approx 49$.
 Dus: $f(x) = 49 \cdot 1,15^x$.
- 7 a** Het startgetal is 1 en het groeipcentage is 5, dus het nieuwe percentage is $5 + 100 = 105$ en de groeifactor is $\frac{105}{100} = 1,05$. Dus: $S(t) = 1 \cdot 1,05^t = 4000$.
 $S(t)$ en $y = 4000$ invullen in GR. Snijpunt bepalen: (170,4000).
 De € 1,00 moet dus 170 jaar geleden op de rekening zijn gezet.
- b** Ja. Dan neem je het moment dat hij € 4000,00 op zijn rekening had staan als $t = 0$. $S(t) = 1$ bij $t \approx -170$, dus kies dan bijvoorbeeld $-175 \leq t \leq -165$.
- c** Nee, want $1,05^t$ kan geen 0 worden. De functiewaarden benaderen 0 echter wel als t hele kleine waarden aanneemt. Er is dus een horizontale asymptoot $S = 0$.
- 8 a** Voer in: $Y1=50 \cdot 1.5^X$ en $Y2=200$
 Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 300$
 De optie intersect geeft $x = 3,419\dots$. Aan de grafiek zie je dat $x \leq 3,41$.
- b** Voer in: $Y1=25 \cdot 1.8^X$ en $Y2=250 \cdot 0.75^X$
 Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 10$ en $0 \leq y \leq 300$
 De optie intersect geeft $x = 2,630\dots$. Aan de grafiek zie je dat $x > 2,63$.
- 9 a** Persoon A:
 Startgetal is 2000 en groeipcentage is 4. Het nieuwe percentage is $100 + 4 = 104$, dus groeifactor is $\frac{104}{100} = 1,04$, zodat $a(t) = b \cdot g^t = 2000 \cdot 1,04^t$.

Persoon B:

Startgetal is 1500 en groeipercentage is 6. Het nieuwe percentage is $100 + 6 = 106$, dus groeifactor is $\frac{106}{100} = 1,06$, zodat $b(t) = b \cdot g^t = 1500 \cdot 1,06^t$.

b Venster bijvoorbeeld: $-4 \leq x \leq 20$ en $-1000 \leq y \leq 5000$

c Voer in: $Y1=2000 \cdot 1,04^X$ en $Y2=1500 \cdot 1,06^X$

Bepaal het snijpunt. Je vindt $x = 15,1028...$ jaar. Dit is 15 jaar en 1,2 maanden na 1 januari 2010, dus vanaf 1 maart 2025.

10 a Groeifactor per vier maanden: $\frac{1630}{2000} = 0,815$, dus groeifactor per jaar: $0,815^3 \approx 0,541$.

Op 6 januari 2014 was de straling 2000 Bq, dus een jaar eerder was het $2000 \cdot 0,541^{-1} \approx 3695$ Bq.

b $2000 \cdot 0,541^{2,5} \approx 431$ Bq.

c Het startgetal is $b = 2000$ Bq. De groeifactor per jaar is $g = 0,541$. Dus:

$S = b \cdot g^t = 2000 \cdot 0,541^t$ met $t = 0$ als 6 januari 2014.

d Bij 1000 Bq is de straling gehalveerd, dus groeifactor van 0,5. Dus: $0,541^t = 0,5$

$y = 0,541^t$ en $y = 0,5$ invullen in GR. Snijpunt bepalen: (1,13; 0,5).

Dus na 1,13 jaar is de straling gehalveerd, dus na 1 jaar en $0,13 \cdot 365 = 47,45$ dagen.

47 dagen na 6 januari is $47 + 6 - 31 = 22$ februari.

De straling was dus minder dan 1000 Bq vanaf 22 februari 2015.

11 Beide grafieken gaan door (0,10), dus $b = 10$.

Bij $x = 0$ heeft $f(x)$ de waarde 10 en bij $x = 1$ de waarde 20, dus $g = \frac{20}{10} = 2$. Dus: $f(x) = b \cdot g^x = 10 \cdot 2^x$.

Bij $x = -1$ heeft $g(x)$ de waarde 30 en bij $x = 0$ de waarde 10, dus $g = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Dus: $g(x) = b \cdot g^x = 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

12 Bij lineaire groei geldt voor de beginhoeveelheid: € 650,00. Er komt jaarlijks € 50,00 bij, dus $H(t) = 650 + 50t$.

Bij exponentiële groei geldt voor beginhoeveelheid b : € 650,00. Er komt jaarlijks 5,5% bij, dus de groeifactor is $g = \frac{105,5}{100} = 1,055$, zodat $I(t) = b \cdot g^t = 650 \cdot 1,055^t$.

$H(t)$ en $I(t)$ invullen in GR. Snijpunt bepalen: (12,8; 1290). Het levert de huurder dus na dertien jaar voordeel op.

13 De groeifactor per dag is 0,8.

Je moet de ongelijkheid $40 \cdot 0,8^t < 1$ oplossen.

Eerst los je met de grafische rekenmachine de vergelijking $40 \cdot 0,8^t = 1$ op. Je vindt $t \approx 16,53$. Hoe groter t hoe minder de concentratie wordt. Dus na ongeveer 16 dagen en 13 uur is de stof verdwenen.

14 a Het aantal transistoren A is dan $A = 120000 + 117750t$ met 1982 als $t = 0$.

Los nu op: $120000 + 117750t = 3100000$.

$3100000 - 120000 = 2980000 = 117750t$

$t = \frac{2980000}{117750} \approx 25,3$

Het aantal van 3100000 transistoren wordt dus 25 jaar na 1982 bereikt, dus in het jaar 2007.

b 1971 - 2000 is een periode van 29 jaar. Groeifactor per 29 jaar = $\frac{42000000}{2250} \approx 18667$, dus groeifactor

per jaar = $\left(\frac{42000000}{2250}\right)^{\frac{1}{29}} = 1,4037$.

c 1971 - 2014 is een periode van 43 jaar.

$A = 2250 \cdot 1,404^{43} \approx 4886165278$ transistoren volgens Moore.

$\frac{4310000000}{4886165278} \cdot 100 \approx 88\%$, het werkelijke aantal wijkt dus 12% af van de voorspelling van Moore.

d $A = 2250 \cdot 1,404^t = 10^{10}$.

A en $y = 10^{10}$ invullen in GR. Snijpunt bepalen: $(45,1; 10^{10})$.

Dit is dus het geval 45 jaar na 1971, dus in het jaar 2016.

- 15 a** De groeifactor is groter dan 1 en dan worden de functiewaarden steeds groter, zolang de beginhoeveelheid positief is.

- b** Groeipercantage van 200% betekent dat er een groeifactor is van 3. Dus: $1,03^t = 3$.

Oplossen met GR: $t \approx 37,167$.

Dus vanaf $t \approx 37,167$ is de hoeveelheid 200% groter geworden.

- c** $H(t) = 200 \cdot 1,03^t = 0,01$

$$1,03^t = 0,00005$$

Oplossen met GR: $t = -335,044$.

Dus bij $t < -335,044$ is de hoeveelheid kleiner dan 0,01.

- 16 a** Groeipercantage van 5,5 per jaar, dus nieuw percentage is $100 + 5,5 = 105,5$. Groeifactor is dus $g = \frac{105,5}{100} = 1,055$. Beginhoeveelheid $b = 850$. Dus:

$$H(t) = b \cdot g^t = 850 \cdot 1,055^t.$$

- b** $H(t) = 850 \cdot 1,055^t = 1000$

$$1,055^t = \frac{1000}{850} = \frac{20}{17}$$

Oplossen met GR: $t \approx 3,035$.

Dus na 3 jaar, vanaf 1 januari 2003, is de huur hoger dan € 1000,00 per maand.

- 17** Als x van 2 naar 8 gaat, wordt $f(x)$ vermenigvuldigd met $\frac{200}{80} = 2,5$. Voor g geldt daarom $g^6 = 2,5$ en dus $g = \sqrt[6]{2,5} \approx 1,165$.

Invullen: $f(x) = b \cdot g^x = b \cdot 1,165^x$.

Coördinaten punt invullen: $f(2) = b \cdot 1,165^2 = 80$

$$1,357 \cdot b = 80$$

$$b = \frac{80}{1,357} \approx 58,94.$$

Dus: $f(x) = 58,94 \cdot 1,165^x$.

5.5 Meer exponentiële functies

V1 a $y_1 = -3 \cdot 0,5^x + 1$

b $y_2 = -3 \cdot 0,5^{2x} - 4 = -3 \cdot (0,5^2)^x - 4 = -3 \cdot 0,25^x - 4.$

1 a $f_1(x) = b \cdot g^x + d = 3 \cdot 2^x + 1$

- $y = 2^x$ herschalen in de y -richting met factor 3 geeft: $y = 3 \cdot 2^x$.
- $y = 3 \cdot 2^x$ verschuiven met 1 in de y -richting geeft: $y = 3 \cdot 2^x + 1 = f_1(x)$.

b $f_2(x) = b \cdot g^x + d = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$. Ontstaat uit grafiek van $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

- $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ herschalen in de y -richting met factor 3 geeft: $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
- $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ verschuiven met -1 in de y -richting geeft: $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 = f_2(x)$.

c $f_3(x) = b \cdot g^x + d = -10 \cdot 1,5^x + 100$.

Grafiek is dalend, dus geen extremen. Snijpunten met assen moeten wel zichtbaar zijn.
Venster bijvoorbeeld: $-2 \leq x \leq 8$ en $-10 \leq y \leq 100$

2 a $f(x) = 6 \cdot 2^{-x-1} - 12 = 6 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-x} - 12 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{-1 \cdot x} - 12 = 3 \cdot (2^{-1})^x - 12 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 12$

b Ontstaat uit grafiek van $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

- $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ herschalen in de y -richting met factor 3 geeft: $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
- $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ verschuiven met -12 in de y -richting geeft: $y = 3 \cdot 2^x - 12 = f(x)$.

c $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 12$ invullen in GR en nulpunt bepalen: $(-2; 0)$.

d Oplossing:

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 12 = 0$$

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 12$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^2$$

$$(2^{-1})^x = 2^2$$

$$2^{-1 \cdot x} = 2^2$$

$$-x = 2$$

$$x = -2$$

3 a Nulpunt is $x = 3$.

b $60 \cdot 2^x - 480 = 0$ geeft $2^x = \frac{480}{60} = 8 = 2^3$, dus het nulpunt is $x = 3$.

4 a $f(x)$ met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen in de y -richting geeft: $f(x) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = g(x)$.

b $f(x)$ met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen in de y -richting geeft: $f(x) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Dit met 5 eenheden naar beneden schuiven geeft: $f(x) \cdot \frac{1}{2} - 5 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5 = h(x)$.

c Als x hele grote waarden aanneemt, benadert $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ het getal 0.

Dat betekent: $h = \frac{1}{2} \cdot 0 - 5 = 0 - 5 = -5$. De functiewaarden benaderen dan dus het getal -5.

d x kan alle waarden aannemen.

y kan alle waarden boven -5 aannemen, want $y = -5$ is de lijn waar $h(x)$ naar nadert en verder stijgt de functie alsmaar.

e $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5 = 10$ geeft $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 30$.

Gebruik verder de GR om deze vergelijking op te lossen: $x \approx -3,096$.

f $x < -3,096$

5 a $f(x) = 2 \cdot 2^x \cdot 2^1 - 1 = 4 \cdot 2^x - 1$

b $g(x) = 2^x$ herschalen in de y -richting met factor 4 geeft: $y = 4 \cdot 2^x$.

$y = 4 \cdot 2^x$ verschuiven met -1 in de y -richting geeft: $y = 4 \cdot 2^x - 1 = f(x)$.

c Ten opzichte van de grafiek van g is bij de grafiek van f elke waarde van y vermenigvuldigd met vier en vervolgens met één verlaagd, dus: $(0,1 \cdot 4 - 1) = (0,3)$ óf $x = 0$ invullen in f : $f(0) = 4 \cdot 2^0 - 1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$. Dus: $(0,3)$.

d Grafiek van f plotten, aflezen dat f bij hele kleine waarden van x het getal -1 benadert en verder alleen maar stijgt. Dus de grafiek nadert tot $y = -1$.

e $4 \cdot 2^x - 1$ geeft $2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2}$.

Nulpunt $x = -2$.

6 a De groeifactor $0,998$ is kleiner dan 1 , dus als t groter wordt neemt $60 \cdot 0,998^t + 20$ af.

b $y = 20$ is de horizontale asymptoot.

De temperatuur van de koffie nadert de omgevingstemperatuur van 20°C .

c Voer in: $Y1=60 \cdot (0,998)^X + 20$ en $Y2=70$

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 40$ en $0 \leq y \leq 300$

$x \approx 91,07$, dus na ongeveer 91 seconden uur is de temperatuur 70°C .

7 a Oplossing:

$$T(t) = 20 + 60 \cdot 0,83^t = 50$$

$$60 \cdot 0,83^t = 30$$

$$0,83^t = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

Oplossen met GR: $t \approx 3,72$.

Koffie is dus tot 3 uur en driekwartier na 8:00 uur te drinken, dus tot 11:45 uur.

b Thermoskan werd gevuld bij $t = 0$, dus $t = 0$ invullen:

$$T(0) = 20 + 60 \cdot 0,83^0 = 20 + 60 \cdot 1 = 80^\circ\text{C}$$

c Groeifactor is $0,83$. Als groeifactor $g < 1$, is de grafiek dalend.

d $T(t) = 20 + 60 \cdot 0,83^t = 21$ geeft $0,83^t = 0,01666\dots$

Gebruik je GR. Snijpunt bepalen: $(22,21)$.

Het duurt dus 22 uur voordat de koffie een temperatuur bereikt van 21°C .

e $T(t)$ invullen in GR. Als je x ver door laat lopen, is te zien dat de functiewaarden het getal 20 benaderen, dus $T = 20$.

f De koffie koelt af tot de kamertemperatuur. $60 \cdot 0,83^t$ benadert uiteindelijk 0 , dus de $+20$ bepaalt de kamertemperatuur: 20°C .

8 a Eerst herschalen in de y -richting met factor $\frac{1}{6}$ en daarna verschuiven met 340 in de y -richting.

b Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $300 \leq y \leq 1000$.

c $y = 340$

9 a $5^x = 10$ oplossen met GR: $x \approx 1,43$.

b $5^x = 10$ oplossen met GR: $x \approx 1,43$.

Hoe groter x , hoe groter 5^x , dus $x \leq 1,43$.

c Oplossing:

$$5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 8 = 2$$

$$5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 10$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{10}{5} = 2$$

Oplossen met GR: $x \approx -0,63$.

d $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 8 = 2$ geeft $x \approx -0,63$.

Hoe groter x , hoe kleiner $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 8$

$x > -0,63$

10 a Hoe groter x , hoe kleiner $4 \cdot 0,5^x - 1$, dus: $x > 2$.

b Hoe kleiner x , hoe groter $-x + 1$, hoe groter $2 \cdot 2^{-x+1} - 1$, dus: $x < 2$.

c Hoe groter x , hoe groter $3,5^{x+50} - 0,5$, dus: $x > -49$.

d Hoe kleiner x , hoe kleiner 3^{x-4} , dus: $x < 2\frac{1}{2}$.

11 a $540 \cdot 0,95^t$ is dalend, omdat de groeifactor kleiner dan 1 is. Omdat $540 \cdot 0,95^t$ steeds van 540 wordt afgetrokken, wordt er dus steeds minder afgetrokken, dus stijgt de grafiek.

b $A(t)$ plotten met goede instellingen, bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 100$ en $-100 \leq y \leq 550$.

Aflezen dat de uiteindelijke waarde bij 540 mg zit.

c Maximale hoeveelheid = 540

$$0,75 \cdot 540 = 405$$

Oplossen met GR: $t \approx 27,03 \approx 27$ minuten.

12 a $f(x) = 2^{x-2} - 3 = 2^x \cdot 2^{-2} - 3 = \frac{1}{4} \cdot 2^x - 3$. Ontstaat uit $y = 2^x$:

• $y = 2^x$ herschalen in de y -richting met factor $\frac{1}{4}$ geeft: $y = \frac{1}{4} \cdot 2^x$;

• $y = \frac{1}{4} \cdot 2^x$ verschuiven met -3 in de y -richting geeft: $y = \frac{1}{4} \cdot 2^x - 3 = f(x)$.

$g(x) = 4 \cdot 0,5^{x+3} - 1 = 4 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^x - 1 = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0,5^x - 1 = \frac{1}{2} \cdot 0,5^x - 1$. Ontstaat uit $y = 0,5^x$:

• $y = 0,5^x$ herschalen in de y -richting met factor $\frac{1}{2}$ geeft: $y = \frac{1}{2} \cdot 0,5^x$.

• $y = \frac{1}{2} \cdot 0,5^x$ verschuiven met -1 in de y -richting geeft: $y = \frac{1}{2} \cdot 0,5^x - 1 = g(x)$.

b $2^{x-2} = 2^{-3}$ geeft $x = -1$

c Oplossen met GR: $x \approx -2,32$

Hoe kleiner x , hoe groter $4 \cdot 0,5^{x+3} - 1$, dus: $x < -2,32$.

d $g(-2) = 4 \cdot 0,5^{-2+3} - 1 = 4 \cdot 0,5^1 - 1 = 1$.

Hoe kleiner x , hoe groter de functiewaarden, dus als $x \leq -2$, dan $g(x) \geq 1$.

13 a Stel eerst een formule op: $D(t) = 0,05 \cdot 2^t$.

Zeven keer vouwen geeft: $D(7) = 6,4$ mm.

b De diameter van de aarde is $2 \cdot 6365 = 12730$ km.

$$12730 \text{ km} = 12730 \cdot 10^6 \text{ mm.}$$

De volgende ongelijkheid moet dan worden opgelost:

$$D(t) > 12730000000$$

$$0,05 \cdot 2^t > 12730000000$$

Met behulp van de GR kom je dan op het antwoord: voor $t \geq 38$ is de dikte van het papier groter dan de diameter van de aarde.

- c** De oppervlakte van het resultaat na dertien keer vouwen is $4 \cdot 0,1 = 0,4 \text{ m}^2$. Bij elke keer vouwen werd de oppervlakte 0,5 keer zo groot. Dus de oorspronkelijke oppervlakte is $0,4 \cdot 2^{13} = 3276,8 \text{ m}^2$. Dit is ter vergelijking ongeveer 65% van een voetbalveld.

Het aantal velletjes toiletpapier die ze hebben gebruikt is 163840. Dit zijn ter vergelijking ongeveer 800 rolletjes toiletpapier!

- 14 a** Met 5 herschalen in de y-richting en 10 naar beneden verschuiven.

b $y = -10$

- c** Oplossen met GR: $x \approx 2,81$.

Hoe groter x , hoe groter $g(x)$, dus $x \geq 2,8$.

15 a $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$

$$\frac{1^x}{3^x} = 9$$

$$\frac{1}{3^x} = 9$$

$$3^{-x} = 9$$

$$x = -2$$

$$x = -2$$

Hoe groter x , hoe kleiner $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, dus: $x > -2$.

b $2 \cdot 5^{2x} = 250$

$$5^{2x} = 125$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Hoe groter x , hoe groter $2 \cdot 5^{2x}$, dus $x > \frac{3}{2}$.

- c** < not enough right fences : 1 >

< not enough right fences : 1 >

$$-x + 2 = 1,5$$

$$x = 0,5$$

Hoe groter x hoe kleiner 2^{-x+2} , dus $x > 0,5$.

16 a $f(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 2 = 5 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

- b** Eerst de y-as herschalen met de factor 10 en daarna 2 omhoog verschuiven.

c $y = 2$

d $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2 = 42$

$$5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 40$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 8$$

$$\frac{1^{x-1}}{2^{x-1}} = 2^3$$

$$2^{-x+1} = 2^3$$

$$-x + 1 = 3$$

$$x = -2$$

5.6 Totaalbeeld

1 a Oplossing:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 50 = 25$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 75$$

Oplossen met GR: $x \approx -6,229$

Hoe groter x , hoe kleiner $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, dus $x > -6,23$.

b Voer in: $Y1 = 500 \cdot 1,5^X$ en $Y2 = 300 \cdot 2^X$

Met de optie intersect vind je $x \approx 1,776$.

Vóór het snijpunt geldt $y_1 > y_2$, dus bij $x < 1,78$.

2 a Oplossing:

$$-35 + 5 \cdot 3^{x-5} = 100$$

$$5 \cdot 3^{x-5} = 135$$

$$3^{x-5} = 27$$

$$3^{x-5} = 3^3$$

$$x - 5 = 3$$

$$x = 8$$

b Oplossing:

$$5 \cdot 2^{2x-4} = 10\sqrt{2}$$

$$2^{2x-4} = 2\sqrt{2}$$

$$2^{2x-4} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2x - 4 = 1,5$$

$$2x = 5,5$$

$$x = 2,75$$

3 a Groeipercantage van 2%, dus nieuwe percentage is $100 + 2 = 102\%$, dus groeifactor $g = \frac{102}{100} = 1,02$.

b Startgetal $b = 43000$, groeifactor $g = 1,02$, dus:

$$p(t) = b \cdot g^t = 43000 \cdot 1,02^t.$$

c Verdubbeling bij $43000 \cdot 2$, dus $1,02^t = 2$.

Oplossen met GR: $t \approx 35$ jaar.

d 2010 is drie jaar voor 2013, dus $t = -3$ invullen: $p(-3) = 43000 \cdot 1,02^{-3} \approx 40520$ passagiers.

e $1,02^{10} \approx 1,2189$

f Kwartaal is $\frac{1}{4}$ jaar, dus: $1,02^{\frac{1}{4}} \approx 1,0050$

4 a Er blijft telkens 80% van het licht over. Dus groeifactor van $\frac{80}{100} = 0,8$ per cm kunststof.

b $P(d) = 100 \cdot 0,8^d$ met P als percentage dat doorgelaten wordt en d als dikte in cm.

$d = 2,5$, dus: $P(2,5) = 100 \cdot 0,8^{2,5} \approx 57,2\%$ wordt doorgelaten, dus $100 - 57,25 = 42,8\%$ wordt geabsorbeerd.

c Er wordt dan dus 10% doorgelaten, dus los op $100 \cdot 0,8^d = 10$.

$$0,8^d = \frac{10}{100} = 0,1$$

Oplossen met GR: $d \approx 10,32$ cm.

d $1 \text{ cm} = 0,1 \text{ mm}$, dus $g^{0,1} = 0,8^{0,1} \approx 0,978$.

- 5 a** $f(x) = 45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} - 240$
 $f(x) = 45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^x - 240$
 $f(x) = 5 \cdot 3^x - 240$
- b** Eerst herschaling in de y -richting met factor 5 en daarna een verschuiving van -240 in de y -richting.
- c** $y = -240$
- d** Los de vergelijking $5 \cdot 3^x - 240 = 0$ met de grafische rekenmachine op. Je vindt $x \approx 3,52$.
- 6 a** Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 25$ en $0 \leq y \leq 25$
- b** Als $t = 0$ dan $T_1 = 19 - 13 = 6$ en $T_2 = 6 + 13 = 19$.
 Melk is aan het begin koud, dus T_1 .
 Cola is aan het begin warm, dus T_2 .
- c** T_2 invoeren op de GR.
 Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 50$ en $-5 \leq y \leq 25$
 Aflezen dat de horizontale asymptoot bij $T = 6$ zit.
- d** T_1 invullen in GR met goede instellingen, bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 50$ en $-5 \leq y \leq 25$.
 Aflezen dat de horizontale asymptoot bij $T = 19$ zit.
- e** Cola had kamertemperatuur en melk wordt langzaam kamertemperatuur, dus kamertemperatuur is 19°C .
- f** T_1 en T_2 invullen in GR. Snijpunt bepalen: (2,79; 12,5).
 Dus vanaf 2,8 minuten is de cola kouder dan de melk.
- 7 a** $R = 1000 \cdot 0,90^t$
- b** Los op $1000 \cdot 0,90^t = 800$, dus $0,90^t = 0,8$. De GR geeft $t \approx 2,118$, dus 2 jaar en 1 maand.
- c** Los op $0,90^t = 0,5$. De GR geeft $t \approx 6,58$ jaar.
- d** 750 ligt midden tussen 500 en 1000, schatting 2,8 jaar.
- 8 a** 1,021
- b** 1971: 3,68 mld; 1988: 5,23 mld; 1900: 0,84 mld; 0: $5,96 \cdot 10^{-9}$ mld, hetgeen nogal ongeloofwaardig is. De aanname, dat de groeifactor constant is, is dus onjuist.
- c** $B = 3,6 \cdot 1,021^t$ mld.
- d** $B(80) \approx 18,98$ mld. Dus de 9 mld volgens het Wereldbevolkingsrapport uit 1999 zit daar ver onder.
- e** Uit het voorgaande resultaat volgt dat de groei van de wereldbevolking zal afremmen. En dat moet ook wel want onze planeet heeft te weinig grondstoffen om een exponentieel groeiend aantal mensen op den duur van voedsel en woonruimte te voorzien.
- 9 a** Het aantal volwassen vissen in een bepaald jaar bereken je zo: $200.000 + \frac{2}{3} \cdot$ aantal volwassen vissen van het voorgaande jaar $+ 0,10 \cdot 5.000.000$
- b** Doen, gebruik je GR.
- c** Begin met $N(t) = 2,1 - b \cdot g^t$. Uit $N(0) = 2$ volgt $b = 1,9$. Gebruik bijvoorbeeld $N(5)$ om g te berekenen.
- d** De groei wordt op den duur steeds langzamer.
- 10 a** Elke nacht wordt 3% van het water ververst, 97% niet, dus er blijft $0,97 \cdot 500 = 485$ g ureum over. De tweede dag komt er weer 500 g ureum bij, samen 985 g. Aan het begin van de derde dag is daar nog 97% van over: $0,97 \cdot 985 = 955,45$ g.
- b** Begin dag 3: 955,45 g en eind dag 3: 1455,45 g. Begin dag 4: 1411,79 g en eind dag 3: 1911,79 g. Begin dag 5: 1854,43 g en eind dag 3: 2354,43 g. Dus in de loop van de vijfde dag.
- c** Nu wordt 20% van het totaal ververst. Er blijft dus 80% van $U + 500$ over, dat is $0,8(U + 500) = 0,8U + 400$.
- d** $500 \cdot 0,8^n > 0$ voor elke n , dus $2000 - 500 \cdot 0,8^n < 2000$ voor elke n .

- e** Eigen antwoord.
- 11 a** $1,035^t = 2$ oplossen met de GR geeft $t \approx 20,15$. Na 21 jaar is het bedrag verdubbeld.
- b** $G = 10000 \cdot 1,035^{10} \approx 14105,99$. Dit betekent een rente van $\frac{4105,99}{10} \approx 410,60$ per jaar en dat is ongeveer 4,1%.
- c** $\frac{2615-2130}{10000} = 0,0485$, dus 4,85%.
- d** $10000 \cdot g^{10} = 14475$ en dus is $g = 1,4475^{\frac{1}{10}} \approx 1,0377$. De groeirekening moet een rentepercentage hebben van 3,77%.

6

Statistiek

6.1	Onderzoek	28
6.2	Data ordenen	32
6.3	Diagrammen gebruiken	38
6.4	Gegevens samenvatten	46
6.5	Uitspraken doen	56
6.6	Totaalbeeld	61

6.1 Onderzoek

- V1 a** Bijvoorbeeld politici, transportbedrijven, planologen en OV-bedrijven.
- b** Omdat het gaat over onderzoek naar groepen mensen, waarbij maar een deel van de groep kan worden onderzocht.
- c** Bijvoorbeeld het Centraal Planbureau (CPB), universiteiten, hogescholen, adviesbureaus.
- V2** Denk na over
- het aantal ouders en leerlingen dat je in het onderzoek betreft (allemaal of een selecte groep);
 - de opzet van je steekproef. Wie ja je vragen stellen en waar baseer je de selectie op (loting, ouders en leerlingen die je al kent of die je toevallig op een dag tegenkomt enzovoort);
 - hoe je deze ouders en leerlingen gaat bevragen (via een enquête (op papier of online) of met persoonlijke of telefonische interviews enzovoort);
 - welke informatie je wilt hebben (bezit van hoeveelheid fietsen; hoe vaak op de fiets; recreatief of woon/werk of woon/school; de afstand woon/werk of woon/school; leeftijden; elektrische fiets of niet; wel/niet leuk om te fietsen enzovoort).
- 1 a** Twijfelachtig. Het is niet zeker of jouw klasgenoten en in het algemeen de groep van leerlingen op jouw school echt representatief is voor de hele groep van jongeren.
- b** Representatief, de steekproef is groot genoeg. Uit het bevolkingsregister van Nederland kies je in ieder geval aselekt. Het bevolkingsregister is een goede afspiegeling van de totale populatie.
- c** Waarschijnlijk representatief, maar het is ook belangrijk waar de diepvrieskippen gekocht zijn. Slechts tien kippen van negentien verschillende merken is in veel gevallen voldoende om een kwaliteitsonderzoek te kunnen doen, maar niet in alle gevallen.
- 2 a** Niet aselekt (kan zelfs familie van elkaar zijn).
- b** Alleen aselekt als je geen idee hebt welke provincies waar op de kaart van Nederland zitten.
- c** Aselekt (maar afhankelijk van wat je als populatie beschouwt).
- d** Aselekt (maar afhankelijk van wat je als populatie beschouwt).
- 3** Geslacht: kwalitatief, m/v (of j/m, of 0 = vrouw, 1 = man)
 Geboortjaar: kwantitatief, discreet, bijvoorbeeld 1990 t/m 1994 (of 90 t/m 94)
 Geboortemaand: kwalitatief, januari t/m december (of 1 t/m 12)
 Gewicht: kwantitatief, continu, (ongeveer) 60 t/m 100 kg
 Lengte: kwantitatief, continu, (ongeveer) 150 t/m 210 cm
 Cijfergemiddelde: kwantitatief, continu, 1 t/m 10
 Cijfer voor wiskunde (geheel cijfer): kwantitatief, discreet, 1 t/m 10
 Huiswerk (aantal uren per week): kwantitatief, continu, 0 t/m 25
 Wiskundegroep: kwalitatief, wisA-wisB (eventueel nog wiskunde D)
 Profiel: kwalitatief, CM-EM-NG-NT (en eventueel combinatieprofielen)
 Plezier: kwalitatief, 1 = nee, 2 = weinig, 3 = neutraal, 4 = behoorlijk, 5 = veel
- 4 a** B
- b** C
- c** A
- d** A
- Hoewel een telefoonnummer uit cijfers bestaat, is het geen kwantitatieve variabele. Eigenlijk is een telefoonnummer een soort naam.
- e** C
- f** C
- g** B
- 5** C D

Op de eerste manier bereik je alleen telefoonbezitters. Op de tweede manier bereik je waarschijnlijk alleen meisjes. Beide steekproeven zijn niet representatief.

Op de derde en de vierde manier bereik je jongeren het snelst, maar ook deze manieren zijn waarschijnlijk niet representatief voor de populatie jongeren.

6 C

Nee, je krijgt een te hoge schatting want gezinnen zonder kinderen zitten niet in je steekproef. En kinderen uit grote gezinnen zitten naar verhouding vaker in de steekproef. Je zou de steekproef per gezin moeten uitvoeren.

7 a Gebruik de grafische rekenmachine: randInt(1,1200,20)

b Er worden willekeurige groepen gemaakt van honderd Nederlanders (via selectie uit de verzameling van de burgerservicenummers) die ieder genummerd worden van 1 tot en met 100. Er wordt een toevalsgetal van 1 tot en met 100 gegenereerd. Dit toevalsgetal is het nummer van de persoon die in de steekproef valt. Dit herhaal je vijftien keer (vijftien groepen van honderd Nederlanders).

c Stel dat in die stad 25% van de mensen tussen 0-20 jaar is en 60% tussen 20-60 jaar en de overige 15% 60 jaar en ouder is. Dan zorg je er bij een steekproef van 100 mensen voor dat je achtereenvolgens van deze leeftijdscategorieën er 25, 60 en 15 ondervraagt.

8 a Bij een aselechte steekproef zou elke kilometer autoweg in Nederland evenveel kans moeten hebben om onderzocht te worden op files. In het beschreven onderzoek wordt vrijwel het hele verkeersnet uitgesloten van het onderzoek, omdat alleen op die ene weg op Texel onderzoek wordt gedaan.

b Een autoweg op het waddeneiland Texel is zeker niet representatief voor het hele verkeersnet in Nederland. Alleen in de nacht onderzoek doen naar files is zeker niet representatief voor alle tijdstippen door de week heen.

c Een automerk is een naam en geen getal.

d Een aantal is getalsmatig en dus kwantitatief. Het aantal auto's per uur is altijd een geheel getal: er rijden geen delen van auto's rond. Daarom is dit aantal een discrete kwantitatieve variabele.

e De snelheid is een getal (kwantitatief) en kan elke waarde (binnen realistische grenzen) aannemen, zoals 61,4 km/h. Daarom is dit een continue kwantitatieve variabele.

9 Gebruik de functie: RandInt(1,1250,15)

Juist vanwege het toeval zijn hier veel antwoorden mogelijk. Iedere set van vijftien unieke nummers uit bijvoorbeeld het domein [1,1250] die door het toeval zijn gekozen, is te gebruiken.

10 a Dat kun je niet weten, want er staat niet bij hoe de steekproef is getrokken. De uitkomst 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 en 91 is net zo waarschijnlijk als iedere andere uitkomst.

b Het zijn allemaal hoekwoningen en die verbruiken meestal meer energie.

c Neem vijf huizen aselekt met een tuin op het noorden, waarvan twee hoekwoningen. Neem ook vijf huizen aselekt met een tuin op het zuiden, waarvan twee hoekwoningen.

11 a Erg veel groepen met elk weinig deelnemers.

b Een erg kleine steekproef in vergelijking met het totale aantal Nederlanders.

c De gegevens uit het onderzoek zijn niet representatief voor de bevolking van de twee landen.

d Je mag dergelijke conclusies nooit bij zo'n kleine steekproef trekken: het toeval speelt dan een te grote rol.

12 a Dit is maar één beroepsgroep. Je moet ook zeker managers en leraren in de steekproef hebben. Een gelaagde steekproef met personen (mannen én vrouwen) uit verschillende beroepsgroepen is beter.

b Om te voorkomen dat het weten dat je wel of geen medicijn slikt, van invloed is op het onderzoek.

c $189 - 104 = 85$

$$\frac{85}{11000} \cdot 100 \approx 0,77\%$$

d $\frac{104}{11000} \approx 0,0095$ en $\frac{189}{11000} \approx 0,0172$

Je vergelijkt 0,95% met 1,72%.

De verlaging van het percentage is 0,77%. De procentuele verlaging van het percentage is afgerond 45%.

Het klopt dus.

13 a Te weinig mogelijkheden om uit te kiezen.

- b** Je wilt vragen naar een mening, maar je vraagt naar een feit waarvan allang wetenschappelijk bekend is wat gezonder is.
- c** Het is een open vraag. Je krijgt heel veel verschillende antwoorden en dat is weer moeilijker te verwerken en te vergelijken.
- d** Als er niet bij staat wat jij gegeten hebt, of als je niet ontbeten hebt, kun je de vraag niet beantwoorden.
- e** Eigen antwoord.

Bijvoorbeeld: Waarmee ontbijt je meestal?

- brood met hartig beleg (ham, kaas, enzovoort)
- brood met zoet beleg (jam, hagelslag, enzovoort)
- melk of yoghurt met iets van granen erin (muesli, havermout, cruesli, cornflakes, enzovoort)
- drinkontbijt
- fruit
- iets anders
- ik ontbijt niet

14 a Lichaamslengte, tijdsbesteding: continu kwantitatief. Leukste vak, ontbijtgewoonte, favoriete popster of popgroep: kwalitatief. Zakgeld, bijverdienste: discreet kwantitatief.

- b** Continu kwantitatief: hoelang... (met categorieën waaruit je kunt kiezen). Kwalitatief: welk(e)... (met categorieën waaruit je kunt kiezen, plus een open-antwoordmogelijkheid, anders namelijk...). Discreet kwantitatief: hoeveel... (met categorieën waaruit je kunt kiezen).
- c** Niet naar mening of naar toekomst vragen, maar naar feiten. Bijvoorbeeld: 'Hoeveel kilometer woon je van school?' Of 'Hoeveel broers en zusters heb je?' Of 'Heb je gescheiden ouders?'

15 a Bijvoorbeeld:

- Is de niet-elektrische fiets het meest gebruikte vervoersmiddel waarop leerlingen naar school komen?
- Hoeveel investeren ouders van onze leerlingen in de fiets waarop hun kinderen naar school komen?

b Bijvoorbeeld aan de leerlingen:

- Hoe vaak fiets jij gemiddeld per week naar school?
- Hoeveel fietsen heb je om mee naar school te kunnen fietsen?
- Fiets je met een elektrische fiets naar school?
- Hoeveel versnellingen heeft je (meest gebruikte) fiets?

Bijvoorbeeld aan de ouders:

- Op een schaal van 1 tot en met 10: hoe belangrijk vindt u het dat uw kind naar school fietst?
- Hoe lang moet uw kind doen met een fiets?
- Wat geeft u maximaal uit als uw kind een nieuwe fiets nodig heeft?
- Met welk vervoersmiddel gaat u het meeste zelf naar de school voor bijvoorbeeld tafeltjesavond?

c Bijvoorbeeld:

- gemiddeld aantal fietsschooldagen per week = kwantitatief (naar keuze discreet of continu want een gemiddelde kan altijd een decimaal getal zijn, ook al is dat soms vreemd binnen de context)
- aantal fietsen = discreet kwantitatief
- elektrische fiets = kwalitatief (elektrisch of mechanisch)

d Bijvoorbeeld:

- Koppel alle leerlingnummers elk aan een uniek toevalsgetal.
- Maak met behulp van de toevalsgetallen twee even grote lotingen uit de leerlingnummers: een set voor leerlingen en een set voor ouders van leerlingen.

e Bijvoorbeeld:

- Vraag de school of je, verspreid over een paar ochtenden, de leerlingen uit de steekproef om de beurt een kwartiertje uit hun les mag halen om ze in een aparte ruimte uit te leggen waar het onderzoek voor dient en er vervolgens de vragen te stellen.
- De ouders zou je 's avonds kunnen bellen, als je van school de bijbehorende telefoonnummers krijgt; bij geen gehoor probeer je het nog een paar keer op andere avonden of in het weekend.

16 a De populatie is niet aangegeven, dus een beoordeling van het aselekt en representatief zijn van de steekproef is onmogelijk.

Vrijwillige deelname aan een onderzoek is een risico voor aselekt zijn en representativiteit.

De steekproefomvang lijkt groot genoeg te zijn.

b De lezers van 'Men's Health' zijn niet representatief voor alle Nederlandse mannen. Dus de conclusie die blijkt uit de kop is niet gebaseerd op een goed onderzoek.

c Mensen vertellen vaak niet de waarheid en maken het mooier dan het is, of durven er niet goed over te praten en doen niet mee. De conclusies zijn niet betrouwbaar en mogen niet veralgemeniseerd worden.

17 a Variabele: **genre** van Nederlandse muziekfestival in het jaar 2013

Type: kwalitatief.

b Bijvoorbeeld:

- de onderzoeksvraag is: Daalt het percentage Dance-festivals in Nederland in de periode 1993 - 2013?
- de populatie bestaat uit muziekfestivals in Nederland in een periode van bijvoorbeeld 20 jaar, nl. van 1993 tot en met 2013
- als steekproef doet men om de vijf jaar (in 1993, 1998, 2003, 2008 en 2013) een telling van muziekfestivals per genre in dat jaar

c Bijvoorbeeld: 'Wat is het percentage Jazz/Blues-festivals van het totaal aantal muziekfestivals in Nederland in 2013?' of 'Welk genre muziekfestival kwam het minste voor in Nederland in 2013?'.

De populatie bestaat uit de muziekfestivals die plaatsvonden in Nederland in 2013.

d Het gaat dan om beschrijvende statistiek: je hebt alle gegevens verzameld die je nodig hebt om deze vraag te beantwoorden; je weet 100% zeker dat je antwoord op de onderzoeksvraag de werkelijkheid weergeeft.

18 a Bijvoorbeeld:

Geef de leerlingen b.v. ieder een uniek nummer uit het interval 1 t/m 32 en laat een random getal genereren. De leerling met het betreffende nummer is de assistent.

b Zelf doen.

Voorbeeld: iedere leerling schrijft op een eigen kaartje zijn naam; alle kaartjes gaan in een hoge hoed; de hoed wordt geschud en zonder te kijken pakt de mentor een kaartje uit de hoge hoed en leest de naam van de leerling die als assistent gaat helpen hardop voor.

c Eigen antwoord.

Voorbeeld: zonder dat de leerlingen van te voren weten dat de mentor dit bedacht heeft, kiest de mentor de leerling die als eerste in de les vraagt of hij/zij naar de WC moet. Of dit echt aselekt is, is zeer de vraag: heeft iedere leerling in de klas dezelfde kans om tijdens die les naar de WC te moeten? Waarschijnlijk niet!

De mentor kan ook de leerling kiezen die als laatste de klas binnenkomt bij aanvang van het lesuur; ook hier is het de vraag of dit echt een aselekte keuze is want misschien is er in deze klas/groep een leerling die werkelijk altijd als laatste binnenkomt of juist iemand die werkelijk nooit als laatste binnenkomt.

6.2 Data ordenen

V1 Hier volgt een mogelijke werkwijze.

Vingerafdrukken kun je verzamelen met een inktkussen en papier. Je kunt er dan meteen bij schrijven welk patroon je ziet en het leerlingnummer erbij zetten. Vervolgens maak je voor ieder patroon een aparte map waarin je de vingerafdrukken met dat patroon stopt.

Als je later een vingerafdruk vindt en je wilt weten van wie deze is, pak je de map met het juiste patroon erbij en vergelijk je de gevonden vingerafdruk met alle afdrukken uit die map. Als je de juiste vingerafdruk gevonden hebt, controleer je op leerlingnummer om welke leerling het gaat.

Je kunt natuurlijk ook zelf een database maken en daarin digitale foto's van de vingerafdrukken plaatsen; leerlingnummer en patroonkenmerken kun je er als zoek sleutels bij vastleggen.

1 a 0,32

b Bij een relatieve frequentie weet je hoe het aantal zich verhoudt ten opzichte van het totaal.

c Maak een tabel zoals die in de uitleg.

Turf eerst hoe vaak lus, boog, en kring voorkomen in je klas. Doe dat in de tabel onder het kopje aantal. Maak de tabel verder af.

2 a Zie de tabel.

klasse	abs. frequentie
150– < 155	1
155– < 160	1
160– < 165	1
165– < 170	3
170– < 175	6
175– < 180	2
180– < 185	3
185– < 190	1
190– < 195	1
195– < 200	1

b Het totale aantal waarnemingen is 20 (twintig meisjes).

In klasse 1,50– < 1,55 staat 1 waarneming van de 20 in totaal: dat geeft een proportie van $\frac{1}{20} = 0,05$.

Zo werkt het ook bij de andere klassen.

De cumulatieve frequentie krijg je door bij elke frequentie de voorafgaande frequenties op te tellen.

klasse	abs. freq.	rel. freq.	cum. freq.
150– < 155	1	0,05	0,05
155– < 160	1	0,05	0,10
160– < 165	1	0,05	0,15
165– < 170	3	0,15	0,30
170– < 175	6	0,30	0,60
175– < 180	2	0,10	0,70
180– < 185	3	0,15	0,85
185– < 190	1	0,05	0,90
190– < 195	1	0,05	0,95
195– < 200	1	0,05	1

- c** Met de cumulatieve frequenties kun je bepalen wat bijvoorbeeld de frequentie van alle waarden kleiner dan een bepaalde waarneming is. Cumuleren betekent opstapelen.
- d** Bijvoorbeeld:
150– < 155 als eerste klasse, of 150– < 160.
- 3 a** De klassen zijn niet allemaal even breed. Bovendien zijn de lengtes 1,85– < 1,90 niet opgenomen in de tabel.
- b** De lengtes van deze meisjes zijn heel gelijkmatig verdeeld; de gelijkmatigheid zit vooral bij de kortere meisjes.
- c** Met een wisselende klassenbreedte kun je al snel een verkeerde indruk van de gegevens krijgen.
- 4 a** Twee getallen veranderen, namelijk de absolute frequentie van schoenmaat 36 en het totaal.
- b** Negen getallen veranderen (alle somfrequenties).
- c** Niet alle percentages veranderen door de toevoeging (in elk geval zeker niet de laatste somfrequentie van 100%). Zeven getallen veranderen.
- 5 a** Twee getallen veranderen, namelijk de absolute frequentie van schoenmaat 44 en het totaal.
- b** Eén getal verandert, namelijk de somfrequentie bij schoenmaat 44.
- c** Acht getallen veranderen; allemaal behalve de laatste 100%.
- 6 a** De hoogste frequentie treedt op in de klasse 166– < 174 en is 33.
- b** De hoogste frequentie treedt op in het interval 168– < 170 en is 11.
- c** Hoe kleiner de klassenbreedte, hoe nauwkeuriger de tabel. Maar kies je de klassenbreedte te klein, dan wordt je tabel te groot en onoverzichtelijk.
- 7 a** 0 en 10
- b** De nieuwe klassenindeling wordt: 0 – 29 en 30 – 59 en 60 – 80+.
De nieuwe klasse 30 – 59 bestaat uit de oude drie klassen 30 – 39 en 40 – 49 en 50 – 59.
Je kunt zien dat die drie staven bij zowel mannen als vrouwen de langste drie zijn. Bij de mannen zijn ze zelfs nog wat langer. Tel de aantallen van deze drie mannenstaven bij elkaar op en dan kom je op een geschat aantal van 7000(·1000).
- c** Bekijk bijvoorbeeld klasse 0 – 9 bij de mannen: je kunt aflezen hoeveel mannen een leeftijd van 0 t/m 9 hebben. Je weet echter niet hoeveel daarvan er bijvoorbeeld jonger dan 5 jaar zijn of hoeveel er ouder dan 7 zijn.
Daarom kun je deze klasse niet meer opdelen in kleinere klassen: je weet niet hoeveel personen in elk van de deelklassen horen.
- 8** B E
Bewering A is onjuist, een relatieve frequentie kan ook genoteerd zijn als proportie of als breuk.
Bewering B is juist, soms kan het door afronden iets minder of iets meer dan 100 zijn.
Bewering C is onjuist, zie bewering 2.
Bewering D is onjuist, het gaat om een deel van het geheel bij een relatieve frequentie.
Bewering E is juist. Het gaat altijd om een deel van het geheel bij een relatieve frequentie. Alleen de laatste waarde bij een somfrequentie is 100% want alleen die laatste waarde vertegenwoordigt alle waarnemingen.
- 9 a** € 1000,00
- b** € 900,00, maar € 900,00 zelf zit in de volgende klasse.
- c** $\frac{700+800}{2} = 750$ euro
- d** De ondergrens is € 900,00; de bovengrens is € 1000,00, maar € 1000,00 zelf zit in de volgende klasse.
- e** klassenbreedte 100
- f** absolute frequenties

10 a Zie de tabel.

<i>score</i>	<i>frequentie</i>
25– < 35	2
35– < 45	1
45– < 55	5
55– < 65	20
65– < 75	6
75– < 85	4
85– < 95	2

Let op dat de waarde 55 bij klasse 55– < 65 hoort en dat de waarde 65 bij klasse 65– < 75 hoort.

b Deel alle absolute frequenties door 40.

<i>score</i>	<i>frequentie</i>	<i>relatieve frequentie (%)</i>
25– < 35	2	5
35– < 45	1	2,5
45– < 55	5	12,5
55– < 65	20	50
65– < 75	6	15
75– < 85	4	10
85– < 95	2	5

11 a Eigen antwoord. Achter elk van de getallen 1 tot en met 20 heb je het aantal geturfd dat in jouw lijst met honderd toevalsgetallen voorkwam.

b Eigen antwoord. Achter elk van de getallen 1 tot en met 20 staat het aantal turven.

c Eigen antwoord. Iedere relatieve frequentie is gelijk aan de overeenkomende absolute frequentie gedeeld door 100.

d Alle 20 frequenties in de buurt van $\frac{1}{20} \cdot 100 = 5\%$

12 a De klassen zijn niet allemaal even breed.

b De lengtes van deze jongens zijn heel gelijkmatig verdeeld; de gelijkmatigheid zit vooral bij de kortere jongens.

c Met een wisselende klassenbreedte krijg je een verkeerde indruk van de gegevens.

d Omdat je niet over de ruwe data beschikt, gebruik je de gegevens uit de frequentietabel.

De breedste klasse is 150– < 165. Het beste kun je de andere klassen even breed maken. Zie tabel.

<i>lengte (cm)</i>	<i>frequentie</i>	<i>rel. frequentie</i>	<i>cum. rel. frequentie (%)</i>
150– < 165	15	0,25	25
165– < 180	30	0,50	75
180– < 195	15	0,25	100
totaal	60	1	100

e Nee, je kunt niet zien of de lengtes van de kleinere jongens gelijkmatig verdeeld zijn, daar is de eerste klasse veel te breed voor. Je zou kunnen zeggen dat er ongeveer evenveel kleine jongens als lange jongens zijn en dat de middenmoot weer evenveel jongens telt als de kleine en lange jongens samen.

13 a De tabellen hebben verschillende klassenindelingen en er staan absolute aantallen, terwijl ze een verschillend aantal werknemers hebben.

- b** Neem voor beide bedrijven een klassenindeling van € 100 breed, startend met klasse 400– < 500 en eindigend met klasse 1100– < 1200. Bereken voor iedere klasse de relatieve frequentie.

Bedrijf 1:

<i>weekloon (euro)</i>	<i>aantal werknemers</i>	<i>relatieve frequentie (%)</i>
400– < 500	0	0
500– < 600	8	12,3
600– < 700	10	15,4
700– < 800	16	24,6
800– < 900	14	21,5
900– < 1000	10	15,4
1000– < 1100	5	7,7
1100– < 1200	2	3,1
totaal	65	100

Bedrijf 2:

<i>weekloon (euro)</i>	<i>aantal werknemers</i>	<i>relatieve frequentie (%)</i>
400– < 500	5	20
500– < 600	12	48
600– < 700	5	20
700– < 800	3	12
800– < 900	0	0
900– < 1000	0	0
1000– < 1100	0	0
1100– < 1200	0	0
totaal	25	100

- c** Uit een relatieve cumulatieve frequentietabel. Maar omdat het hier maar om één salarisgrens gaat, kun je het sneller even berekenen. In bedrijf 2: $20 + 48 = 68\%$ van de werknemers verdient minder dan € 600,00. In bedrijf 1: 12,3%. Dus in bedrijf 2 zijn er relatief meer mensen die minder dan € 600,00 per week verdienen.

Bedrijf 1:

<i>weekloon (euro)</i>	<i>relatieve frequentie (%)</i>	<i>cum. rel. frequentie (%)</i>
400– < 500	0	0
500– < 600	12,3	$0 + 12,3 = 12,3$
600– < 700	15,4	$12,3 + 15,4 = 27,7$
700– < 800	24,6	$27,7 + 24,6 = 52,3$
800– < 900	21,5	$52,3 + 21,5 = 73,8$
900– < 1000	15,4	$73,8 + 15,4 = 89,2$
1000– < 1100	7,7	$89,2 + 7,7 = 96,9$
1100– < 1200	3,1	$96,9 + 3,1 = 100,0$

Bedrijf 2:

weekloon (euro)	relatieve frequentie (%)	cum. rel. frequentie (%)
400– < 500	20	20
500– < 600	48	68
600– < 700	20	88
700– < 800	12	100
800– < 900	0	100
900– < 1000	0	100
1000– < 1100	0	100
1100– < 1200	0	100

- d** Van het ene bedrijf heb je een klassenindeling van 100,00 breed. Per klasse weet je niet hoe de frequentie verdeeld is over die breedte van 100,00. Je weet dus wel dat er tien mensen zijn die tussen de € 600,00 en € 700,00 verdienen, maar je weet niet of al deze mensen bijvoorbeeld € 675,00 verdienen of dat ze geheel verspreid over die € 600,00 en € 700,00 verdienen of misschien wel alle tien precies € 600,00.

Je zou een schatting kunnen maken door te verwachten dat ze gelijkmatig verspreid over de € 600,00 en € 700,00 verdienen. Vijf van deze tien mensen zullen dan naar schatting minder dan € 650,00 verdienen en deze vijf tel je mee in de totale somfrequentie die je nodig hebt.

- 14 a** De eerste negen rijen bevatten data, hoewel je zou kunnen zeggen dat 'Mannen en vrouwen' en "Totaal bevolking" uit andere tijden worden afgeleid.

De rijen 'Groene druk' en 'Grijze druk' zijn echt uit het voorgaande afgeleide waarden met een bepaald doel.

- b** De bevolkingsgegevens zijn discrete kwantitatieve variabelen.

De variabelen 'OGroene druk' en 'Grijze druk' bevatten continue kwantitatieve variabelen.

Kwantitatieve variabelen hebben het grote voordeel dat je ermee kunt rekenen.

- c** Dit percentage heeft de verhouding weer tussen het aantal oudere (meestal niet-werkende) mensen die AOW en pensioen krijgen en het aantal werkenden. Het CBS is in die verhouding geïnteresseerd omdat de werkenden voor een groot deel van de overheidsinkomsten zorgen en daarom de AOW betalen.

- d** Bijvoorbeeld in 1900: $\frac{272+35}{1732+802} \cdot 100 = 12,1\%$.

En zo gaan de andere percentages ook.

Het oplopen van dit getal betekent dat er steeds meer (deels van de overheid afhankelijke) ouderen zijn in verhouding tot het aantal werkenden (die een groot deel van de overheidsinkomsten voor hun rekening nemen).

- e** De 'Groene druk' is een maat voor de verhouding tussen de huidige en de toekomstige aantallen werkenden.

- f** Het aantal vrouwen is steeds groter dan het aantal mannen, tenminste gedurende de jaren die in de tabel zichtbaar zijn.

In 2019 is de proportie mannen: $\frac{8475}{17082} \approx 49,6\%$.

- 15 a** De populatie = de slakken op een stuk grond;

De variabele = aantal slakken per m^2 ;

De soort variabele = discreet kwantitatief.

- b** De som van alle frequenties is 48. Dus $48 m^2$.

- c** Per leerling $4 m^2$ en in totaal $48 m^2 \Rightarrow \frac{48}{4} = 12$ leerlingen.

- d** $(2 \cdot 16) + (3 \cdot 14) + \dots + (9 \cdot 1) = 172$ slakken.

- e Van de totaal 48 m² zijn er 3 met 7 slakken erop $\Rightarrow$ de proportie is $\frac{3}{48} = \frac{1}{16} = 0,0625$.
- f In totaal 172 slakken, verdeeld over in totaal 48 m² $\Rightarrow \frac{172}{48} = 3,6$ slakken.

16 a Zie de tabel.

Schoenmaat brugklassers			
maat	freq	rel.freq	cum.rel.freq
34	1	0,033	0,033
35	1	0,033	0,067
36	1	0,033	0,100
37	3	0,100	0,200
38	5	0,167	0,367
39	5	0,167	0,533
40	7	0,233	0,767
41	4	0,133	0,900
42	2	0,067	0,967
43	0	0,000	0,967
44	0	0,000	0,967
45	1	0,033	1,000
	30	1,000	

- b Zie het antwoord bij a.
- c 67,7% heeft een schoenmaat van 40 of minder (zie de cumulatieve tabel). Dus $100 - 67,7 = 32,3\%$ heeft een schoenmaat boven de 40.
- d Maak gebruik van de gegevens uit de frequentietabel bij deelvraag a.

maat	rel. freq. (in %)	cum. rel. freq. (in %)
34-37	20	20
38-41	70	90
42-45	10	100

- e Een vierde deel van klasse 38 – 41 bestaat uit maten die groter zijn dan maat 40. Daarom neem je een vierde deel van het percentage leerlingen dat een schoenmaat uit deze klasse heeft $\Rightarrow 0,25 \cdot 70 = 17,5\%$.

Het percentage leerlingen dat een schoenmaat in de klasse 42 – 45 heeft $\Rightarrow 10\%$.

Samen 27,5%.

Als je alleen de gegevens uit de klassenindeling hebt, weet je niet precies hoeveel leerlingen maat 40 hebben. Je doet een schatting door de leerlingen uit klasse 38 – 41 evenredig over de 4 maten in deze klasse te verdelen. In dit geval kom je zo lager uit dan de werkelijkheid uit.

6.3 Diagrammen gebruiken

V1 Eigen antwoord.

1 a Zie de tabel.

	<i>freq</i>
lopen	8
fietsen	11
auto	2
scooter	4
OV	5
	30

b Zie de tabel.

	<i>freq</i>	<i>rel. freq (%)</i>
lopen	8	26,7
fietsen	11	36,7
auto	2	6,7
scooter	4	13,3
OV	5	16,7
	30	100,0

c Voor beide diagrammen geldt dat ze dezelfde horizontale as hebben als de overeenkomende diagrammen in de uitleg. De verticale as bestaat echter uit percentages; de staven/punten krijgen de hoogte van de bijbehorende percentages.

d Sectorhoek is proportie maal 360, dus $\frac{26,7}{100} \cdot 360 = 96^\circ$, enzovoort.

	<i>freq</i>	<i>rel. freq (%)</i>	<i>sectorhoek (°)</i>
lopen	8	26,7	96
fietsen	11	36,7	132
auto	2	6,7	24
scooter	4	13,3	48
OV	5	16,7	60
	30	100,0	360

e Je kunt met relatieve frequenties beter groepen vergelijken (zonder rekening te hoeven houden met de verschillende groeps groottes).

f Vraag aan al je klasgenoten hoe ze naar school gaan. Maak hier een turftabel van met een kolom met absolute frequenties. Teken er een staafdiagram bij.

2 a Klassenindeling: 1,50– < 1,55, 1,55– < 1,60, etc.
Klassenbreedte: 5 cm.

b Markeringspunten zijn de middens van de staven. Dus onder deze punten een staaf tekenen, zodat het punt op het midden van de bovenkant van de staaf ligt.

c Voorgaande staven plus de staaf van de huidige klasse opstapelen; de punt komt nu niet boven het midden van de klasse (staaf) te staan, maar boven de rechtergrens van de klasse.

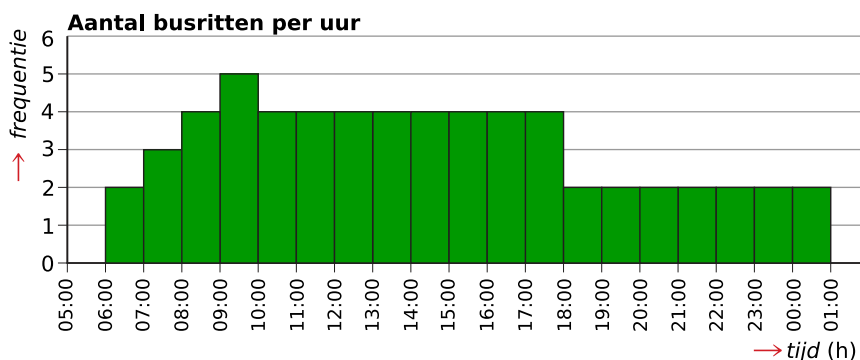
d Vergelijk jouw frequentiepolygoon met dat in de uitleg.

e Zie de figuur in de uitleg.

- 3 a** De variabele bij een histogram is altijd een kwantitatieve variabele. De variabele bij een staafdiagram mag ook kwalitatief zijn (en staven van een staafdiagram worden niet gekoppeld getekend).
- b** Je kunt zien hoe de (relatieve) frequentie verandert als je de waarde van de variabele verandert.
- c** De waarde van alle waarnemingen.
- 4 a** Zie de tabel.

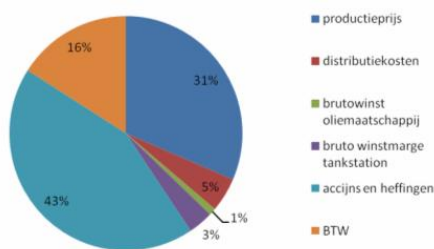
<i>tijd (h)</i>	<i>freq.</i>
05 : 00– < 06 : 00	0
06 : 00– < 07 : 00	2
07 : 00– < 08 : 00	3
08 : 00– < 09 : 00	4
09 : 00– < 10 : 00	5
10 : 00– < 11 : 00	4
11 : 00– < 12 : 00	4
12 : 00– < 13 : 00	4
13 : 00– < 14 : 00	4
14 : 00– < 15 : 00	4
15 : 00– < 16 : 00	4
16 : 00– < 17 : 00	4
17 : 00– < 18 : 00	4
18 : 00– < 19 : 00	2
19 : 00– < 20 : 00	2
20 : 00– < 21 : 00	2
21 : 00– < 22 : 00	2
22 : 00– < 23 : 00	2
23 : 00– < 00 : 00	2
00 : 00– < 01 : 00	2
01 : 00– < 02 : 00	0
totaal	60

- b** Zie de figuur.



- c** de vertrektijden
- d** het aantal ritten per heel uur
- e** Dat hangt van de hoeveelheid gegevens af en van wat je wilt laten zien.
- 5 a** Je krijgt vijf staven van elk 25%, twee staven van elk 40% en vijf staven van elk 35%. Dat geeft een totaal van 380% in plaats van 100%.

- b** De klasse $150- < 175$ met 25% van de mannen wordt onderverdeeld in vijf klassen van elk 5 cm breed. Elk van deze klassen bevat $\frac{25}{5} = 5\%$ van de mannen. De klasse $175- < 185$ met 40% van de mannen wordt onderverdeeld in twee klassen van elk 5 cm breed. Beide klassen bevatten $\frac{40}{2} = 20\%$ van de mannen. De klasse $185- < 210$ met 35% van de mannen wordt onderverdeeld in vijf klassen van elk 5 cm breed. Elk van deze klassen bevat $\frac{35}{5} = 7\%$ van de mannen.
- 6** Laat bij twijfel je antwoord controleren. Zie het antwoord in het voorbeeld.
- 7** Laat bij twijfel je antwoord controleren. Zie het antwoord in het voorbeeld.
- 8 a** Het percentage aardgas is al gegeven; voor aardolie is het $\frac{939}{2633} \cdot 100 \approx 35,7$, enzovoort. Je vindt de volgende percentages: aardgas 48,8%, aardolie 35,7%, steenkool 13,2% en overige 2,4%.
- b** Bereken eerst de sectorhoeken. Aardgas krijgt een sectorhoek van $0,488 \cdot 360 \approx 176^\circ$, aardolie 118° , steenkool 47° en overige 9° . Bij elkaar zijn de sectorhoeken 360° . Teken vervolgens het cirkeldiagram.
- c** De sectorhoek voor aardgas is in dit geval $\frac{1481}{1481+1194+370+112} \cdot 360 \approx 169^\circ$. De overige sectorhoeken zijn aardolie 136° , steenkool 44° en overige 13° .
- d** Er is een relatieve afname van steenkool- en aardgaswinning. De rest neemt relatief toe.
- 9 a** $\frac{5}{144} \cdot 100 \approx 3,5\%$
- b** Bruto winstmarge: 3,5% van 360 is ongeveer 13 graden, dus teken een sectorhoek van 13 graden. Zo ook voor de andere onderdelen.



- c** Bijna 60% van de prijs is accijns (belasting) en btw. Dat bedrag gaat naar de overheid.
- 10 a** Nederland haalt voor $2363 \cdot 10^{15}$ joule aan energie uit aardgas.
- b** $308 \cdot 10^{15}$ joule
- c** Het lijntje 'overige energie' en het lijntje 'elektriciteit' naar het blokje 'centrales'. Het betreft bij alternatieve energie bijvoorbeeld windenergie en zonne-energie.
- d** $3260 \cdot 10^{15}$ joule
- e** $9033 \cdot 10^{15}$ joule
- f** Uit het schema: invoer 9033 waarvan $3451 + 4239 + 770 = 8460$ bekend is. Rest is elektriciteit. Dus $9033 - 8460 = 573 \cdot 10^{15}$ joule.
- g** Aardgas is de hoofdader van de Nederlandse energiebalans. Het realiseert een groot deel van het verbruik aan energie en is ook een belangrijk uitvoerproduct.
- h** Linksboven het blokje onttrekking uit voorraden en linksonder opslag in bunkers.

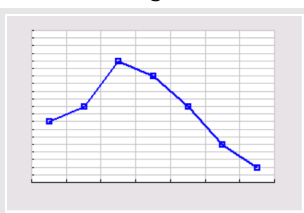
11 a Zie de tabel.

loon (€)	rel. freq. (%)
500– < 600	12
600– < 700	15
700– < 800	25
800– < 900	22
900– < 1000	15
1000– < 1100	8
1100– < 1200	3

b Gebruik de grafische rekenmachine of Excel. De figuren laten een staafdiagram zien gemaakt met de GR.



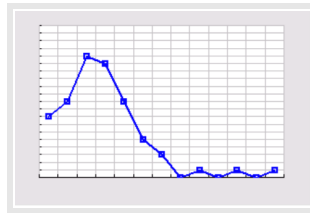
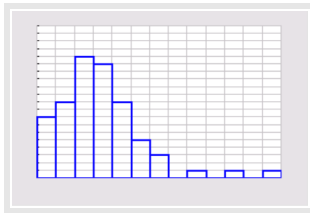
c Gebruik de grafische rekenmachine of Excel. Zie de figuur.



d Zie de tabel.

netto weekloon (€)	freq.	rel. freq. (%)
500– < 600	8	11,4
600– < 700	10	14,3
700– < 800	16	22,9
800– < 900	15	21,4
900– < 1000	10	14,3
1000– < 1100	5	7,1
1100– < 1200	3	4,3
1200– < 1300	0	0,0
1300– < 1400	1	1,4
1400– < 1500	0	0,0
1500– < 1600	1	1,4
1600– < 1700	0	0,0
1700– < 1800	1	1,4
	70	100,0

e Gebruik de grafische rekenmachine. Zie de figuur.

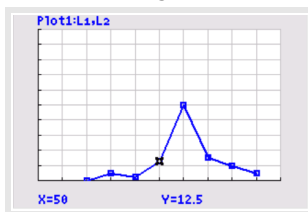


12 a Zie de tabel.

score	freq.	rel. freq. (%)
25– < 35	2	5
35– < 45	1	2,5
45– < 55	5	12,5
55– < 65	20	50
65– < 75	6	15
75– < 85	4	10
85– < 95	2	5

b Gebruik de grafische rekenmachine of Excel.

c Gebruik de grafische rekenmachine of Excel. Zie de figuur.



d Lees de verticale as af voor de horizontale waarde 55, dus 20%. Dat betekent dat 20% minder dan 55 punten heeft gescoord, dus 80% heeft 55 punten of meer gescoord.

13 a Het aantal behaalde medailles van elk metaal.

b Omdat er drie gegevens (variabelen) tegelijk worden weergegeven. De assen geven land, medaillekleur en aantal.

c VS (46)

d De VS (29)

e De VS (104)

f Zelf doen. Voordeel is dat je de totalen gemakkelijker kunt vergelijken. Nadeel is dat je het aantal medailles per kleur moeilijker kunt vergelijken.

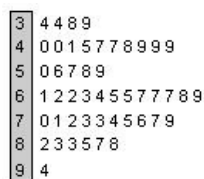
g Bijvoorbeeld een staafdiagram met per land drie staafjes naast elkaar op één as.

14 a Zie de tabel.

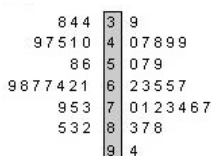
<i>cijfer</i>	<i>klas A</i>	<i>klas B</i>
2,5– < 3	0	0
3– < 3,5	2	0
3,5– < 4	1	1
4– < 4,5	2	1
4,5– < 5	3	4
5– < 5,5	0	1
5,5– < 6	2	2
6– < 6,5	3	2
6,5– < 7	4	3
7– < 7,5	1	5
7,5– < 8	2	2
8– < 8,5	2	1
8,5– < 9	1	2
9– < 9,5	0	1
9,5– < 10	0	0

Het staafdiagram krijgt per klasse twee afzonderlijke staven.

b Zie de figuur.



c Zie de figuur.



d In een steelbladdiagram kun je alle oorspronkelijke gegevens weer terugvinden, maar ook snel zien hoeveel cijfers er tussen bijvoorbeeld de 5 en de 6 zitten en nauwkeurig het gemiddelde berekenen. Maar heb je veel gegevens, dan wordt ook zo'n steelbladdiagram onoverzichtelijk.

15 a lijndiagram en gestapeld staafdiagram

b Geboorteoverschot = geboorten minus sterfgevallen; buitenlands migratiesaldo = aantal immigranten minus emigranten (dus vertrekken naar een ander land of komen van een ander land naar Amsterdam); binnenlands migratiesaldo = mensen die binnen Nederland verhuizen (dus aantal gekomen naar Amsterdam minus aantal vertrokken uit Amsterdam).

c Ongeveer $4650 + 850 - 1600 = 3900$

d Met een positief migratiesaldo komen er meer mensen naar Amsterdam dan er vertrekken. Met een negatief saldo is dat andersom.

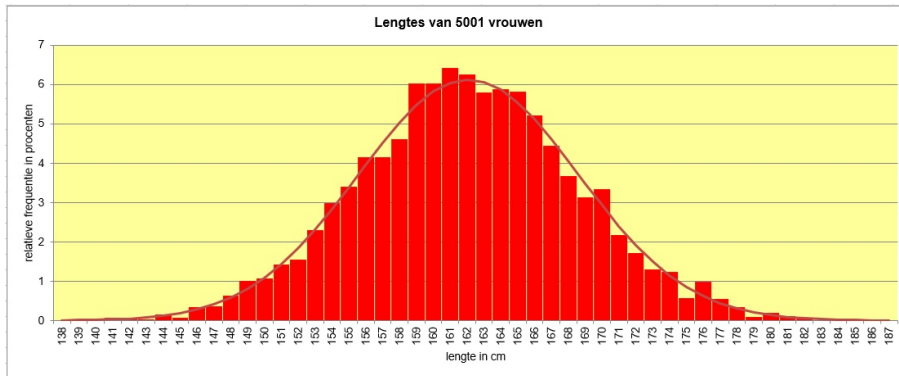
e Geboorteoverschot ≈ 4750 ; binnenlands saldo ≈ 1850 ; buitenlands migratiesaldo ≈ -800 . De toename is $4750 + 1850 - 800 \approx 5800$ personen.

16 a Om continue kwantitatieve variabelen.

b *lengte*: $137,5- < 138,5$ cm, etc.

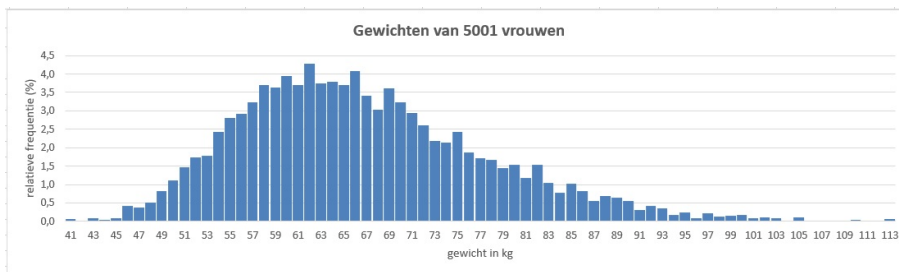
gewicht: 40,5– < 41,5 kg, etc.

c Zie de figuur.

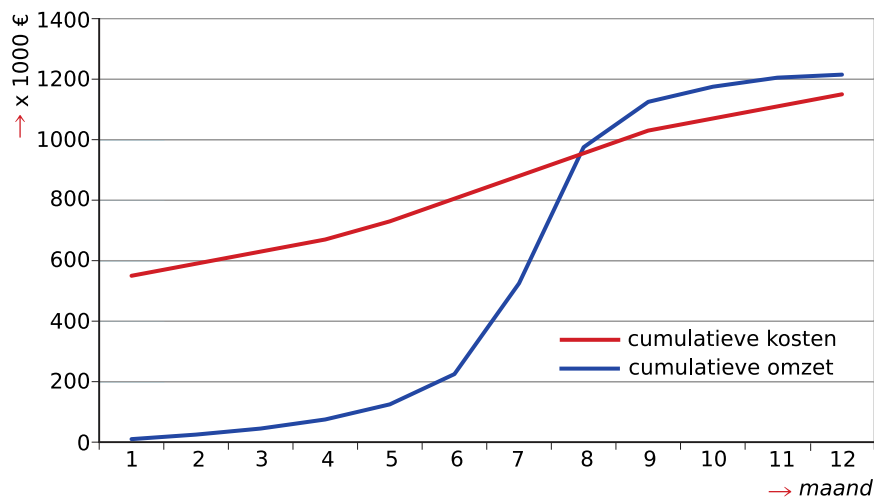


d Omdat de lengtes op hele cm zijn afgerond mag je de hele klasse 156 en de hele klasse 168 en alle klassen daar tussenin mee rekenen. Dat zijn in totaal 3426 vrouwen en dat is ongeveer 68,5%. Je kunt natuurlijk ook Excel eerst alle frequenties laten omrekenen naar procenten (dat heb je voor het histogram ook moeten doen) en dan de percentages optellen.

e Zie de figuur.



17 a Bereken eerst de cumulatieve frequentie per maand van de omzet en van de kosten en zet deze cumulatieve frequenties uit boven het einde van de maand.



b In de maanden 1 tot en met 8, dus van januari tot en met augustus.

c Er wordt dan verlies gedraaid.

d € 65000 winst.

18 a Kwalitatieve variabelen op de horizontale as.

b In het staafdiagram worden twee dingen tegelijk vergeleken. Per regio de verdeling over de drie soorten brandstof en de regio's onderling. Dat lukt niet in één cirkeldiagram.

- c** De percentages zijn: Noord-Amerika 4,2; Zuid-Amerika 4,1; Europa 3,2; Rusland 32,2; Midden-Oosten 40,8; Afrika 7,8; Azië en Australië 7,6. De bijbehorende sectorhoeken vind je door deze getallen met 3,6 te vermenigvuldigen.
- d** Een staafdiagram.

6.4 Gegevens samenvatten

V1 Eigen antwoord.

Denk bijvoorbeeld aan een staafdiagram waarin per vak de staaflengte aangeeft hoeveel leerlingen er gemiddeld per les aanwezig zijn.

Ook is het handig om een lijst toe te voegen van leerlingen die vaak afwezig zijn. Daarbij in een overzicht aangeven om hoeveel uur het gaat en bij welke vakken.

Maar er zijn natuurlijk veel meer mogelijkheden.

- 1 a** Het modale cijfer is het cijfer dat het vaakst voorkomt. Hier zegt het niet veel, want misschien komt alleen 6,7 twee keer voor en zijn alle andere cijfers veel hoger of lager, maar wel onderling verschillend.

- b** Klas A. Zet alle 23 cijfers van klein naar groot achter elkaar, dus 3,4; 3,4; 3,8 ... 8,2; 8,3; 8,5. Het is een oneven nummer, dus de mediaan is het middelste getal in de rij. In dit geval het twaalfde getal en dat is 6,2.

Zo werkt het ook voor klas B. Klas B heeft 25 cijfers, dus het dertiende getal is de mediaan. Dat is 6,5.

- c** De mediaan (middelste cijfer) zegt niet veel. Maar je weet dat de helft van de cijfers hoger dan of gelijk is aan de mediaan 6,2 (klas A) of 6,5 (klas B). En de andere helft is lager.

- d** Klas A: tel alle 23 getallen bij elkaar op en deel de som door 23; gemiddeld een 6,0.

Klas B: tel alle 25 getallen bij elkaar op en deel de som door 25; gemiddeld een 6,5.

- e** Klas B heeft het hoogste gemiddelde.

Omdat je nog niet naar de spreiding hebt gekeken, kun je nog geen volledige uitspraak doen. Misschien heeft klas B wel een paar hele hoge uitschieters en verder juist niet zoveel hoge cijfers. Welke klas heeft dan hoger gescoord?

- 2 a** De cijfers van A liggen meer gespreid dan die van B.

- b** Het gemiddelde van leerling C is behoorlijk hoger; de cijfers van C liggen meer naar rechts op de getallenlijn.

- c** Nee, eigenlijk niet. De cijfers van D liggen dichter bij het gemiddelde cijfer.

- d** Het gemiddelde van de verschillen is gelijk aan $\frac{1,1+0,2+0,9-3,8+0,1+2,0-0,7}{7} \approx -0,03$.

Als je de afwijkingen van alle cijfers ten opzichte van het gemiddelde optelt, moet je op 0 uitkomen.

- e** Het gemiddelde van de kwadraten is 3,0. Om een goede spreidingsmaat te zijn, zouden de cijfers van A tussen $6,1 - 3,0 = 3,1$ en $6,1 + 3,0 = 9,1$ moeten liggen. Aan de linkerkant klopt dat wel ongeveer, maar aan de rechterkant is de 9,1 te hoog. Dat komt door het kwadrateren.

- f** $\sqrt{3,00} \approx 1,73$, dus klopt.

- g** Het gemiddelde van B is 6,1. Verschillen met het gemiddelde zijn -0,2, 1,3, -0,5, 0,6, 0, 0,2 en -1,4 en hun kwadraten respectievelijk 0,04, 1,69, 0,25, 0,36, 0, 0,04 en 1,96. De som van deze kwadraten is 4,34 en het gemiddelde van de kwadraten van de verschillen is 0,62.

De standaardafwijking is $\sqrt{0,62} \approx 0,79$.

- 3** Zie de figuur.

8 4 4	3	9
9 7 5 1 0	4	0 7 8 9 9
8 6	5	0 7 9
9 8 7 7 4 2 1	6	2 3 5 5 7
9 5 3	7	0 1 2 3 4 6 7
5 3 2	8	3 7 8
	9	4

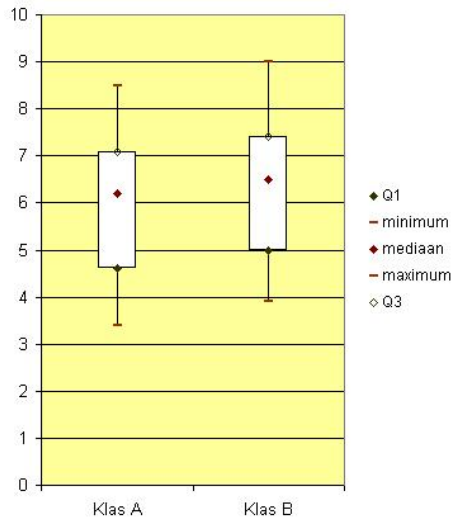
Klas A heeft mediaan = 6,2 en kwartielafstand = 2,8;

Klas B heeft mediaan = 6,5 en kwartielafstand = 2,55.

Voor de boxplots geldt:

Klas A heeft laagste = 3,4 en hoogste = 8,5;

Klas B heeft laagste = 3,9 en hoogste = 9,4.



4 D

Totaal aantal waarnemingsgetallen: 25

Het gemiddelde is: 66,2

De mediaan is: 68

De modus is: 65

5 B C

Totaal aantal waarnemingsgetallen: 30

Het gemiddelde is: 65,7

De mediaan is: 65

De modus is: 63

6 a De som van de waarnemingsgetallen delen door het aantal metingen.

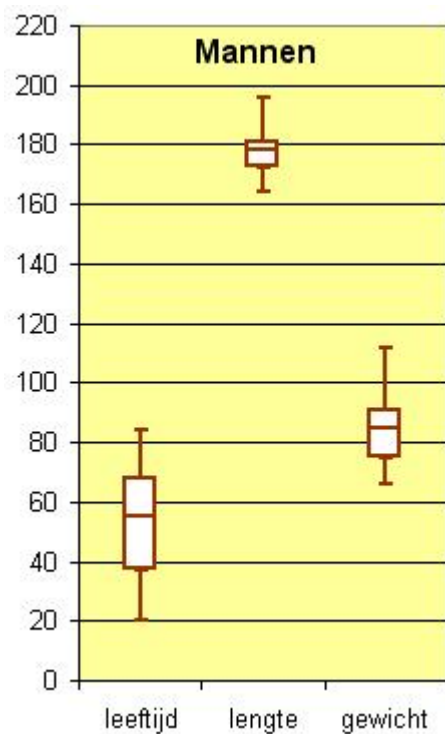
b hoogste – laagste waarneming

c derde kwartiel – eerste kwartiel

d Ze zijn correct. Gebruik eventueel de sorteerfunctie in Excel.

e Zie de tabel.

	leeftijd mannen	lengte mannen	gewicht mannen
mediaan	55	178	84,5
Q1	37	172,25	75
Q3	68	181,25	91



- f Van elk waarnemingsgetal het verschil van het gemiddelde berekenen en dit kwadrateren. De som van al die kwadraten delen door het aantal waarnemingsgetallen. Je krijgt de variantie. Door de wortel te trekken uit de variantie krijg je de standaardafwijking.

7 a Zie de tabel.

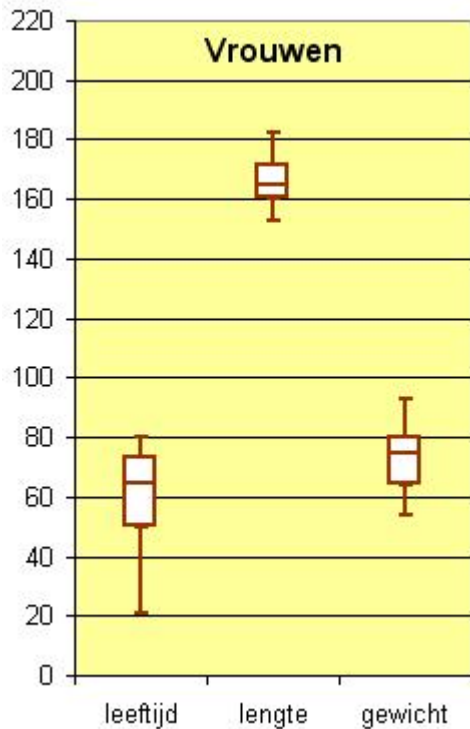
	<i>leeftijd vrouwen</i>	<i>lengte vrouwen</i>	<i>gewicht vrouwen</i>
gemiddelde	59,1	166,0	73,2
modus	bestaat niet	160	80
mediaan	64,5	165	74,5
Q1	50	160	64
Q3	73	171,5	80

b Spreidingsmaten

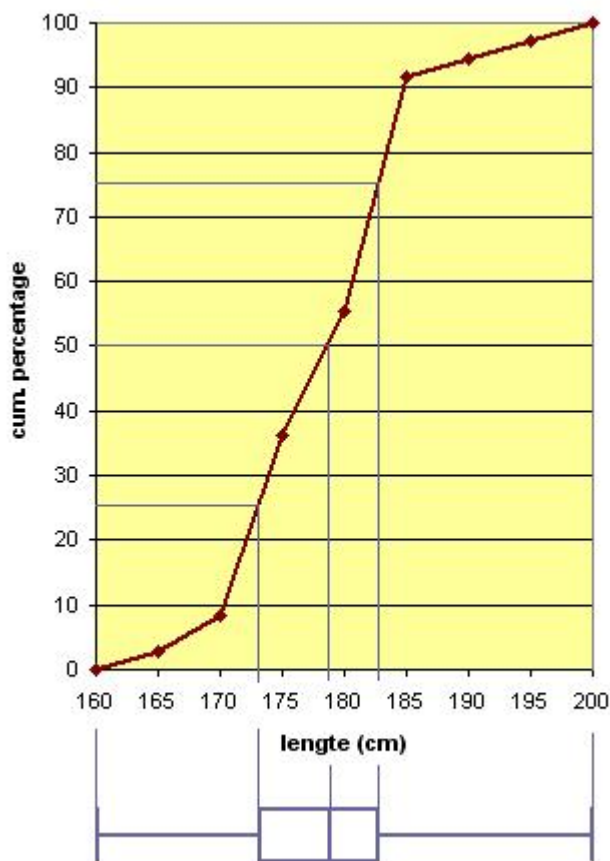
Leeftijd: $80 - 21 = 59$ jaar

Lengte: $182 - 153 = 29$ cm

Gewicht: $93 - 54 = 39$ kg



- 8 a** Verzorgingstehuis Alfa heeft gemiddelde = 41,8 cm en mediaan = 41 cm.
 Verzorgingstehuis Omega heeft gemiddelde = 41,8 cm en mediaan = 41 cm.
- b** Nee, bij verzorgingstehuis Omega liggen de getallen verder uit elkaar (grotere spreidingsbreedte).
- 9** Start de cumulatieve frequentiepolygoon bij 0% op de linkergrens van de klasse met de kleinste lengtes; zet de rest van de cumulatieve percentages boven de rechtergrenzen van de klassen.



- 10 a** Zie het antwoord bij e.

16,18,22,24,26,26,28,30,36: $Q_1 = 20$, mediaan $Q_2 = 26$ en $Q_3 = 29$.

- b** De getallen worden 20,22,26,28,30,30,32,34 en 40. Zie de boxplot bij e.

$Q_1 = 24$, mediaan $Q_2 = 30$ en $Q_3 = 33$.

- c** De getallen worden -24, -22, -18, -16, -14, -14, -12, -10 en -4. Zie de boxplot bij e.

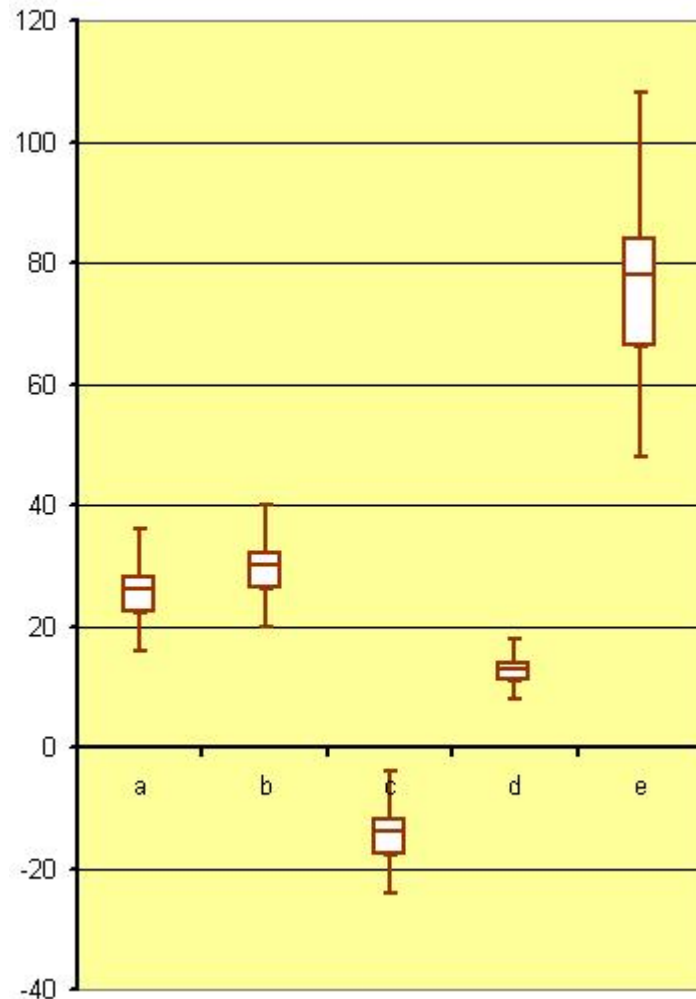
$Q_1 = 20$, mediaan $Q_2 = -14$ en $Q_3 = -11$.

- d** De getallen worden 8,9,11,12,13,13,14,15 en 18. Zie de boxplot bij e.

$Q_1 = 10$, mediaan $Q_2 = 13$ en $Q_3 = 14,5$.

- e** De getallen worden 48,54,66,72,78,78,84,90 en 108.

$Q_1 = 60$, mediaan $Q_2 = 78$ en $Q_3 = 87$.



- f** De boxplot (a, b en c) blijft dezelfde vorm houden en de afstanden tussen de kengetallen (maximum, minimum, eerste en derde kwartiel, mediaan) blijven gelijk. De boxplot verschuift in zijn geheel langs de as.

- g** De afstanden tussen de kengetallen vergroten of verkleinen met het vermenigvuldigingsgetal. Dit betekent dat de boxplot (d, e) groter of kleiner wordt.

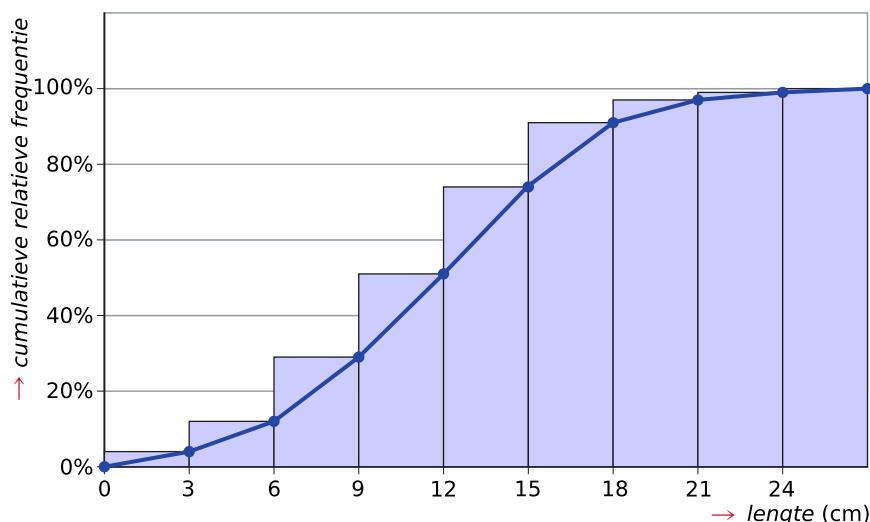
- 11 a** Tot op de millimeter nauwkeurig. De lengte 3,0 hoort bij de tweede klasse.

- b** De klasse 12,0– < 15,0 bevat het grootste aantal wormen.

- c** Voeg eerst de relatieve frequenties en de cumulatieve relatieve frequenties aan de tabel toe.

<i>lengte (cm)</i>	<i>aantal wormen</i>	<i>rel. freq. (%)</i>	<i>rel. cum. freq. (%)</i>
0,0– < 3,0	4	4	4
3,0– < 6,0	8	8	12
6,0– < 9,0	17	17	29
9,0– < 12,0	22	22	51
12,0– < 15,0	23	23	74
15,0– < 18,0	17	17	91
18,0– < 21,0	6	6	97
21,0– < 24,0	2	2	99
24,0– < 27,0	1	1	100

Zie de figuur.



d In de klasse 9,0– < 12,0. Je kunt de mediaan niet bepalen, want de losse waarnemingen zijn niet bekend. Met behulp van de cumulatieve frequentiepolygoon kun je de mediaan schatten: ongeveer 11,8.

e Dit kun je met de grafische rekenmachine berekenen. Gebruik het STAT-menu.

Het gemiddelde $\approx 11,79$; de standaardafwijking $\approx 4,92$

12 a Bij de tabel met bestedingen in euro's is de gemiddelde besteding per klant ongeveer € 112,50. De modale klasse is 100– < 150 euro. De mediaan is ongeveer 125 en $Q_1 \approx 75$ en $Q_3 \approx 125$.

Bij de tabel met de tijd in minuten is de gemiddelde tijd per klant ongeveer 2,25 minuten. De modale klasse is 1– < 2. De mediaan is ongeveer 2,5 en $Q_1 \approx 1,5$ en $Q_3 \approx 2,5$.

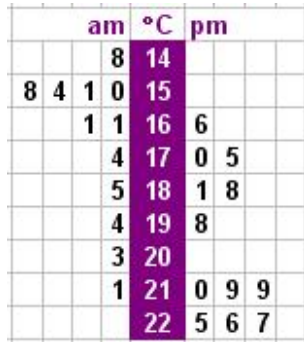
Bereken het gemiddelde met behulp van de klassenmiddens. Voor de tabel met euro's zijn dat 25,75,...,275 en 325. Voor de tabel met minuten zijn dat 0,5; 1,5; ...; 4,5 en 5,5.

- b**
- Gebruik de klassenmiddens (van 25 tot en met 325 euro en van 0,5 tot en met 5,5 minuten).
 - Bereken de standaardafwijking handmatig of met de grafische rekenmachine.
 - Handmatig de standaardafwijking berekenen, bijvoorbeeld van bestedingen met een gemiddelde van circa € 112,50 (zie a). Tel 24 keer het kwadraat van 25 – 112,50 bij elkaar op, tel daarbij op 61 keer het kwadraat van 75 – 112,50 enzovoort; deel deze som door het totale aantal klanten en neem er de wortel uit.
 - Met de grafische rekenmachine de standaardafwijking berekenen. Zet de klassemiddens in lijst 1 en zet de bijbehorende lijst aantallen in lijst 2; de grafische rekenmachine berekent de standaardafwijking.

Bij de tabel met de bestedingen in euro's is de standaardafwijking ongeveer 56,1 en bij de tabel met de tijd in minuten is de standaardafwijking ongeveer 1,17.

- c Gebruik Q_1 , de mediaan en Q_3 zoals berekend bij a; gebruik ook de kleinste (0 euro en 0 minuten) en de grootste waarden (350 euro en 6 minuten).
- d Er zijn gemiddeld $\frac{150000}{112,50} \approx 1333$ klanten per week. (De omzet delen door de gemiddelde besteding per klant.) Elke klant heeft een gemiddelde van 2,25 minuten tijd. Er is totaal 2,25 maal 1333 minuten aan kassawerk. Dit zijn 3000 minuten. Met een overcapaciteit van 25% vermenigvuldig je dit getal met 1,25 om te weten hoeveel tijd de supermarkt aan caissières nodig heeft. Dit is $\frac{1,25 \cdot 3000}{60} = 62,5$ uur kassawerk. Er zijn dus 1,64 caissières nodig. Dat moet je afronden naar 2.

13 a Zie de figuur.

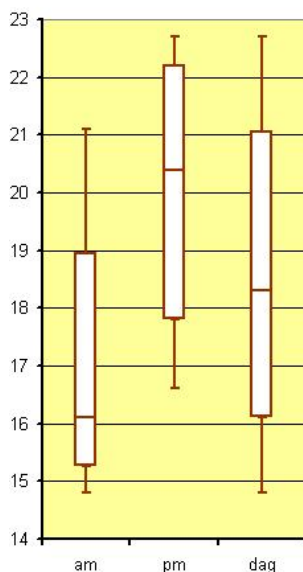


b Zie de tabel.

	am	pm	dag
min	14,8	16,6	14,8
Q1	15,25	17,8	16,1
med	16,1	20,4	18,3
Q3	18,95	22,2	21,05
max	21,1	22,7	22,7

Zie de figuur.

	am	pm	dag
Q1	15,25	17,8	16,1
min	14,8	16,6	14,8
med	16,1	20,4	18,3
max	21,1	22,7	22,7
Q3	18,95	22,2	21,05



- c am: gemiddelde $\approx 17,0$ °C en de standaarddeviatie $\approx 2,1$ °C
 pm: gemiddelde $\approx 20,0$ °C en de standaarddeviatie $\approx 2,2$ °C

Gebruik hier het STAT-menu van grafische rekenmachine voor.

- d** dag: gemiddelde $\approx 18,6$ °C en de standaarddeviatie $\approx 2,6$ °C

Gebruik hier het STAT-menu van de grafische rekenmachine voor.

- e** 's Morgens is het gemiddeld kouder dan 's middags en 's avonds. Het gemiddelde over de hele dag is het gemiddelde van beide gemiddelden per dagdeel (evenveel metingen per dagdeel). De temperaturen van pm liggen kennelijk wat meer gespreid dan die van am.

- 14 a** Gemiddelde lengte ongeveer 171 cm. Mannen zijn gemiddeld 176 cm en vrouwen gemiddeld 164 cm.
b 198 cm, bezwaar: onnodig hoge kosten aan materiaal en er kan toch wel een langere man ooit moeten worden opgenomen.
c Bepaal met behulp van Excel de mediaan van de lengtes: die blijkt 171 te zijn.
d 145 mannen: voor de helft bedden van 176 cm en voor de 50% grootste mannen bedden van bijvoorbeeld 200 cm. 133 vrouwen: voor de helft bedden van 165 cm en voor de 50% grootste vrouwen bedden van bijvoorbeeld 185 cm.

15 $\frac{82+c}{6} = 16$ geeft $c = 14$

16 $\frac{\text{besteding studenten} + \text{besteding toeristen}}{\text{aantal studenten} + \text{aantal toeristen}} = 22 \text{ euro/persoon}$

$$\frac{15 \cdot x + 25 \cdot (80 - x)}{80} = 22$$

$$x = 24$$

Er waren 24 studenten.

- 17 a** Gebruik Excel om de gemiddelde lengte te berekenen; de modale lengte kun je uit de tabel lezen (de lengte die het meest (321 keer) geteld is, is een lengte van 161 cm).

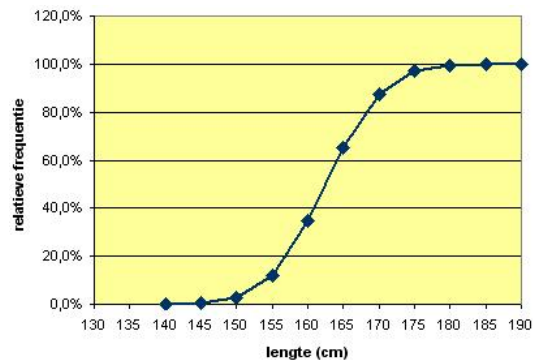
De modale lengte is 161 cm, de gemiddelde lengte is ongeveer 162,1 cm.

- b** Je weet dat er 5001 tellingen zijn en de lengtes staan al op volgorde van klein naar groot.
 De mediaan is te vinden bij de 2501-ste telling (en is dus eigenlijk 162 cm);
 Q_1 is het gemiddelde van de 1250-ste en de 1251-ste telling (en is dus eigenlijk 158 cm);
 Q_3 is het gemiddelde van de 3750 ste en de 3751 ste telling (en is inderdaad 166 cm).
 Het minimum is 139 cm en het maximum is 186 cm.

- d** Zie de tabel.

<i>lengte</i>	<i>frequentie</i>	<i>rel. freq. (%)</i>	<i>cum. rel. freq. (%)</i>
135– < 140	1	0,0	0,0
140– < 145	18	0,4	0,4
145– < 150	122	2,4	2,8
150– < 155	467	9,3	12,1
155– < 160	1118	22,4	34,5
160– < 165	1520	30,4	64,9
165– < 170	1115	22,3	87,2
170– < 175	489	9,8	97
175– < 180	128	2,6	99,6
180– < 185	22	0,4	100
185– < 190	1	0,0	100
totaal	5001	100	

De cumulatieve relatieve frequentiepolygoon heeft een soort S-vorm.



- e Lees de mediaan af bij 50%: 162 cm. Lees het eerste kwartiel af bij 25%: 158 cm. Lees het derde kwartiel af bij 75%: 166 cm. Nee, dat wijkt nauwelijks af.

18 a Modus: 58 cm.

Omdat er 5001 vrouwen zijn opgemeten is de mediaan het 2501-ste getal: 59 cm.

Gemiddelde: $\bar{m} \approx 59,1$ cm.

- b Je hebt hier te maken met een frequentietabel waarbij de waarden van de statistische variabele mouwlengte de klassenmiddens zijn. Hiervan kun je gemakkelijk de spreidingsbreedte aflezen: $71 - 49 = 22$ cm.

Omdat er 5001 vrouwen zijn opgemeten is het eerste kwartiel het 1251-ste getal en het derde kwartiel het 3751-ste getal. De kwartielf afstand is daarom $61 - 57 = 4$ cm.

Het berekenen van de standaardafwijking is nu meer werk, want je moet met de frequenties rekening houden. Met Excel vind je dat $\sigma_m \approx 3,1$ cm.

- c De afwijkende mouwlengte is 71 cm.

Het derde kwartiel is 61 cm en de kwartielf afstand is 4 cm. Nu is er sprake van een uitschieter bij een mouwlengte van $61 + 1,5 \cdot 4 = 67$ cm. Dus is er inderdaad sprake van meerdere uitschieters.

19 a Leeftijd is een discrete kwantitatieve variabele en heeft een fikse uitschieter (57 jaar), de mediaan typeert hier de leeftijd het beste.

Gewicht is ook een discrete kwantitatieve variabele, maar heeft geen fikse uitschieters. Het gemiddelde geeft dan een goede typering (maar de mediaan ook).

Lengte is een (vrijwel) continue kwantitatieve variabele. Het gemiddelde ligt voor de hand.

Zakgeld kun je zowel discreet als continu opvatten; er is bovendien een uitschieter (€ 50,00). De mediaan ligt hier voor de hand (maar gemiddelde mag ook).

Favoriete drankje en vervoermiddel zijn kwalitatieve variabelen en daarvoor kun je alleen de modus als centrummaat gebruiken.

- b Voor leeftijd en zakgeld de kwartielf afstand en spreidingsbreedte. Voor lengte en gewicht de standaarddeviatie. Voor favoriete drankje en vervoermiddel geen spreidingsmaat.

- c De doorsneefeestganger is 16-17 jaar, 181 cm lang, drinkt cola, weegt 71 kg, heeft € 22,13 zakgeld en komt met de fiets.

20 a Gemiddelde: alle tijden optellen en delen door het totale aantal tijden van 29.

Mediaan: zet de 29 tijden op een rij van klein naar groot en kies dan de middelste (de 15de) tijd.

Modus: 17 seconden zonder ademhalen is het vaakst voorgekomen (5 keer)

- b De spreidingsbreedte is de grootste waarde MIN de kleinste waarde en dat is $43 - 15 = 28$ en de standaardafwijking is ongeveer 7,9.

Gebruik voor het berekenen van de standaardafwijking het STAT-menu van de grafische rekenmachine.

- c Het minimum is 15, het maximum is 43. De kwartielen zijn $Q_1 = 17,5$ en $Q_3 = 32$.

<i>tijd</i>	<i>frequentie</i>
15– < 20	8
20 – < 25	7
25– < 30	5
30 – < 35	3
35– < 40	5
40 – < 45	1
d totaal	29

- e** Voer de klassenmiddens 17,5 t/m 42,5 in de grafische rekenmachine in en gebruik het STAT-menu om gemiddelde en standaardafwijking te berekenen.

Het gemiddelde is ongeveer 26,3 seconden en de standaardafwijking is ongeveer 7,7 seconden.

- f** Zie de tabel.

<i>tijd (in sec)</i>	<i>freq</i>	<i>rel. freq.</i>	<i>cum. rel. freq.</i>
15 - <20	8	27,6%	27,6%
20 - <25	7	24,1%	51,7%
25 - <30	5	17,2%	69,0%
30 - <35	3	10,3%	79,3%
35 - <40	5	17,2%	96,6%
40 - <45	1	3,4%	100%
totaal	29	100%	100%

Zet de cumulatieve relatieve frequenties uit boven de rechter klassegrenzen.

Lees de mediaan af bij 50%: de mediaan is ongeveer 22,5 seconden.

- 21 a**
- Salaris is een kwalitatieve variabele. Je kunt het beste de mediaan of het gemiddelde kiezen;
 - Uit een frequentiepolygoon kun je zowel de modus als de mediaan (zie ook uitleg bij deelvraag b) redelijk nauwkeurig aflezen; het gemiddelde is veel moeilijker te bepalen;
 - In het dagelijkse leven spreekt men ook vooral over het modale salaris en niet over het gemiddelde salaris.

Het modale salaris is ruim € 30000,00 per jaar.

- b** De modus lees je af bij het hoogste punt, dus minder dan € 30000,00.

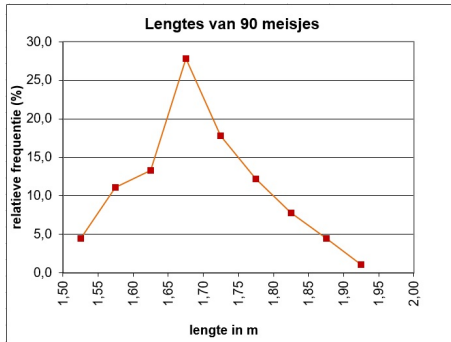
De mediaan zit waar links en rechts een even groot gebied (50% van de werknemers) onder de grafiek ligt, dat is bij ruim € 30000,00.

De mediaan is groter dan de modus.

6.5 Uitspraken doen

- V1** Iemand's lengte is een natuurlijke maat (in tegenstelling tot iemand's gewicht, want dat is beïnvloedbaar). De waarden van dergelijke maten liggen vaak symmetrisch verdeeld aan weerszijden van de centrummaten. Die centrummaten zijn ook ongeveer hetzelfde: modus, mediaan en gemiddelde verschillen hier weinig. Verder is het vrijwel altijd zo dat grote afwijkingen van het gemiddelde zeldzamer worden naarmate een waarde verder van dat gemiddelde af zit.

- 1 a** Zie de figuur.



- b** $\bar{L} \approx 169$ en $\sigma_L \approx 8,86$.
- c** Vuistregel 1: tussen $\bar{x} - \sigma_x$ en $\bar{x} + \sigma_x$ zit 68% van de waarnemingsgetallen.
 $169 - 8,86 = 160,14$ cm
 $169 + 8,86 = 177,86$ cm
 Je kijkt naar de meisjes van 161 cm tot en met 177 cm. Dat zijn er 59 van de 90.
 $\frac{59}{90} \cdot 100 \approx 65,6\%$
 Dat komt aardig dicht in de buurt van 68%.
- d** Vuistregel 2: tussen $\bar{x} - 2\sigma_x$ en $\bar{x} + 2\sigma_x$ zit 95% van de waarnemingsgetallen.
 $169 - 2 \cdot 8,86 = 151,28$ cm
 $169 + 2 \cdot 8,86 = 186,72$ cm
 Je kijkt naar de meisjes van 152 cm tot en met 186 cm. Dat zijn er 86 van de 90.
 $\frac{86}{90} \cdot 100 \approx 95,6\%$. Dat klopt heel goed met 95%.
- 2 a** $\frac{100-68}{2} = 16\%$ van de Nederlandse meisjes is langer dan 178 cm.
- b** $\frac{100-95}{2} = 2,5\%$ van de Nederlandse meisjes is korter dan 160 cm.
- 3 a** Relatief is het misschien wel lager, maar absoluut kan het evenveel of zelfs meer zijn.
- b** Het aantal automobilisten dat geen alcohol heeft gedronken, is veel en veel hoger. Dus je moet het in verhouding zien tot het aantal automobilisten dat wel of geen alcohol heeft gedronken.
- c** 20% witter dan wit. Waarmee wordt dat vergeleken?
- d** Het slagingspercentage is vooral afhankelijk van de capaciteiten van de leerlingen die aan het examen deelnemen. Zorg je er als school voor dat alleen heel goede leerlingen in de examenklas komen, dan slagen waarschijnlijk veel leerlingen. Mogelijk komen veel leerlingen helemaal niet in de examenklas, maar verlaten de school vroegtijdig.
- 4** $\bar{L} \approx 180,8$ en $\sigma_L \approx 7,74$. Je kunt de vuistregels het makkelijkst controleren door aflezen in een cumulatieve frequentiepolygoon. Daarin geef je $\bar{L} + \sigma_L$ en $\bar{L} - \sigma_L$ aan en kijk je of ongeveer 68% van de waarnemingen daarbinnen valt. Op dezelfde manier controleer je de andere vuistregel.
- 5** C
- Bewering A: $Q_3 = 2884 < 3000$ dus nog geen 25% van de batterijen gaat zo lang mee.
- Bewering B: de mediaan is $Q_2 \approx 1800$ en daar zit 50% onder.
- Bewering C: het minimum is 1236 uur, dus de bewering klopt.

Bewering D: $Q_1 = 1236$ dus meer dan 25% heeft een levensduur van maximaal 1236 uur.

6 A C E

Uitspraak A: $\bar{G} - 2\sigma_G = 254 - (2 \cdot 4) = 246$ en $\bar{G} + 2\sigma_G = 254 + (2 \cdot 4) = 262$

Uitspraak B: $246 = \bar{G} - 2\sigma_G$, links ervan in de klokvorm zitten de $\frac{100-95}{2} = 2,5\%$ laagste gewichten.

Uitspraak C: $250 = \bar{G} - \sigma_G$, links ervan in de klokvorm zitten de $\frac{100-68}{2} = 16\%$ laagste gewichten.

Uitspraak D: zie de uitwerking van uitspraak C.

Uitspraak E: bij de derde uitspraak zag je dat 16% van de pakken een lager gewicht heeft dan 250 gram en dus heeft 84% van de pakken koffie een hoger gewicht.

7 Belgen spreken langzamer dan Nederlanders.

- Het is niet eerlijk om voor het onderzoek alleen maar leraren en leraressen toe te laten tot de steekproef, deze groep mensen kan over het algemeen snel praten en is dus niet representatief voor de hele populatie.
- Die "ene Antwerpse stotteraarster" is een uitschieter en kan wellicht beter buiten beschouwing worden gelaten. De steekproeven zijn veel te klein.

Vitalinea misleidt consument.

- Er wordt al aangegeven dat het vreemd is dat we niets horen over de andere 20% van de deelnemers aan het onderzoek.
- Bovendien wil het niet zeggen dat 80% van de deelnemers is afgefallen door Danone. Misschien zijn ze gezonder gaan leven?

8 a Duitsland, want er zijn veel meer Duitsers dan Nederlanders.

b Het aantal inwoners van elk land.

c 1019 km per persoon.

d België heeft met 327 km bijna het dubbele van Italië (168), maar de staaf is maar een klein beetje langer; de staaf van Groot-Brittannië moet meer dan drie keer zo lang zijn dan die van Spanje.

e De hoogte van de fiets is dan de hoogte van de staaf. Maar de fietsen worden niet alleen hoger, maar ook breder en daarmee worden verschillen overdreven.

9 a Volgens de eerste vuistregel zijn dit de grenzen.

- gemiddelde - s.d. = $177,6 - 6,6 = 171$ cm
- gemiddelde + s.d. = $177,6 + 6,6 = 184,2$ cm

Tussen 171 cm en 184,2 cm.

b 27 van de 36 lengtes liggen tussen 171 en 184,2 cm: $\frac{27}{36} \cdot 100\% = 75\%$. Dus geen 68%, zoals de eerste vuistregel zegt (gerekend met de niet afgeronde grenzen).

Reken je met de afgeronde grenzen (171 en 184,5), dan vind je dat er 24 lengtes tussen deze waarden liggen. $\frac{24}{36} \cdot 100\% = 66,7\%$. Dit percentage komt meer in de richting van 68%, de eerste vuistregel van de klokvormige frequentieverdeling.

c Volgens de tweede vuistregel zijn dit de grenzen.

- gemiddelde - 2 · s.d. = $177,6 - 2 \cdot 6,6 = 164,4$ cm
- gemiddelde + 2 · s.d. = $177,6 + 2 \cdot 6,6 = 190,8$ cm

Tussen 164,4 cm en 190,8 cm

d 34 van de 36 lengtes liggen tussen 164,4 en 190,8 cm = $\frac{34}{36} \cdot 100\% = 94,4\%$. Dat ligt dicht tegen de 95% aan, zoals de tweede vuistregel zegt. Voldoet dus!

10 a 95 cm. Het bezwaar is onnodig hoge kosten aan materiaal.

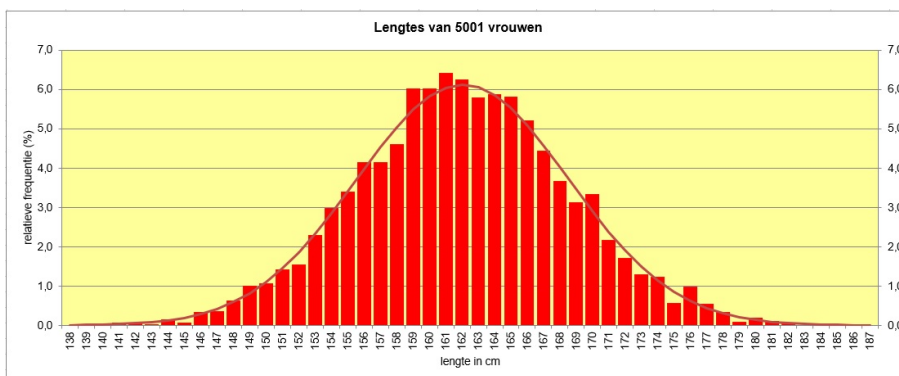
b Vuistregel 1: tussen $\bar{x} - \sigma_x$ en $\bar{x} + \sigma_x$ zit 68% van de waarnemingsgetallen.

Dat betekent dat 34% tussen $\bar{x}$ en $\bar{x} + \sigma_x$ zit. Je weet ook dat 50% van de mannen een lengte heeft van $\bar{x}$ of minder.

$34\% + 50\% = 84\%$

De langste persoon van deze 84% heeft een lengte $\bar{x} + \sigma_x = 80 + 5 = 85$ cm.

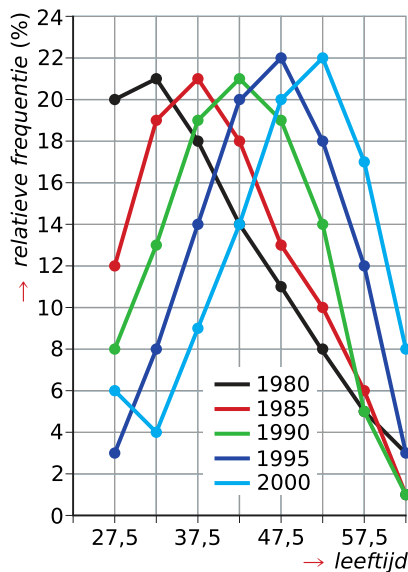
- c** $\bar{x} + \sigma_x = 74 + 4 = 78$ cm
- 11 a** Voor iedereen geldt dat er 3% loon bijkomt. Alle lonen veranderen daardoor op een verschillende manier. De kwartielen, maximum en minimum worden alle vijf vermenigvuldigd zijn met 1,03. De boxplot krijgt een andere vorm.
- b** Iedereen krijgt er precies € 200,00 bij: de boxplot behoudt daardoor zijn vorm, schuift alleen 200 naar rechts.
- c** De laagstbetaalde werknemers krijgen er niets bij.
Alleen de maximumwaarde komt 1800 naar rechts te liggen.
- 12** Geboortelengte: 68% van de pasgeborenen heeft een lengte tussen 48,0 en 53,2 cm en 95% heeft een lengte tussen 45,4 en 55,8 cm. De geboortelengte is gemiddeld ongeveer 50,6 cm met een standaardafwijking van 2,6 cm (gebruik hiervoor de klassenmiddens 44,5 cm; 46,5 cm; 48,5 cm; ...; 56,5 cm).
Geboortegewicht: 68% van de pasgeborenen heeft een gewicht tussen 2870 en 4084 gram en 95% heeft een gewicht tussen 2263 en 4691 gram. Het geboortegewicht is gemiddeld ongeveer 3477 gram met een standaardafwijking van ongeveer 607 gram (gebruik hiervoor de klassenmiddens 1250, 1750, 2250, ..., 4750).
- 13 a** De gemiddelde lengte is ongeveer 171 cm. Mannen zijn gemiddeld 176 cm met een standaardafwijking van 7 cm en vrouwen gemiddeld 164 cm met een standaardafwijking van 6 cm. Mannen zijn gemiddeld langer dan vrouwen.
- b** Dat klopt. De 50% langste mannen zijn minstens 176 cm, de 84% kortste vrouwen zijn hoogstens $164 + 6 = 170$ cm.
- 14 a** De hele grafiek is op 'dalend roosterpapier' getekend.
- b** Nee, dat is redelijk constant.
- c** De lijn vrouwen van 65 jaar en ouder, daalt nooit of nauwelijks als je de percentages bekijkt.
- d** Met die 1% wordt bedoeld 1% van het totale aandeel. In 1958 was het percentage rokers 60%. Als dat percentage met 1% afneemt wordt het nieuwe percentage dus $60 \cdot 99\% = 59,4\%$. In het volgende jaar zou het dan afnemen naar $59,4 \cdot 99\% \approx 58,8\%$, enzovoort.
Over 29 jaar betekent dit dat het percentage rokers afneemt naar $60 \cdot 0,99^{29} \approx 45\%$. Met het gegeven dat er in de eerste jaren meer afname was, zou het percentage van 37% rokers in 1987 wel kunnen kloppen.
- 15 a** Gebruik Excel. De gemiddelde lengte is ongeveer 162,1 cm met standaardafwijking 6,5 cm.
- b** Zie figuur, gemaakt met Excel.



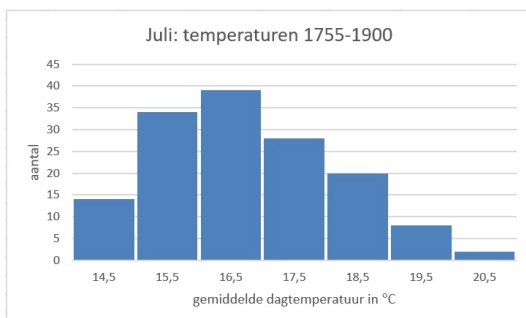
- c** Het gaat om de lengtes van minder dan $162,1 - 6,5 = 155,6$ en meer dan $162,1 + 6,5 = 168,6$ cm.
Dat betreft $\frac{1575}{5001} \cdot 100 \approx 31,5$ procent van de vrouwen.
- d** Het gaat nu om de lengtes van minder dan 149,1 en meer dan 175,1 cm. Dat gaat om $\frac{263}{5001} \approx 5\%$ van de vrouwen.
- e** Ze komen aardig overeen met de vuistregels.
- f** De gewichten vormen geen klokvormige frequentieverdeling.

- 16 a** De 25% kortste mannen hebben lengtes vanaf 150 tot 168,4 cm.
- b** De mediaan is 172,0 en Q_3 is 176,8 $\Rightarrow$ 25% van de 1064 mannen had een dergelijke lengte. 25% van 1064 mannen is 266 mannen.
- c** De verdeling is om twee redenen niet symmetrisch.
1. de afstand van Q_1 tot de mediaan is korter dan de afstand van de mediaan tot Q_3 ;
 2. de afstand van de linkergrens tot de mediaan is korter dan de afstand van mediaan tot de rechtergrens.
- 17 a** Gebruik als klassenmiddens voor de leeftijden 27,5; 32,5; 37,5 ... 62,5.
De gemiddelde leeftijden zijn achtereenvolgens 39,2; 40,5; 42,35; 45,85; 48,1.
De standaarddeviaties zijn achtereenvolgens 9,7; 8,8; 8,4; 8,3; 9,3.

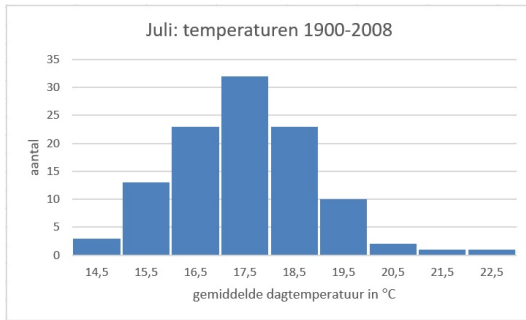
- b** Zie de figuur.



- c** De frequentiepolygoenen verschuiven naar rechts naarmate de tijd verstrijkt; de vorm ervan blijft nagenoeg gelijk.
- d** Ze lijken goed te passen; de gemiddelde leeftijden nemen toe. Waarom die toename sterker is dan in de eerste drie jaren, zal men uit onderzoek hebben afgeleid.
- 18 a** Zie de figuur.



b Zie de figuur.



c In de jaren tot 1900 is de gemiddelde temperatuur in juli $16,8^{\circ}\text{C}$ met een standaarddeviatie van $1,4^{\circ}\text{C}$. In de jaren vanaf 1900 is de gemiddelde temperatuur in juli $17,0^{\circ}\text{C}$ met een standaarddeviatie van $1,4^{\circ}\text{C}$. De gemiddelde temperatuur in juli is bijna 1 standaarddeviatie hoger geworden.

6.6 Totaalbeeld

- 1 a** De populatie is Noord-Amerikaanse vrouwen. Hite maakte gebruik van de verklarende statistiek (met behulp van de steekproef wilde ze uitspraken doen over de populatie).
- b** Bijvoorbeeld leeftijd, wel/geen kinderen, religie, enzovoort.
- c** Iedere Noord-Amerikaanse vrouw had dan dezelfde kans moeten hebben om deel te nemen aan het onderzoek.
- d** Maar 4500 van de 100000 vrouwen die zijn benaderd stuurde gegevens terug. Dat zijn zeer waarschijnlijk vooral vrouwen die 'iets te melden' hebben. De steekproef is dus zwaar vertekend.
- Ze wist dat dus alleen zeker van de vrouwen in haar steekproef. De percentages voor de totale groep Noord-Amerikaanse vrouwen kunnen heel anders geweest zijn, ondanks haar representatieve steekproef. Toeval blijft een rol spelen.

- 2 a** de kwalitatieve variabele *land*

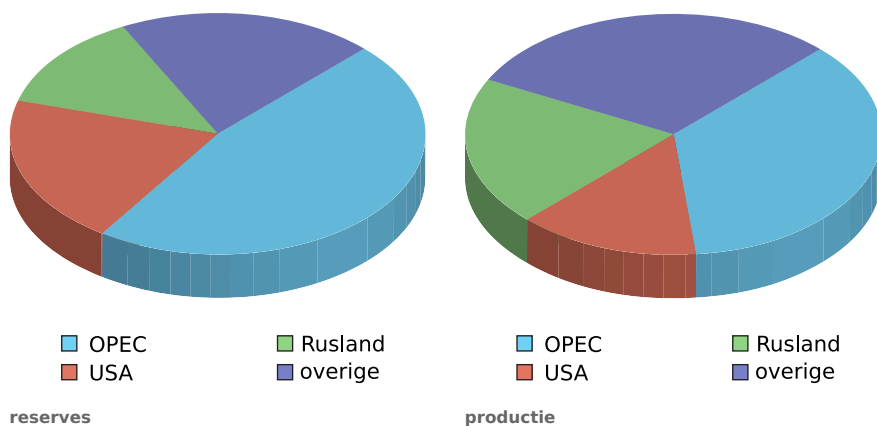
- b** Het uitlezen van waarden uit dergelijke diagrammen is altijd wat onnauwkeurig. Binnen bepaalde grenzen kunnen afwijkingen in bepaalde waarden goedgekeurd worden.

Totale aantal oliereserves in miljarden vaten $\approx 533,5$. Aantal oliereserves in miljarden vaten van OPEC-landen $\approx 250,5$: $\left(\frac{250,5}{533,5}\right) \cdot 100 \approx 47\%$.

- c** Het uitlezen van waarden uit dergelijke diagrammen is altijd wat onnauwkeurig. Binnen bepaalde grenzen kunnen afwijkingen in bepaalde waarden goedgekeurd worden.

11,45 op de 54,3 miljoen barrels geeft een proportie van $\approx 0,21$.

- d** Zie de figuur.



- e** De OPEC-landen en de VS hebben van de totale oliereserves een veel groter deel in handen dan van de totale olieproductie.

Andersom produceren Rusland en de overige landen veel meer olie dan zij naar verhouding aan oliereserves in handen hebben.

- 3 a** Het gemiddelde plus twee de standaardafwijking (95% van de pakken melk) geeft 1,01 liter. Dus tussen de grenzen $1,002 - 2 \cdot 0,004 = 0,994$ en $1,002 + 2 \cdot 0,004 = 1,010$ ligt 95% van de inhoud die je voor de pakken melk vindt.

Voor meer dan 1,010 liter blijft dus 2,5% over.

- de middelste 95% heeft een inhoud die in ieder geval kleiner is dan 1,010 L;
- $95 + \frac{5}{2} = 97,5\%$ van de melkpakken heeft een inhoud die kleiner is dan 1,010 L;
- $100 - 97,5 = 2,5\%$ heeft een inhoud van meer dan 1,010 L.

Het antwoord is niet waar.

- b** 0,998 is de waarde die één standaardafwijking kleiner is dan de gemiddelde inhoud. 16% van de pakken bevat minder dan 0,998 L.

1,006 is de waarde die één standaardafwijking groter is dan de gemiddelde inhoud. 16% van de pakken bevat meer dan 1,006 L.

Het antwoord is waar.

- c 50% van de pakken bevat minder dan 1,002 L en 50% bevat meer dan 1,002 L.

Het antwoord is niet waar.

- d Dit is waar. In een rechts scheve verdeling (de top ligt iets naar rechts ten opzichte van het midden) is het gemiddelde kleiner dan de mediaan en dus weet je zeker dat meer dan 50% groter is dan het gemiddelde.

4 a $\frac{147}{3000} \approx 4,9\%$

- b De klassenbreedtes zijn niet gelijk, dus je kunt zo geen conclusies trekken uit de verdeling.
c In een cumulatieve (relatieve) frequentiepolygoon zet je somwaarden bij de rechtergrenzen van de leeftijdsklassen. Deze punten geven 100% nauwkeurig het aantal personen weer dat een leeftijd heeft die kleiner is dan de bijbehorende somwaarde.

Bij een frequentiepolygoon en een histogram krijg je vervorming vanwege de verschillende klassenbreedtes.

Bij een cirkeldiagram kun je helemaal niet zien dat er verschil in klassenbreedte is.

- d De relatieve frequenties van bedrijf A zijn 8,9%, 13,3%, 41,4%, 24,9%, 6,8% en 4,7%.

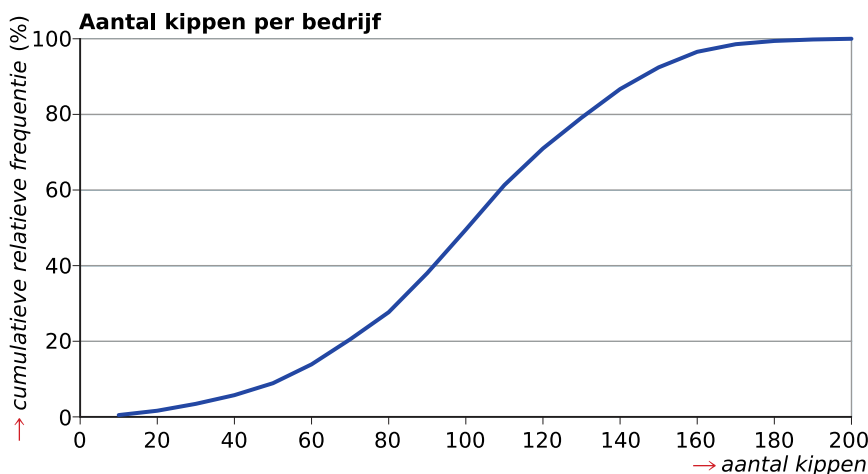
De relatieve frequenties van bedrijf B zijn 3,35%, 10,25%, 40,05%, 28,1% 13,25% en 5%.

Beide frequentietabellen hebben exact dezelfde klassenindeling en daarom kun je ze met elkaar vergelijken. De verdelingen lijken erg op elkaar, er zit alleen wat verschil in de opbouw van de allerjongste klassen en de alleroudste. Bedrijf A lijkt iets meer jongere werknemers te hebben en bedrijf B iets meer oudere werknemers.

Let op! Je kunt verder niets zeggen over de vorm van de verdeling vanwege de verkeerde indruk die de ongelijke klassenindeling geeft.

- 5 a een discrete kwantitatieve variabele

- b Houd rekening met de percentages op het totale aantal kippen van 1044 en werk met de rechterklassengrenzen.



- c De mediaan en beide kwartielen kun je op twee manieren schatten.
- Op basis van je cumulatieve relatieve frequentiepolygoon lees je af welke waarden de cumulatieve relatieve frequentiepolygoon van respectievelijk 25% (Q_1) en 50% (mediaan) en 75% (Q_3) heeft.
 - Op basis van de frequentietabel.

De mediaan is ongeveer 105,5. $Q_1 \approx 75,5$ en $Q_3 \approx 125,5$.

- d Het gemiddelde bepaal je met behulp van de klassenmiddens 5,5 tot en met 195,5.

Ook de standaardafwijking. Die kun je ook vanuit de cumulatieve relatieve frequentiepolygoon bepalen. Lees de mediaan (waarde bij 50%) af en lees af welke waarde bij 16% zit. Bereken het verschil tussen beide waarden.

- e De grens van de middelste 95% zit bij de gemiddelde waarde plus tweemaal de standaardafwijking,

dus bij 171. $\frac{5}{2} = 2,5\%$.

2,5% van de bedrijven heeft dus meer dan 171 kippen.

De 2,5% bedrijven met de grootste hoeveelheid kippen zijn $9 + 4 + 2 = 15$ bedrijven.

- 6 a** Deze opgave zou je moeten doen met gegevens van de eigen school!
- b** Eigen antwoord.
- c** Eigen antwoord.
- d** Eigen antwoord.
- e** Eigen antwoord.
- f** Eigen antwoord.
- g** Eigen antwoord.
- h** Eigen antwoord.
- i** Eigen antwoord.
- j** Eigen antwoord.
- k** Eigen antwoord.
- 7 a** Staafdiagrammen/histogrammen.
- b** 1900: ongeveer $350000 + 350000 = 700000$
1950: ongeveer $580000 + 580000 = 1160000$
- c** De staafjes bij 0–4 zijn in het diagram van 1950 veel langer dan in de andere drie.
- d** Het aantal ouderen neemt behoorlijk toe in verhouding tot het aantal jongeren. De staafjes van de hogere leeftijdscategorieën worden langer dan die van de jongere.
- e** De staafjes voor de vrouwen zijn bij hoge leeftijden langer dan die van de mannen.
- f** 1900: 0–4 2050: 50–54
- g** De meest voorkomende leeftijd wordt steeds hoger, er komen dus naar verhouding weinig jongeren/kinderen bij.
- h** Dat wordt schatten... De mediaan ligt in 1900 ergens bij de 20 jaar en in 2050 ergens bij de 40 jaar. Het eerste kwartiel ligt in 1900 onder de 10 jaar en in 2050 bij de 20 jaar. Het derde kwartiel ligt in 1900 bij de 40 jaar en in 2050 bij de 60 jaar.
- 8 a** Voor de oversteeptijden geldt: maximum = $\frac{20}{0,30} \approx 67$ seconden $Q_3 = \frac{20}{0,75} \approx 27$ seconden mediaan = $\frac{20}{0,90} \approx 22$ seconden $Q_1 = \frac{20}{1,05} \approx 19$ seconden minimum = $\frac{20}{1,60} = 12,5$ seconden
- b** Lees de zes oversteeptijden bij een voertuigintensiteit van 800 per uur af. Teken een grafiek door de zes punten (5; 5,1), (10; 7,2), (15; 8,2), (20; 9,2), (25; 10,1) en (30; 10,9).
- c** De snelheden variëren van 2,0 tot 2,6 m/s. De oversteeptijden variëren van 10 tot 7,7 sec. De bijbehorende wachttijden zijn ongeveer 27 en 13 sec. De kortste somtijd is ongeveer 21 seconden en de langste is ongeveer 37 seconden.
- 9 a** Als de zonen allemaal studenten van een Londense universiteit zijn, zijn ze niet aselekt uit de Engelse bevolking gekozen
- b** Teken een grenslijn, bijvoorbeeld de lijn door (62, 60) en (74, 72) en als andere grenslijn de lijn door (60, 62) en (72, 74). Arceer het gebied tussen deze lijnen.
- c** Er zijn veel zonen duidelijk langer dan hun vader en weinig duidelijk korter. Waar vaders en zonen ongeveer even lang zijn, zijn zonen net zo vaak groter als kleiner dan hun vader. Ja, zonen zijn gemiddeld langer.
- d** mediaan = 68,6 $Q_1 = 66,9$ $Q_3 = 70,5$ Kleinste en grootste waarneming zijn 59,7 en 78,6.
- e** Het gemiddelde was $68,6 \cdot 2,54 \approx 174$ cm en de standaarddeviatie was ongeveer $2,7 \cdot 2,54 \approx 7$ cm. Dus zat 100 jaar geleden 68% van de jonge mannen tussen 167 en 181 cm. Het aantal jonge mannen van 182 cm of meer was dus iets kleiner dan $\frac{100-68}{2} = 16\%$ van alle jonge mannen uit die tijd.

7

Machtsfuncties

7.1	Werken met machten	66
7.2	Eigenschappen van machtsfuncties	70
7.3	Kwadratische functies als machtsfuncties	75
7.4	De abc-formule	81
7.5	Veeltermen	86
7.6	Totaalbeeld	89

7.1 Werken met machten

- V1 a** Vul in $h = 100$, dan is $a = 35730$ m ofwel bijna 36 km.
b Vul in $h = 50$, dan is $a \approx 25265$ m ofwel ruim 25 km. De bewering is dus niet waar.
c Bij $h = 50$ is $a \approx 25265$ en als $h = 100$ is $a = 35730$.
 35730 is duidelijk niet twee keer zo groot als 25265.
 Dus de bewering klopt niet.

- 1 a** $I = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$.
b De inhoud wordt dan acht keer zo groot, want $2r \cdot 2r \cdot 2r = 2^3 r^3 = 8r^3$.
c Oplossing:

$$r^3 = 500$$

$$r = 500^{\frac{1}{3}}$$

$$r \approx 7,9$$

d Als de inhoud $I = r^3$ bijvoorbeeld twee keer zo groot wordt, wordt M dat ook.
 De formule is $M = 2,7 \cdot r^3$.

- 2 a** De oppervlakte is recht evenredig met de tweede macht van de ribbe.
b $A = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ cm}^2$
c Elke oppervlakte wordt 4 maal zo groot, dus de lengte en de breedte worden beide 2 maal zo groot, want $2r \times 2r = 4r^2$.
d $6r^2 = A$, dus $r^2 = \frac{A}{6}$ en $r = \sqrt{\frac{1}{6}A}$.

- 3 a** Bekijk de tabel.

r	0	5	10	15	20
I	0	523,6	4188,8	14137,2	33510,3

- b** Bekijk de tabel. De grafiek is een rechte lijn door $(0,0)$. Bij de lijn hoort de formule $y = cx$. Hier geldt $I = cr^3$. Dat betekent dat er sprake is van een recht evenredig verband tussen r^3 en I .

r	0	5	10	15	20
r^3	0	125	1000	3375	8000
I	0	523,6	4188,8	14137,2	33510,3

- c** Je rekent net als in het voorbeeld.

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = I$$

$$r^3 = \frac{I}{\frac{4}{3}\pi}$$

$$r = \left(\frac{I}{\frac{4}{3}\pi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$r = \frac{I^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{4}{3}\pi \right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{Dus je vindt: } r = I^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{4}\pi^{\frac{1}{3}} \approx 0,62 I^{\frac{1}{3}}$$

- 4 a** y is recht evenredig met x . De evenredigheidsconstante is 2.
b y is niet recht evenredig met x .
c y is recht evenredig met x^4 . De evenredigheidsconstante is 0,15.

d y is niet recht evenredig met x .

5 a Als $h = 50$, dan $a = 3572 \cdot 50^{\frac{1}{2}} \approx 25258$.
Dus ongeveer 25258 meter.

b Eerste manier: de grafiek geeft $h \approx 48,98 \approx 49$.

Tweede manier: los op $3572 \cdot h^{\frac{1}{2}} = 25000$. Dat geeft $h^{\frac{1}{2}} \approx 6,998$ en $h \approx 48,98$. Dus de hoogte is ongeveer 49 m.

Derde manier: $h = \left(\frac{25000}{3572}\right)^2 \approx 48,98$. Dus de hoogte is ongeveer 49 m.

6 a $y = 5 \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 4 = 20$

b $y = 5 \cdot 20^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 4,472 \approx 22,36$

c $10 = 5 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ geeft $2 = x^{\frac{1}{2}}$ en dus $x = 4$.

d $30 = 5 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ geeft $6 = x^{\frac{1}{2}}$ en dus $x = 36$.

7 a $f(4) = 120 \cdot 4^5 = 122880$

b $x = \left(\frac{20000}{120}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 2,78$

c $(4x)^5 = 4^5 x^5$, dus met $4^5 = 1024$

8 a Standaardtarief: $K_s = 2,50a$

Abonnementstarief: $K_a = 1,20a + 25$

b Alleen bij het standaardtarief zijn de kosten recht evenredig met a , want een verdubbeling van a levert ook een verdubbeling van de kosten op. Bij het abonnement is dat niet zo.

c $1,20a + 25 = 2,5a$ geeft $1,30a = 25$ en dus $a \approx 19,2$. De grafieken op de GR laten zien dat het vanaf 20 bezoeken voordeliger is om een abonnement te kopen.

9 a $r = \frac{s^2}{100} = \frac{1}{100} \cdot s^2$ dus $\frac{1}{100}$

b $r = 10$ geeft $s^2 = 1000$ en dus $s \approx 31,6$ km/h.

c $r = \frac{s^2}{100}$

$$s^2 = 100r$$

$$s = 10\sqrt{r}$$

Dus s is recht evenredig met $r^{\frac{1}{2}}$.

d Als $r = 100$, dan $s = 10\sqrt{100} = 100$ km/h. Als $r = 50$, dan $s = 10\sqrt{50} \approx 70,7$ km/h. De bewering is dus niet waar.

10 a $I(2) = 2^3 = 8$

b $I(6) = 6^3 = 216$

c De inhoud is $(3r^3) = 3^3 r^3 = 27r$, dus 27 keer zo groot.

d $r^3 = 50$, dus $r = \sqrt[3]{50} \approx 3,7$ cm

e $I = r^3$

f $r = \sqrt[3]{I}$

11 a Er zijn 6 vlakken met oppervlakte r^2 , dus $A = 6r^2$.

b $A(3) = 6 \cdot 3^2 = 54$ cm²

c $A(6) = 6 \cdot 6^2 = 216$ cm²

d $(2r)^2 = 2^2 r^2 = 4r^2$, dus wordt de oppervlakte 4 keer zo groot.

e $r = \sqrt{\frac{500}{6}} \approx 9,13 \text{ cm.}$

f $r = \sqrt{\frac{A}{6}}$

12 a $G = 7,9r^3$

b $A = 6r^2$

c Uit $G = 7,9r^3$ volgt $r = \left(\frac{1}{7,9}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot G^{\frac{1}{3}} \approx 0,502G^{\frac{1}{3}}$.

Dus is $A = 6r^2 \approx 6 \cdot 0,502^2 \cdot G^{\frac{2}{3}} \approx 1,51G^{\frac{2}{3}}$ en $c \approx 1,51$.

d $A = 1,51 \cdot G^{\frac{2}{3}} = 150$, dus $G = \left(\frac{150}{1,51}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 990$.

13 a Meeh-coëfficiënt

b Breid de tabel uit met een rij voor $G^{\frac{2}{3}}$ en een rij voor $\frac{H}{G^{\frac{2}{3}}}$. Als het goed is, vind je in de laatste rij steeds (ongeveer) hetzelfde getal, namelijk 8,9. Dit is de gevraagde Meeh-coëfficiënt. Voor de Schotse Hooglanders geldt $H = 8,9 \cdot G^{\frac{2}{3}}$.

c $510 \approx 8,9 \cdot G^{\frac{2}{3}}$ geeft $G^{\frac{2}{3}} \approx 57,3$ en dus $G \approx (57,3)^{\frac{3}{2}} \approx 434 \text{ kg.}$

14 a $c = \frac{131}{40^{\frac{2}{3}}} \approx 11,2$

b $H = 11,2 \cdot 50^{\frac{2}{3}} \approx 152$. Dus de huidoppervlakte is ongeveer 152 dm^2 .

c $212 = 11,2 \cdot G^{\frac{2}{3}}$ geeft $G^{\frac{2}{3}} \approx 18,9$ en $G \approx 82$.
Dus ongeveer 82 kg.

15 a $I = \frac{4}{3}\pi r^3$ en $A = 4\pi r^2$

b $G = 7,9 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 33,09r^3$

c Uit $G \approx 33,09r^3$ volgt $r \approx \left(\frac{G}{33,09}\right)^{\frac{1}{3}}$ en dus: $A \approx 4\pi \cdot \left(\frac{G}{33,09}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 1,22G^{\frac{2}{3}}$.
Dus $c \approx 1,22$.

16 a $5 \cdot 3^4 = 405$

b $405x^4 = 12000$ geeft $x = -\left(\frac{12000}{405}\right)^{\frac{1}{4}} \approx -2,33$ v $x = \left(\frac{12000}{405}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 2,33$

c $(4x)^4 = 4^4 x^4 = 256x^4$, dus met 256.

17 a $V = 2\pi r^3$

b $r = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot V^{\frac{1}{3}}$

De evenredigheidsconstante is $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0,54$.

c $A = 2\pi r \cdot 2r + 2 \cdot \pi r^2 = 6\pi r^2$

d $A = 6\pi r^2$

$$A = 6\pi \left(\left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot V^{\frac{1}{3}} \right)^2$$

$$A = 6\pi \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot V^{\frac{2}{3}}$$

$$A \approx 5,54 V^{\frac{2}{3}}$$

dus $c \approx 5,54$

7.2 Eigenschappen van machtsfuncties

- V1 a** Functies waarbij p een even positief getal is. Het minimum is dan $O(0,0)$.
- b** Nee. (Functies waarbij p een oneven positief getal is hebben één punt waar de functie niet stijgt: $(0,0)$.)
- c** Kies c negatief en p positief of neem voor p een negatief getal en voor c een positief getal.
- d** Bij $p = \frac{1}{2}$ mag je alleen positieve waarden en 0 voor x toelaten. Bij $p = \frac{1}{3}$ kan x alle waarden hebben.
- e** Er zit een knik bij $O(0,0)$.
- f** Dat heeft te maken met wat je bij d opmerkte. En dan zie je dat alle waarden van x toelaten alleen kan bij breuken met een oneven noemer en niet bij breuken met een even noemer. Het gemakkelijkst is dan het nooit toelaten van negatieve x -waarden bij niet gehele decimale getallen.
- 1 a** $x^4 = x^3$ geeft $x^3(x - 1) = 0$ en dus $x = 0 \vee x = 1$.
 $x^4 > x^3$ als $x < 0 \vee x > 1$ (grafiek).
- b** $x^4 = x^2$ geeft $x^2(x^2 - 1) = 0$ en $x = -1 \vee x = 1 \vee x = 0$.
 $x^4 > x^2$ als $x < -1 \vee x > 1$ (grafiek).
- c** $x^4 = x$ geeft $x(x^3 - 1) = 0$ en $x = 0 \vee x = 1$.
 $x^4 > x$ als $x < 0 \vee x > 1$ (grafiek).
- 2 a** Gebruik de grafische rekenmachine of de applet, schets de grafiek telkens na.
- b** $x^6 = 10$ geeft $x = \pm 10^{\frac{1}{6}}$, dus $x \approx -1,47 \vee x \approx 1,47$.
 $x^6 < 10$ geeft $-1,47 < x < 1,47$ (grafiek).
- c** $x^5 = 10$ geeft $x = 10^{\frac{1}{5}}$, dus $x \approx 1,58$.
 $x^5 > 10$ geeft $x > 1,58$ (grafiek).
- 3 a** $x = 0$ (delen door 0) en $y = 0$, want bij grote en/of kleine waarden van x wordt de functiewaarde ongeveer 0.
- b** Als $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ dan moet $x = x^2$ en $x \neq 0$, dus $x = 1$.
 Grafieken tekenen geeft $\frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$ als $x < 0 \vee 0 < x < 1$.
- c** $x^{-1} = 0,005$ geeft $x = 200$.
 $x^{-2} = 0,005$ geeft $x \approx 14,14 \vee x \approx -14,14$.
 $x^{-1} = 5000$ geeft $x = 0,0002$.
 $x^{-2} = 5000$ geeft $x \approx 0,01414 \vee x \approx -0,01414$.
- d** $x < 0 \vee x > 200$
- e** $0 < x < 0,0002$
- f** $x < -\sqrt{200} \vee x > \sqrt{200}$
- g** $-\sqrt{\frac{1}{5000}} < x < 0 \vee 0 < x < \sqrt{\frac{1}{5000}}$
- 4 a** $x > 1$
- b** $x > 1$
- c** $0 < x < 1 \vee x < -1$
- d** Vergelijk je schets met de applet of de grafische rekenmachine.
- e** $x^{\frac{1}{4}} > 4$ geeft $x > 4^4 = 256$

5 a Oplossing:

$$3x^{\frac{3}{2}} = 12$$

$$x^{\frac{3}{2}} = 4$$

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} \approx 2,52$$

b Omdat $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = a^1 = a$ heft een macht met exponent $\frac{2}{3}$ een macht met exponent $\frac{3}{2}$ op.

c $x^{\frac{5}{4}} = 12$ geeft $x = 12^{\frac{4}{5}} \approx 7,30$

$$x^{\frac{5}{4}} < 12 \text{ geeft } 0 \leq x < 7,30$$

6 a Eerst -2 eenheden in de x-richting verschuiven, daarna ten opzichte van de y-as herschalen met factor 3 en ten slotte -5 eenheden in de y-richting verschuiven.

b Oplossing:

$$f(x) = 10$$

$$3(x+2)^3 - 5 = 10$$

$$3(x+2)^3 = 15$$

$$(x+2)^3 = 5$$

$$x+2 = \sqrt[3]{5} \quad x = \sqrt[3]{5} - 2 \approx -1,71$$

Als $f(x) = 10$, is $x \approx -0,29$. Hoe groter x hoe groter de functiewaarden $f(x)$ worden, dus $f(x) \leq 10$ als $x \leq -0,3$.

7 a Los eerst op voor $x^2 = \sqrt{x}$

$$x^2 = \sqrt{x}$$

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \vee x^3 - 1 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 1$$

Lees de oplossing van de ongelijkheid af in de grafiek.

$$0 < x < 1$$

b Oplossing:

$$\frac{1}{x^4} = 81$$

$$1 = 81(x^4)$$

$$x^4 = \frac{1}{81}$$

$$x = -\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}} \vee x = \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{3}$$

c $\frac{1}{x^3} > 27$

Los eerst op:

$$\frac{1}{x^3} = 27$$

$$x^3 = \frac{1}{27}$$

$$x = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Lees de oplossing van de ongelijkheid af in de grafiek.

$$0 < x < \frac{1}{3}$$

d $\frac{1}{x^3} < 30$

Los eerst op:

$$\frac{1}{x^3} = 30$$

$$x^3 = \frac{1}{30}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{30}}$$

Lees de oplossing van de ongelijkheid af in de grafiek.

$$x < 0 \vee x > \sqrt[3]{\frac{1}{30}}$$

e $x^5 < x^4$

Los eerst op:

$$x^5 = x^4$$

$$x = 0 \vee x = 1$$

Lees de oplossing van de ongelijkheid af in de grafiek.

$$x < 0 \vee 0 < x < 1$$

f $x^6 < x^4$

Los eerst op:

$$x^6 = x^4$$

$$x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$$

Lees de oplossing van de ongelijkheid af in de grafiek.

$$-1 < x < 0 \vee 0 < x < 1$$

8 a $x = 0$ en $y = 0$

b Eerst -1 eenheid in de x -richting verschuiven, dan herschalen in de richting van de y -as met factor 2 en ten slotte -4 eenheden in de y -richting verschuiven.

c $x = -1$ en $y = -4$

d $f(x) = 10$

$$(x+1)^{-2} = 7$$

$$(x+1)^2 = \frac{1}{7}$$

$$x+1 = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$$

linker- en rechterzijde tot de macht -1

linker- en rechterzijde tot de macht $\frac{1}{2}$

$$x = -1 - 7^{-\frac{1}{2}} \vee x = -1 + 7^{-\frac{1}{2}}$$

Aan de grafiek zie je dat moet gelden: $x \leq -1,38 \vee x \geq -0,62$

9 a $a = 500p^{-1}$

b Omdat de verkoop per dag omgekeerd evenredig is met de prijs, wordt bij verdubbeling van de prijs de verkoop per dag precies gehalveerd.

c Als $a = 300$, dan $p = \frac{500}{300}$. Dus $p \approx 1,67$ euro.

d Als $p = 0,01$ dan $a = 50000$ kg per dag en als $p = 100$ dan $a = 5$ kg per dag. Dat zijn geen normale hoeveelheden. De formule is niet geschikt voor die prijzen.

10 a Oplossing:

$$x^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$

$$x = 8$$

b Oplossing:

$$x^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{4}$$

$$x^{\frac{5}{2}} = 0,5$$

$$x = 0,5^{\frac{2}{5}}$$

$$x \approx 0,76$$

c Oplossing:

$$\frac{10}{x^5} = 5$$

$$x^5 = 2$$

$$x = \sqrt[5]{2}$$

Uit een plot op de GR volgt $x < 0 \vee x \geq 1,15$.

d Oplossing:

$$3x^{\frac{1}{4}} = 3$$

$$x^{\frac{1}{4}} = 1$$

$$x = 1^4$$

Uit een plot op de GR volgt $x > 1$.

11 a Eerst 2 verschuiven in de x -richting, dan in de richting van de y -as herschalen met factor 4 en ten slotte in de y -richting - 7 verschuiven.

b $4(x-2)^3 - 7 = 13$ geeft $(x-2)^3 = 5$ en $x = 2 + 5^{\frac{1}{3}}$.
Plot de grafiek van f . Je ziet dat $x \leq 3,71$.

12 a $f(x) = -5 + 2(x-3)^{\frac{1}{2}}$ en $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$

Eerst 3 eenheden in de x -richting verschuiven, dan in de richting van de y -as herschalen met factor 2 en ten slotte - 5 in de y -richting verschuiven.

b $-5 + 2(x-3)^{\frac{1}{2}} = 100$ geeft $(x-3)^{\frac{1}{2}} = 52,5$ en dus $x = 2759,25$.
Plot de grafiek van f . Je ziet dat $x \geq 2759,25$.

13 a $f(x) = 100(x-10)^{-2} + 25$ ontstaat uit $y = x^{-2}$ door 10 eenheden in de x -richting te verschuiven, dan in de richting van de y -as herschalen met factor 100 en ten slotte 25 verschuiven in de y -richting.

- b** $x = 10$ en $y = 25$
- c** $f(x) = 50$ geeft $(x - 10)^2 = 4$ en $x = 8 \vee x = 12$.
Plot de grafiek van f . Je ziet dat $x \leq 8 \vee x \geq 12$.
- 14 a** Als n positief en even is.
- b** Omdat het getal waarmee je $(x - 50)^n$ vermenigvuldigt negatief is, is het een maximum.
- c** De grafiek ontstaat uit die van $y = x^n$ door 50 in de x -richting en 100 in de y -richting te schuiven. Omdat $y = x^n$ voor positieve even n als top $(0,0)$ heeft, is de top van deze grafiek $(50,100)$.
- 15 a** rat: $Z = 0,75$ en $m = 1,10$: $0,75 = c \cdot 1,10^p$
mens: $Z = 18,0$ en $m = 76,1$: $18,0 = c \cdot 76,1^p$
Dit geeft: $24 \approx 69,18^p$ en $p \approx 0,75$. Hieruit vind je $c \approx 0,70$.
 $Z = 0,7 \cdot m^{0,75}$
- b** $Z = 0,70 \cdot 1000^{0,75} \approx 124,5$
- 16 a** $P = c \cdot G^p$
 $3,02 = c \cdot 1000^p$ en $5,08 = c \cdot 2000^p$
 $\frac{5,08}{3,02} = 2^p$
Deze vergelijking kun je met behulp van de grafische rekenmachine oplossen. Je vindt $p \approx 0,75$.
 $c \approx \frac{3,02}{1000^{0,75}} \approx 0,017$
Dus $P = 0,017 \cdot G^{0,75}$
- b** $P = 0,017 \cdot 70000^{0,75} \approx 73,16$ joule/minuut.
- c** Die wordt $2^{0,75} \approx 1,68$ keer zo groot.
- 17 a** a : $D_a = \mathbb{R}$ en $B_a = \mathbb{R}$, stijgend voor elke x , behalve voor $x = 0$, dan is de functie constant.
 b : $D_b = \mathbb{R}$ en $B_b = [0, \rightarrow)$, dalend voor $x < 0$ en stijgend voor $x > 0$. De functie is constant voor $x = 0$ en heeft een minimum voor $x = 0$.
- b** c : $D_c = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_c = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$, dalend voor elke x , asymptoten $x = 0$ en $y = 0$.
 d : $D_d = \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 0, \rightarrow \rangle$ en $B_d = \langle 0, \rightarrow \rangle$, stijgend voor $x < 0$ en dalend voor $x > 0$, asymptoten $x = 0$ en $y = 0$.
- c** e : $D_e = [0, \rightarrow)$ en $B_e = [0, \rightarrow)$, stijgend voor elke $x > 0$
 f : $D_f = [0, \rightarrow)$ en $B_f = [0, \rightarrow)$, stijgend voor elke $x > 0$
- 18 a** $2(x + 4)^4 - 10 = 490$ geeft $(x + 4)^4 = 250$ en dus $x = -4 - \sqrt[4]{250} \approx -7,98 \vee x = -4 + \sqrt[4]{250} \approx -0,02$.
- b** $10 - 2\sqrt{x - 4} = 6$ geeft $\sqrt{x - 4} = 2$ en dus $x = 2^2 + 4 = 8$.
Aan een plot op de GR zie je dat $4 \leq x < 8$.
- c** $5 \cdot x^{\frac{2}{5}} = 20$ geeft $x^{\frac{2}{5}} = 4$ en dus $x = 4^{\frac{5}{2}} = 32$.
- d** $2(x + 1)^3 = 100$ geeft $(x + 1)^3 = 50$ en dus $x = -1 + \sqrt[3]{50}$.
Aan een plot op de GR zie je dat $x > 2,68$.
- e** $\frac{25}{x^3} = 5$ geeft $x^3 = 5$ en dus $x = \sqrt[3]{5}$.
Aan een plot op de GR zie je dat $x < 0 \vee x > 1,71$.

7.3 Kwadratische functies als machtsfuncties

- V1 a** $x = \sqrt{20}$ en $x = -\sqrt{20}$.
- b** Geen reële oplossingen, want een kwadraat is nooit negatief.
- c** Alle reële getallen voldoen aan deze ongelijkheid, want elk kwadraat is nul of groter.
- d** Nee. Er kunnen maximaal twee oplossingen zijn.
- e** Dit is een goede oefening. Maak een overzicht in de vorm van een 'mindmap' (je weet wel: met pijltjes en zo).
- 1 a** Een maximum van -5, want het getal waarmee je het kwadraat vermenigvuldigt, is negatief.
- b** Nee, want het maximum is -5.
- c** $-2(x-4)^2 - 5 = -7$
 $(x-4)^2 = 1$
 $x = 4 - 1 \vee x = 4 + 1$
 $x = 3 \vee x = 5$
- 2 a** Eerst 4 verschuiven in de x -richting, vervolgens in de y -richting herschalen met factor 0,5 en -4 verschuiven in de y -richting.
- b** Een minimum van -4, want het getal waarmee je het kwadraat vermenigvuldigt, is positief.
- c** $\frac{1}{2}(x-4)^2 - 4 = 100$
 $(x-4)^2 = 208$
 $x = 4 - \sqrt{208} \vee x = 4 + \sqrt{208}$
- De grafiek van f is een dalparabool, dus de oplossing van de ongelijkheid is: $4 - \sqrt{208} < x < 4 + \sqrt{208}$
- 3** $f(x)$ is een parabool, dus een kwadratisch verband, met de top (2,1).
 Dus $f(x) = a(x-2)^2 + 1$ en gaat door (3,2).
 Dat geeft $2 = a(3-2)^2 + 1$, dus $a = 1$ en $f(x) = 1(x-2)^2 + 1$, dus $f(x) = (x-2)^2 + 1$.
 $g(x)$ is een parabool, dus een kwadratisch verband, met de top (1,0).
 Dus $g(x) = a(x-0)^2 + 1$ en gaat door (1,0).
 Dat geeft $0 = a(1-0)^2 + 1$, dus $a = -1$ en $g(x) = -1(x-0)^2 + 1$, dus $g(x) = -1 \cdot x^2 + 1$.
 $h(x)$ is een parabool, dus een kwadratisch verband, met de top (1,5; 3).
 Dus $h(x) = a(x-1,5)^2 + 3$ en gaat door (3,5; 1).
 Dat geeft $1 = a(3,5-1,5)^2 + 3$, dus $a = -0,5$ en $h(x) = -0,5(x-1,5)^2 + 3$.
- 4 a** Met -1 verschuiven in de x -richting, dan met factor 2 herschalen in de y -richting en -3 verschuiven in de y -richting.
- b** Min. $f(-1) = 2(-1+1)^2 - 3 = -3$.
- c** De lijn $x = -1$.
- 5 a** Als a positief is, dan is het een dalparabool en heeft de grafiek dus een minimum. Als a negatief is, dan is het een bergparabool en heeft de grafiek dus een maximum.
- b** Dat zie je aan q .
- c** $x = p$, want de top zit bij de x -waarde waarbij het kwadraat 0 wordt.
- 6 a** Bij de formule $y = 2(x-1)^2 - 5$ hoort een dalparabool met top (1, -5). Deze parabool snijdt de lijn $y = 3$ twee keer en heeft dus twee oplossingen.
 Dat kun je ook als volgt bepalen.
 De kwadratische vergelijking $2(x-1)^2 - 1 = 3$ kun je herleiden tot $(x-1)^2 = 4$. Omdat $4 > 0$ heeft

de vergelijking twee oplossingen.

- b** De kwadratische vergelijking $-2(x-3)^2 + 5 = 18$ kun je herleiden tot $(x-3)^2 = -6,5$. Omdat $-6,5 < 0$ heeft de vergelijking geen oplossingen.
- c** De kwadratische vergelijking $-2(x-3)^2 + 5 = 0$ kun je herleiden tot $(x-3)^2 = 2,5$. De vergelijking heeft twee oplossingen.
- d** De vergelijking $-2(x-3)^2 + 5 = 5$ kun je herleiden tot $(x-3)^2 = 0$. De vergelijking heeft één oplossing.

7 a $x = 10 \vee x = -10$

b $x - 4 = -8 \vee x - 4 = 8$
 $x = -4 \vee x = 12$

c $(x+1)^2 = 25$
 $x+1 = -5 \vee x+1 = 5$
 $x = -6 \vee x = 4$

d $3(x+2)^2 = 30$
 $(x+2)^2 = 10$
 $x+2 = -\sqrt{10} \vee x+2 = \sqrt{10}$
 $x = -2 - \sqrt{10} \vee x = -2 + \sqrt{10}$

e $x^2 = 3,5$
 $x = -\sqrt{3,5} \vee x = \sqrt{3,5}$

8 a Oplossing:

$$(x-4)^2 = 10$$

$$x-4 = -\sqrt{10} \vee x-4 = \sqrt{10}$$

$$x = 4 - \sqrt{10} \vee x = 4 + \sqrt{10}$$

De grafiek van $y = (x-4)^2$ is een dalparabool met top (4,0), dus de oplossing van de ongelijkheid is $4 - \sqrt{10} < x < 4 + \sqrt{10}$.

b Oplossing:

$$-2(x+3)^2 = -6$$

$$(x+3)^2 = 3$$

$$x = -3 - \sqrt{3} \vee x = -3 + \sqrt{3}$$

De grafiek van $y = -2(x+3)^2 + 10$ is een bergparabool met top (-3,10), dus de oplossing van de ongelijkheid is $x < -3 - \sqrt{3} \vee x > -3 + \sqrt{3}$.

c Oplossing:

$$3(x-5)^2 = 12$$

$$(x-5)^2 = 4$$

$$x-5 = -2 \vee x-5 = 2$$

$$x = 3 \vee x = 7$$

De grafiek van $y = 3(x-5)^2 - 2$ is een dalparabool met top (5,-2), dus de oplossing van de ongelijkheid is $x \leq 3 \vee x \geq 7$.

- 9 a** Eerst -8 eenheden verschuiven in de x-richting, dan herschalen in de y-richting met factor 2 en daarna -8 eenheden in de y-richting verschuiven.

- b** Als je de laatste twee stappen verwisselt, krijg je $h(x) = 2((x+8)^2 - 8) = 2(x+8)^2 - 16$. De grafiek van h ligt 8 lager dan die van f . De volgorde is dus belangrijk.

10 a Het minimum is -5 voor $x = -3$

b $0,5(x+3)^2 = 10$

$$(x+3)^2 = 20$$

$$x = -3 - \sqrt{20} \vee x = -3 + \sqrt{20}$$

c $0,5(x+3)^2 - 5 = -5$

$$(x+3)^2 = 0$$

$$x = -3$$

d $0,5(x+3)^2 - 5 = -10$

$$(x+3)^2 = -10$$

Er zijn geen oplossingen.

e Los eerst op: $0,5(x+3)^2 - 5 = -3$

$$0,5(x+3)^2 - 5 = -3$$

$$(x+3)^2 = 4$$

$$x = -1 \vee x = -5$$

De grafiek van f is een dalparabool, dus de oplossing is $x < -5 \vee x > -1$.

f $0,5(x+3)^2 - 5 = 0$

$$(x+3)^2 = 10$$

$$x = -3 - \sqrt{10} \vee x = -3 + \sqrt{10}$$

De grafiek van f is een dalparabool, dus de oplossing is $-3 - \sqrt{10} < x < -3 + \sqrt{10}$.

- g** De grafiek is een dalparabool met top $(-3, -5)$. Deze top en dus de hele parabool liggen boven de lijn $y = -10$

Dus geldt de ongelijkheid voor elke x .

11 a Top is $(-2, 10)$ en het is een berparabool, dus dalend voor $x > -2$.

b $-3(x+2)^2 + 10 = 0$

$$(x+2)^2 = \frac{10}{3}$$

$$x = -2 - \sqrt{\frac{10}{3}} \vee x = -2 + \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$(-3,83; 0) \vee (-0,17; 0)$$

12 a $5 - x^2 = -21$

$$x^2 = 26$$

$$x = -\sqrt{26} \vee x = \sqrt{26}$$

De grafiek van $y = 5 - x^2$ is een bergparabool, dus de oplossing van de ongelijkheid is $-\sqrt{26} < x < \sqrt{26}$.

b $-4(x+80)^2 = -60$

$$(x+80)^2 = 15$$

$$x = -80 - \sqrt{15} \vee x = -80 + \sqrt{15}$$

De grafiek van $-4(x+80)^2 - 40$ is een bergparabool, dus de oplossing van de ongelijkheid is

$$x < -80 - \sqrt{15} \vee x > -80 + \sqrt{15}.$$

13 a Het is een bergparabool met maximum c voor $x = 3$.

b De y -coördinaat van de top van de grafiek van f is c .

De grafiek van f is een bergparabool. Als de top boven de x -as ligt, dan snijdt de parabool de x -as twee keer. Dit is het geval als $c > 0$.

c De y -coördinaat van de top van de grafiek van f is c .

De grafiek van f is een bergparabool, dus als de grafiek van f de lijn $y = 4$ niet snijdt, moet gelden dat de top onder de lijn $y = 4$ moet liggen. Dus $c < 4$.

14 Eerste uitwerking:

De symmetrieas ligt precies tussen beide nulpunten in. Dat is de lijn $x = -7$. Dus $y = a(x + 7)^2 + q$. Gebruik twee van de gegeven punten, bijvoorbeeld $(-3, 0)$ en $(0, 12)$.

$(-3, 0)$ invullen, geeft $0 = a(-3 + 7)^2 + q$, dus $0 = 16a + q$ en $q = -16a$.

$(0, 12)$ invullen, geeft $12 = a(0 + 7)^2 + q$, dus $12 = 49a + q$ en $q = -49a + 12$.

Los het stelsel op.

$$-16a = -49a + 12, \text{ dus } 33a = 12 \text{ en } a = \frac{12}{33} = \frac{4}{11}$$

Vul $a = \frac{4}{11}$ in bijvoorbeeld $0 = 16a + q$ in. Je vindt $0 = 16 \cdot \frac{4}{11} + q$ en dus $q = -\frac{64}{11}$.

Dus het functievoorschrift wordt $y = \frac{4}{11}(x + 7)^2 - \frac{64}{11}$.

Tweede uitwerking:

Omdat hier de nulpunten bekend zijn, is er hier een simpeler manier. Een andere manier om een kwadratisch verband weer te geven is: $y = a(x - a)(x - b)$, waarbij a en b de nulpunten zijn.

Dat wordt dus: $y = a(x + 3)(x + 11)$.

Verder ligt $(0, 12)$ op de grafiek, dus die waarden kun je invullen voor x en y .

Dat geeft $a = \frac{12}{33} = \frac{4}{11}$.

Dus: $y = \frac{4}{11}(x + 3)(x + 11)$

15 a Luchtweerstand en draaiing van de bal zijn van invloed op de baan.

b De algemene formule van een parabool is $y = a(x - p)^2 + q$, waarin (p, q) de top is. Hier is de top $(10; 1,5)$, dus $p = 10$ en $q = 1,5$.

c Ga uit van de functie $h = a(x - 10)^2 + 1,5$.
Vul het punt $(0; 0,5)$ in:

$$0,5 = a(-10)^2 + 1,5$$

$$0,5 = 100a + 1,5$$

$$a = -0,01$$

d Dat gaat zo:

$$-0,01(x - 10)^2 + 1,5 = 0$$

$$(x - 10)^2 = 150$$

$$x = 10 \pm \sqrt{150}$$

Omdat $10 + \sqrt{150} < 24$ is de bal in.

16 a Top $(5, 4)$ geeft: $h(x) = a(x - 5)^2 + 4$.

Grafiek door $(0; 2,5)$, invullen van dit punt geeft: $2,5 = 25a + 4$ en dus $a = -0,06$.

Conclusie: $h(x) = -0,06(x - 5)^2 + 4$.

b Los op: $h(x) = 3,05$

$$-0,06(x - 5)^2 + 4 = 3,05$$

$$-0,06(x - 5)^2 = -0,95$$

$$(x - 5)^2 = \frac{95}{6}$$

$$x - 5 = \pm \sqrt{\frac{95}{6}}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{\frac{95}{6}} \approx 5 \pm 3,98$$

Dit geeft $x \approx 1,02 \vee x \approx 8,98$. Omdat je weet dat het een driepunter is, vervalt de eerste oplossing. De speler staat ongeveer 8,98 meter voor de basket.

17 a Bergparabool met top $(0, -2)$

b Dalparabool met top $(4, 8)$

c Bergparabool met top $(-5, -3)$

18 a Oplossing:

$$3(x - 5)^2 - 5 = -2$$

$$(x - 5)^2 = 1$$

$$x = 4 \vee x = 6$$

b Oplossing:

$$3(x - 5)^2 - 5 = -5$$

$$(x - 5)^2 = 0$$

$$x = 5$$

c Oplossing:

$$-2(x + 4)^2 + 3 = 1$$

$$(x + 4)^2 = 1$$

$$x = -5 \vee x = -3$$

d Oplossing:

$$2(x + 2)^2 = 10$$

$$(x + 2)^2 = 5$$

$$x = -2 - \sqrt{5} \vee x = -2 + \sqrt{5}$$

De grafiek van $y = 2(x + 2)^2$ is een dalparabool, dus de oplossing van de ongelijkheid is

$$x < -2 - \sqrt{5} \vee x > -2 + \sqrt{5}.$$

e Oplossing:

$$-(x + 4)^2 = -3$$

$$(x + 4)^2 = 3$$

$$x = -4 - \sqrt{3} \vee x = -4 + \sqrt{3}$$

De grafiek van $y = -(x + 4)^2$ is een bergparabool, dus de oplossing van de ongelijkheid is

$$x < -4 - \sqrt{3} \vee x > -4 + \sqrt{3}.$$

- 19** Top bij symmetrieas $x = 20$ geeft $y = a(x - 20)^2 + q$.
(5,30) invullen, geeft $225a + q = 30$ en $q = -225a + 30$.
(25,0) invullen, geeft $25a + q = 0$ en $q = -25a$.
Dit levert op: $-225a + 30 = -25a$, dus $200a = 30$ en $a = 0,15$, zodat $q = -3,75$.
De formule is $y = 0,15(x - 20)^2 - 3,75$.

7.4 De abc-formule

V1 a $g(x) = 2(x + 1)^2 + 7 = 2x^2 + 4x + 9$

b De grafieken bij beide functievoorschriften vergelijken.

c Het is een dalparabool als $a > 0$ en een bergparabool als $a < 0$.

d Aflezen uit $g(x) = 2(x + 1)^2 + 7$. De top is $(-1, 7)$.

1 a $y = x^2 - 6x + 1$

$$y = (x - 3)^2 - 3^2 + 1$$

$$y = (x - 3)^2 - 8$$

b Top is $(3, -8)$.

c $(x - 3)^2 - 8 = 0$

$$x - 3 = -\sqrt{8} \vee x - 3 = \sqrt{8}$$

De snijpunten met de x -as zijn $(3 - \sqrt{8}, 0)$ en $(3 + \sqrt{8}, 0)$.

In twee decimalen nauwkeurig $(0,17; 0)$ en $(5,83; 0)$

2 a Oplossing:

$$x^2 + 4x = 5$$

$$(x + 2)^2 - 2^2 = 5$$

$$(x + 2)^2 - 4 = 5$$

$$(x + 2)^2 = 9$$

$$x + 2 = -3 \vee x + 2 = 3$$

$$x = -5 \vee x = 1$$

b Oplossing:

$$x^2 - 8x = 9$$

$$(x - 4)^2 - 4^2 = 9$$

$$(x - 4)^2 - 16 = 9$$

$$(x - 4)^2 = 25$$

$$x - 4 = -5 \vee x - 4 = 5$$

$$x = -1 \vee x = 9$$

c Oplossing:

$$2x^2 - 12x = 54$$

$$x^2 - 6x = 27$$

$$(x - 3)^2 - 3^2 = 27$$

$$(x - 3)^2 - 9 = 27$$

$$(x - 3)^2 = 36$$

$$x - 3 = -6 \vee x - 3 = 6$$

$$x = -3 \vee x = 9$$

 beide zijden delen door 2

3 a Ga na dat je hetzelfde antwoord krijgt als in de uitleg. $x \approx 1,97 \vee x \approx -7,63$

b Je vindt nu $x = \frac{6+\sqrt{32}}{2} \vee x = \frac{6-\sqrt{32}}{2}$. Ga na, dat dit hetzelfde is als $x = 3 + \sqrt{8} \vee x = 3 - \sqrt{8}$.

c Dat gaat zo:

$$3x^2 + 17x = 45$$

$$x^2 + \frac{17}{3}x = 15$$

$$\left(x + \frac{17}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = 15$$

$$\left(x + \frac{17}{6}\right)^2 = 15 + \left(\frac{17}{6}\right)^2$$

$$x + \frac{17}{6} = -\sqrt{15 + \left(\frac{17}{6}\right)^2} \vee x + \frac{17}{6} = \sqrt{15 + \left(\frac{17}{6}\right)^2}$$

$$x = -\frac{17}{6} - \sqrt{15 + \left(\frac{17}{6}\right)^2} \vee x = -\frac{17}{6} + \sqrt{15 + \left(\frac{17}{6}\right)^2}$$



linker- en rechterzijde delen door 3

kwadraat afsplitsen

4 a $x^2 - 12x - 30 = 0$

$$x = \frac{12 - \sqrt{264}}{2} \vee x = \frac{12 + \sqrt{264}}{2}$$

$$x \approx -2,12 \vee x \approx 14,12$$

b $x^2 + 3x - 16 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2} \vee x = \frac{-3 + \sqrt{73}}{2}$$

$$x \approx -5,77 \vee x \approx 2,77$$

c $x^2 + 2x - 5 = 0$

$$x = \frac{-2 - \sqrt{24}}{2} \vee x = \frac{-2 + \sqrt{24}}{2}$$

$$x \approx -3,45 \vee x \approx 1,45$$

d $3x^2 - 6x - 1 = 0$

$$x = \frac{6 - \sqrt{48}}{6} \vee x = \frac{6 + \sqrt{48}}{6}$$

$$x \approx -0,15 \vee x \approx 2,15$$

5 a abc-formule:

$$x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x \approx -1,30 \vee x \approx 2,30$$

b abc-formule: $D = -199 < 0$, dus geen oplossingen.

c $2x^2 - 12x + 16 = 0$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$x = 2 \vee x = 4$$

d Eerst op 0 herleiden. Je vindt dan dat $D = -199 < 0$, dus geen oplossingen.

e $x^2 - 7x - 8 = 0$

$$(x - 8)(x + 1) = 0$$

$$x = 8 \vee x = -1$$

6 a Neem $a = 2$, $b = -2$ en $c = -4$. Als je nu de abc-formule toepast met deze getallen, dan vind je dezelfde oplossing.

$$D = 4 + 32 = 36$$

$$x = \frac{2 - 6}{4} = -1 \vee x = \frac{2 + 6}{4} = 2$$

$$x = -1 \vee x = 2$$

b $2x^2 - 2x - 4 = 0$ geeft $x^2 - 1x - 2 = 0$, dus $(x - 2)(x + 1) = 0$, zodat $x = 2 \vee x = -1$.

7 a $2x^2 - 6x + 2 = 0$

b $a = 2$, $b = -6$ en $c = 2$ geeft $D = 20$. Je kunt ook eerst de vergelijking aan beide zijden van het isgelijktteken door 2 delen.

c $D > 0$, dus twee snijpunten met de x -as.

d $x = \frac{6-\sqrt{20}}{4} \vee x = \frac{6+\sqrt{20}}{4}$

$$x \approx 0,38 \vee x \approx 2,62$$

De snijpunten met de x -as zijn $(0,38; 0)$ en $(2,62; 0)$.

e Midden tussen de snijpunten met de x -as zit de symmetrieas: $x = 1,5$. Omdat $y(1,5) = -2,5$ vind je de top: $(1,5; -2,5)$.

8 a $3x^2 + 5x - 8 = 0$ geeft $x = \frac{-5-\sqrt{121}}{6} \vee x = \frac{-5+\sqrt{121}}{6}$.

$$\text{Dus } x = -2\frac{2}{3} \vee x = 1$$

b $-2\frac{2}{3} < x < 1$

9 a $x^2 + 8x - 20 = 0$

$$(x + 10)(x - 2) = 0$$

$$x = -10 \vee x = 2$$

De snijpunten met de x -as zijn $(-10, 0)$ en $(2, 0)$.

$f(0) = -20$, dus het snijpunt met de y -as is $(0, -20)$.

b De x -waarde van de top is $x = -4$, dus het minimum is $f(-4) = -36$.

10 a $2x^2 - x + 1 = 10 - 3x$

$$2x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-2-\sqrt{76}}{4} \vee x = \frac{-2+\sqrt{76}}{4}$$

b Bekijk wanneer de grafiek van $f(x)$ boven de grafiek van $g(x)$ ligt. Dat is bij $x < -2,979 \vee x > 1,679$

11 a $x^2 + 30x + 3 = 0$

$$x = \frac{-30 \pm \sqrt{888}}{2} \vee x = \frac{-30 + \sqrt{888}}{2}$$

b $2x^2 - 6x = 0$

$$2x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

c $D = 25 - 40 = -15$; geen oplossingen

d $x^2 - x - 12 = 0$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x = 4 \vee x = -3$$

e $\frac{1}{3}x^2 = 4$

$$x^2 = 12$$

$$x = -\sqrt{12} \vee x = \sqrt{12}$$

12 a $x^2 - x = x + 1$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{2+\sqrt{8}}{2} \vee x = \frac{2-\sqrt{8}}{2}$$

$$x \approx -0,41 \vee x \approx 2,41$$

In een plot van beide grafieken lees je de oplossing af: $-0,41 \leq x \leq 2,41$

b $x^2 - 2x = x + 3$

$$x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$x = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \vee x = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$$

$$x \approx -0,79 \vee x \approx 3,79$$

In een plot lees je de oplossing af: $x < -0,79$ of $x > 3,79$

13 a Op het moment van loslaten is $x = 0$ en dan is $h = 2,5$. Dus op 2,5 m hoogte.

b Los op: $-0,125x^2 + x + 2,5 = 3,5$. Met de abc-formule: $x = \frac{-1-\sqrt{0,5}}{-0,25} \vee x = \frac{-1+\sqrt{0,5}}{-0,25}$

Dit geeft $x \approx 1,17 \vee x \approx 6,83$.

Omdat de bal dan omlaag moet gaan, staat de speler ongeveer 6,83 m voor het midden van de korf.

c De x -waarde van de top zit bij $x = 4$ en dan is $h = 4,5$ m.

14 a Omdat je de opbrengst krijgt door de verkochte hoeveelheid te vermenigvuldigen met de prijs per eenheid product.

b Je gaat er van uit dat zowel $q > 0$ als $p > 0$.

Dit betekent dat ook $q = 400 - 2,5p > 0$ en dus $p < \frac{400}{2,5} = 160$.

Dus $0 < p < 160$ en $0 < q < 400$.

c $TO = p \cdot q = p \cdot (400 - 2,5p) = 400p - 2,5p^2$.

$$TK = 6q + 1500 = 6 \cdot (400 - 2,5p) + 1500 = 3900 - 15p. TW = TO - TK = 400p - 2,5p^2 - (3900 - 15p) = -2,5p^2 + 415p - 3900$$

d GR: $Y1 = -2,5X^2 + 415X - 3900$ met venster $0 \leq x \leq 160$ en $0 \leq y \leq 15000$.

Je krijgt een bergparabool met maximum 13322,50 bij $p \approx 83,00$.

e Los op: $-2,5p^2 + 415p - 3900 = 10000$.

Dit kan met de abc-formule of met de GR.

Je vindt $p \approx 46,54 \vee p \approx 119,46$.

De laagste prijs waarvoor de winst meer dan € 10.000 bedraagt is € 46,55 per eenheid product.

15 a Herleid eerst $q = 400 - 2,5p$ tot $p = 160 - 0,4q$.

$$TO = p \cdot q = (160 - 0,4q) \cdot q = 160q - 0,4q^2$$

$$TK = 6q + 1500. TW = TO - TK = 160q - 0,4q^2 - (6q + 1500) = -0,4q^2 + 154q - 1500$$

b GR: $Y1 = -0,4X^2 + 154X - 1500$ met venster $0 \leq x \leq 400$ en $0 \leq y \leq 15000$.

Je krijgt een bergparabool met maximum 13322,50 bij $q \approx 193,5$ eenheden.

c Los op: $-0,4p^2 + 154p - 1500 = 0$.

Dit kan met de abc-formule of met de GR.

Je vindt $q = 10 \vee q = 375$.

Er wordt verlies geleden bij verkopen vanaf 0 tot 10 en vanaf 375 tot en met 400 eenheden product.

16 a $(x - 5)(x + 3) = 0$

$$x = 5 \vee x = -3$$

b $x^2 + x + 1 = 0$

$D = -3$, dus geen oplossingen.

c $x^2 = 9$, dus $x = \pm 3$.

d $x^2 + 2x - 14 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{60}}{2}$$

De oplossing van de ongelijkheid wordt

$$\frac{-2-\sqrt{60}}{2} < x < \frac{-2+\sqrt{60}}{2}$$

e $x^2 - x + 7 = 0$, dus $D = -27$. Geen oplossingen.

De grafiek van $y = x^2 - x + 10$ is een dalparabool met minimale waarde 10, dus de ongelijkheid geldt voor alle waarden van x .

17 a Hij wordt afgeschoten als $x = 0$; dan is $h = 0,5$, dus op 0,5 m hoogte.

b $-0,015x^2 + 0,3x + 0,5 = 0$ oplossen.

$$x = \frac{-0,3 \pm \sqrt{0,12}}{-0,03}$$

$x \approx -1,5 \vee x \approx 21,5$. De negatieve waarde vervalst.

c $-0,015x^2 + 0,3x - 1 = 0$ oplossen met de abc-formule.

$$x = \frac{-0,3 \pm \sqrt{0,03}}{-0,03}$$

$x \approx 15,77 \vee x \approx 4,23$

De grafiek van h is een bergparabool. Dus als $4,2 < x < 15,8$ is de bal hoger dan 1,5 meter.

7.5 Veeltermen

- V1 a** $g(5) = 5^3 - 4 \cdot 5 = 125 - 20 = 105$
- b** $g(-5) = (-5)^3 - 4 \cdot (-5) = -125 + 20 = -105$
- c** Snijpunten met de x-as: $(-2,0)$, $(0,0)$ en $(2,0)$.
Max. $g(-1,15) \approx 3,08$ en min. $g(1,15) \approx -3,08$.
- d** Hij heeft niet de vorm $y = a \cdot x^b$.
- 1 a** $(1,07; 7,04)$ en $(-3,74; -48,52)$.
- b** $-x^3 - 4x^2 + 12x = -4x^2$ geeft $-x^3 + 12x = -x(x^2 - 12) = 0$.
Dat betekent $x = 0 \vee x^2 - 12 = 0$.
De x-coördinaten zijn dus $x = 0 \vee x = \sqrt{12} \vee x = -\sqrt{12}$.
Dus de snijpunten zijn $(-\sqrt{12}, -48)$, $(0,0)$ en $(\sqrt{12}, -48)$.
- 2 a** $0,5x^4 - 8x^2 = 0,5x^2(x^2 - 16) = 0$ als $x = 0 \vee x = -4 \vee x = 4$.
Dus $(-4,0)$, $(4,0)$ en $(0,0)$.
- b** Toppen $(-2,83; -32)$, $(2,83; -32)$ en $(0,0)$
- c** Voer in: $Y1=0.5X^4-8X^2$ en $Y2=4-X^2$
Venster bijvoorbeeld: $-10 \leq x \leq 10$ en $-50 \leq y \leq 50$.
Je vindt $x \approx -3,814$ en $x \approx 3,814$.
Aan de grafieken zie je dat $-3,81 \leq x \leq 3,81$.
- 3 a** Eén nulpunt, geen toppen.
- b** Twee nulpunten, twee toppen.
- c** Eén nulpunt, geen toppen.
- d** Drie nulpunten, twee toppen.
- e** Maximaal drie nulpunten en twee toppen.
- 4 a** $2x^4 - 512x^2 = 0$ geeft $2x^2(x^2 - 256) = 0$ en $x = 0 \vee x = -16 \vee x = 16$.
De snijpunten zijn $(-16,0)$, $(16,0)$ en $(0,0)$.
- b** Venster bijvoorbeeld: $-20 \leq x \leq 20$ en $-40000 \leq y \leq 10000$
- c** Drie toppen.
- d** Je vindt: min. $f(-11,31) = -32768$, min. $f(11,31) = -32768$ en max. $f(0) = 0$.
- 5 a** GR: $Y1 = -0.5X^3 + 9X^2$ met venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 18$ en $0 \leq y \leq 500$.
- b** De optie maximum geeft $x = 12$.
Uit de tabel van deze functie kun je aflezen dat bij de achtste werker de toename van de oogst kleiner is dan bij de zevende.
- 6 a** Voer in: $Y1 = 0.1X^4 - 200X^2$
Venster bijvoorbeeld: $-60 \leq x \leq 60$ en $-120000 \leq y \leq 50000$.
Er zijn drie snijpunten met de x-as: $(-44,7; 0)$, $(0,0)$ en $(44,7; 0)$.
Er lijken drie toppen te zijn.
- b** Voer in: $Y1 = 5X^3 + 10X^2 + 6$
Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 5$ en $-50 \leq y \leq 50$.
Er is één snijpunt met de x-as: $(-2,24; 0)$.
Er lijken twee toppen te zijn.
- c** Voer in: $Y1 = -X^4 - 9X$
Venster bijvoorbeeld: $-5 \leq x \leq 5$ en $-150 \leq y \leq 50$.
Er zijn twee snijpunten met de x-as: $(-2,08; 0)$ en $(0,0)$.
Er lijkt één top te zijn.
- 7 a** $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16 - 100 = x^4 - 8x^2 - 84$

b $(x^2 - 4)^2 - 100 = 0$

$$(x^2 - 4)^2 = 100$$

$$x^2 - 4 = -10 \vee x^2 - 4 = 10$$

$$x^2 = -6 \vee x^2 = 14$$

$$x = -\sqrt{14} \vee x = \sqrt{14}$$

De snijpunten met de x-as zijn $(-\sqrt{14}, 0)$ en $(\sqrt{14}, 0)$

c Min. $f(-2) = -100$; $f(2) = -100$ en max. $f(0) = -84$

d Oplossing:

$$(x^2 - 4)^2 - 100 = -91$$

$$(x^2 - 4)^2 = 9$$

$$x^2 = 7 \vee x^2 = 1$$

$$x = -\sqrt{7} \vee x = \sqrt{7} \vee x = -1 \vee x = 1$$

Plot de grafiek van f . Je ziet dat $-\sqrt{7} \leq x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq \sqrt{7}$.

8 a Oplossing:

$$x^3 - 4x^2 = 21x$$

$$x^3 - 4x^2 - 21x = 0$$

$$x(x^2 - 4x - 21) = 0$$

$$x(x + 3)(x - 7) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -3 \vee x = 7$$

b Oplossing:

$$x^3 - -1 = 7x$$

$$< \text{not enough right fences} : 1 > = 7x$$

$$> x^4 - x = 7x$$

$$x^4 - 8x = 0$$

$$x(x^3 - 8) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

Met de grafiek op de GR vind je $0 \leq x \leq 2$.

c $x(6 - x)(x + 5) \geq 0$

$$x(6 - x)(x + 5) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 6 \vee x = -5$$

Met de GR vind je $x \leq -5 \vee 0 \leq x \leq 6$.

9 a $W(2,3) = 47,443$. De winst is dan € 47443,00.

b Voer in: $Y1 = -X^3 + 9X^2 + 20X - 34$ en $Y2 = 166$.

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 15$ en $-200 \leq y \leq 400$.

Snijpunt bij $x = 5$.

Dus bij een productie van 5000 maakt het bedrijf € 166000,00 winst.

c Maximum bij $x \approx 6,95811$ en $y \approx 204,02091$.

Dus bij een productie van 6958 is er een maximale winst van € 204020,91.

10 a Beide zijden zijn $20 - 2x$ cm.

b $I(x) = x(20 - 2x)^2$

c Voer in: $Y1 = X(20 - 2X)^2$ en $Y2 = 500$

De optie intersect geeft $x \approx 13,09$, $x \approx 1,91$ en $x = 5$. Let op. x kan niet groter zijn dan 10, dus $x \approx 13,09$ vervalt.

Aan de plot zie je dat $1,91 \leq x < 5$.

d De optie max. geeft $x \approx 3,33$.

11 a $TK(2,5) = 1062,50$, dus de kosten zijn € 1062,50.

b $TW = 2250q - (100q^3 - 600q^2 + 1300q) = -100q^3 + 600q^2 + 950q$

c Bij $q \approx 4,677$, dus bij een productie van ongeveer 4677 stuks.

12 a Oplossing:

$$x^4 - 8x^2 > 0$$

$$x^4 - 8x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 8) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -\sqrt{8} \vee x = \sqrt{8}$$

De oplossing van de ongelijkheid wordt $x < -\sqrt{8} \vee x > \sqrt{8}$.

b Oplossing:

$$-x^2(x - 5) = 2x^2$$

$$-x^3 + 5x^2 = 2x^2$$

$$-x^3 + 3x^2 = 0$$

$$-x^2(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

c Oplossing:

$$20 - x^4 = 11$$

$$x^4 = 9$$

$$x = \pm\sqrt[4]{9}$$

d Oplossing:

$$(x^2 - 4)(x^2 - 9) < 36$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 36$$

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 36$$

$$x^4 - 13x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 13) = 0$$

$$x = 0 \vee x = -\sqrt{13} \vee x = \sqrt{13}$$

De oplossing van de ongelijkheid wordt $-\sqrt{13} < x < 0 \vee 0 < x < \sqrt{13}$.

13 Voer in: $Y1 = -X^3 + 12X^2 + 8X - 40$.

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 15$ en $-100 \leq y \leq 300$.

Maximum bij $x = 8,32049...$ en $y = 281,298...$

Bij een productie van 832 is er een maximale winst van € 28130,00.

7.6 Totaalbeeld

- 1 a** 1 verschuiven ten opzichte van de x -as, dan ten opzichte van de y -as herschalen met factor -2 en ten slotte 10 verschuiven ten opzichte van de y -as.

- b** $f(0) = 12$, dus het snijpunt met de y -as is $(0,12)$.

$$f(x) = 0 \text{ geeft } (x-1)^5 = 5, \text{ en dus } x = 1 + \sqrt[5]{5}.$$

Het snijpunt met de x -as is ongeveer $(2,38; 0)$.

- c** $f(x) = 496$

$$(x-1)^5 = -243$$

$$x = -2$$

- d** $f(x) = 8$

$$(x-1)^5 = 1$$

$$x = 2$$

Aan de grafiek van f zie je dat de oplossing van de ongelijkheid $x < 2$ is.

- 2 a** Zie de tabel.

$-0,5(x-2)^4 + 45$	=	4,5
$-0,5(x-2)^4$	=	-40,5
$(x-2)^4$	=	81

$$x = -1 \vee x = 5$$

In een plot op de GR zie je dat $x \leq -1 \vee x \geq 5$.

- b** Zie de tabel.

$x^2 - 2x - 3x + 6$	=	0
$x^2 - 5x + 6$	=	0
$(x-2)(x-3)$	=	0

$$x = 2 \vee x = 3$$

- c** $x^3 - 4x^2 - 10x = 0$

$$x(x^2 - 4x - 10) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 - 4x - 10 = 0$$

$$x = 0 \vee x = \frac{4-\sqrt{56}}{2} \vee x = \frac{4+\sqrt{56}}{2}$$

$$x = 0 \vee x \approx -1,74 \vee x \approx 5,74$$

- d** Zie de tabel.

$0,1(x-3)^{\frac{1}{3}}$	=	1
$(x-3)^{\frac{1}{3}}$	=	10
$x-3$	=	1000
x	=	1003

- e** $\frac{1}{4}x^2 = x + 5$

$$\frac{1}{4}x^2 - x - 5 = 0$$

$$x = \frac{1-\sqrt{6}}{0,5} \vee x = \frac{1+\sqrt{6}}{0,5}$$

In een plot op de GR zie je dat $x \leq -2,90 \vee x \geq 6,90$.

f $\frac{4}{x^3} - 6 = 14$

$$x^3 = 0,2$$

$$x = \sqrt[3]{0,2}$$

Met een plot op de grafische rekenmachine zie je $x < 0 \vee x > 0,58$.

3 a $W(1,5) = 20,125$, dus de winst is dan € 2012,50.

b Voer in: $Y1 = -X^3 + 10X^2 + 14X - 20$ en $Y2 = 108,625$.

Venster bijvoorbeeld: $0 \leq x \leq 15$ en $-50 \leq y \leq 300$.

Snijpunt bij $x = 3,5$.

Dus bij een productie van 350 maakt het bedrijf € 10862,50 winst.

c Het maximum zit bij $x \approx 7,30546$ met $y \approx 22608,34$.

Bij een productie van 731 is er een maximale winst van € 22608,31. (Bij een productie van 730 is er een winst van € 22608,30.)

4 a Als $g = 3$, dan $t = 11 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \approx 22,9$ minuten. Nee, als $g = 6$, dan $t = 11 \cdot 6^{\frac{2}{3}} \approx 36,3$ minuten.

b $T = 80 + 11 \cdot g^{\frac{2}{3}}$. Nee, de totale braadtijd is niet recht evenredig met een macht van het gewicht.

c Aardappels worden in water gekookt. De kooktijd hangt af van de hoeveelheid water die wordt gebruikt.

5 a $V(p) = 10000p - 3000p^2$

b $R(p) = -480p^2 + 1600p$

c $K(p) = 1770 - 270p$

d $W(p) = -480p^2 + 1870p - 1770$

e $W(p) = 0$ geeft $p \approx 1,62 \vee p \approx 2,27$.

f $W(p)$ is maximaal als $p \approx 1,95$.

6 a a kun je berekenen met de stelling van Pythagoras in $\triangle MPR$. (Beredeneer eerst dat $\triangle MPR$ rechthoekig is!) Daarin is $MR = MQ$ gelijk aan de straal van de aarde, dus $\frac{40000}{2\pi} \approx 6366200$ m. En dus

$$\text{is: } a^2 = (6366200 + h)^2 - 6366200^2. \text{ En dus is } a = \sqrt{(6366200 + h)^2 - 6366200^2}.$$

$$\text{Hieruit volgt: } a \approx \sqrt{12732400h + h^2}$$

b Omdat h^2 heel veel kleiner is dan $12732400h$ kun je h^2 verwaarlozen.

c Dat heeft te maken met de afrondingen bij het berekenen van de straal van de Aarde.

d Eigen antwoord.

e En?

7 a Jamaica is ongeveer 1300 km^2 groot. Volgens de theorie dus $S \approx 3 \cdot 1300^{0,30} \approx 26$.

b $10^{0,30} \approx 2$

c Grote reservaat zal ongeveer 18 soorten tellen. Elk van de kleine reservaten zal ongeveer 15 soorten tellen, samen $2 \cdot 15 - 8 = 22$ soorten. Men kiest oplossing 2.

8 a De nieuwe diameter is 0,32 m.

$$d = 0,16 \text{ invullen, geeft } 0,410.$$

$$d = 0,32 \text{ invullen, geeft } 0,376.$$

$$\text{Dat is een afname van } \frac{0,410 - 0,376}{0,410} = 8\%.$$

b De vergelijking $40 = 44 \cdot d^{0,65}$ geeft $d \approx 0,86$.

$$\text{Dus de bijbehorende vormfactor is } f \approx 0,30 \cdot 0,86^2 - 0,36 \cdot 0,86 + 0,46 \approx 0,37.$$

$$\text{Het volume aan hout is } V \approx 0,37 \cdot 0,86^2 \cdot 40 \approx 11 \text{ m}^3.$$

- c** $V = f \cdot d^2 \cdot h = (0,30 \cdot d^2 - 0,36 \cdot d + 0,46) \cdot d^2 \cdot 44 \cdot d^{0,65} = 0,30 \cdot 44 \cdot d^{4,65} - 0,36 \cdot 44 d^{3,65} + 0,46 \cdot 44 \cdot d^{2,65}$
 $a = 13,20$, $b = -15,84$ en $c = 20,24$
- 9 a** 2 uur, 43 minuten en 32 seconden is $2 \cdot 3600 + 43 \cdot 60 + 32 = 9812$ seconden.
 $\frac{42195}{9812} \approx 4,3$ m/s
- b** Uit $x = 52$ volgt $v \approx 4,04$ (m/s). De tijd die een 52-jarige volgens de formule loopt op die marathon is $\frac{42195}{4,04} \approx 10444$ seconden. Dit is (ongeveer) 2,9 uur, en dus minder dan 3 uur. Volgens dit model moet het dus kunnen binnen 3 uur.
- c** GR: $Y1 = 2.836 \cdot X^{0.665} - 1.390 \cdot X^{0.818}$. Het maximum bepalen geeft $x \approx 27$.

8

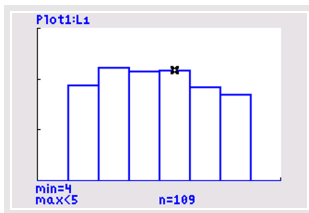
Kansrekenen

- 8.1 Kansen 94
 - 8.2 Kansbomen 100
 - 8.3 Kansen optellen/afrekken 106
 - 8.4 Kansen vermenigvuldigen 113
 - 8.5 Toevalsvariabelen 119
 - 8.6 Totaalbeeld 126
-

8.1 Kansen

- V1 a** In totaal zijn er 30 waarnemingen waarvan 4 waarnemingen groter dan 100 cm.
De gevraagde kans is daarom $\frac{4}{30} \cdot 100\% = 13,3\%$.
- b** In totaal zijn er 30 waarnemingen waarvan er $4 + 6 = 10$ tussen de 90 cm en de 100 cm liggen. De gevraagde kans is daarom $\frac{10}{30} \cdot 100\% = 33,3\%$.
- c** Zie figuur. Een lijnstuk van de polygoon snijdt van een balk een stukje af dat precies past in de vrije ruimte boven de balk ernaast.
- d** Bekijk de kans dat in het komend jaar meer dan 1 meter neerslag valt in De Bilt en bereken die nu vanuit het polygoon. Rechts van 100 is de oppervlakte $\frac{1}{2} + 1 + 2 + 1 = 4\frac{1}{2}$. De kans is $\frac{4\frac{1}{2}}{30} \cdot 100 = 15\%$.
Vanuit het histogram heb je bij a. een kans van 13,3% gevonden en dat is net iets anders dan 15%.
- 1 a** Eigen antwoord. Maak een tabel.
- b** Bijvoorbeeld: je gooit 50 keer en 15 keer daarvan heb je 5 ogen gegooit.
De relatieve frequentie van de gebeurtenis 5 ogen is dan $\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$ of, als decimaal getal: 0,3 of, als percentage: 30%.
- 2 a** Je moet dan 600 keer met zo'n dobbelsteen gooien en het aantal keren tellen dat er 4 ogen boven komen.
Stel dat je 90 keer 4 ogen hebt gegooit, dan wordt de experimentele kans op 4 ogen: $\frac{90}{600} = \frac{3}{20}$ (of 0,15 of 15%)
- b** Die kans zal steeds beter $\frac{1}{6}$ gaan benaderen.
- c** $\frac{1}{6}$
- d** Als je heel vaak met de dobbelsteen gooit, zal het aantal keren dat je 4 ogen gooit steeds dichterbij $\frac{1}{6}$ komen van het totaal aantal keren dat je hebt gegooit.
- 3 a** Gewoon proberen door heel vaak die punaise te laten vallen en bij te houden hoe vaak hij met de punt naar boven komt te liggen. Je moet dan nog het aantal keer dat de punaise met de punt boven komt te liggen, delen door het aantal keer dat je de punaise hebt laten vallen.
- b** Ja, maar dat kan alleen door het experiment vaker te doen.
- 4 a** Deel het aantal keer dat je 6 ogen hebt gegooit door 100.
- b** Deel het aantal keer dat je 7 ogen hebt gegooit door 100.
- c** Eigen antwoord.
- d** Als je met twee dobbelstenen gooit, zijn er in totaal 36 uitkomsten mogelijk (maak bijvoorbeeld een rooster met de mogelijkheden als je dit niet ziet).
6 van de 36 uitkomsten zijn een 7 (1 en 6, 6 en 1, 2 en 5, 5 en 2, 3 en 4, 4 en 3) en 3 van de 36 uitkomsten zijn een 10 (4 en 6, 6 en 4, 5 en 5).
De kans op 7 ogen zou na heel veel keren gooien in de buurt van $\frac{6}{36}$ moeten komen en die op 10 in de buurt van $\frac{3}{36}$.
- 5 a** 0, 1, 2, 3, 4 en 5.
- b** Er 1 bij optellen.
- c** Randomgetallen genereren van de vorm $6 \cdot X + 1$.
- d**
- Voer in je rekenscherf in: `randInt(1,6,100)`
 - Vertel de rekenmachine vervolgens dat dit in lijst1 moet door erachter te tikken: [STO gt] [2nd] [1] en [ENTER]
 - Alle toevalsgetallen staan nu in L1 (lijst 1), je kunt dat zien door te tikken: [STAT] en naar 1: Edit... en [ENTER]

- Vervolgens kun je de lijst sorteren: van klein naar groot: [STAT] en 2: SortA(en [ENTER] gevolgd door [2nd] [1] en [ENTER] (even wachten op de melding: Done) van groot naar klein m.b.v. SortD(
- In de gesorteerde lijst kun je gemakkelijk tellen hoe vaak de 5 voorkomt van de 100 'worpen'.
- Nu kun je een staafdiagram maken bij lijst L1 via StatPlot.



Het staafdiagram dat je krijgt, is bij iedereen anders omdat je de rekenmachine willekeurige getallen laat genereren.

- e** Je zou in de buurt van $\frac{1}{6}$ moeten uitkomen (maar, vanwege het toeval en omdat 600 nog niet zo veel is) kan het ook echt afwijken van $\frac{1}{6}$).
- f** Je zou in de buurt van $\frac{1}{9}$ moeten uitkomen.

Als je bij het werpen met twee dobbelstenen de kans wilt bepalen op een bepaald aantal ogen dat op beide stenen samen boven komt te liggen, hebben niet alle mogelijkheden een gelijke waarschijnlijkheid. Bij je simulatie moet je daarmee rekening houden: je simuleert elke dobbelsteen afzonderlijk en telt dan de uitkomsten bij elkaar.

Een simulatie van 100 worpen met twee dobbelstenen gaat zo:

- Eerst voer je `randInt(1,6,100)` uit. Zet het resultaat in L1.
- Vervolgens voer je `randInt(1,6,100)` opnieuw uit. Zet het resultaat in L2.
- Vervolgens zet je in het rekenscherm: `L1 + L2` en [ENTER].
- Het resultaat stop je vervolgens in L3.
- De simulatie van het werpen met twee dobbelstenen staat nu in L3. Deze lijst kun je sorteren en je kunt er een staafdiagram van maken. Met [TRACE] kun je nu gemakkelijk alle frequenties aflezen.

- 6 a** $23,8 + 28,9 + 20,4 = 73,1\%$
- b** $8,4 + 2,2 + 0,5 = 11,1\%$
- c** $0,5\%$
- 7 a** Aantal herhalingen is 5705, aantal gebeurtenissen 479. De gevraagde kans is $\frac{479}{5705} \approx 8,4\%$
- b** $\frac{479}{10000} \approx 4,8\%$. Er zijn 479 kleurenblinde mannen op de 10000 personen (mannen en vrouwen). Bij a ging het alleen om de kleurenblinde mannen, dus om de 5705 mannen.
- 8 a** Het gebruikte rooster in het voorbeeld is 6 bij 6.
In totaal zijn er 36 mogelijkheden.
- b** 4
- c** $P(X + Y = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
- d** $P(X + Y = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- e** $P(X + Y \geq 9) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$
- 9 a** Het aantal gunstige uitkomsten is 4 en het totaal aantal uitkomsten is 6.
 $P(X \leq 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- b** Het aantal gunstige uitkomsten is 3 en het totaal aantal uitkomsten is 6.
 $P(X \text{ is oneven}) = \frac{1}{2}$

- c** Minstens 2 wil zeggen: een uitkomst gelijk aan 2, 3, 4, 5 of 6.

Het aantal gunstige uitkomsten is 5 en het totaal aantal uitkomsten is 6.

$$P(X \geq 2) = \frac{5}{6}$$

- 10** Er zijn meer witte dan rode balletjes, dus de kans op een wit balletje is groter dan die op een rood balletje. De kans op een wit balletje is $\frac{6}{10} = 0,6$, die op een rood balletje $\frac{4}{10} = 0,4$.

11 a $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

- b** Er zitten 16 plaatjes in het spel, dus $\frac{16}{52}$.

$$\frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

c $\frac{1}{52}$

- 12 a** Kun je niet door redeneren bepalen.

b $\frac{1}{4}$

c $\frac{1}{2}$

- d** $\frac{1}{2}$ (dezelfde kans als bij c)

- e** Kun je niet door redeneren bepalen.

f $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

- 13 a** Ja, kan bij eerlijke dobbelsteen.

- b** Dit is geen eerlijke dobbelsteen.

Zolang je niet weet wat de kansen zijn, kun je dit niet met de grafische rekenmachine simuleren.

- c** Ja, kan bij eerlijke dobbelsteen.

- 14 a** Aantal gunstige uitkomsten = aantal gele balletjes = 3

Totaal aantal uitkomsten = totale aantal balletjes = 10

$$P(\text{geel balletje}) = \frac{3}{10}$$

- b** Aantal gunstige uitkomsten = aantal balletjes met nummer 1 = 2

Totaal aantal uitkomsten = totale aantal balletjes = 10

$$P(\text{balletje met nr. 1}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

- c** Aantal gunstige uitkomsten = aantal balletjes met nummer 4 = 1

Totaal aantal uitkomsten = totale aantal balletjes = 10

$$P(\text{balletje met nr. 4}) = \frac{1}{10}$$

- d** Aantal gunstige uitkomsten = aantal groene balletjes met een nummer hoger dan 3 = 4

Totaal aantal uitkomsten = totale aantal balletjes = 10

$$P(\text{balletje met nr. hoger dan 3}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

- 15 a** Maak eventueel een rooster van alle 36 mogelijke uitkomsten.

7 ogen krijg je door de 6 combinaties 1 en 6, 6 en 1, 2 en 5, 5 en 2, 3 en 4, 4 en 3 dus

$$P(7 \text{ ogen}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- b** Maak eventueel een rooster van alle 36 mogelijke uitkomsten en tel daarin alle mogelijkheden (1 en 1, 1 en 2 etc). In totaal zijn er 21 uitkomsten die 7 of minder ogen hebben.

$$P(\text{hoogstens 7 ogen}) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

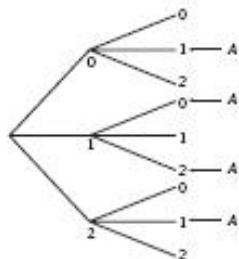
- c Er is 1 uitkomst die meer dan 11 ogen heeft: 6 en 6.

$$P(\text{meer dan 11 ogen}) = \frac{1}{36}$$

- d Maak eventueel een rooster van alle 36 mogelijke uitkomsten en tel de even daarin: het zijn er 18.

$$P(\text{een even aantal ogen}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

- 16 a Zie de figuur.



- b Er zijn 9 mogelijke paren, die allemaal even waarschijnlijk zijn (als ze tenminste niet volgens een bepaalde strategie spelen). Elk van die mogelijkheden geef je een nummer, 1 t/m 9. De nummers 2, 4, 6, 8 zijn winst voor A, de rest voor B.

- c Nee, B heeft meer kans (bekijk het boomdiagram maar).

- 17 a Wel of geen munt: die kans is $\frac{1}{2}$.

- b Er zijn maar liefst 16 mogelijke uitkomsten: Cambuur verliest 4 keer de toss, Cambuur verliest 3 keer de toss (dat kan op 4 manieren, afhankelijk van welke keer Cambuur de toss wel wint), enzovoort. Je kunt je kennis over telproblemen (combinatoriek) daarvoor gebruiken: het kan namelijk op 2^4 manieren.

$$P(\text{vier keer aftrappen}) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

- c Het totale aantal uitkomsten is 16 (zie de uitwerking bij b).

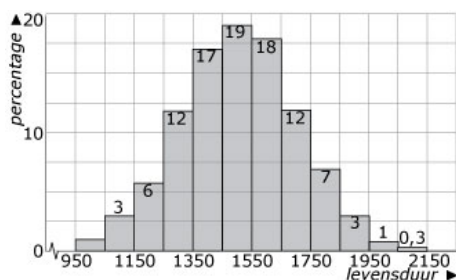
Cambuur kan op 4 manieren 3 keer de toss winnen en op 1 manier 4 keer de toss winnen.

$$P(\text{minstens drie keer aftrappen}) = \frac{5}{16}$$

- 18 a Totale aantal lampen is 300.

De relatieve frequentie van de lampen die een levensduur hebben van 950 tot 1050 uur is $\frac{4}{300} \approx 0,013$ en dat is ongeveer 1,3%. De linkerstaaf heeft dus een hoogte van 1,3.

De hoogte van de rest van de staven bereken je op dezelfde manier.



- b Er zijn $4 + 9 + 19 = 32$ lampen die minder dan 1250 uur branden.

Dit is het aantal gunstige gebeurtenissen. Het totale aantal gebeurtenissen is 300.

$$\text{De (experimentele) kans erop is dus } \frac{32}{300} = \frac{8}{75} \approx 0,107.$$

- c Dat is de werking van de wet van de grote aantallen: hoe vaker de gebeurtenis wordt herhaald, hoe meer de experimentele kans de werkelijke kans benadert.

- d 10% van het gemiddelde is ongeveer 150 uur.

$$1500 - 150 = 1350 \text{ uur}$$

$$1500 + 150 = 1650 \text{ uur}$$

Het aantal lampen dat minder dan 1350 uur brandt, is $4 + 9 + 19 + 36 = 68$.

Het aantal lampen dat meer dan 1650 uur brandt, is $37 + 20 + 9 + 3 + 1 = 70$.

Het aantal gunstige uitkomsten is dus 138 en het totale aantal uitkomsten is 300.

De kans dat een lamp een levensduur heeft die meer dan 10% afwijkt van het gemiddelde is daarmee naar schatting $\frac{138}{300} = 0,46$ ofwel 46%.

19 a Aantal gunstige uitkomsten = 1

Totaal aantal uitkomsten = 1000

$$P(\text{prijs op 113}) = \frac{1}{1000} = 0,001$$

b Aantal gunstige uitkomsten = 1, want ze heeft maar één lotnummer.

Totaal aantal mogelijke uitkomsten = 1000

$$P(\text{prijs}) = \frac{1}{1000} = 0,001$$

c Aantal gunstige uitkomsten = 500

Totaal aantal uitkomsten = 1000

$$P(\text{even lotnr.}) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2} = 0,5$$

d Bij b is alleen het nummer van je vriendin goed, bij c is ieder even nummer goed.

e Aantal gunstige uitkomsten = 1

Totaal aantal uitkomsten = $1000 - 1 = 999$

$$P(1\text{e prijs terwijl nr. 771 al weg is}) = \frac{1}{999}$$

f Aantal gunstige uitkomsten = 500

Er is een oneven getal weg, maar alle even getallen zijn er nog.

Totaal aantal uitkomsten = $1000 - 1 = 999$

$$P(\text{even nr. terwijl nr. 771 al weg is}) = \frac{500}{999}$$

20 a Deze percentages zijn gebaseerd op de cijfers die in vele jaren behaald zijn: volgens de wet van de grote aantallen kun je dan aannemen dat dit de werkelijke kansen goed benaderen.

b Het totale percentage eindexamenkandidaten dat een 5 op het SE scoort, is $11 + 5 + 2 = 18$.

Het percentage eindexamenkandidaten met een 5 op het SE dat op het CE een voldoende scoort, is $5 + 2 = 7$.

$$P(\text{voldoende op het CE indien 5 op het SE}) = \frac{7}{18}$$

c Dat is een percentage van $10 + 5 + 5 + 0 + 2 + 7 = 29$, dus de kans is

$$P(\text{iemand scoort op het CE beter dan op het SE}) = \frac{29}{100}$$

d Er zijn 15 mogelijke SE en CE combinaties in deze tabel en dus is het verleidelijk om elk van deze combinaties een nummer tussen de 1 en de 15 te geven en de grafische rekenmachine een toevalsgetal te laten genereren tussen de 1 en de 15.

Probleem hierbij is dat deze combinaties verschillende kansen hebben om voor te komen.

Een mogelijkheid is dan de volgende.

De SE/CE-combinatie (4, 5) heeft een percentage van 10%.

Kies de 10 toevalsgetallen 1 t/m 10 om deze combinatie te representeren.

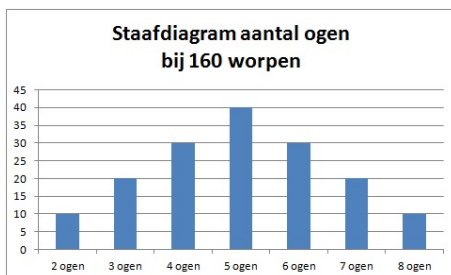
De SE/CE-combinatie (5, 5) heeft een percentage van 11%.

Kies de 11 toevalsgetallen 11 t/m 21 om deze combinatie te representeren.

Doe dit voor elke SE/CE-combinatie: je hebt dan 100 toevalsgetallen nodig.

Laat je vervolgens een toevalsgetal tussen de 1 en 100 genereren en blijkt dat nummer 18 te zijn, dan voorspel je dat je eindexamenkandidaat voor zowel SE als CE een 5 haalt.

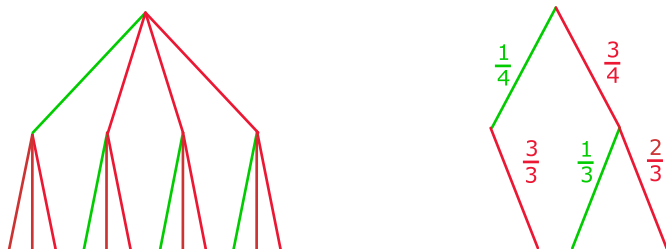
- 21 a** Tel de relatieve frequenties bij elkaar op voor deze experimentele kans:
 $0,6 + 1,2 + 3,9 + 12,1 + 24,3 = 42,1\%$.
- b** M: $29,4 + 20,9 = 50,3\%$ en L: $8,9 + 2,7 + 1,0 = 12,6\%$.
 NB: de percentages in het histogram tellen op tot meer dan 100%. Vermoedelijke oorzaak is dat deze percentages te grof afgerond zijn.
- c** S: 42,1% van 300 ~ 126
 M: 50,3% van 300 ~ 151
 L: 12,6% van 300 ~ 38
 NB: samen is dit ruim meer dan 300: dat komt doordat de percentages allemaal afgerond waren.
- 22 a** 13 hartenkaarten op de 52 kaarten in totaal.
- b** 4 boeren op de in totaal 52 kaarten.
- c** 1 hartenboer op de 52 kaarten in totaal.
- 23** Van alle mogelijke uitkomsten kun je een rooster van 6 bij 6 tekenen: er zijn 36 uitkomsten (producten) in totaal.
 Turf voor iedere verschillende producten het aantal keren dat deze in het rooster voorkomt.
 Tel alle turfstreepjes van producten met waarde 20 of hoger bij elkaar op: dat zijn er 8
 $(4 \cdot 5, 5 \cdot 4, 5 \cdot 5, 4 \cdot 6, 6 \cdot 4, 5 \cdot 6, 6 \cdot 5, 6 \cdot 6)$.
 8 op de 36 uitkomsten geven een product dat minstens 20 is: $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.
- 24 a** Heel vaak met één van die dobbelstenen gooien en bijhouden hoe vaak elk vlakje boven komt. En daarna zou je dit ook nog met de andere dobbelsteen moeten doen.
- b** Omdat bij zo'n simulatie wordt uitgegaan van gelijke kansen voor elk vlakje.
- c** De mogelijke uitkomsten zijn: 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8.
 Voor elk van deze uitkomsten maak je een staaf met de hoogte van het aantal keren dat jij die uitkomst hebt geturfd.
 Bij een simulatie met 160 worpen zou je het volgende staafdiagram kunnen krijgen:



- d** Lees uit je staafdiagram af wat de frequentie is van uitkomst 4 en bereken de relatieve frequentie van deze uitkomst in jouw experiment.
 In het voorbeeld is dat $\frac{30}{160} = 0,1875$.
- e** 1. Je hebt waarschijnlijk veel te weinig herhalingen van dit experiment gedaan: volgens de wet van de grote aantallen zul je er heel veel moeten doen om de theoretische kans goed te kunnen benaderen
 2. Toeval.

8.2 Kansbomen

- V1 a** In deze paragraaf leer je dat je dit als volgt berekent: $0,25 \cdot 0,25 = 0,0625$.
- b** In deze paragraaf leer je dit als volgt te beredeneren: hij kan nu één keer scoren of twee keer scoren, die kansen moet je optellen. Je vindt dan 0,4375.
- 1 a** Dezelfde kansboom als in de uitleg, maar bij alle groene takken staat de kans $\frac{3}{20}$ (of 0,15) en bij de rode takken staat de kans $\frac{17}{20}$ (of 0,85).
- b** In de kansboom zijn dit de route treffer-misser en de route misser-treffer en dus wordt de kans: $0,15 \cdot 0,85 \cdot 2 = 0,2550$
- c** In de kansboom is dit de route treffer-treffer en dus wordt de kans: $0,15 \cdot 0,15 = 0,0225$
- d** Dit is de kans op 0 treffers of 1 treffer: in de kansboom zijn dit alle routes behalve de route treffer-treffer uit c. Deze kans is gelijk aan 1 min de kans op 2 treffers en dit is gelijk aan $1 - 0,0225 = 0,9775$.
- 2 a** In het vaasmodel pak je nu 3 balletjes: voor iedere keer werpen 1 balletje. Gebruik dus een kansboom met drie lagen: voor ieder balletje 1 laag. Precies twee keer gooien zie je in 3 routes van deze kansboom en iedere route geeft een kans van $0,15^2 \cdot 0,85$.
- $P(X = 2) = 0,15^2 \cdot 0,85 \cdot 3 \approx 0,0573$.
- b** $0,15^2 \cdot 0,85 \cdot 3 + 0,15 \cdot 0,85^2 \cdot 3 + 0,85^3 \approx 0,9966$
- c** $0,15^2 \cdot 0,85 \cdot 3 + 0,15^3 \approx 0,0608$
- 3 a** Met terugleggen, de kans per schot blijft gelijk, dus je moet telkens dezelfde balletjes in de vaas hebben. En daarom moet je na elke trekking het getrokken balletje terugleggen (en dan de vaas schudden).
- b** Bij elk schot kan het schotpercentage anders zijn. Het gegeven schotpercentage is een experimentele kans, een gemiddelde over alle schoten tot dat moment.
- c** Zie figuur, er zijn voor het tweede balletje nu nog drie mogelijkheden.



- d** $P(X = 1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2}{4} = 0,5$
- e** $P(X = 1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2}{4} = 0,5$
- 4 a** Iemand kan meerdere taken uitvoeren.
- b** Dit is een trekking met terugleggen. In de bijbehorende kansboom zijn er drie routes die hieraan voldoen: $P(vvm)$, $P(vmv)$ en $P(mvv)$.
- Deze zijn elk gelijk aan $P(v) \cdot P(v) \cdot P(m) = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{100}{729}$
- $P(2 \text{ vrouwen, } 1 \text{ man}) = 3 \cdot \frac{100}{729} = \frac{300}{729}$
- c** Dit is een trekking met terugleggen. In de bijbehorende kansboom is er 1 route die hieraan voldoet: mmm .
- $P(mmm) = \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{64}{729}$
- d** Dit is een trekking met terugleggen. In de bijbehorende kansboom voldoen de volgende routes hieraan: mmm en 3 routes voor mmv en 3 routes voor mvv .
- $P(2 \text{ mannen, } 1 \text{ vrouw}) = \frac{240}{729}$ (zie het voorbeeld) en de andere kansen heb je hiervoor in deze opgave al berekend.

De gevraagde kans is: $P(\text{hoogstens 2 vrouwen}) = \frac{64}{729} + \frac{300}{729} + \frac{240}{729} = \frac{604}{729}$

- 5 a** Twee balletjes trekken, dus een kansboom van twee lagen.

Telkens de keuze tussen een blauw (met kans $\frac{4}{6}$) of een rood (met kans $\frac{2}{6}$) balletje.

De kansen blijven in beide lagen gelijk: het is een situatie met terugleggen.

b $P(br) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

c $P(rb) + P(br) = \frac{8}{36} + \frac{8}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

- 6 a** Niemand mag meerdere taken uitvoeren.

- b** Dit is een trekking zonder terugleggen. In de bijbehorende kansboom zijn er 3 routes die hieraan voldoen: vvm , vmv en mvv . De kans is gelijk aan

$$P(vvm \text{ of } vmv \text{ of } mvv) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{240}{504} = \frac{10}{21}$$

- c** Dit is een trekking zonder terugleggen. In de bijbehorende kansboom is er 1 route die hieraan voldoet: mmm .

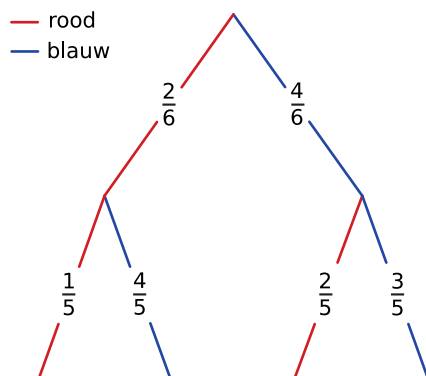
$$P(mmm) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21}$$

- d** Dit is een trekking zonder terugleggen. Hoogstens twee vrouwen betekent de volgende mogelijkheden: drie mannen, twee mannen en een vrouw of een man en twee vrouwen.

Deze kansen zijn al bekend uit het voorbeeld en uit b en c. De totale kans is dan:

$$P(\text{hoogstens twee vrouwen}) = \frac{1}{21} + \frac{5}{14} + \frac{10}{21} = \frac{2+15+20}{42} = \frac{37}{42}$$

- 7 a** Bekijk de figuur.



- b** Dit zijn de kansboomroutes 'eerst rood en dan blauw' en 'eerst blauw en dan rood'.

$$P(rb \text{ of } br) = P(rb) + P(br) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

- c** Dit zijn de kansboomroutes 'twee keer rood' en 'twee keer blauw'.

$$P(rr \text{ of } bb) = P(rr) + P(bb) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

- 8 a** Je moet nu systematisch tellen en dus gebruik maken van combinatoriek. Bedenk dat dit een trekking zonder terugleggen is. Je kiest telkens een duo uit een geheel van 6: dit is een combinatie van 6 boven 2.

$$\binom{6}{2} = 15$$

- b** Verschillende kleur: 4 mogelijkheden voor de witte, gecombineerd met 2 mogelijkheden voor de rode geeft $4 \times 2 = 8$ mogelijkheden. Je kunt hier zelfs een boomdiagram voor gebruiken: de eerste laag geeft 4 takken voor de witte balletjes; de tweede laag geeft telkens 2 takken voor de rode balletjes.

Zelfde kleur: Wit: je kiest nu 2 uit 4 en dat geeft een combinatie van 4 boven 2 en dat geeft $\binom{4}{2} = 6$ mogelijkheden. Rood: er is precies 1 duo dat helemaal rood is. Samen: 7 mogelijkheden.

- c Er zijn dus 8 mogelijkheden met verschillende kleur en 7 mogelijkheden met gelijke kleur en 15 mogelijkheden in totaal.

$$P(\text{verschillende kleur}) = P(rw) + P(ri) = \frac{8}{15} = P(rw \text{ of } ri)$$

$$P(\text{gelijke kleur}) = P(rr) + P(ww) = \frac{7}{15} = P(rr \text{ of } ww)$$

9 a $P(X = 2) = 0,25 \cdot 0,16 = 0,04$

b $P(X = 0) = 0,75 \cdot 0,84 = 0,63$

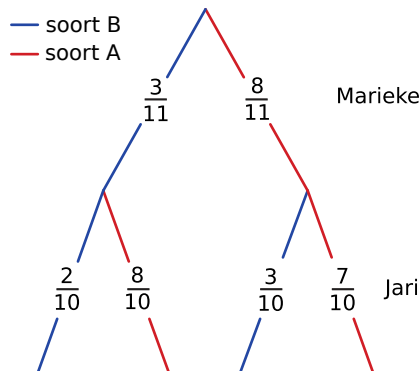
c $P(\text{minstens 1 treffer}) = P(1 \text{ treffer}) + P(2 \text{ treffers})$

$P(1 \text{ treffer})$ staat uitgewerkt in het voorbeeld en is 0,33.

$P(2 \text{ treffers})$ heb je hiervoor in deze opgave berekend.

$$P(\text{minstens 1 treffer}) = 0,33 + 0,04 = 0,37$$

- 10 a Zie de figuur.



- b Er is een route in de kansboom die hieraan voldoet:

$$P(\text{Jari en Marieke hebben beiden eenzelfde cadeau}) = \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{6}{110} = \frac{3}{55}$$

- c Er is een route in de kansboom die hieraan voldoet:

$$P(\text{Marieke een A, Jari een B}) = \frac{8}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{24}{110} = \frac{12}{55}$$

- d Nu zijn er twee routes die voldoen:

$$P(\text{Jari en Marieke hebben samen een A en een B gepakt}) =$$

$$\frac{3}{11} \cdot \frac{8}{10} + \frac{8}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{24}{55}$$

- 11 a Maak eventueel een kansboom van drie lagen.

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \approx 0,0220$$

- b Er zijn drie mogelijkheden: RRG, RGR, GRR.

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot 3 \approx 0,0879$$

- c Er zijn zes mogelijkheden: GRB, GBR, RGB, RBG, BGR, BRG.

$$\frac{4}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{6}{13} \cdot 6 \approx 0,2637$$

- 12 a $\frac{3}{8}$

- b Nee, de eerste taak slaat op de eerste taak die verloot wordt. Dan zijn er nog 8 mensen waar uit gekozen kan worden. Bij de tweede loting zijn er nog maar 7 mensen.

- c Teken een kansboom van twee lagen: voor beide taken 1 laag.

De bovenste laag heeft een tak voor de mannen en een tak voor de vrouwen.

Bedenk dat dit een situatie zonder terugleggen is.

$$P(VV) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

- d** Gebruik een kansboom met twee lagen: in iedere laag staan dezelfde kansen. In de bovenste laag zijn 8 takken: voor iedere persoon één.

Voor de gevraagde kans gelden 8 routes.

$$P(2 \text{ maal zelfde persoon}) = 8 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

- e** Zie de uitwerking bij d.

Er zijn echter nu 3 routes geldig.

$$P(2 \text{ maal zelfde man}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{64}$$

- f** $P(VV) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64} \approx 0,391$. Dit is groter dan $\frac{5}{14} \approx 0,357$.

De kans is dus groter.

- 13 a** Gebruik eventueel een kansboom van twee lagen. Alleen route Rh, Bp is geldig:

$$P(\text{eerste rood hout, tweede blauw plastic}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{100} = 0,04$$

- b** Gebruik eventueel een kansboom van twee lagen. Twee routes zijn nu geldig: Rh, Bp en Bp, Rh:

$$P(\text{rood hout, blauw plastic}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = 0,04 + 0,04 = 0,08$$

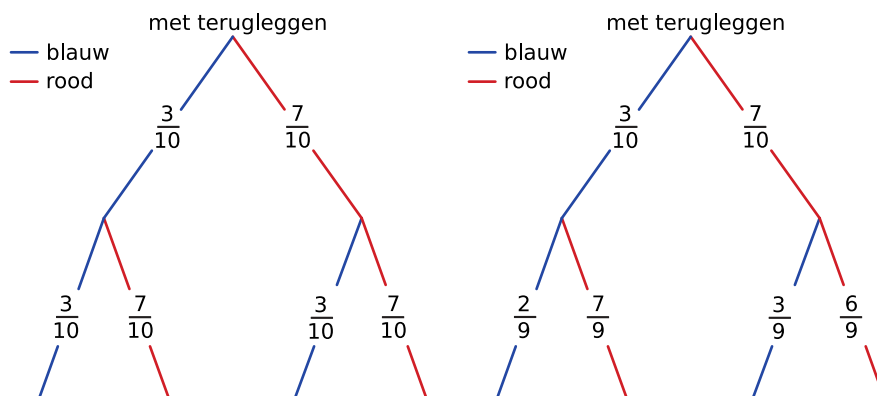
- c** Gebruik eventueel een kansboom van twee lagen. Alleen route Rh, Bp is geldig:

$$P(\text{eerste rood hout, tweede blauw plastic}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$$

- d** Gebruik eventueel een kansboom van twee lagen. Twee routes zijn nu geldig: Rh, Bp en Bp, Rh:

$$P(\text{rood hout, blauw plastic}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{90} + \frac{4}{90} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$$

- e** Zie de figuur.



- f** Met terugleggen: $P(RB \text{ of } BR) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{42}{100} = \frac{21}{50}$

$$\text{Zonder terugleggen: } P(RB \text{ of } BR) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$$

- g** Als je er een rood (blauw) balletje uit haalt, wordt daarna de kans op een blauw (rood) balletje iets groter.

- 14 a** Met drie dobbelstenen kun je maximaal 18 ogen gooien: dit kan alleen door drie keer een 6 te gooien. 17 ogen kun je gooien met de combinaties 5,6,6 en 6,5,6 en 6,6,5.

Er zijn dus 4 routes in de kansboom die hierbij passen. Bedenk dat elk takje in de kansboom een kans van $\frac{1}{6}$ heeft.

$$P(17 \text{ of } 18 \text{ ogen}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$$

- b** 16 ogen gooi je met de combinaties 4,6,6 en 6,4,6 en 6,6,4 maar ook met 6,5,5 en 5,6,5 en 5,5,6.

Dit zijn 6 routes in de kansboom; elk van deze routes heeft een kans van $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

$$P(16 \text{ ogen}) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

- c $P(\text{minstens 2 zessen}) = P(2 \text{ zessen}) + P(3 \text{ zessen})$

$P(2 \text{ zessen})$:

De andere dobbelsteen mag dan 1 t/m 5 ogen hebben. Stel dat die andere dobbelsteen 1 is: er zijn 3 routes in de kansboom met twee zessen en een 1 (6,6,1 en 6,1,6 en 1,6,6). Zo zijn er 3 routes voor elk van de 5 mogelijke waarden van de andere dobbelsteen. Elke route heeft wederom een kans van $\frac{1}{216}$.

$$P(2 \text{ zessen}) = 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{216} = \frac{15}{216}$$

$$P(3 \text{ zessen}) = \frac{1}{216}$$

$$\text{Dus } P(\text{minstens 2 zessen}) = \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$$

- d 5 rode (geen zes) met 1 wit balletje(wel een zes); drie keer trekking met terugleggen.

- 15 a Vaasmodel:

2 rode balletjes en 8 witte; 3 keer trekken met terugleggen; bereken de kans dat twee van de drie balletjes rood zijn.

Kansboom:

3 lagen met in de bovenste laag twee takken met kans 0,2 en 0,8; de kansen blijven in alle lagen gelijk.

$$P(\text{twee van de drie keer verhinderd}) = 3 \cdot (0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8) = 0,096$$

- b Vaasmodel:

een vaas voor Anne met 3 blauwe (ziek) en 7 groene (gezond) balletjes en een vaas voor de heer Nijdam met 2 rode (verhinderd) en 8 witte balletjes. Trek uit elke vaas een balletje. Bij de uitkomsten blauw rood, blauw wit en groen rood gaat de bijles niet door.

$$P(\text{bijles gaat niet door}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{10} + \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{10} = 0,44$$

Kansboom:

$$P(\text{bijles gaat niet door}) = 0,3 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,44$$

- 16 a Mogelijk hebben beide clubs in het verleden bijvoorbeeld 6 keer bij Arsenal en ook 6 keer bij Juventus tegen elkaar gespeeld. Bij de thuiswedstrijden heeft Arsenal er 3 gewonnen en 2 verloren. Bij de uitwedstrijden heeft Arsenal er 2 gewonnen en 2 verloren.

- b Kansboom met twee lagen, één voor iedere wedstrijd.

Bovenste laag heeft drie takken: winst voor Arsenal (kans $\frac{1}{2}$), winst voor Juventus (kans $\frac{1}{3}$) en gelijkspel (kans $\frac{1}{6}$).

In de onderste laag hebben alle drie de takken kans $\frac{1}{3}$.

- c In de kansboom zijn dit de routes AJ en JA.

$$P(\text{ieder wint een wedstrijd}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$$

- 17 a Een kansboom met vier lagen, voor iedere inzittende een laag. Iedere keer splitsen er 2 takken: inzittende is wel kleurenblind (kans $\frac{1}{12}$) of niet kleurenblind (kans $\frac{11}{12}$).

- b Vanuit de kansboom:

Je ziet 6 routes met 2 wel- en 2 niet-kleurenblinde mannen; alle zes hebben deze routes een kans $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} = \frac{121}{20736}$.

$$P(2 \text{ inzittenden zijn kleurenblind}) = 6 \cdot \frac{121}{20736} = \frac{726}{20736} = \frac{121}{3456} \approx 3,5\%.$$

Zonder kansboom, maar met combinatoriek:

In totaal zijn er $\binom{4}{2} = 6$ manieren om een groepje van 2 uit een totaal van 4 te kiezen en elk van deze manieren heeft dezelfde kans. Verder als boven.

18 a Redenering:

Er zijn evenveel zakjes met 9 rode en 7 gele als er zakjes zijn met 7 rode en 9 gele: over het totaal gezien zijn er dus evenveel rode als gele gomballen in omloop.

De bovenste laag van de kansboom heeft 3 takken: voor ieder soort zakje een tak met kansen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{4}$.

De tweede laag uit telkens 2 takken: voor rode en voor gele gomballen.

Zo ontstaan 3 routes om een rode gombal te kiezen. De bijbehorende kans:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{1}{2}$$

b Teken eventueel een kansboom van 3 lagen diep; het betreft hier een gebeurtenis zonder terugleggen.

Er is maar 1 route met 3 gele gomballen.

$$P(3 \text{ gele gomballen}) = \frac{7}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = 0,0625 = 6,25\%.$$

c Eerste geval:

$$P(3 \text{ gele gomballen}) = \frac{7}{16} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{210}{2912} \approx 7,2\%.$$

Tweede geval:

$$P(3 \text{ gele gomballen}) = \frac{7}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{13} = \frac{210}{3120} \approx 6,7\%.$$

8.3 Kansen optellen/afrekken

V1 a $\frac{1}{52}$

b Zo'n kaart bestaat niet.

c Een kwart van een spel kaarten bestaat uit hartenkaarten:

$$P(X = \text{harten}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

d $P(X \neq \text{aas}) = \frac{52-4}{52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

e Harten en ruiten vormen samen de helft van een spel kaarten:

$$P(X = \text{harten of } X = \text{ruiten}) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

f $P(X = \text{harten of } X = \text{boer}) = P(X = \text{harten}) +$

$$P(X = \text{boer maar geen hartenboer}) = \frac{13}{52} + \frac{3}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

g $P(X = \text{harten of } X = \text{plaatje}) = P(X = \text{harten}) +$

$$P(X = \text{plaatje maar geen hartenplaatje}) = \frac{13}{52} + \frac{3 \times 4}{52} = \frac{25}{52}$$

1 a $P(X = \text{plaatje}) = \frac{4 \cdot 4}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

b $P(X \neq \text{plaatje}) = \frac{4 \cdot 9}{52} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$

c $P(X = \text{harten}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

d $P(X = \text{hartenplaatje}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

e $P(X = \text{harten of } X = \text{heer}) =$

$$P(X = \text{harten}) + P(X = \text{heer maar geen hartenheer}) = \frac{13}{52} + \frac{3}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

f Die gebeurtenissen sluiten elkaar niet wederzijds uit.

g In totaal zitten er nu niet 13 maar 12 hartenkaarten en 2 niet-harten-heren in het spel en is het totaal 50 i.p.v. 52.

$$P(X = \text{harten of heer}) = \frac{12}{50} + \frac{2}{50} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

2 A C

3 a Deze twee gebeurtenissen sluiten elkaar uit.

$$P(\text{harten of schoppen}) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

b Deze twee gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: er is 1 kaart die zowel harten als vrouw is.

$$P(\text{harten of vrouw}) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

c Deze twee gebeurtenissen sluiten elkaar uit.

$$P(\text{even of plaatje}) = \frac{4 \cdot 5}{52} + \frac{4 \cdot 4}{52} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

d Deze twee gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: er zijn 5 kaarten die zowel even als ruit zijn.

$$P(\text{even of ruit}) = \frac{4 \cdot 5}{52} + \frac{13}{52} - \frac{5}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

4 Al deze gebeurtenissen sluiten elkaar wederzijds uit, dus:

$$P(6 \text{ of meer doelpunten}) = \frac{19+10+3+2}{306} = \frac{1}{9}$$

5 a Dit betreft de nummers 10, 20, ..., 90.

$$P(0) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

b Er is maar één briefje met zowel een 0 als een 2 en dat is het briefje met nummer 20. De kans is dus

$$\frac{1}{90}.$$

- c** Bedenk dat je $P(0)$ bij a berekend hebt en $P(2)$ in het voorbeeld. Deze twee gebeurtenissen sluiten elkaar *niet* uit: er is 1 briefje dat zowel 0 als 2 bevat (briefje met 20).

$$P(0 \text{ of } 2) = \frac{9}{90} + \frac{18}{90} - \frac{1}{90} = \frac{26}{90} = \frac{13}{45}$$

- d** $P(\text{geen } 0 \text{ en geen } 2)$ met complementregel:
Uit c ken je al de kans op een briefje met een 0 of met een 2 en elk ander briefje is een briefje waarop geen 0 en geen 2 staat.

$$P(\text{geen } 0 \text{ en geen } 2) = 1 - P(0 \text{ of } 2) = 1 - \frac{13}{45} = \frac{32}{45}$$

- 6 a** Een rooster met 6 rijen voor de 6 waarden van de ene dobbelsteen en 6 kolommen voor de 6 waarden van de andere dobbelsteen: in totaal $6 \cdot 6 = 36$ mogelijkheden.

	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

- b** In totaal zijn er $6 \cdot 6 = 36$ mogelijke uitkomsten. In 6 ervan zit een rode met 5 ogen.

$$P(R = 5) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- c** In totaal zijn er $6 \cdot 6 = 36$ mogelijke uitkomsten. In 6 ervan zit een blauwe met 4 ogen.

$$P(B = 4) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- d** Er is maar één worp waarbij de rode 5 ogen heeft en de blauwe 4 ogen.

$$P(R = 5 \text{ en } B = 4) = \frac{1}{36}$$

- e** Nee, want de kans op $R = 5$ en $B = 4$ is niet nul (zie d).

- f** Deze gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: zie je antwoord bij e.

$$P(R = 5 \text{ of } B = 4) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

7 a $P(3^{\text{e}} \text{ worp is eerste } 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0,116$

b $P(8^{\text{e}} \text{ worp is eerste } 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \frac{1}{6} = \frac{78125}{1679616} \approx 0,047$

- c** Je kunt hier de complementregel gebruiken:

$$P(\text{max. 10 keer werpen voor een } 6) =$$

$$1 - P(10 \text{ keer geen } 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,838$$

- d** Anders moet je 10 afzonderlijke kansen uitrekenen en die alle tien bij elkaar optellen: veel werk.

8 A D

- 9 a** Roos R, tulp T, kleuren w, g, p.

In totaal zitten er 45 bloemen in de emmer, waarvan 25 rozen:

$$P(R) = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

- b** Er zitten alleen paarse tulpen in de emmer en dat zijn er 5:

$$P(p) = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

- c Deze gebeurtenis is complementair aan de gebeurtenis uit b.

$$P(\text{geen } p) = 1 - P(p) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

- d Er zitten zowel gele tulpen als gele rozen in de emmer: de gebeurtenissen 'gele tulp' en 'gele roos' sluiten elkaar uit.

$$P(g) = P(gT \text{ of } gR) =$$

$$P(gT) + P(gR) = \frac{5}{45} + \frac{13}{45} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

- e De gebeurtenissen 'gele bloem' en 'tulp' overlappen elkaar deels: ze sluiten elkaar niet uit.

< not enough right fences : 1 >

$$\frac{18}{45} + \frac{20}{45} - \frac{5}{45} = \frac{33}{45} = \frac{11}{15}$$

- 10 a Rond ro, vierkant vk, rechthoek rh, driehoek dh, kleuren r, g, b.

Deze gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: er zijn ook gele vierkantjes.

Er zijn 2 grote en 2 kleine gele stukjes per vorm: in totaal zijn er $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ gele stukjes en er zijn 12 vierkante stukjes.

4 stukjes zijn geel en vierkant.

$$P(g \text{ of } vk) = P(g) + P(vk) - P(g \text{ en } vk) =$$

$$\frac{16}{48} + \frac{12}{48} - \frac{4}{48} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

- b Deze gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: er zijn rode ronde, rode rechthoekige en rode driehoekige stukjes.

Totaal aantal rode stukjes is $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$.

Het totaal aantal niet-vierkante stukjes is $48 - 12 = 36$.

Het aantal rode niet-vierkante stukjes is $16 - 2 \cdot 2 = 12$.

$$P(r \text{ of niet } vk) = P(r) + P(\text{niet } vk) - P(r \text{ en niet } vk) =$$

$$\frac{16}{48} + \frac{36}{48} - \frac{12}{48} = \frac{40}{48} = \frac{5}{6}$$

- c Deze gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: er zijn kleine ronde, kleine rechthoekige en kleine driehoekige stukjes.

Totaal aantal kleine stukjes is $6 \cdot 4 = 24$.

Totaal aantal niet-vierkante stukjes is $48 - 12 = 36$.

Totaal aantal kleine niet-vierkante stukjes is $6 \cdot 3 = 18$.

$$P(\text{klein of geen } vk) =$$

$$P(\text{klein}) + P(\text{niet } vk) - P(\text{klein en niet } vk) = \frac{24}{48} + \frac{36}{48} - \frac{18}{48} = \frac{42}{48} = \frac{7}{8}$$

- d Deze gebeurtenis kun je uitsplitsen tussen 'blauw of driehoekje' of 'geel of driehoekje' maar deze gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: ze delen beide de gebeurtenis 'driehoekje'.

$$P(b \text{ of } g \text{ of } dh) = P(b \text{ of } dh) + P(g \text{ of } dh) - P(dh)$$

Deze eerste twee kansen zijn gelijk aan de kans uit a en $P(dh) = \frac{12}{48}$.

$$P(b \text{ of } g \text{ of } dh) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{12}{48} = \frac{3}{4}$$

of

$$P(b \text{ of } g \text{ of } dh) = P(b \text{ of } g) + P(dh) - P(bdh, gdh) =$$

$$\frac{32}{48} + \frac{12}{48} - \frac{8}{48} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

- 11 a Je kunt alleen 12 ogen werpen als je met twee dobbelstenen hebt gegooid en dat kan alleen als je eerst munt hebt gegooid.

Je kunt maar op 1 manier 12 ogen gooien met twee dobbelstenen:

$$P(12 \text{ ogen met twee dobbelstenen}) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{munt}) = \frac{1}{2}$$

$$P(12 \text{ ogen}) = P(\text{munt}) \cdot P(12 \text{ ogen met twee dobbelstenen}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{72}$$

- b** Je kunt alleen 7 ogen werpen als je met twee dobbelstenen hebt gegooid en dat kan alleen als je eerst munt hebt gegooid.

Je kunt op 6 manieren 7 ogen gooien met twee dobbelstenen (6 - 1, 1 - 6, 5 - 2, 2 - 5, 4 - 3, 3 - 4):

$$P(7 \text{ ogen met twee dobbelstenen}) = \frac{6}{36}$$

$$P(\text{munt}) = \frac{1}{2}$$

$$P(7 \text{ ogen}) = P(\text{munt}) \cdot P(7 \text{ ogen met twee dobbelstenen}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{36} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}$$

- c** Zie ook a en b:

$$P(7 \text{ of } 12 \text{ ogen}) =$$

$$P(\text{munt}) \cdot (P(7 \text{ ogen met twee dobbelstenen}) + P(12 \text{ ogen met twee dobbelstenen})) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{36} + \frac{1}{36} \right) = \frac{7}{72}$$

- d** Zie ook bij b.

$$P(\text{meer of minder dan } 7 \text{ ogen}) = P(\text{geen } 7 \text{ ogen}) = 1 - P(7 \text{ ogen}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

- e** Je kunt zowel met één als met twee dobbelstenen 6 ogen gooien:

$$P(6 \text{ ogen}) =$$

$$P(\text{kop en } 6 \text{ ogen met } 1 \text{ dobbelsteen}) + P(\text{munt en } 6 \text{ ogen met twee dobbelstenen})$$

Met één dobbelsteen 6 ogen gooien, kan slechts op 1 van de 6 manieren.

Met twee dobbelstenen 6 ogen gooien, kan op 5 van de 36 manieren (5 - 1, 1 - 5, 4 - 2, 2 - 4, 3 - 3).

$$P(6 \text{ ogen}) = P(\text{kop}) \cdot P(6 \text{ ogen met } 1 \text{ dobbelsteen}) +$$

$$P(\text{munt}) \cdot P(6 \text{ ogen met twee dobbelstenen}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{36} = \frac{11}{72}$$

- 12 a** $P(\text{leerling met hoofddoek}) = P(\text{meisje en hoofddoek}) =$

$$P(\text{meisje}) \cdot P(\text{meisje met hoofddoek}) = \frac{52}{100} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{25} = 4\%$$

$$P(\text{leerling met petje}) = P(\text{jongen en petje}) = P(\text{jongen}) \cdot P(\text{jongen met petje}) =$$

$$\frac{48}{100} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{100} = 3\%$$

- b** $P(\text{leerling is jongen zonder pet}) = P(\text{jongen en geen pet}) =$

$$P(\text{jongen}) \cdot P(\text{jongen zonder pet}) = \frac{48}{100} \cdot \frac{15}{16} = \frac{45}{100} = 0,45$$

- c** De gebeurtenissen 'leerling is meisje' en 'leerling draagt iets op het hoofd' zijn complementair aan de gebeurtenis 'jongen zonder petje'.

$$P(\text{jongen zonder petje}) = 0,45$$

$$P(\text{leerling is meisje of draagt iets op het hoofd}) = 1 - 0,45 = 0,55$$

of

$$P(\text{meisje of hoofdbedekking}) =$$

$$P(\text{meisje}) + P(\text{iets op hoofd}) - P(\text{meisje met iets op hoofd}) =$$

$$0,52 + 0,07 - 0,04 = 0,55$$

d $P(\text{jongen of niets op hoofd}) =$
 $P(\text{jongen}) + P(\text{niets op hoofd}) - P(\text{jongen die niets op hoofd heeft}) =$
 $0,48 + 0,93 - 0,45 = 0,96$
 of

De gebeurtenissen 'leerling is jongen' en 'leerling draagt niets op het hoofd' zijn afhankelijk van elkaar (ze sluiten elkaar niet uit): de jongens zonder petjes horen bij beide gebeurtenissen.

$P(\text{leerling is jongen of draagt niets op het hoofd}) =$
 $P(\text{jongen}) + P(\text{leerling draagt niets op het hoofd}) - P(\text{jongen zonder petje}) =$
 $P(\text{jongen}) + P(\text{meisje zonder hoofddoek}) + P(\text{jongen zonder petje}) -$
 $P(\text{jongen zonder petje}) =$
 $P(\text{jongen}) + P(\text{meisje zonder hoofddoek}) = \frac{48}{100} + \left(\frac{52}{100} \cdot \frac{12}{13}\right) = \frac{96}{100} = 0,96$

e De leerling is een meisje met een hoofddoek.

13 a Er zijn dertien leerlingen die maar één van deze drie vakken hebben, dus: $5 + (8 - x) + (4 - x) = 13$
 Dit levert op: $x = 2$.

b $\frac{16}{26} = \frac{8}{13}$

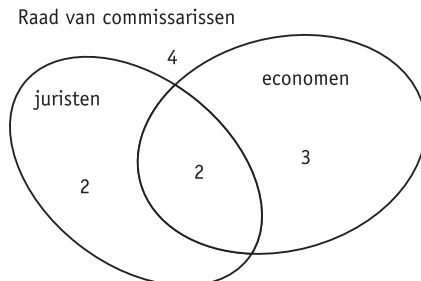
c $\frac{2}{26} = \frac{1}{13}$

d $\frac{3}{26}$

e $\frac{6}{26} = \frac{3}{13}$

f $\frac{24}{26} = \frac{12}{13}$

14 a Zie de figuur.



Vier leden zijn geen econoom en ook geen jurist.

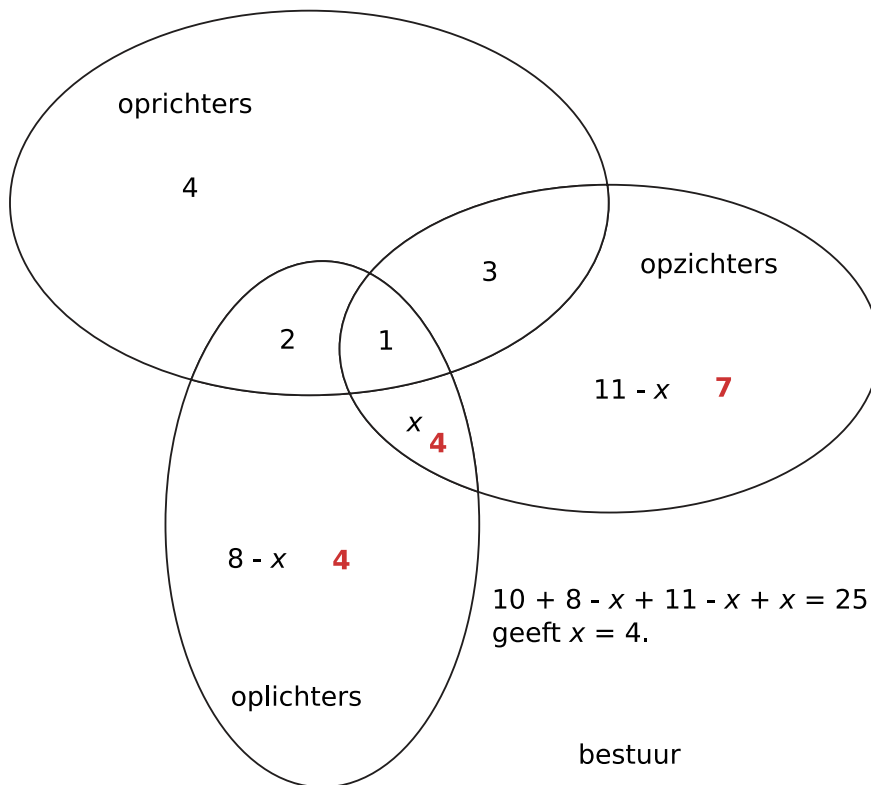
b $\frac{2}{11}$

c Hier betreft het de 7 personen die econoom, jurist of econoom en jurist tegelijk zijn. De kans is $\frac{7}{11}$.

d In de kansboom voor deze situatie zou elke laag een maand zijn.
 Het gaat hier om een situatie met terugleggen: elke maand is voor iedereen de kans weer hetzelfde (ze loten).

$P(\text{eerste maand en tweede maand een econoom of jurist}) = \frac{7}{11} \cdot \frac{7}{11} = \frac{49}{121}$

15 a De gegeven getallen kun je alvast in het diagram zetten, zoals in dit tussenresultaat (bedenk dat door de twee 'misschiens' het aantal van 4 eentje lager wordt en het aantal van 3 ook).



Daarna kun je verder rekenen: alle vakjes bij elkaar zijn samen 25 en je weet dat er in totaal 15 opZ's zijn, 11 opL's en 10 opR's. Daarmee bereken je dat het vraagteken uit 4 personen bestaat.

- b** Complementregel: iedereen behalve opLichters.

$$P(\text{keurig bestuurslid}) = P(\text{geen opL}) = \frac{25-11}{25} = \frac{14}{25} = 0,56$$

- c** $P(\text{opR}) = \frac{10}{25} = 0,40$

$$P(\text{opL}) = \frac{11}{25} = 0,44$$

$$P(\text{opR en opL}) = \frac{2+1}{25} = 0,12$$

(zie Venndiagram: de twee door opL en opR gedeelde vakjes)

- d** opR of opL betekent in het venndiagram: alle vakjes behalve het vakje met alleen opZ.

Complementregels dus: alles min alleen opZ en dat is gelijk aan $25 - 7 = 18$ van de 25 personen.

$$P(\text{opR of opL}) = \frac{18}{25} = 0,72$$

- e** Bedenk: 'de kans dat hij oprichter of oplichter is', heb je al uitgerekend in vraag d. en die was 0,72.

De 'kans dat iemand opzichter is', is gelijk aan $\frac{15}{25} = 0,60$. Samen is dat 1,32 (132%).

Als je bovenstaande kansen optelt, dan tel je eigenlijk in het Venndiagram de 3 vakjes die door opzichters gedeeld wordt met oprichters en oplichters dubbel mee. In die 3 vakjes staan $3 + 1 + 4 = 8$ personen: dat zijn de personen die opzichter zijn en ook nog eens oplichter of oprichter. De kans op zo'n persoon is $\frac{8}{25} = 0,32$.

- 16 a** Er zijn 8 ruitenkaarten en er zijn 16 kaarten met plaatjes.

Maar er zijn ook 4 ruitenplaatjes.

Somregel:

$$P(\text{ruiten of een plaatje}) = \frac{8}{32} + \frac{16}{32} - \frac{4}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

- b** Er zijn 8 hartenkaarten en er zijn 4 kaarten met een 9 en 4 kaarten met een 10.

Maar er is ook een harten 9 en een harten 10.

Somregel:

$$P(\text{harten of een 9 of een 10}) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} - \frac{1}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$

- c** Er zijn 4 kaarten met een 9 en 4 kaarten met een 10 en er zijn 24 geen-hartenkaarten.

Maar er zijn ook 3 negens zonder harten en 3 tienens zonder harten.

Somregel:

$$P(9 \text{ of } 10 \text{ of geen harten}) = \frac{4}{32} + \frac{4}{32} + \frac{24}{32} - \frac{3}{32} - \frac{3}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$$

- 17 a** NIET rood: gebruik de complementregel.

$$P(\text{een balletje dat NIET rood is}) = 1 - P(\text{een balletje dat WEL rood is}) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Alternatieve denkwijze:

het betreft een blauw of een geel balletje en daar zijn er 6 van, op een totaal van 9 balletjes.

$$P(\text{een balletje dat niet rood is}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

- b** Er zijn 3 rode balletjes en er zijn 3 balletjes met nummer 2.

Maar er is ook 1 rood balletje met nummer 2.

Somregel:

$$P(\text{balletje is rood of heeft nummer 2}) = \frac{3}{9} + \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

- c** niet OF niet: de complementregel is dan handig.

$$P(\text{niet blauw OF niet nummer 3}) = 1 - P(\text{blauw EN nummer 3}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

8.4 Kansen vermenigvuldigen

- V1 a** Dit is een situatie zonder terugleggen. Hier hoort een kansboom bij met twee lagen. 4 van de 52 kaarten zijn aas. $< \text{not enough right fences} : 1 > \text{azen} = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221}$
- b** Deze gebeurtenissen sluiten elkaar NIET uit: 13 van de 52 kaarten zijn harten; 4 van de 52 zijn aas en 1 van de 52 is hartenaas. Splits deze kans dus uit:

$$P(\text{een harten en een aas}) = \frac{1}{52} \cdot \frac{51}{51} + \frac{3}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{29}{884}$$
- 1 a** Er wordt niet teruggelegd, dus bij de tweede trekking zijn er minder kaarten in het spel.
- b** $P(\text{eerste harten en tweede schoppen}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{13}{204}$
- c** Een harten- en een schoppenkaart is eerst een harten- en dan een schoppenkaart of eerst een schoppen- en dan een hartenkaart.

$$P(\text{een harten en een schoppen}) = 2 \cdot \frac{13}{204} = \frac{13}{102}$$

 NB $P(\text{eerste harten en tweede schoppen})$ ken je al uit b.
- d** De kans op een gebeurtenis als deze kans afhankelijk is van een vorige gebeurtenis.
- e** Op het moment dat we de tweede kaart trekken en dus de eerste al getrokken hebben, zitten er in totaal nog 51 kaarten in het spel waarvan 13 harten.

$$P(\text{tweede is schoppen gegeven dat eerste is harten}) = \frac{13}{51}$$
- f** Een vrouw en een heer kan op twee manieren, namelijk eerst een vrouw en dan een heer of eerst een heer en dan een vrouw.

$$P(\text{een vrouw en een heer}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} + \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{8}{663}$$
- 2 a** Gebruik de productregel voor onafhankelijke kansen:

$$P(B \text{ en } B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{25}$$
- b** $P(R \text{ en } R) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{25}$
- c** Hier wordt steeds teruggelegd.
- 3 a** $P(B \text{ en } B) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$
- b** $P(R \text{ en } R) = P(R_1) \cdot P(R_2|R_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$
- c** Nadat de eerste blauwe gekozen is, zijn er nog 3 blauwe over van de in totaal dan 9 balletjes.

$$P(B_2|B_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$
- d** Het zijn allebei knikkers van de tweede trekking: de ene gebeurtenis kan daarom nooit vooraf gaan aan de andere.
- 4 a** Dit is een situatie zonder terugleggen. De bijbehorende kansboom bestaat maar liefst uit 32 lagen en dus krijgen we veel vermenigvuldigingen volgens de productregel: $P(32 \text{ A's}) = \frac{200}{800} \cdot \frac{199}{799} \cdot \frac{198}{798} \cdot \dots \cdot \frac{169}{769}$
 Dit kan een stuk slimmer door gebruik te maken van combinatoriek:
 Het aantal gunstige mogelijkheden is $\binom{200}{32}$ en het totaal aantal mogelijkheden is $\binom{800}{32}$.
- $$P(32 \text{ A's}) = \frac{\binom{200}{32}}{\binom{800}{32}} \approx 7,4 \cdot 10^{-21} \approx 0.$$
- b** Ook dit kan worden uitgerekend met combinaties, alleen nu kies je uit drie verschillende groepen:

$$P(10 \text{ A's en } 15 \text{ C's en } 7 \text{ D's}) = \frac{\binom{200}{10} \cdot \binom{200}{15} \cdot \binom{200}{7}}{\binom{800}{32}} \approx 4,7 \cdot 10^{-7}$$

5 $P(B_2) = P(R_1 \text{ en } B_2) + P(B_1 \text{ en } B_2) =$

$$P(B_2|R_1) + P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{5}$$

Of bedenk dat er voor de tweede knikker twee mogelijkheden zijn: rood of blauw. De kans op blauw is dus: $P(B_2) = 1 - P(R_2) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

6 a Gevraagd: $P(B_1|B_2)$ volgens het voorbeeld is deze kans gelijk aan: $\frac{P(B_1 \text{ en } B_2)}{P(B_2)}$

$$P(B_1 \text{ en } B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$$

$$P(B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{36}{90}$$

$$\text{Dus: } P(B_1|B_2) = \frac{\frac{12}{90}}{\frac{36}{90}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

b $P(B_1|R_2) = \frac{P(B_1 \text{ en } R_2)}{P(R_2)}$

$$P(B_1 \text{ en } R_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90}$$

$$P(R_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{54}{90}$$

$$\text{Dus: } P(B_1|R_2) = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}$$

7 a Situatie met terugleggen dus afhankelijke kansen.

$$P(3 \text{ rode}) = \frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{5}{18} = \frac{7}{228}$$

b Na twee rode knikkers zijn er nog 18 knikkers in de vaas waarvan 8 blauw.

$$P(B_3|R_1 \text{ en } R_2) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

c Je kunt dit nu op twee manieren doen. De tot nu toe gebruikte manier is:

$$P(B_3 \text{ en } R_1 \text{ en } R_2) = P(R_1 R_2 B_3) = \frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{14}{285}$$

Of: gebruik de productregel voor afhankelijke kansen en de al berekende kans in b:

$$P(B_3 \text{ en } R_1 \text{ en } R_2) = P(R_1 R_2) \cdot P(B_3|R_1 R_2) = \frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{4}{9} = \frac{14}{285}$$

d In de bijbehorende kansboom kun je drie routes vinden waarbij twee knikkers rood zijn en de ander wit. Elk van deze routes heeft bijbehorende kans van $\frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{5}{18} = \frac{210}{6840}$.

Er zijn ook drie routes met twee rode knikkers en een blauwe. Ieder van deze routes heeft bijbehorende kans van $\frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{336}{6840}$.

$$P(\text{twee rode}) = 3 \cdot \frac{210}{6840} + 3 \cdot \frac{336}{6840} = \frac{91}{380}$$

e Er zijn 6 routes in de bijbehorende kansboom die hieraan voldoen:

$$P(\text{drie verschillende kleuren}) =$$

$$P(RWB) + P(RBW) + P(WRB) + P(WBR) + P(BRW) + P(BWR) =$$

$$6 \cdot P(RWB) = 6 \cdot \frac{7}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{1680}{6840} = \frac{14}{57}$$

8 a Dit is een voorwaardelijke kans: $P(\text{heeft tuberculose} | \text{geeft reactie op test})$. In totaal geven 197 mensen een reactie op de test; daarvan hebben er 98 ook echt tuberculose.

$$P(\text{heeft tuberculose} | \text{geeft reactie op test}) = \frac{98}{197} \approx 0,4975$$

- b** Dit is een voorwaardelijke kans: $P(\text{heeft tuberculose} | \text{geeft geen reactie op test})$. In totaal geven 9803 mensen geen reactie op de test; daarvan hebben er 2 toch tuberculose.

$$P(\text{heeft tuberculose} | \text{geeft geen reactie op test}) = \frac{2}{9803} \approx 0,0002$$

- 9 a** Hier hoort een kansboom bij van 3 lagen diep; situatie zonder terugleggen.

$$P(\text{vierde van de zeven sokken hoort bij allereerste}) = \frac{8}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{7}$$

- b** Een kansboom van twee lagen volstaat nu.

$$P(\text{tweede of derde sok hoort bij allereerste}) = \frac{8}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{8}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

- 10 a** Maak eventueel een kansboom met twee lagen: bovenste laag met de bloedgroepen, onderste laag per bloedgroep de twee Rhesus-factoren.

$$P(A \text{ en Rh-positief}) = \frac{40}{100} \cdot \frac{85}{100} = 0,34 = 34\%$$

- b** Maak eventueel een kansboom met twee lagen: bovenste laag met de bloedgroepen, onderste laag per bloedgroep de twee Rhesus-factoren.

$$P(O \text{ en Rh-negatief}) = \frac{45}{100} \cdot \frac{15}{100} = 0,0675 = 6,75\%$$

- c** $P(\text{Rh-negatief is en niet bloedgroep O}) = \frac{15}{100} \cdot \frac{100-45}{100} = 0,0825 = 8,25\%$

- d** Je kunt de acht kansen allemaal uitrekenen en dan de kleinste van de acht kiezen (0,75%).

Je kunt ook redeneren:

Bloedgroep AB is de meest zeldzame bloedgroep en Rh-negatief is de meest zeldzame Rhesusfactor, dus hun combinatie zal de zeldzaamste combinatie zijn.

- 11 a** $P(\text{vrouw}) = \frac{55}{116} \approx 0,474 \approx 47,4\%$

- b** $P(\text{vrouw en een tatoeage}) = \frac{9}{116} \approx 0,078 \approx 7,8\%$

- c** $P(\text{piercing}) = \frac{18}{116} = \frac{9}{58}$

- d** $P(V \text{ man en } V \text{ piercing}) = \frac{6}{116} = \frac{3}{58}$

- e** $P(V \text{ piercing} | V \text{ man}) = \frac{P(V \text{ man en } V \text{ piercing})}{P(V \text{ man})} = \frac{\frac{6}{116}}{\frac{61}{116}} = \frac{6}{61}$

- 12 a** Gebruik eventueel een kansboom met vier lagen voor elke worp; de situatie is met terugleggen.

$$P(\text{minstens 1 zes}) = 1 - P(\text{geen zes}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,518 = 51,8\%$$

Dat is groter dan 50%.

- b** $P(\text{minstens 1 keer dubbel 6}) = 1 - P(\text{geen dubbel}) =$

$$1 - \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}\right)^{24} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491 = 49,1\%$$

Dit is kleiner dan 50%.

- c** Gebruik de grafische rekenmachine om te berekenen wanneer $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \geq 0,5$.

Of probeer een aantal waarden uit.

Je vindt dat deze kans bij $n = 25$ voor het eerste groter is dan 50%.

- 13 a** $P(1234) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{5040} = \frac{1}{210}$

- b** $P(4321) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{24}{5040} = \frac{1}{210}$

- c** $P(3344) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{72}{5040} = \frac{3}{210} = \frac{1}{70}$

- d** Je hebt dan telkens van alle vier de cijfers één kaartje nodig.

Rekenkundig gezien: je krijgt als teller altijd een vermenigvuldiging van de getallen 1, 2, 3 en 4 en als noemer krijg je altijd de vermenigvuldiging $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

- e Schrijf de algemene productregel om en dan krijg je:

$$P(T = 34|E = 12) = \frac{P(T=34 \text{ en } E=12)}{P(E=12)}$$

$$P(T = 34 \text{ en } E = 12) = P(1234) = \frac{1}{210}$$

$$P(E = 12) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{90}$$

$$P(T = 34|E = 12) = \frac{\frac{1}{210}}{\frac{2}{90}} = \frac{3}{14}$$

Op eenzelfde manier bereken je:

$$P(T = 12|E = 34) = \frac{P(T=12 \text{ en } E=34)}{P(E=34)} = \frac{\frac{1}{210}}{\frac{3 \cdot 4}{9 \cdot 10}} = \frac{1}{28}$$

f $\frac{1}{10}$

- g Zie ook a en b en bedenk dat er maar één gemerkte kaart is. Die kans is ook $\frac{1}{10}$.

h $P(\text{derde gemerkt}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{7} = \frac{1}{10}$

i $P(\text{getal begint met een 3}) = \frac{3}{10}$

$$P(\text{getal eindigt met een 3}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{10}$$

Dit kun je zien door te bedenken: voor het eerste cijfer heb je 9 mogelijkheden (één 3 moet je overhouden voor het vierde cijfer) en dus voor het tweede en derde cijfer nog 8 en 7 mogelijkheden. Als je dit niet ziet, kun je ook een kansboom maken (vier lagen met telkens de keuze 3 of niet 3) en dan zie je dat er zeven routes (met verschillende kansen) mogelijk zijn die als laatste cijfer een 3 opleveren.

$$P(\text{start en eindigt met een 3}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{332}{5040} = \frac{1}{15}$$

Ook voor deze kans kun je de kansboom gebruiken en de juiste routes zoeken.

- 14 Maak een kruistabel. Ga uit van 1000 personen en maak met de gegevens een kruistabel:

	medicijn A	medicijn B	totaal
genezen	855	75	930
niet genezen	45	25	70
totaal	900	100	1000

Het gaat om de 930 genezen personen. 75 hebben medicijn B gekregen.

$$P(\text{medicijn B}) = \frac{75}{930} \approx 0,081$$

of

Maak een kansboom: bovenste laag geeft de kansen op medicijn A en B, onderste laag geeft de kansen op wel of geen genezing.

Je kunt als volgt redeneren en rekenen:

Ga uit van 1000 zieken.

$$\frac{90}{100} \cdot \frac{95}{100} \cdot 1000 = 855 \text{ zieken genezen door medicijn A.}$$

$$\frac{10}{100} \cdot 0,75 \cdot 1000 = 75 \text{ zieken genezen door medicijn B.}$$

$$P(\text{genezen persoon heeft medicijn B gekregen}) = \frac{75}{855+75} = \frac{5}{62} \approx 0,081$$

of

Je kunt ook rekenen met de algemene productregel voor onafhankelijke kansen:

$P(\text{genezen persoon heeft medicijn B gekregen})$ is een voorwaardelijke kans: $P(B|\text{genezen})$

In woorden: de kans op medicijn B als je weet dat de persoon al genezen is.

Productregel:

$$P(B \text{ en genezen}) = P(\text{genezen}) \cdot P(B|\text{genezen}) \text{ dus } P(B|\text{genezen}) = \frac{P(B \text{ en genezen})}{P(\text{genezen})}$$

Reken zelf na dat je hiermee exact dezelfde kans berekent.

15 a De kans dat de winnaar meteen de juiste deur kiest, is $\frac{1}{3}$. Hij wisselt niet, dus die kans blijft $\frac{1}{3}$.

b Er zijn nu drie mogelijkheden:

- Je kiest de deur waar de prijs achter zit. De spelleider opent een lege deur. Jij wisselt en verliest.
- Je kiest de eerste deur waar geen prijs in zit. De spelleider opent de andere lege deur. Jij wisselt en wint.
- Je kiest de tweede deur waar geen prijs in zit. De spelleider opent de andere lege deur. Jij wisselt en wint.

Drie mogelijke situaties met een winkans van $\frac{2}{3}$.

16 Gebruikt pep is P en twee mogelijkheden + en -.

De gevraagde kans is een voorwaardelijke kans: $P(P | P+)$.

Maak een kruistabel met de gegevens:

pep-test	gebruiker	geen gebruiker	
positief	9	9	18
negatief	1	81	82
	10	90	100

De kans dat een positief geteste deelnemer ook gebruiker is, is dus $\frac{9}{18} = 50\%$.

Je kunt de kans ook berekenen uit $P(P \text{ en } P+)$ en $P(P+)$. Het handigste is dan om een kansboom van twee lagen te maken. De bovenste laag bestaat uit twee takken: 'gebruiker' en 'geen gebruiker'. De onderste laag splitst ook uit in tweeën: 'test positief' en 'test negatief'.

$$P(P \text{ en } P+) = P(P) \cdot P(+) =$$

$$\left(\frac{10}{100}\right) \cdot \left(\frac{90}{100}\right) = \frac{9}{100}$$

$$P(P+) =$$

$$P(P \text{ en } P+) + P(\text{niet } P) \cdot P(P+) =$$

$$\frac{9}{100} + \left(\frac{90}{100} \cdot \frac{10}{100}\right) = \frac{18}{100}$$

$$\text{De gevraagde kans } P(P | P+) = \frac{P(P \text{ en } P+)}{P(P+)} =$$

$$\frac{\frac{9}{100}}{\frac{18}{100}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} = 50\%$$

17 a Ofwel slim indelen: 200 van de 400 witte balletjes zijn van plastic, dus de kans is $\frac{200}{1200} = \frac{1}{6}$.

Ofwel de productregel gebruiken:

$$P(B \text{ is wit en } B \text{ is van plastic}) = P(B \text{ is wit}) \cdot P(B \text{ is van plastic}) = \left(\frac{400}{1200}\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot 200}{1200}\right) = \frac{1}{6}$$

b Schrijf de algemene productregel om en dan krijg je voor $P(B \text{ is rood} | B \text{ is van hout})$:

$$P(B \text{ is rood} | B \text{ is van hout}) = \frac{P(B \text{ is van hout EN } B \text{ is rood})}{P(B \text{ is van hout})} = \frac{\frac{200}{1200}}{\frac{3 \cdot 200}{1200}} = \frac{1}{3}$$

Zo ook met $P(B \text{ is van hout} | B \text{ is rood})$

$$P(B \text{ is van hout} | B \text{ is rood}) = \frac{P(B \text{ is rood EN } B \text{ is van hout})}{P(B \text{ is rood})} = \frac{\frac{200}{1200}}{\frac{500}{1200}} = \frac{2}{5}$$

c Gebruik hier de somregel voor afhankelijke kansen:

$$P(B \text{ is rood of } B \text{ is van hout}) = P(B \text{ is rood}) + P(B \text{ is van hout}) - P(B \text{ is rood EN } B \text{ is van hout}) = \frac{500}{1200} + \frac{3 \cdot 200}{1200} - \frac{200}{1200} = \frac{900}{1200} = \frac{3}{4}.$$

18 a $P(\text{leerling rookt}) = \frac{239}{1200} \approx 0,1992$

b $P(\text{meisje dat rookt}) = P(\text{leerling rookt} | \text{leerling is meisje}) = \frac{134}{620} \approx 0,2161$

(lees af uit de tabel)

c $P(\text{rokende leerling die een meisje is}) = P(\text{leerling is meisje} | \text{leerling rookt}) = \frac{134}{239} \approx 0,5607$

(lees af uit de tabel)

19 a Maak evt. een kansboom met twee lagen: bovenste laag met de artikelsoorten (A en B), onderste laag per artikelsoort de takken goedgekeurd of afgekeurd.

$$P(A \text{ en afgekeurd}) = 0,60 \cdot 0,01 = 0,006$$

b Maak evt. een kansboom met twee lagen: bovenste laag met de artikelsoorten (A en B), onderste laag per artikelsoort de takken goedgekeurd of afgekeurd.

$$P(B \text{ en goedgekeurd}) = 0,40 \cdot 0,98 = 0,392$$

c Maak evt. een kansboom met twee lagen: bovenste laag met de artikelsoorten (A en B), onderste laag per artikelsoort de takken goedgekeurd of afgekeurd.

$$P(\text{afgekeurd}) = P(A \text{ en afgekeurd of } B \text{ en afgekeurd}) = 0,006 + (0,40 \cdot 0,02) = 0,014$$

d Gevraagd wordt de voorwaardelijke kans: $P(B | \text{afgekeurd})$

Algemene productregel in deze situatie:

$$P(\text{afgekeurd EN } B) = P(\text{afgekeurd}) \cdot P(B | \text{afgekeurd}).$$

Invullen geeft:

$$0,4 \cdot 0,002 = 0,14 \cdot P(B | \text{afgekeurd})$$

$$\text{Hieruit volgt dat } P(B | \text{afgekeurd}) = \frac{0,40 \cdot 0,002}{0,14} = \frac{0,0008}{0,14} = \frac{4}{7}.$$

8.5 Toevalsvariabelen

V1 a 0, 1, 2, of 3.

b $P(X = 0) = 0,75^3 = 0,422;$
 $P(X = 1) = 0,75^2 \cdot 0,25 \cdot 3 = 0,422;$
 $P(X = 2) = 0,75 \cdot 0,25^2 \cdot 3 = 0,141;$
 $P(X = 3) = 0,25^3 = 0,016$

c 0 of 1

1 a Je kunt nu 0,1,2,3 of 4 scores hebben. Gebruik eventueel de kansboom:

$P(X = 0) = 0,75^4 \approx 0,3164$
 $P(X = 1) = 0,75^3 \cdot 0,25 \cdot 4 \approx 0,4219$
 $P(X = 2) = 0,75^2 \cdot 0,25^2 \cdot 6 \approx 0,2109$
 $P(X = 3) = 0,75 \cdot 0,25^3 \cdot 4 \approx 0,0469$
 $P(X = 4) = 0,25^4 \approx 0,0039$

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,3164	0,4219	0,2109	0,0469	0,0039

b Het verwachte aantal scores is: $0 \cdot 0,3164 + 1 \cdot 0,4219 + 2 \cdot 0,2109 + 3 \cdot 0,0469 + 4 \cdot 0,0039 = 1$

2 a $P(M = 1) = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{300}{729}$

$P(M = 2) = 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{5}{9} = \frac{240}{729}$

b $P(M \geq 2) = P(M = 2) + P(M = 3) = \frac{240}{729} + \frac{64}{729} = \frac{304}{729}$

c $P(M < 2) = P(M = 0) + P(M = 1) =$
 $1 - P(M \geq 2) = 1 - \frac{304}{729} = \frac{425}{729}$

3 a Je kunt 0,1,2 of 3 keer een 6 gooien met drie dobbelstenen.

$P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$

$P(X = 1) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$

$P(X = 2) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$

$P(X = 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

b Verwachtingswaarde is $0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} = 0,5.$

c Als je heel vaak met drie dobbelstenen gooit, mag je per 2 keer gooien één zes verwachten.

4 a Zie de tabel.

v	0	1	2	3
$P(V = v)$	$\frac{24}{504}$	$\frac{180}{504}$	$\frac{240}{504}$	$\frac{60}{504}$

Naar verwachting worden er $0 \cdot \frac{24}{504} + 1 \cdot \frac{180}{504} + 2 \cdot \frac{240}{504} + 3 \cdot \frac{60}{504} = 1 \frac{2}{3}$ taken door een vrouw gedaan.

- b** Waarschijnlijk niet, want de verwachting van de mannen was $1\frac{1}{3}$ en er zijn 3 taken uit te voeren.
- 5 a** In totaal zijn er 178 zaaddozen onderzocht (tel alle frequenties bij elkaar op: $1 + 2 + 8 + \dots + 23 + 1$). De relatieve frequentie van het aantal onderzochte zaaddozen met 3 zaden is $\frac{1}{178} \approx 0,0056$. Zo werkt het ook bij alle andere relatieve frequenties in deze tabel.

aantal zaden	3	4	5	6	7	8	9	10	11
relatieve frequentie	0,0056	0,0112	0,0449	0,0730	0,1236	0,2528	0,3539	0,1292	0,0056

- b** $P(Z > 8) = P(Z = 9) + P(Z = 10) + P(Z = 11) = 0,3539 + 0,1292 + 0,0056 = 0,4887 \approx 49\%$
- c** $P(Z \leq 4) = P(Z = 3) + P(Z = 4) = 0,0056 + 0,0112 = 0,0168$
- d** Dit kun je het snelste via de GR doen: het gemiddelde van deze frequentietabel is tevens de verwachtingswaarde van het aantal zaden per zaaddoos. Je kunt natuurlijk ook de standaardberekening van de verwachtingswaarde maken:
 $3 \cdot 0,0056 + 4 \cdot 0,0112 + 5 \cdot 0,0449 + 6 \cdot 0,0730 + 7 \cdot 0,1236 + 8 \cdot 0,2528 + 9 \cdot 0,3539 + 10 \cdot 0,1292 + 11 \cdot 0,0056 \approx 8,15$
- 6 a** Zie de tabel.

	was	afwas	auto	
M	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{2}$
V	$\frac{4}{21}$	$\frac{11}{42}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

- b** Gebruik de kruistabel: $P(G = \text{man}) = \frac{1}{2}$
 Let op! We laten de algemene kans dat een persoon een man is in deze groep buiten beschouwing. $P(G = \text{man})$ is in deze steekproef de kans dat een taak door een man wordt uitgevoerd.
 $P(T = \text{afwas}) = \frac{1}{3}$ en dus is het product van deze kansen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
 Omdat $P(G = \text{man en } T = \text{afwas}) = \frac{1}{14}$ en dus ongelijk aan $\frac{1}{6}$ is, zijn deze twee gebeurtenissen afhankelijk van elkaar (in deze steekproef).
- c** Nee. De toevalsvariabelen zijn afhankelijk van elkaar (hangen met elkaar samen) en de taakverdeling is in die zin oneerlijk: het maakt bij de taakverdeling uit of je een vrouw of een man bent welke taak je krijgt. Dit kun je concluderen omdat er minstens één gecombineerde kans ongelijk is aan het product van de twee afzonderlijke kansen, zoals je bij b zag.
- 7 a** Maak eventueel een kansboom met vier lagen.

$$P(J = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P(J = 1) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(J = 2) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16}$$

$$P(J = 3) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(J = 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

j	0	1	2	3	4
$P(J = j)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

- b** Gevraagde kans met de somregel:

$$P(J \geq 2) = P(J = 2) + P(J = 3) + P(J = 4) = \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

Gevraagde kans met de complementregel:

$$P(J \geq 2) = 1 - P(J < 2) = 1 - P(J = 0) - P(J = 1) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{4}{16} = \frac{11}{16}$$

- c** Omdat de kansen symmetrisch verdeeld zijn over de mogelijkheden, zou je kunnen verwachten dat de middelste mogelijkheid 2 de verwachtingswaarde is; dat blijkt ook zo te zijn:

$$\frac{1}{16} \cdot 0 + \frac{4}{16} \cdot 1 + \frac{6}{16} \cdot 2 + \frac{4}{16} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 = 2$$

- d** $150 \cdot 2 = 300$

- 8 a** Maak eventueel een kansboom met vier lagen; bovenste laag start met tak 'groen' en tak 'rood'.

In totaal zijn er 33 balletjes.

$$P(X = 0) = \left(\frac{30}{33}\right)^4 \approx 0,6830$$

$$P(X = 1) = 4 \cdot \frac{3}{33} \cdot \left(\frac{30}{33}\right)^3 \approx 0,2732$$

$$P(X = 2) = 6 \cdot \left(\frac{3}{33}\right)^2 \cdot \left(\frac{30}{33}\right)^2 \approx 0,0410$$

$$P(X = 3) = 4 \cdot \left(\frac{3}{33}\right)^3 \cdot \left(\frac{30}{33}\right) \approx 0,0027$$

$$P(X = 4) = \left(\frac{3}{33}\right)^4 \approx 0,0001$$

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,6830	0,2732	0,0410	0,0027	0,0001

- b** Bedenk: er zijn maar 3 groene balletjes dus je kunt er maximaal 3 pakken bij 4 keer trekken... De bijbehorende kansboom mist daarom wat takken.

$$P(Y = 0) = \left(\frac{30}{33}\right) \cdot \left(\frac{29}{32}\right) \cdot \left(\frac{28}{31}\right) \cdot \left(\frac{27}{30}\right) \approx 0,6697$$

$$P(Y = 1) = 4 \cdot \left(\frac{30}{33}\right) \cdot \left(\frac{29}{32}\right) \cdot \left(\frac{28}{31}\right) \cdot \left(\frac{3}{30}\right) \approx 0,2977$$

$$P(Y = 2) = 6 \cdot \left(\frac{30}{33}\right) \cdot \left(\frac{29}{32}\right) \cdot \left(\frac{3}{31}\right) \cdot \left(\frac{2}{30}\right) \approx 0,0319$$

$$P(Y = 3) = 4 \cdot \left(\frac{30}{33}\right) \cdot \left(\frac{3}{32}\right) \cdot \left(\frac{2}{31}\right) \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \approx 0,007$$

Meer dan 3 kan niet, dus je bent nu klaar.

x	0	1	2	3
$P(Y = x)$	0,6697	0,2977	0,0319	0,007

- 9 a** De waarden 0 t/m 4.

- b** Maak eventueel een kansboom met vier lagen; de situatie is zonder terugleggen.

Totale aantal leerlingen is 28.

$$P(M = 0) = \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} \cdot \frac{10}{26} \cdot \frac{9}{25} \approx 0,0242$$

$$P(M = 1) = 4 \cdot \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} \cdot \frac{10}{26} \cdot \frac{16}{25} \approx 0,1719$$

$$P(M = 2) = 6 \cdot \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} \cdot \frac{16}{26} \cdot \frac{15}{25} \approx 0,3868$$

$$P(M = 3) = 4 \cdot \frac{12}{28} \cdot \frac{16}{27} \cdot \frac{15}{26} \cdot \frac{14}{25} \approx 0,3282$$

$$P(M = 4) = \frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} \cdot \frac{14}{26} \cdot \frac{13}{25} \approx 0,0889$$

m	0	1	2	3	4
$P(M = m)$	0,0242	0,1719	0,3868	0,3282	0,0889

c $0 \cdot 0,0242 + 1 \cdot 0,1719 + 2 \cdot 0,3868 + 3 \cdot 0,3282 + 4 \cdot 0,0889 = 2,286 \approx 2$

10 a Bekijk de tabel.

z	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$P(Z = z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b Verwachtingswaarde is $1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 30 \cdot \frac{2}{36} + 36 \cdot \frac{1}{36} = \frac{441}{36} = 12,25$.

$$P(\text{winst bij één spel}) = P(Z > 12) = P(Z \geq 15) =$$

$$\frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{13}{36}$$

De verwachtingswaarde is € 12,25, dus € 12,00 per spel inzetten levert gemiddeld winst op. De winkans bij één spel is $\frac{13}{36}$.

11 a Maak eventueel de bijbehorende kansboom.

Kansverdeling:

$$P(S = 3) = \frac{1}{4}$$

$$P(S = 4) = \frac{3}{8}$$

$$P(S = 5) = \frac{3}{8}$$

Verwachte aantal sets: $4\frac{1}{8}$

b $100 \cdot 4\frac{1}{8} = 412,5$ sets.

Dus 412 of 413 sets.

c Bekijk de tabel.

s	3	4	5
$P(S = s)$	$\frac{44}{90}$	$\frac{22}{90}$	$\frac{24}{90}$

Verwachtingswaarde is $3 \cdot \frac{44}{90} + 4 \cdot \frac{22}{90} + 5 \cdot \frac{24}{90} = \frac{340}{90} = 3\frac{7}{9}$ sets.

d Hier heb je de kansboom voor nodig, dus maak die eerst.

Er zijn 2 manieren om in drie sets klaar te zijn: $P(S = 3) = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,7^2 = 0,49$

Er zijn 6 manieren om in vier sets klaar te zijn:

$$P(S = 4) = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,7^2 = 0,273$$

Er zijn dan nog 12 manieren om in vijf sets klaar te zijn:

$$P(S = 5) = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,7^3 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,3^4 = 0,237$$

e Verwachtingswaarde: $3 \cdot 0,49 + 4 \cdot 0,273 + 5 \cdot 0,237 = 3,747$

12 Om deze vraag te kunnen beantwoorden moet je voor alle vier de mogelijkheden checken of geldt:

$$P(V = v \text{ en } K = k) = P(V = v) \cdot P(K = k)$$

Als dat voor alle vier zo is, dan zijn V en K onafhankelijk van elkaar; zo niet dan is de kwaliteit afhankelijk van de verfspuiter van dienst.

Het is handig als de kruistabel geen absolute frequenties bevat maar relatieve frequenties:

$K \setminus V$	A	B	
goed	0,0576	0,0368	0,0944
niet goed	0,024	0,032	0,056
	0,6	0,4	1

$$P(V = A \text{ en } K = \text{goed}) = \frac{576}{1000} = 0,576$$

$$\text{en } P(V = A) \cdot P(K = \text{goed}) = 0,6 \cdot 0,944 = 0,5664$$

Omdat $0,576 \neq 0,5664$ dus we zijn al klaar met ons eerste bewijs: de gebeurtenissen 'verfspuiter is A' en 'kwaliteit is goed' zijn afhankelijk van elkaar en dus kunnen we ook meteen al concluderen dat de toevalsvariabele 'kwaliteit' afhankelijk is van de toevalsvariabele 'verfspuiter van dienst' (althans: in deze steekproef).

Je hebt in deze situatie helemaal niets aan verwachtingswaarden: zowel V als K zijn kwalitatieve variabelen dus we kunnen niet rekenen met hun waarden.

Om de vraag te kunnen beantwoorden welke verfspuiter de beste kwaliteit levert, vergelijk je de kansen $P(K = \text{goed} | V = A)$ en $P(K = \text{goed} | V = B)$ met elkaar.

$$P(K = \text{goed} | V = A) = \frac{0,576}{0,6} = 0,96$$

$$P(K = \text{goed} | V = B) = \frac{0,368}{0,4} = 0,92$$

Hieruit volgt dat A de beste kwaliteit levert (althans: in deze steekproef).

13 a Warren wint als Bill 3 gooit en Warren 4.

$$P(\text{Warren wint}) = P(\text{Bill een 3}) \cdot P(\text{Warren een 4}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

Je kunt ook een 6 bij 6 rooster maken en de mogelijkheden tellen: in 25 van de in totaal 36 mogelijkheden wint Warren.

b Met twee groene dobbelstenen kun je de ogensommen 4, 7 en 10 werpen.

Maak eventueel een rooster voor de twee groene dobbelstenen om de drie bijbehorende kansen te berekenen:

$$4 \text{ gooi je met kans } \frac{9}{36}$$

$$7 \text{ gooi je met kans } \frac{18}{36}$$

$$10 \text{ gooi je met kans } \frac{9}{36}$$

Maak nu eventueel gebruik van een kansboom: de eerste laag geeft de drie mogelijke ogensommen voor Warren en de tweede laag geeft telkens de drie mogelijke ogensommen voor Bill.

Routes in de kansboom waarmee Bill wint, zijn:

$$2 \text{ en } 4 \text{ met kans } \frac{1}{36} \cdot \frac{9}{36} = \frac{9}{1296}$$

$$2 \text{ en } 7 \text{ met kans } \frac{1}{36} \cdot \frac{18}{36} = \frac{18}{1296}$$

$$2 \text{ en } 10 \text{ met kans } \frac{1}{36} \cdot \frac{9}{36} = \frac{9}{1296}$$

$$5 \text{ en } 7 \text{ met kans } \frac{10}{36} \cdot \frac{18}{36} = \frac{180}{1296}$$

$$5 \text{ en } 10 \text{ met kans } \frac{10}{36} \cdot \frac{9}{36} = \frac{90}{1296}$$

8 en 10 met kans $\frac{25}{36} \cdot \frac{9}{36} = \frac{225}{1296}$

Al deze kansen bij elkaar opgeteld tot $\frac{59}{144}$ is de gevraagde kans.

- 14 a** Bedenk: je gooit telkens op totdat je kruis gooit en dan gooi je op tot je munt gooit. In totaal gooi je maximaal zes keer.

y	0	1	2	4	8	16	32
P(Y = y)	0,015625	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625

- b** Hiervoor kun je bij uitstek de verwachtingswaarde gebruiken.

De verwachtingswaarde van Y is:

$$0 \cdot 0,015625 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,125 + 8 \cdot 0,0625 + 16 \cdot 0,03125 + 32 \cdot 0,015625 = 3 \text{ euro}$$

Om quitte te spelen (op de lange duur) moet het casino € 3,00 vragen; om winst te krijgen (op de lange duur) moet het casino meer dan € 3,00 vragen.

- c** Dat krijg je als je bij de vijfde of de zesde keer kruis gooit.

$$P(Y = 5 \text{ of } Y = 6) = 0,03125 + 0,015625 = 0,046875$$

- 15 a** Gebruik eventueel een kansboom om deze kansen te berekenen: de boom bestaat uit drie lagen (voor ieder bestuurslid een laag). Vergeet niet dat dit een situatie zonder terugleggen is: de kansen veranderen per laag.

Of: gebruik combinaties om deze kansen te berekenen.

$$\text{Bijvoorbeeld: } P(Z = 1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{35}$$

$$P(Z = 0) = \frac{1}{35}; P(Z = 1) = \frac{12}{35}; P(Z = 2) = \frac{18}{35} \text{ en } P(Z = 3) = \frac{4}{35}.$$

- b** $P(\text{minstens 2 vrouwen}) = P(2 \text{ of } 3 \text{ vrouwen}) = P(Z = 2) + P(Z = 3) = \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}$

- c** Verwachte aantal vrouwen in bestuur is $E(Z) = 0 \cdot \frac{1}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + 2 \cdot \frac{18}{35} + 3 \cdot \frac{4}{35} = 1 \frac{5}{7}$

- 16 a** $0,4^3 = 0,064$ dus 6,4%.

- b** Je kunt hier eventueel een kansboom voor maken met voor iedere ronde een laag (situatie: met terugleggen).

categorie I: 6,4%

categorie II: $P(\text{één keer opgemerkt}) = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,288 = 28,8\%$

categorie III: $P(\text{twee keer opgemerkt}) = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,432 = 43,2\%$

categorie IV: $P(\text{drie keer opgemerkt}) = 0,6^3 = 0,216 = 21,6\%$

Categorie III komt het meeste voor.

- c** Per ronde wordt 60% opgemerkt: er zijn dus ongeveer $\frac{450}{0,6} = 750$ vogels in totaal.

Derde ronde voor het eerst opgemerkt en dus in de eerste en tweede ronde niet, dat overkomt dan ongeveer $0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 750 = 72$ vogels.

- 17** Onderaan komen de kansen dat een druktoets goed en foutief uit een machine komt:

$$P(\text{druktoets is fout}) = 0,0065 \text{ en } P(\text{druktoets is goed}) = 1 - P(\text{druktoets is fout}) = 0,9935.$$

Als de bewering waar is, zijn de toevalsvariabelen 'uitvoerende machine' en 'druktoetsconditie' onafhankelijk van elkaar.

In dat geval moeten de gecombineerde kansen in de kanstabel alle vier voldoen aan de algemene productregel:

$P(\text{druktoets komt uit machine A en hij is goed}) =$

$$P(\text{druktoets komt uit machine A}) \cdot P(\text{druktoets is goed}) = 0,6 \cdot 0,9935 = 0,5961$$

$P(\text{druktoets komt uit machine A en hij is fout}) =$

$$P(\text{druktoets komt uit machine A}) \cdot P(\text{druktoets is fout}) = 0,6 \cdot 0,0065 = 0,0039$$

$P(\text{druktoets komt uit machine B en hij is goed}) =$

$$P(\text{druktoets komt uit machine B}) \cdot P(\text{druktoets is goed}) = 0,4 \cdot 0,9935 = 0,3974$$

$P(\text{druktoets komt uit machine B en hij is fout}) =$

$$P(\text{druktoets komt uit machine B}) \cdot P(\text{druktoets is fout}) = 0,4 \cdot 0,0065 = 0,0026$$

	goed	fout	
machine A	0,5961	0,0039	0,6
machine B	0,3974	0,0026	0,4
	0,9935	0,0065	1

8.6 Totaalbeeld

- 1 a** Vaas met 100 balletjes: 40 rode (stemt Gore), 40 witte (stemt Bush) en 20 blauwe (stemt niet) balletjes, 4 keer trekken met terugleggen.

$$P(4 \text{ Gore stemmers}) = 0,0256$$

4 rode, 4 witte en 2 blauwe kan ook....

$$P(4 \text{ keer rode}) = \left(\frac{40}{100}\right)^4 = 0,0256$$

- b** Vaas met 25 balletjes: 10 rode (A) en 15 witte (B) balletjes, 3 keer trekken zonder terugleggen.

$$P(3 \text{ uit A}) = P(3 \text{ rode balletjes}) = \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} \cdot \frac{8}{23} \approx 0,0522$$

- c** Op de volgende manieren kun je 15 ogen krijgen:

6 - 6 - 3 (op 3 manieren)

6 - 5 - 4 (op $3! = 6$ manieren)

5 - 5 - 5

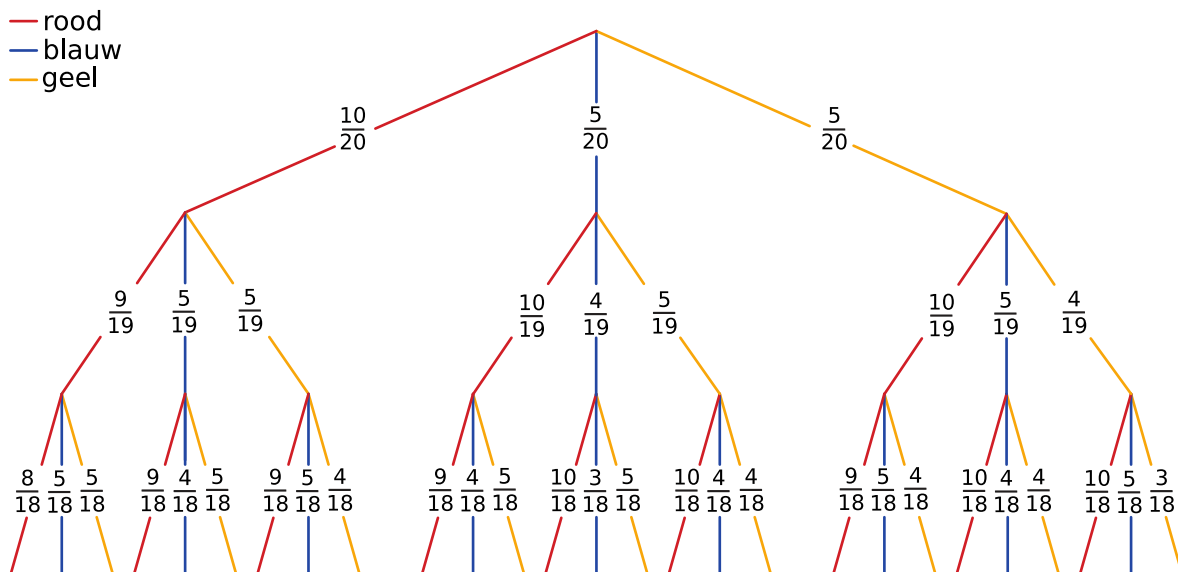
Dat zijn 10 mogelijkheden van de in totaal $6^3 = 216$ manieren.

$$P(15 \text{ ogen}) = \frac{10}{216}$$

- d** 10 balletje voor de cijfers 0 t/m 9.

$$P(\text{pincode goed}) = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = 0,0001$$

- 2 a** Dit is een kansboom van 3 lagen diep en de bovenste laag bestaat uit 3 takken (voor rood ($\frac{10}{20}$), blauw ($\frac{5}{20}$) en geel ($\frac{5}{20}$)). De kansen in de lagen eronder zijn anders.



- b** Drie routes in de kansboom bestaan uit 2 rode en 1 blauwe tak:

$$P(2 \text{ rode en } 1 \text{ blauwe}) = 3 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{5}{18} \approx 0,1974$$

- c** Er zijn $3! = 6$ routes in de kansboom met 1 rood, 1 geel en 1 blauw balletje:

$$P(\text{één balletje van elke kleur}) = 6 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{5}{18} \approx 0,2193$$

- d** Gevraagd: verwachtingswaarde van het aantal rode balletjes. Noem de bijbehorende toevalsvariabele R en maak eventueel een nieuwe kansboom met telkens takken voor rood en voor niet-rood.

$$P(R = 0) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} \approx 0,1053$$

$$P(R = 1) = 3 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} \cdot \frac{9}{18} \approx 0,3947$$

$$P(R = 2) = 3 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{10}{18} \approx 0,3947$$

$$P(R = 3) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} \approx 0,1053$$

Verwachtingswaarde R : $0 \cdot 0,1053 + 1 \cdot 0,3947 + 2 \cdot 0,3947 + 3 \cdot 0,1053 = 1,5$

3 a P (eerste vier bezoeken krijg je telkens dezelfde kaart).

b Bijvoorbeeld met een dobbelsteen(simulator) heel vaak achter elkaar vier keer met 1 dobbelsteen werpen en bijhouden of je wel/niet vier keer hetzelfde aantal ogen gooit.

Je kunt dit ook met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine simuleren, telkens vier keer een getal tussen 1 en 6 (bij de waarden 0, 7, 8 of 9 simuleer je een nieuw getal).

c Maak eventueel een kansboom van 4 lagen diep; bovenste laag heeft 6 takken, elk met kans $\frac{1}{6}$; situatie is met terugleggen.

$$P(\text{eerste vier keer dezelfde kaart}) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \approx 0,0046 \approx 0,5\%.$$

d Een simulatie geeft een experimentele kans en ook al geldt de wet van de grote aantallen: door toeval kan het toch gebeuren dat de experimentele kans afwijkt van de theoretische kans.

4 a In principe gebruik je een kansboom met vijf lagen hiervoor (zonder terugleggen), maar dat is een flinke klus.

$P(M = 0)$ en $P(M = 5)$ zijn er nog wel makkelijk uit te berekenen omdat ze beide slechts 1 route in de kansboom representeren: $P(M = 0) = P(M = 5) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,0040$

$P(M = 1)$ en $P(M = 4)$ gaan ook nog: er zijn voor elk van deze kansen 5 routes in de boom:

$$P(M = 1) = P(M = 4) = 5 \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \approx 0,0992$$

De overgebleven kansen kun je eenvoudiger met de combinatiemethode berekenen:

$$P(M = 2) = P(M = 3) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{10}{5}} \approx 0,3968$$

De verwachtingswaarde van M is: $0 \cdot 0,0040 + 1 \cdot 0,0992 + 2 \cdot 0,3968 + 3 \cdot 0,3968 + 4 \cdot 0,0992 + 5 \cdot 0,0040 = 2,5$

m	0	1	2	3	4	5
$P(M = m)$	0,0040	0,0992	0,3968	0,3968	0,0992	0,0040

Het te verwachte aantal mannen in groep A is 2,5.

b $P(M \leq 3) = 1 - P(M = 4) - P(M = 5) = 1 - 0,0992 - 0,0040 = 0,8968 \approx 90\%$

5 a Uit het verhaal blijkt dat de gebeurtenissen 'beschikking over goed drinkwater' en 'het hebben van de darmparasiet' afhankelijk van elkaar kunnen zijn.

Je checkt de samenhang tussen twee toevalsvariabelen in deze opgave: D stelt de kwaliteit van het drinkwater voor en P stelt het wel of niet hebben van een darmparasiet voor.

Je kunt van deze situatie een venndiagram maken, maar eigenlijk is een kruistabel hier meer op z'n plaats. Met de gekregen gegevens kun je deze voor een deel direct invullen met percentages:

$D \setminus P$	parasiet	geen parasiet	
goed			60
slecht			
	8		100

Omdat 1 op de 4 mensen met een darmparasiet goed drinkwater heeft, weten we dat de kolom parasiet opgevuld wordt met een 2 ($\frac{1}{4} \cdot 8$) en een 6 ($8 - 2 = 6$).

De rest kun je afleiden doordat de som van de twee getallen in iedere rij en kolom gelijk moet zijn aan het totaal van die rij of kolom:

$D \setminus P$	parasiet	geen parasiet	
goed	2	58	60
slecht	6	34	40
	8	92	100

Je ziet nu meteen dat de gevraagde kans gelijk is aan 2%.

Ook zie je direct het antwoord op b en kun je de kansen uit d hier makkelijk mee bepalen...

- b** Bekijk weer de kruistabel uit de uitwerking bij a:

$D \setminus P$	parasiet	geen parasiet	
goed	2	58	60
slecht	6	34	40
	8	92	100

Je ziet dan direct dat de gevraagde kans 58% is.

- c** Gebeurtenissen 'goed drinkwater' en 'geen darmparasiet' sluiten elkaar niet wederzijds uit:

$$\begin{aligned} P(\text{willekeurige bewoner heeft goed drinkwater of niet die darmparasiet}) &= \\ P(\text{willekeurige bewoner heeft goed drinkwater}) + P(\text{niet die darmparasiet}) - \\ P(\text{willekeurige bewoner heeft goed drinkwater of niet die darmparasiet}) &= \\ 60 + 92 - 58 &= 94\% \end{aligned}$$

Of, als je dat zo niet ziet, kan in dit geval een venndiagram verhelderend werken.

Ovaal voor 'goed drinkwater' en voor 'wel een darmparasiet' die elkaar snijden: het gemeenschappelijke gebied bevat 2% en dus bevat de rest van 'goed drinkwater' $60 - 2 = 58\%$ en de rest van 'wel een darmparasiet' $8 - 2 = 6\%$. Het buitengebied bevat dan $100 - 58 - 6 - 2 = 34\%$.

Je kunt dan bedenken dat de gevraagde kans gelijk is aan $58 + 2 + 34 = 94\%$ of je bedenkt dat de gevraagde kans complementair is aan de kans dat een willekeurige bewoner slecht drinkwater heeft en een parasiet:

$$\begin{aligned} P(\text{willekeurige bewoner heeft goed drinkwater of niet die darmparasiet}) &= \\ 100 - P(\text{willekeurige bewoner heeft slecht drinkwater en een parasiet}) &= \\ 100 - 6 &= 94\% \end{aligned}$$

- d** (Bekijk eventueel de kruistabel uit de uitwerking van a.)

Beide gevraagde kansen zijn voorwaardelijke kansen.

$P(\text{bewoner met goed drinkwater heeft die parasiet}) =$

$$P(\text{heeft parasiet} | \text{heeft goed drinkwater}) = \frac{P(\text{heeft parasiet en heeft goed drinkwater})}{P(\text{heeft goed drinkwater})} =$$

$$\frac{\frac{2}{100}}{\frac{60}{100}} \approx 0,033 = 3,3\%$$

$P(\text{bewoner zonder goed drinkwater heeft die parasiet}) =$

$$P(\text{heeft parasiet} | \text{heeft slecht drinkwater}) = \frac{P(\text{heeft parasiet en heeft slecht drinkwater})}{P(\text{heeft slecht drinkwater})} =$$

$$\frac{\frac{6}{100}}{\frac{40}{100}} = 0,15 = 15\%$$

- e** Als ze onafhankelijk van elkaar zijn, moet bijvoorbeeld gelden dat:

$$\begin{aligned} P(\text{willekeurige bewoner heeft goed drinkwater en darmparasiet}) &= \\ P(\text{heeft goed drinkwater}) \cdot P(\text{heeft parasiet}) \end{aligned}$$

Bekijk eventueel weer de kruistabel uit de uitwerking van a:

$P(\text{willekeurige bewoner heeft goed drinkwater en darmparasiet}) = 2\%$

$$P(\text{heeft goed drinkwater}) \cdot P(\text{heeft parasiet}) = \frac{60}{100} \cdot \frac{8}{100} = 0,048 = 4,8\%$$

2 en 4,8 zijn niet gelijk en dus zijn K en P afhankelijk van elkaar.

- 6 a** Betrouwbaarheid van ieder onderdeel is $\frac{90}{100}$.

Betrouwbaarheid van de hele keten is: $\left(\frac{90}{100}\right)^5 \approx 0,590 \approx 60\%$

- b** Dit systeem valt alleen uit als beide ketens uitvallen.

De kans dat een keten uitvalt is $(100 - 60) = 40\%$.

De kans dat beide ketens uitvallen is $\frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} = 0,16 = 16\%$.

De betrouwbaarheid van het systeem is daarom $(100 - 16) = 84\%$.

Of:

Het systeem is betrouwbaar kun je definiëren als:

$P(\text{keten 1 werkt en keten 2 werkt}) + P(\text{keten 1 werkt en keten 2 niet}) +$

$$P(\text{keten 1 werkt niet en keten 2 wel}) = \frac{60}{100} \cdot \frac{60}{100} + 2 \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{40}{100} = 0,84 = 84\%$$

- c** Betrouwbaarheid beide onderdelen A:

Dit deelsysteem valt alleen uit als ze het beide niet doen; de kans daarop is voor beide 10% en de kans dat het hele deelsysteem A uitvalt, is daarom $\left(\frac{10}{100}\right)^2$.

En daarmee geldt dat de betrouwbaarheid van deelsysteem A gelijk is aan:

$$1 - \left(\frac{10}{100}\right)^2 = \frac{99}{100}$$

Totale betrouwbaarheid is: $\left(\frac{99}{100}\right)^5 \approx 95\%$

- 7** Tip: maak de tabel af door de rijtotalen en de kolomtotalen te berekenen.

Gevraagde kans: $P(\text{ouders rechts} | \text{meisje links}) \cdot P(\text{ouders rechts} | \text{jongen links}) =$

$$\frac{\frac{72}{240}}{\frac{104}{240}} \cdot \frac{\frac{96}{240}}{\frac{136}{240}} \approx 0,4887 \approx 49\%$$

- 8 a** Deze situatie gaat over twee gebeurtenissen, 'oefenen' en 'voldoende' die, zo te zien, afhankelijk zijn van elkaar.

Daarom kan een venndiagram (of een kruistabel!) helpen. In het venndiagram zet je de twee overlappende ovalen 'oefenen' en 'voldoende'. In totaal bevat ovaal 'oefenen' 35% van de studenten, maar 80% daarvan bevindt zich in het overlapdeel van studenten die zowel geoefend hebben als een voldoende kregen: dat is $0,8 \cdot 0,35 = 0,28 = 28\%$.

De rest van ovaal 'voldoende' bevat op zijn beurt $55 - 28 = 27\%$ van de studenten.

Je moet nu niet de 27% 'ongeoefend en voldoende' en de 28% 'geoefend en voldoende' met elkaar vergelijken, maar je moet de voorwaardelijke kansen $P(\text{voldoende} | \text{ongeoefend})$ en $P(\text{voldoende} | \text{geoefend})$ met elkaar vergelijken.

$$P(\text{voldoende} | \text{ongeoefend}) = \frac{0,27}{1 - 0,35} = 0,415 = 41,5\%$$

$$P(\text{voldoende} | \text{geoefend}) = \frac{0,28}{0,35} = 0,8 = 80\%$$

Oefenen voor statistiek heeft dus zeker zin.

- b** Gevraagd wordt de voorwaardelijke kans $P(\text{geoefend} | \text{voldoende})$.

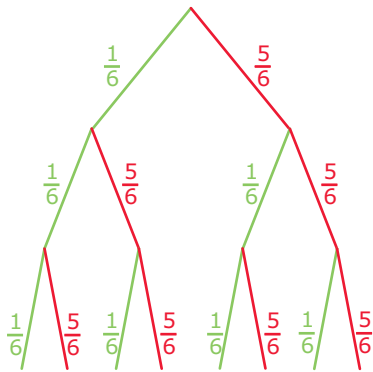
$$P(\text{geoefend} | \text{voldoende}) = \frac{P(\text{geoefend en voldoende})}{P(\text{voldoende})}$$

$P(\text{geoefend en voldoende}) = 0,28$ (zie uitwerking bij a)

$P(\text{voldoende}) = 0,55$

Gevraagde kans is dus: $\frac{0,28}{0,55} \approx 0,509 = 50,9\%$

9 a Maak een kansboom.



w	-1	0	1	9
$P(W = w)$	$\frac{125}{316}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

b Ongeveer $-0,56$ per ingelegde euro.

c Meteen doen, het levert veel geld op!

10 a 0,30%

b 15,43%

c 0,7969

d 0,2031

e Bij elk levensjaar na zijn 50ste bereken je de kans dat hij dat jaar overleeft. Daarna elke kans met 1 jaar vermenigvuldigen en alles optellen geeft een verwachting dat die man nog ongeveer 32,4 jaar te leven heeft.

f De verzekeringsmaatschappij krijgt rente over je geld.

g Is afhankelijk van de rentestand, of je man of vrouw bent.

11 a $12 \neq 479001600$

b G is het aantal goed neergelegde kaartjes.

$P(G = 2) = 0$, $P(G = 3) = \frac{1}{6}$, $P(G = 0) = \frac{1}{3}$ en $P(G = 1) = \frac{1}{2}$.

c $\frac{21}{1296}$

12 a $-0,25$

b 0,86

c $p_A = 1$ en de rest 0; $p_B = 1$ en de rest 0; $p_D = 1$ en de rest 0.

d De verwachte score bij mogelijkheid II is 0 en die bij mogelijkheid III is $\frac{1}{6}$.

e $a < 0,61$